SUMA 41
noviembre 2002, pp. 19-28

Aplicación de un modelo de decisión para clasificar un conjunto de posibles causas de mal comportamiento de los estudiantes en el aula

Francisco Chiclana Parrilla

ARTÍCULOS

El objetivo de este trabajo es el de presentar una aplicación, llevada a cabo en un centro de enseñanza secundaria, de un modelo de decisión diseñado para situaciones de toma de decisiones con múltiples expertos (TDME) con información heterogénea. En concreto, dicho modelo fue utilizado para clasificar, de mayor a menor grado de influencia, un conjunto de posibles causas de mal comportamiento de los estudiantes en el aula, de acuerdo con las opiniones de un grupo de profesores de dicho centro.

SE PODRÍA AFIRMAR que el buen funcionamiento de un centro de enseñanza depende en gran medida del diseño de los mecanismos y vías de participación que se les ofrecen a los miembros de la comunidad educativa por parte de éste. Naturalmente, poco se puede decir de las vías de participación, puesto que éstas vienen reguladas por la legislación vigente (LODE, LOGSE, LOPEG y Reales Decretos 82/1996 y 83/1996 básicamente); sin embargo, es responsabilidad de los centros educativos el diseñar los mecanismos adecuados para que la participación de todos sea efectiva y democrática. Y esto es así, porque de lo contrario las decisiones que pudieran tomarse corren el riesgo de no ser asumidas y por consiguiente de ser inoperantes.

El que la mayoría de las personas todavía denominen las matemáticas como ciencias exactas y las sigan asociando con el rigor y la eficacia, puede ser aprovechado para conseguir una aceptación, por parte de los diferentes sectores de la comunidad educativa, en la introducción de modelos matemáticos en los procesos de toma de decisiones, en el sentido de ser considerado como un mecanismo de participación efectiva y democrática. De hecho, el uso de modelos de decisión para ayudar a tomar una decisión final es una costumbre cada vez más extendida en el mundo empresarial. Estos modelos, comúnmente llamados *sistemas soportes* de ayuda a la toma de decisiones, mejoran notablemente el rendimiento de la gestión empresarial (Vincke, 1992).

El objetivo de este trabajo es el de presentar una aplicación de un modelo de decisión diseñado para ser aplicado a situaciones de toma de decisiones en las que intervengan un grupo de personas diferentes, que llamaremos de toma de decisiones con múltiples expertos (TDME). En concreto, dicho modelo fue utilizado para clasificar, de mayor a menor grado de influencia, un conjunto de posibles causas de mal comportamiento de los estudiantes en el aula, para lo que se solicitó a un grupo de profesores, pertenecientes a diferentes departamentos de un instituto de educación secundaria (IES), sus opiniones al respecto. Ni que decir tiene que la información obtenida tras esta aplicación es esencial para cualquier centro de enseñanza que se plantee poner en marcha soluciones para mejorar tal comportamiento y por consiguiente el clima de convivencia dentro de dicho centro.

Modelo de decisión con múltiples expertos e información heterogénea

En un proceso de TDME se distinguen claramente dos etapas (figura 1): (1) la etapa de identificación, que consiste en la selección de alternativas y de criterios apropiados, y (2) la etapa de elaboración o proceso de resolución, que consiste en la selección tanto de un método adecuado de tratamiento, agregación y explotación de la información proporcionada como de un método de mayoría ponderada. La primera etapa no es abordada pues, como bien apuntan Arrow y Raynaud (1989), ésta suele ser una operación aproximativa, en el sentido de que los conjuntos de alternativas y criterios son diferentes para cada problema de TDME, y lo más frecuente es que sus límites no estén claramente fijados. La metodología en este artículo consiste pues en suponer dichos conjuntos conocidos, discretos y finitos. Por consiguiente, en un problema de TDME se dispone de un conjunto de expertos, $E = \{e_1,\ldots, e_m\}$, $(m \geq 2)$, cada uno de los cuales proporciona sus preferencias sobre un conjunto de opciones o alternativas, $X = \{x_1,\ldots, x_n\}$, $(n \geq 2)$, con el objetivo final de obtener una solución, que estará compuesta de una o un conjunto de alternativas, que sea(n) la(s) de mayor aceptación por parte de todo el grupo de expertos.

...la mayoría de los modelos de selección para problemas de TDME propuestos hasta la fecha adoptan la suposición de homogeneidad en la información proporcionada por los expertos...

En cuanto a la expresión de opiniones, señalar que la mayoría de los modelos de selección para problemas de TDME propuestos hasta la fecha adoptan la suposición de homogeneidad en la información proporcionada por los expertos, es decir asumen que los expertos presentan sus preferencias utilizando todos una misma estructura de representación de la información. En este sentido, podemos citar problemas de TDME en los que la información es presentada en forma de órdenes de preferencia (Tanino, 1984), mediante funciones (o valores) de utilidad (Seo y Sakawa, 1985), a través de relaciones de preferencia multiplicativas (Saaty, 1980) o difusas (Tanino 1988). Sin embargo, ésta no es una suposición realista puesto que cada experto tiene sus propias ideas, actitudes, motivaciones y personalidad, por lo que es natural pensar que expertos diferentes proporcionen sus preferencias de forma distinta. También es posible que se presenten situaciones de toma de decisión en las que los expertos no son capaces de expresar sus opiniones usando todos la misma estructura de representación que los demás o bien prefieren estructuras alternativas. Todo esto, nos convence de la necesidad de asumir que la información que se maneja en las situaciones de TDME sea de naturaleza diversa o heterogénea, por lo que supondremos

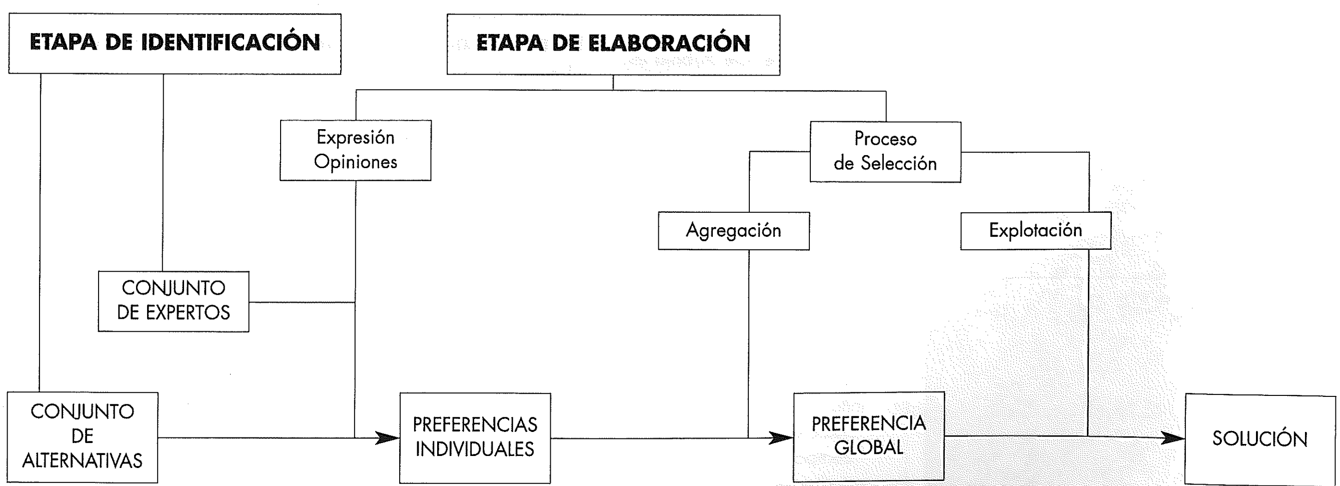

Figura 1. Esquema del Proceso de TDME

que cada experto puede expresar sus preferencias mediante una cualesquiera de las estructuras de representación anteriormente citadas: *órdenes de preferencia, valores de utilidad, relaciones de preferencia multiplicativas* y *relaciones de preferencia difusas*.

Esta suposición conlleva trabajar en un marco general de heterogeneidad en la representación de las preferencias, abarcando y extendiendo los habituales modelos desarrollados bajo la suposición de homogeneidad. Además, plantea obviamente como primera etapa de nuestro proceso de resolución el estudio de la relación existente entre las diferentes estructuras de representación de preferencias, para de esta forma poder obtener una representación uniforme que las englobe. De esta forma, la etapa de elaboración del proceso de decisión que proponemos para resolver un problema de TDME con información heterogénea sigue el siguiente esquema (figura 2).

1. *Representación uniforme de la información*. La información heterogénea del problema se transforma, mediante la aplicación de diversas funciones de transformación, en información homogénea.
2. *Aplicación de un proceso de selección*, mediante el cual se obtiene el conjunto de alternativa(s) solución a partir de las preferencias individuales de cada uno de los expertos. Los procesos de selección clásicos de TDME a su vez se aplican generalmente en dos fases (Fodor y Roubens, 1994):

   2.1. *Fase de agregación* con la que se transforma un conjunto de elementos en un único elemento representativo del mismo (Dubois y Koning, 1991). En los problemas de TDME la agregación se realiza sobre las preferencias individuales que los expertos proporcionan sobre el conjunto de alternativas, de forma que la información obtenida tras el proceso de agregación, llamada preferencia global o de conjunto, sea resumen y reflejo de las propiedades contenidas en ellas.

   2.2. *Fase de explotación* o proceso por el que se transforma la información global sobre las alternativas en una ordenación global de las mismas. Para ello se utiliza un grado de selección de alternativas o función que indica el grado de cumplimiento de una propiedad que caracteriza a una alternativa (bien respecto a las opiniones de un individuo o de un grupo). Las alternativas que cumplen esa propiedad con mayor intensidad son las que constituyen el conjunto de alternativas solución (Herrera, Herrera-Viedma y Verdegay, 1995).

...uno de los elementos básicos subyacentes en los procesos de TDME es el concepto de mayoría...

Por otro lado, uno de los elementos básicos subyacentes en los procesos de TDME es el concepto de mayoría, pues una solución ha de ser la(s) opción(es) de mayor aceptación por parte del grupo, en el sentido de que la mayoría de sus miembros han de aceptarla. De todos es sabido que la concepción que tenemos de tal concepto de mayoría es variable según las situaciones en la que nos encontremos. En muchos casos, mayoría significa la mitad más uno; sin

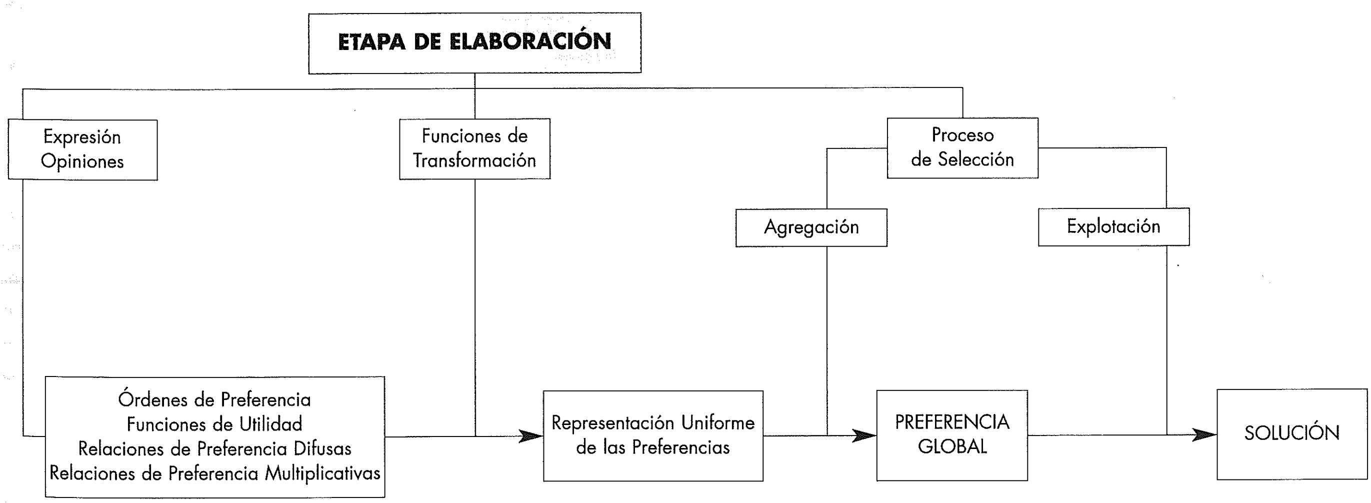

Figura 2. Etapa de Elaboración para TDME con Información Heterogénea

embargo, en situaciones de gran trascendencia dicha mayoría requiere un aumento significativo de tal porcentaje. Por ejemplo, en la evaluación final de curso en cualquier IES, la decisión que el equipo educativo ha de tomar para que un estudiante promocione de curso requiere del consenso o unanimidad, es decir todos los profesores del equipo educativo han de estar de acuerdo con tal decisión. No obstante, «en el supuesto de que este consenso no fuera posible, esta decisión será adoptada por mayoría de dos tercios del mencionado equipo» (instrucciones de 21 de abril de 1998, Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía). Nosotros, en la aplicación del anterior modelo de decisión proponemos implementar un concepto de mayoría flexible y cercana a la que de ella tenemos las personas, la cual suele ser vaga o difusa (Kacprzyk, 1986), en el sentido de tener distinto significado en diferentes situaciones, tanto en la fase de agregación como en la fase de explotación de la información, por lo que el proceso de selección que proponemos aplicar en los problemas de TDME e información heterogénea es el dado en la figura 3.

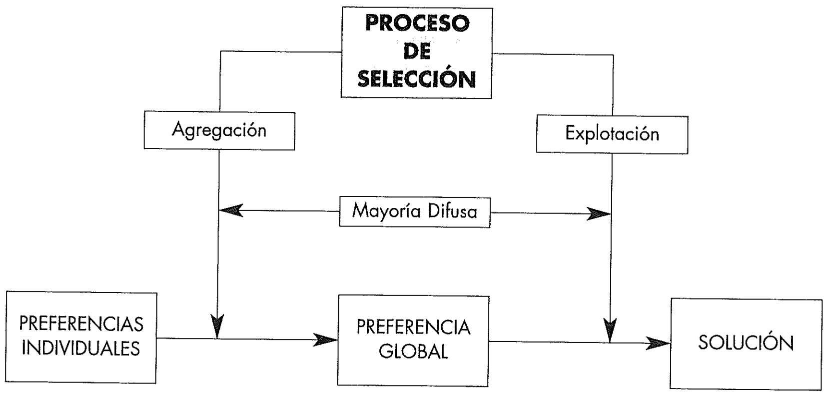

Figura 3. Proceso de Selección para TDME con Información Heterogénea

Causas de mal comportamiento en el aula. Etapa de identificación

La extensión de la obligatoriedad de la enseñanza hasta los 16 años en nuestro país constituye una de las medidas más acertadas de la LOGSE, en primer lugar porque es una medida de igualdad social, pues favorece a aquellos estudiantes que anteriormente abandonaban los estudios al finalizar la antigua EGB, y que en su mayoría provenían de las clases sociales económicamente más desfavorecidas, pero sobre todo porque en el largo plazo nuestra sociedad también saldrá beneficiada ya que, sin la menor duda, el nivel cultural de nuestro país se verá incrementado. Sin embargo, una de las consecuencias que conlleva esta medida, y que se ha convertido en uno de los principales problemas hoy en día en los centros educativos no universitarios, y en mayor medida en los IES, es el del mal comportamiento de los estudiantes en el aula. Encontrar las causas de este mal comportamiento y la influencia que tienen sobre éste, así como las posibles respuestas positivas a las mismas, tiene gran interés no sólo para el colectivo de profesores y profesoras sino también para los propios estudiantes, los padres y madres de éstos, los Departamentos de Educación, etc. Nuestro objetivo en este artículo no es el de proporcionar la solución a este problema; nuestro objetivo es el de, una vez diagnosticado un conjunto de posibles causas del mal comportamiento, el clasificarlas de mayor a menor influencia, para de esta forma priorizar las respuestas que el centro educativo debe poner en marcha para tratar de solucionar el problema.

Cohen, Manion y Morrison en (1996) citan un estudio en el que una muestra de profesores de diferentes escuelas secundarias inglesas fueron preguntados por sus opiniones respecto a las causas que influyen directamente sobre el mal comportamiento de los estudiantes en el colegio. Entre estas causas fueron citadas:

C_1 Problemas en el hogar.

C_2 Falta de interés en la materia o desinterés en el colegio.

C_3 Inestabilidad psicológica o emocional del estudiante.

C_4 Ausencia autoestima.

C_5 Antipatía hacia el profesor.

C_6 Consumo de drogas.

Tomando estas seis causas como el conjunto de alternativas de nuestro modelo de decisión, procedimos a presentárselas a un grupo de ocho profesores de distintas especialidades del IES Mediterráneo de Estepona (Málaga), nuestro conjunto de expertos. A este conjunto de profesores se les solicitó que aportaran sus opiniones acerca de la influencia directa que estas causas tenían en el mal comportamiento de sus estudiantes en el aula, para poder obtener una ordenación global de las anteriores causas de mayor a menor influencia en tal comportamiento, con el objetivo de poder utilizar esta información como base para un estudio de las posibles medidas a introducir en el centro y mejorar el clima de convivencia, que con tanta rapidez está siendo deteriorado en los últimos años. Se prepararon para este propósito cuatro cuestionarios, uno para cada estructura diferente de preferencias. El resto del artículo se dedica a exponer la etapa de elaboración de nuestro modelo de decisión, mediante la aplicación práctica del mismo al problema planteado.

...con el objetivo de poder utilizar esta información como base para un estudio de las posibles medidas a introducir en el centro y mejorar el clima de convivencia, que con tanta rapidez está siendo deteriorado en los últimos años.

Opiniones de los profesores. Representación de preferencias

Los ocho profesores se dividieron en cuatro grupos de dos, de tal forma que cada grupo presentaría sus opiniones mediante una de las cuatro diferentes estructuras de representación de preferencias. El que trabajemos con estas estructuras de representación se debe al hecho de ser las más usadas en los trabajos de toma de decisión publicados en los últimos años en revistas internacionales como *Fuzzy Sets and System*, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, *European Journal of Operational Research*, etc.

Órdenes de preferencia

En este caso, un experto proporciona sus preferencias sobre un conjunto de alternativas mediante la ordenación de las mismas, de acuerdo con su punto de vista, de mejor a peor. En nuestro caso, a dos de los profesores se les presentó la anterior lista de seis posibles causas de mal comportamiento junto con el escrito siguiente: «Usando tu propia experiencia en la práctica de la enseñanza, expresa tu opinión, asociando un número de 1 (la más influyente) a 6 (la menos influyente) a cada una de las posibles causas que influyen en el mal comportamiento de los estudiantes en el aula». Las respuestas que dieron estos dos profesores, e_1 y e_2 fueron:

$$e_1: O^1 = \{2, 1, 3, 6, 4, 5\}$$

$$e_2: O^2 = \{1, 3, 4, 2, 6, 5\}$$

Según esto, las ordenaciones de las causas para cada uno de los dos profesores son $\{C_2, C_1, C_3, C_5, C_6, C_4\}$ y $\{C_1, C_4, C_2, C_3, C_6, C_5\}$, lo que significa que las que ejercen mayor influencia en el comportamiento incorrecto de los estudiantes en el aula son la falta de interés en la materia o desinterés en el colegio (C_2) para el primer profesor y los problemas en el hogar (C_1) para el segundo profesor, y las de menor influencia la ausencia de autoestima (C_4) y la antipatía hacia el profesor (C_5), respectivamente.

Valores de utilidad

Un experto proporciona sus preferencias a través de un conjunto de valores de utilidad cuando asocia a cada alternativa un valor entre 0 y 1 que representa el grado de cumplimiento de su punto de vista por parte de dicha alternativa, de tal forma que a mayor valor asociado mejor satisface dicha alternativa el objetivo del experto. En nuestro caso, se les presentó el siguiente escrito a otros dos profesores, e_3 y e_4: «Usando tu propia experiencia en la práctica de la enseñanza, expresa tu opinión, asociando un número de 0 (influencia nula) a 10 (influencia absoluta o total) a cada una de las posibles causas que influyen en el mal comportamiento de los estudiantes en el aula». Los valores proporcionados fueron, una vez divididos por 10:

$$e_3: U^3 = \{0{,}3;\ 0{,}2;\ 0{,}8;\ 0{,}6;\ 0{,}4;\ 0{,}1\}$$

$$e_4: U^4 = \{0{,}3;\ 0{,}9;\ 0{,}4;\ 0{,}2;\ 0{,}7;\ 0{,}5\}$$

Relaciones de preferencia multiplicativas

En este caso, junto con el siguiente, las preferencias se obtienen mediante la comparación de las alternativas dos a dos, de tal forma que a cada par de alternativas (x_i, x_j) se le asocia un valor a_{ij} con el significado siguiente: «La alternativa x_i es a_{ij} veces preferida a la alternativa x_j». Los valores así proporcionados se recogen en una matriz o relación de preferencia, $A = (a_{ij})$, que asumimos verifica la siguiente condición de reciprocidad multiplicativa: $a_{ij} \cdot a_{ji} = 1$; $a_{ij} > 0\ \forall\ i, j$. Además, es habitual tomar como rango para los elementos de la matriz A el intervalo cerrado [1/9, 9], y en particular, siguiendo las indicaciones de Saaty (1980, 1994), la siguiente escala de valores:

- $a_{ij} = 1$ las alternativas x_i y x_j son igual de importantes (II).
- $a_{ij} = 3$ la alternativa x_i es más importante que x_j (MI).
- $a_{ij} = 5$ la alternativa x_i es bastante más importante que x_j (BMI).

$a_{ij} = 7$ la alternativa x_i es muchísimo más importante que x_j (MMI).

$a_{ij} = 9$ la alternativa x_i es absolutamente más importante que x_j (AMI).

Valores int. Por ejemplo, entre II y MI, podríamos localizar AMI, algo más importante, en cuyo caso asociaríamos el valor $a_{ij} = 2$.

Utilizando la anterior escala se le presentó un cuestionario a dos profesores, para que opinaran al respecto sobre la razón de intensidad de la influencia en el mal comportamiento de una causa sobre otra. Las relaciones de preferencia multiplicativas que proporcionaron fueron:

$$e_5 : A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1/3 & 1/4 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 1 & 7 & 6 & 9 \\ 1/4 & 4 & 1/7 & 1 & 1/2 & 3 \\ 1/3 & 1/4 & 1/6 & 2 & 1 & 4 \\ 1/5 & 1/6 & 1/9 & 1/3 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e_6 : A^6 = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/4 & 1/2 & 3 & 1/6 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 6 & 1/3 \\ 4 & 1/2 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1/4 & 1/3 & 1 & 3 & 6 \\ 1/3 & 1/6 & 1/5 & 1/3 & 1 & 8 \\ 6 & 3 & 1/4 & 1/6 & 1/8 & 1 \end{pmatrix}$$

Relaciones de preferencia difusas

En este caso a cada par de alternativas (x_i, x_j) se le asocia un valor $p_{ij} \in [0, 1]$ que representa el grado de preferencia de la alternativa x_i sobre la alternativa x_j. Los valores así proporcionados se recogen en una matriz o relación de preferencia, $P = (p_{ij})$, que asumimos verifica la siguiente condición de reciprocidad aditiva: $p_{ij} + p_{ji} = 1$, $\forall\ i, j$. Usando la terminología de conjuntos difusos P es un subconjunto difuso del conjunto $X \times X$, por lo que a una relación de este tipo se le denomina relación de preferencia difusa (Tanino, 1988).

Como en el caso anterior, se propuso un cuestionario a los dos profesores restantes del grupo, utilizando en este caso los valores (0,5; 0,6; 0,75; 0,9; 1) para (II, MI, BMI, MMI, AMI); así como la posibilidad de proporcionar juicios de compromiso entre estos pares de valores. Las relaciones de preferencia difusas proporcionadas fueron:

$$e_7 : P^7 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}55 & 0{,}45 & 0{,}25 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}45 & 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}85 & 0{,}4 & 0{,}8 \\ 0{,}55 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}65 & 0{,}7 & 0{,}6 \\ 0{,}75 & 0{,}15 & 0{,}35 & 0{,}5 & 0{,}95 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}05 & 0{,}5 & 0{,}85 \\ 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}15 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$e_8 : P^8 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}75 & 0{,}95 & 0{,}6 & 0{,}85 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}55 & 0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}65 \\ 0{,}25 & 0{,}45 & 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}45 \\ 0{,}05 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}85 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}15 & 0{,}5 & 0{,}75 \\ 0{,}15 & 0{,}35 & 0{,}55 & 0{,}6 & 0{,}25 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

De las cuatro estructuras de representación de preferencia anteriores, las relaciones de preferencia difusas constituyen la estructura más usada y estudiada en la literatura para modelar las opiniones de los expertos sobre un conjunto de alternativas en los problemas de toma de decisión...

Proceso de resolución

El proceso de resolución del modelo de decisión que aplicamos consta de una primera fase consistente en la obtención de una representación uniforme de las preferencias y una segunda fase, o proceso de selección, con la que obtener la solución final del problema de TDME.

Representación Uniforme de las preferencias

De las cuatro estructuras de representación de preferencia anteriores, las relaciones de preferencia difusas constituyen la estructura más usada y estudiada en la literatura para modelar las opiniones de los expertos sobre un conjunto de alternativas en los problemas de toma de decisión, pero sobre todo para agregar las preferencias de éstos (Kitanik, 1993). Necesitamos, por tanto, un mecanismo para unificar las cuatro estructuras de representación de preferencias. Este mecanismo de transformación permitirá obtener una relación de preferencia difusa individual para cada uno de los expertos. En (Chiclana, 2000) hemos estudiado las funciones de transformación de órdenes de preferencia, funciones de utilidad y relaciones de preferencia multiplicativas en relaciones de preferencia difusas. Este estudio puede resumirse en los tres siguientes resultados:

Órdenes de preferencia y Relaciones de preferencia difusas

«Siendo $O^k = \{o^k(1), \ldots, o^k(n)\}$ un orden de preferencia sobre un conjunto de alternativas, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, el grado de preferencia de la alternativa x_i sobre la alternativa x_j es

$$p_{ij}^k = \frac{1}{2}\left[1 + F\left(o^k(j) - o^k(i)\right) - F\left(o^k(i) - o^k(j)\right)\right]$$

con F una función creciente».

Aplicando la función anterior con

$$F\left(o^k(j)-o^k(i)\right)=\frac{1}{2}\frac{o^k(j)-o^k(i)}{n-1}$$

a los órdenes de preferencia de los profesores e_1 y e_2, obtenemos las siguientes relaciones de preferencia difusas:

$$P^1=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,6 & 0,9 & 0,7 & 0,8 \\ 0,6 & 0,5 & 0,7 & 1 & 0,8 & 0,9 \\ 0,4 & 0,3 & 0,5 & 0,8 & 0,6 & 0,7 \\ 0,1 & 0 & 0,2 & 0,5 & 0,3 & 0,4 \\ 0,3 & 0,2 & 0,4 & 0,7 & 0,5 & 0,6 \\ 0,2 & 0,1 & 0,3 & 0,6 & 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$P^2=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,7 & 0,8 & 0,6 & 1 & 0,9 \\ 0,3 & 0,5 & 0,6 & 0,4 & 0,8 & 0,7 \\ 0,2 & 0,4 & 0,5 & 0,3 & 0,7 & 0,6 \\ 0,4 & 0,6 & 0,7 & 0,5 & 0,9 & 0,8 \\ 0 & 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,1 & 0,3 & 0,4 & 0,2 & 0,6 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Valores de utilidad y Relaciones de preferencia difusas

«Para cada conjunto de valores de utilidad, $U^k=(u_1^k,\ldots,u_n^k)$, sobre un conjunto de alternativas, $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$, dados sobre la base de una escala positiva de razón, el grado de preferencia de la alternativa x_i sobre x_j es:

$$p_{ij}^k=\begin{cases} \dfrac{s(u_i^k)}{s(u_i^k)+s(u_j^k)} & si \quad (u_i^k,u_j^k)\neq(0,0) \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad (u_i^k,u_j^k)=(0,0) \end{cases}$$

donde s: [0, 1] $\rightarrow R^+$ es una función creciente y continua, verificando $s(0) = 0$».

Las relaciones de preferencia difusas que obtenemos aplicando la función anterior con $s(u_i^k)=(u_i^k)^2$ a los conjuntos de valores de utilidad de los profesores e_3 y e_4 son:

$$P^3=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,69 & 0,12 & 0,2 & 0,36 & 0,9 \\ 0,31 & 0,5 & 0,06 & 0,1 & 0,2 & 0,8 \\ 0,88 & 0,94 & 0,5 & 0,64 & 0,8 & 0,98 \\ 0,8 & 0,9 & 0,36 & 0,5 & 0,69 & 0,97 \\ 0,64 & 0,8 & 0,2 & 0,31 & 0,5 & 0,94 \\ 0,1 & 0,2 & 0,02 & 0,03 & 0,06 & 0,5 \end{pmatrix}$$

...las manifestaciones más naturales de tal mayoría difusa son los llamados cuantificadores lingüísticos difusos como por ejemplo «bastantes», «casi todos», «muchos más que la mitad», etc.

$$P^4=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,36 & 0,69 & 0,16 & 0,26 \\ 0,9 & 0,5 & 0,84 & 0,95 & 0,62 & 0,76 \\ 0,64 & 0,16 & 0,5 & 0,8 & 0,25 & 0,39 \\ 0,31 & 0,05 & 0,2 & 0,5 & 0,08 & 0,14 \\ 0,84 & 0,38 & 0,75 & 0,92 & 0,5 & 0,66 \\ 0,74 & 0,24 & 0,61 & 0,86 & 0,34 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Relaciones de preferencia multiplicativas y Relaciones de preferencia difusas

«Sea $A^k=(a_{ij}^k)$ una relación de preferencia multiplicativa sobre un conjunto de alternativas, $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$. La relación de preferencia difusa, $P^k=(p_{ij}^k)$, asociada con A^k se obtiene mediante la aplicación de la transformación siguiente

$$p_{ij}^k=g\left(a_{ij}^k\right)=\frac{1}{2}\left(1+\log_9 a_{ij}^k\right)».$$

Las relaciones de preferencia difusas asociadas a las relaciones de preferencia multiplicativas de los profesores e_5 y e_6 son:

$$P^5=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,34 & 0,25 & 0,82 & 0,75 & 0,87 \\ 0,66 & 0,5 & 0,25 & 0,18 & 0,82 & 0,91 \\ 0,75 & 0,75 & 0,5 & 0,94 & 0,91 & 1 \\ 0,18 & 0,82 & 0,06 & 0,5 & 0,34 & 0,75 \\ 0,25 & 0,18 & 0,09 & 0,66 & 0,5 & 0,82 \\ 0,13 & 0,09 & 0 & 0,25 & 0,18 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$P^6=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,13 & 0,18 & 0,34 & 0,75 & 0,09 \\ 0,87 & 0,5 & 0,66 & 0,82 & 0,91 & 0,25 \\ 0,82 & 0,34 & 0,5 & 0,75 & 0,87 & 0,82 \\ 0,66 & 0,18 & 0,25 & 0,5 & 0,75 & 0,91 \\ 0,25 & 0,09 & 0,13 & 0,25 & 0,5 & 0,97 \\ 0,91 & 0,75 & 0,18 & 0,09 & 0,03 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Proceso de selección. Mayoría difusa

Ya hemos mencionamos que el concepto de mayoría es un concepto variable, en el sentido de ser distinto para distintas situaciones, por lo que se hace necesaria la adopción de una concepción de mayoría más flexible y cercana a la que de ella tenemos las personas, es decir, un concepto de mayoría que se ha dado en llamar mayoría difusa.

Es fácil ver que las manifestaciones más naturales de tal mayoría difusa son los llamados cuantificadores lingüísticos difusos como por ejemplo «bastantes», «casi todos», «muchos más que la mitad», etc. (Zadeh, 1983). Sin embargo, los métodos formales convencionales no son adecuados para representarlos, pues en éstos suelen considerarse tan sólo dos cuantificadores, que son «al menos uno» y «todos», por lo que en años recientes han sido propuestos cálculos de proposiciones cuantificadas lingüísticamente basados en lógica difusa (Yager, 1991). Estos cálculos han sido aplicados para introducir una mayoría difusa, representada por un cuantificador lingüístico difuso, en los modelos de toma de decisiones en grupo (Kacprzyk, Fedrizzi y Nurmi, 1992).

Zadeh distinguió entre dos tipos de cuantificadores lingüístico, *absolutos* y *proporcionales* o *relativos*. Los primeros se utilizan para representar cantidades que son absolutas en naturaleza tales como por ejemplo *aproximadamente 5*, *más de 5* o *menos de 5*, y están relacionados con el concepto de número de elementos. Los cuantificadores proporcionales se utilizan para representar expresiones lingüísticas, como por ejemplo, *al menos la mitad* o *la mayor parte*. Cualquier cuantificador del lenguaje natural puede ser representado como un cuantificador proporcional o, supuesto conocida la cantidad de elementos en consideración, como un cuantificador absoluto. Funcionalmente, un cuantificador lingüístico puede ser de tres tipos, *creciente*, *decreciente* o *unimodal*. En el caso de un cuantificador relativo creciente la función de pertenencia más simple que se emplea para representarlo es:

$$Q(r) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq r < a \\ \dfrac{r-a}{b-a} & si \quad a \leq r \leq b \\ 1 & si \quad b < r \leq 1 \end{cases}$$

En la siguiente figura se muestran tres ejemplos de cuantificadores lingüísticos relativos crecientes donde los parámetros (a, b) son (0; 0,5), (0,3; 0,8) y (0,5; 1) respectivamente.

Cualquier cuantificador del lenguaje natural puede ser representado como un cuantificador proporcional o, supuesto conocida la cantidad de elementos en consideración, como un cuantificador absoluto.

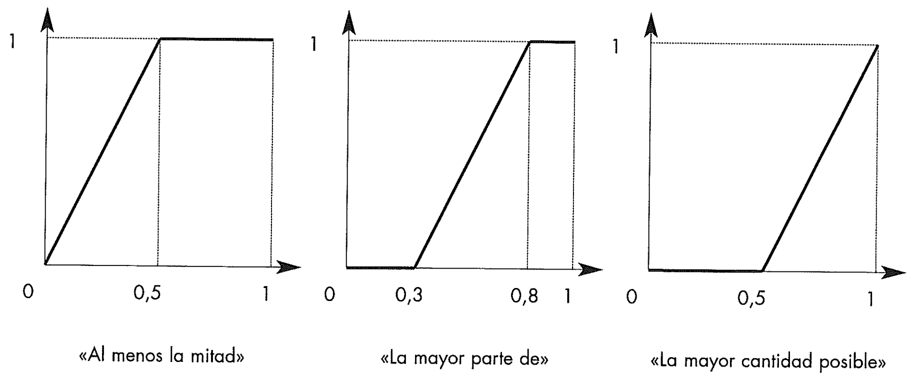

Figura 4. Cuantificadores lingüísticos relativos crecientes

En nuestro ejemplo, utilizando los cuantificadores lingüísticos difusos «la mayor parte de» y «la mayor cantidad posible», para implementar el concepto de mayoría difusa, tenemos respectivamente:

$$Q(r) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq r < 0,3 \\ 2r - 0,6 & si \quad 0,3 \leq r \leq 0,8 \\ 1 & si \quad 0,8 < r \leq 1 \end{cases} \quad y \quad Q(r) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq r < 0,5 \\ 2r - 1 & si \quad 0,5 \leq r \leq 1 \end{cases}$$

Agregación

En esta fase se obtiene una relación de preferencia difusa colectiva $P^c = (p_{ij}^c)$ mediante la agregación de todas las relaciones de preferencia difusas individuales $\{P^1, \ldots, P^m\}$, de tal forma que cada valor $p_{ij}^c \in [0, 1]$, $\forall\ i, j$, represente la preferencia de la alternativa x_i sobre la alternativa x_j para una mayoría de los expertos. Para ello, se define (Chiclana, 2000):

$$p_{ij}^c = \Phi_Q\left(p_{ij}^1, \ldots, p_{ij}^m\right)$$

siendo Φ_Q una función u operador, que llamamos de agregación, en cuya definición se implementa el concepto de mayoría difusa mediante el cuantificador lingüístico Q.

Según Bonissone y Decker (1986), existen tres clases básicas de operaciones de agregación: conjuntivas, disyuntivas y promedios. Para las dos primeras formas de agregación se utilizan t-normas y t-conormas respectivamente, mientras que para la tercera se utilizan los llamados operadores de promedio. Un ejemplo de estos últimos lo constituyen los operadores de promedio ordenados ponderados que se definen como combinaciones lineales convexas de cada uno de los elementos a agregar, los cuales previamente se ordenan de mayor a menor. Estos operadores, llamados operadores OWA (abreviaturas del inglés *ordered weighted averaging*) fueron propuestos por Yager (1988) y constituyen una transición continua entre el operador mínimo y máximo. Mediante la aplicación de este tipo de operadores, la expresión de p_{ij}^c se reduce a:

$$p_{ij}^c = \Phi_Q\left(p_{ij}^1, \ldots, p_{ij}^m\right) = \sum_{k=1}^{m} w_k \cdot q_{ij}^k$$

siendo $(q_{ij}^1, \ldots, q_{ij}^m)$ el conjunto de valores $(p_{ij}^1, \ldots, p_{ij}^m)$ ordenados de mayor a menor, y $(w_1, \ldots, w_n)$ un vector de parámetros o pesos verificando $w_i \in [0,1]$ y

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

El problema que presentan este tipo de operadores es el del cálculo de los parámetros de la citada combinación lineal convexa. Yager en (1994) proporcionó un procedimiento para el cálculo de estos parámetros haciendo uso del cuantificador lingüístico difuso que representa el concepto de mayoría difusa que se desea implementar en el proceso de selección de alternativas. En el caso de un cuantificador lingüístico relativo creciente Q, viene dado por la ecuación:

$$w_k = Q\left(\frac{k}{m}\right) - Q\left(\frac{k-1}{m}\right),\ k = 1,\ldots, m$$

En nuestro ejemplo, para agregar las ocho relaciones de preferencia difusas individuales, si utilizamos el cuantificador lingüístico difuso «la mayor parte de», obtenemos como vector de pesos (0; 0; 0,15; 0,25; 0,25; 0,25; 0,1; 0), y como relación de preferencia difusa colectiva:

$$P^c = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,44 & 0,37 & 0,56 & 0,65 & 0,64 \\ 0,47 & 0,5 & 0,58 & 0,65 & 0,62 & 0,75 \\ 0,54 & 0,36 & 0,5 & 0,71 & 0,68 & 0,64 \\ 0,33 & 0,23 & 0,26 & 0,5 & 0,6 & 0,6 \\ 0,3 & 0,3 & 0,27 & 0,29 & 0,5 & 0,75 \\ 0,24 & 0,22 & 0,29 & 0,31 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$$

donde el valor p_{26}^c = 0,75 indica que, para la mayor parte de estos ocho profesores, la causa C_2 ejerce una influencia muchísimo mayor en el comportamiento incorrecto de los estudiantes de lo que lo hace la causa C_6, mientras que el valor p_{31}^c = 0,54 indica que los grados de influencia de las causas C_3 y C_1 son similares para la mayor parte de los profesores, aunque ligeramente mayor el asociado a la causa C_3.

En la resolución de un problema de TDME con diferentes estructuras de representación de preferencias se ha de trabajar con información no homogénea...

Explotación. Grado de dominancia

El valor p_{ij}^c puede considerarse o interpretarse como un valor de dominancia de la alternativa x_i sobre la alternativa x_j para una mayoría de los expertos, en cuyo caso el valor $QGDD_i = \Phi_Q(p_{ij}^c; j=1,\ldots,n)$se interpretaría como el grado de dominancia que la alternativa $x_i$tiene sobre la «mayoría» del resto de alternativas para una «mayoría» de los expertos (Chiclana, 2000). En esta definición, el concepto de mayoría difusa que se implementa a través de Q no tiene porqué coincidir con el utilizado en la fase de agregación de preferencias. Por otro lado, la definición de este grado de dominancia permite asociar a cada alternativa un valor que se utilizará para producir una clasificación final de las mismas. Finalmente, el conjunto solución X_{sol} constará de las alternativas con máximo grado de dominancia.

En nuestro ejemplo concreto, aplicando el proceso de explotación a la relación de preferencia difusa colectiva, utilizando el cuantificador lingüístico difuso «la mayor cantidad posible» y el correspondiente operador de agregación OWA con vector de pesos (0, 0, 0, 1/3, 1/3, 1/3), obtenemos los siguientes valores de dominancia:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
$QGDD_i$	0,44	0,52	0,46	0,27	0,29	0,22

Estos valores representan la dominancia que cada alternativa tiene sobre «la mayor cantidad posible» de las alternativas para «la mayor parte de» los profesores. Claramente, la causa que mayor influencia tiene en el comportamiento incorrecto de un estudiante en el instituto, para este grupo de profesores, es la falta de interés en la materia o desinterés general en el colegio (C_2), mientras que el orden colectivo de causas de mayor a menor influencia en el mal comportamiento de los estudiantes es $\{C_2, C_3, C_1, C_5, C_4, C_6\}$, es decir:

C_2 Falta de interés en la materia o desinterés en el colegio.

C_3 Inestabilidad psicológica o emocional del estudiante.

C_1 Problemas en el hogar.

C_5 Antipatía hacia el profesor.

C_4 Ausencia autoestima.

C_6 Consumo de drogas.

Conclusiones

En la resolución de un problema de TDME con diferentes estructuras de representación de preferencias se ha de trabajar con información no homogénea y se han de aplicar procesos de selección de alternativas adecuados y adaptables a situaciones diversas. En este artículo, hemos presentado un ejemplo de la aplicación de un modelo de decisión aplicable a estos problemas de TDME, el cual se basa en las relaciones de preferencia difusas, como estructura de representación base para uniformar las diferentes estructuras con las que se trabaja, y en el concepto de mayoría difusa, lo que permite adaptar dicho modelo a diferentes situaciones de toma de decisiones. Dicho ejemplo pone de manifiesto el potencial de aplicabilidad del modelo de decisión utilizado.

Bibliografía

ARROW, K.J. y H. RAYNAUD (1989): *Opciones Sociales y Toma de Decisiones mediante Criterios Múltiples*, Alianza Editorial, Madrid.

BONISSONE, P.P. y K.S. DECKER (1986): «Selecting Uncertainty Calculi and Granularity», en KANAL, L. (Eds): *Uncertainty in Artificial Intelligence*, North-Holland, 217-247.

COHEN, L., L. MANION y K. MORRISON (1996): *A Guide to Teaching Practice*, Routledge, London.

CHICLANA, F. (2000): *Integración de Modelos de Representación de Preferencias en Problemas de Toma de Decisiones con Múltiples Expertos*, Tesis Doctoral, Universidad de Granada.

DUBOIS, D. y J.L. KONING (1991): «Social Choice Axioms for Fuzzy Sets Aggregation», *Fuzzy Sets and Systens*, 43, 257-274.

FODOR, J. M. ROUBENS (1994): *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decisión Support*, Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.

HERRERA, F., E. HERRERA-VIEDMA y J.L., VERDEGAY (1985): «A Sequential Selection Process in Group Decsion Making with a Linguistic Assessment», *Information Sciences*, 85, 223-239

KACPRZYK, J. (1986): «Group Decisión Making with a Fuzzy Linguistic Majority», *Fuzzy Sets and Systems*, 18, 105-118.

KACPRZYK, J., M. FEDRIZZI, M. y H. NURMI (1992): «Group Decision Making and Consensus Under Fuzzy Preference and Fuzzy Majority», *Fuzzy Sets and Systems*, (49), 21-31.

KITANIK, L. (1993): *Fuzzy Decision Procedures with Binary Relations: Towards an Unified Theory*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

SAATY, TH.L. (1980): *The Analytic Hierarchy Process*, New York, McGraw-Hill.

SAATY, TH.L. (1994): *Fundamentals of Decisión Making and Priority Theory with the Analytic Hierarchy Process*, RSW Publications, Pittsburg.

SEO, F. y M. SAKAWA, M. (1985): «Fuzzy Multiattribute Utility Analysis for Collective Choice», *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 15 (1), 45-53.

TANINO, T (1984): «Fuzzy Preference Orderings in Group Decision Making», *Fuzzy Sets and Systems*, (12), 117-131.

TANINO, T. (1988): «Fuzzy Preference Relations in Group Decision Making», en KACPRZYK, K. y M. ROUBENS (Eds.): *Non-Conventional Preference Relations in Decision Making*, Springer-Verlag, Berlin, 54-71.

VINCKE, Ph. (1992): *Multicriteria Decision-Aid*, John Wiley & Sons, New York.

YAGER, R.R. (1988): «On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multicriteria Decision Making», *IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics*, (18), 183-190.

YAGER, R.R. (1991): «Connectives and Quantifiers in Fuzzy Sets», *Fuzzy Sets and Systems*, 40, 39-75.

YAGER, R.R. (1994): «Interpreting Linguistically Quantified Propositions», *International Journal of Intelligent Systems*, 9, 541-569.

ZADEH, L.A. (1983): «A Computational to Fuzzy Quantifiers in Natural Languages», *Computers and Mathematics with Applications*, 9, 149-184.

Francisco Chiclana
IES Guadalpín.
Marbella (Málaga).
Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
«Thales»