SUMA 40
junio 2002, pp. 109-112

Οριςων

Miquel Albertí Palmer

En este artículo se da respuesta a una cuestión matemática de carácter personal:
¿Qué distancia me separa del horizonte y cómo cambia ésta al variar mi estatura ocular sobre el nivel del mar?

EL MAR estaba en calma. Las diminutas olas llegaban a la orilla en un susurro apenas perceptible. Muy tranquilo, sí, pero no tanto como ahora, retenido firmemente en la quietud absoluta de la imagen impresa que contemplo. Aunque era temprano, los pescadores de Lolak ya habían regresado y arreglaban las redes. Poco antes, de camino a la playa, me había topado con un grupo de mujeres cargadas con cestos enormes que sostenían perfectamente equilibrados sobre la cabeza. No habría conocido su contenido de no ser porque de uno de ellos sobresalía una gran cola triangular. Pero centrando mi atención en la faena de los hombres dirigí hacia ellos el objetivo de mi cámara. Recuerdo bien que para completar la instantánea quise incluir en ella la isla de Mololosing, satélite de la gran Sulawesi, que destacaba sobre el horizonte. Recuerdo también la nitidez con la que esta línea sutil se veía a la luz del amanecer, pero no me di cuenta de un detalle relacionado con la isla y el horizonte presentes en la fotografía hasta días después de haber abandonado aquellas tierras.

La isla de Mololosing sobre mi horizonte

MISCELÁNEA

El horizonte constituye el perfil del mundo visible, el lugar donde cielo y tierra se unen y separan a la vez, allí, a lo lejos, en los confines del planeta. Una línea que se acerca o aleja según la altitud de mis ojos sobre el océano y que siempre ha incitado en el observador unos deseos de aventura a menudo formulados en una pregunta silenciosa: ¿y más allá, qué hay? Pues, más océano, y más islas, y más horizontes y, si sigues, y sigues, después de dar una vuelta entera al planeta, llegarás de nuevo al mismo punto de partida, y... Pero, ¿de qué detalle estaba hablando? ¡Ah, sí! Si uno se fija bien en la foto (ojalá la calidad de la copia lo permita) podrá ver cómo la que podríamos llamar «línea de flotación» de la isla Mololosing (y que se inicia con su playa, a la izquierda de la isla) es un segmento que ocupa un fragmento del horizonte. Es decir, mi estatura ocular convertía en intervalo del horizonte la «línea de flotación» de Mololosing. Entonces conociendo la altura de mis ojos sobre el nivel del mar (mi estatura ocular) puedo calcular con facilidad la distancia a la que me hallo, no sólo de la isla, sino de mi horizonte. Me estoy planteando una cuestión matemática de tipo personal:

¿A qué distancia está mi horizonte?

No es tema de este trabajo discutir sobre el carácter del horizonte, sobre si realmente se ve, se intuye o se trata de un espejismo. Ni si la línea que llamamos así es realmente una línea (para ello habría que suponer una quietud en la superficie del mar que nunca podrá darse). En el tratamiento matemático que se va a dar se hará una abstracción de la realidad en los siguientes términos:

1. La Tierra es una esfera perfecta de radio R=6.370 km. cuya superficie carece de la menor arruga o defecto.
2. La luz que llega hasta nuestros ojos lo hace siguiendo una línea recta insensible a las alteraciones que diversos factores le ocasionarían en realidad, como por ejemplo la refracción[1].

Sea *P* el punto donde se hallan los ojos del observador, $h = PS$ su estatura ocular, *O* el centro del planeta y *Q* un punto del horizonte matemático visible desde *P*. Sea $x = OP = R+h$, y sea $H = PQ$ la distancia que nos separa del horizonte:

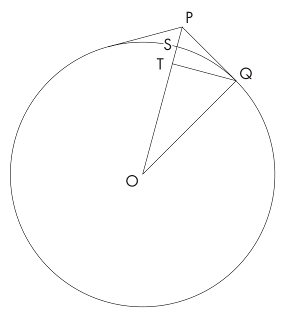

Figura 1

Pero,
¿qué es
el horizonte?
¿Una recta?
¿Una curva?

Entonces el triángulo *PQO* es rectángulo en el punto *Q* porque *H* es un segmento tangente a la circunferencia terrestre. Luego:

$$OP^2 = OQ^2 + PQ^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = R^2 + H^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad H = \sqrt{x^2 - R^2}$$

Esta es la distancia que separa al observador de su horizonte en función de su distancia ocular *x* al centro del planeta. El dominio de definición de esta función es el conjunto $(-\infty, -R] \cup [R, +\infty)$. Se trata de la hipérbola de asíntotas $y = \pm x$ cuya ecuación general es

$$x^2 - y^2 - R^2 = 0$$

Para un observador ubicado justo a la orilla del mar y cuya estatura ocular sea $h = 1{,}7$ metros, es decir, $x = R+1{,}7$, se obtiene

$H(6370{,}0017) = 4653{,}816$ m $= 4{,}654$ km.

Pero, ¿qué es el horizonte? ¿Una recta? ¿Una curva? Evidentemente, nuestro horizonte es un arco de circunferencia puesto que se visualiza sobre una superficie esférica. Y es lo reducido de nuestro ángulo de visibilidad lo que nos impediría ver completa esa circunferencia «horizontal» de hallarnos en un pequeño islote en medio del océano. Para hallar el radio $r = r(x)$ de nuestro horizonte fijémonos en que los triángulos *PQO* y *QTO* de la figura anterior son semejantes. Luego:

$$\frac{r}{H} = \frac{R}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad r(x) = \frac{RH}{x} = R \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{R}{x}\right)^2}$$

El horizonte imaginario

Todo lo que se ha hecho hasta aquí tiene sentido para $x \in (-\infty, -R] \cup [R, +\infty)$ ¿Qué representaría tomar $x < R$? Puesto que $h = x - R$ representa la estatura ocular de un observador medida desde la superficie del planeta, un valor de *x* menor que *R* representaría una estatura

1 De hecho, la refracción terrestre nos permite ver el horizonte físico, un poco más lejano que este horizonte matemático del que estamos hablando.

ocular negativa, o sea, que el observador está boca abajo con la cabeza metida en el interior del planeta. En el mundo en que vivimos esto es casi imposible y de ser así uno no es que no vea el horizonte, es que no ve nada. Pero sí que resultaría factible en un planeta de fisonomía complementaria al nuestro. Imaginemos un universo denso de materia en el que se hubiera generado una ingente burbuja de aire. Los habitantes de esta Antitierra (nuestra Tierra vuelta como un calcetín) se pasearían por su superficie cóncava gracias a la fuerza gravitatoria centrífuga derivada de la masa universal que la encierra. Constituirían el firmamento visible desde un punto cualquiera de este antiplaneta los accidentes geográficos de sus antípodas: montañas, valles, ríos, mares, ciudades, etc. Todo flotando allá en lo alto. Desde un punto arbitrario del antiplaneta puede verse cualquier otro:

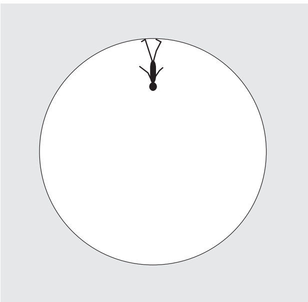

Figura 2

¿Qué significa horizonte ahora? Podemos aventurarnos a decir que se tratará del paralelo que define la estatura ocular de uno de sus habitantes. Antes echemos un vistazo a la función $H(x)$ y veamos qué sucede cuando x toma valores fuera del dominio de definición. Por ejemplo:

$$H(\pm R) = 0$$

$$H\left(\pm\frac{R}{2}\right) = \frac{R\sqrt{3}}{2}\, i$$

$$H(0) = Ri$$

¡Claro! De tanto imaginar aparecen los números imaginarios. Si representamos $H(x)$ en el plano complejo para $-R \le x \le R$ nos encontraremos con la circunferencia de centro en el origen y radio R, es decir, el propio antiplaneta. Precisamente esta circunferencia del plano complejo es la que llena el hueco existente entre las dos ramas de la hipérbola anterior:

Los habitantes de esta Antitierra (nuestra Tierra vuelta como un calcetín) se pasearían por su superficie cóncava gracias a la fuerza gravitatoria centrífuga derivada de la masa universal que la encierra.

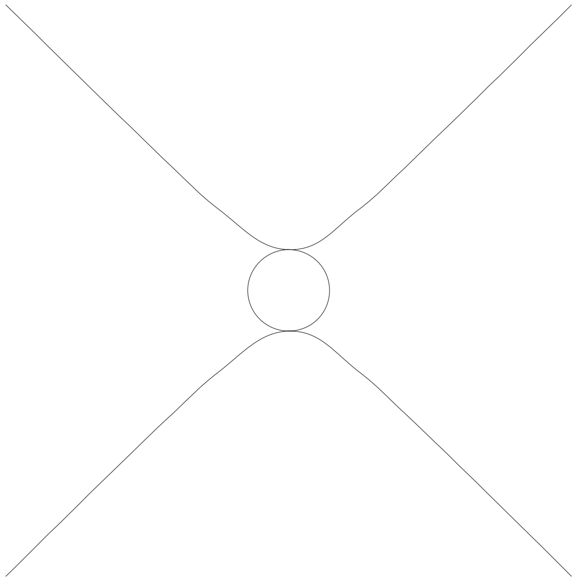

Figura 3

[En este gráfico (en el cual se omiten los ejes y cuyo origen se sitúa en el centro de la circunferencia, además de tomar R = 1), se ha representado la variable x sobre el eje de ordenadas]

Y el que llamaremos horizonte de un punto de estatura ocular $h < 0$ será el paralelo definido por esta misma estatura ocular. Cuando $h = -R$, esto es, cuando $x = 0$, su radio será el mismo radio R del planeta y su horizonte será el ecuador, pero visto desde dentro:

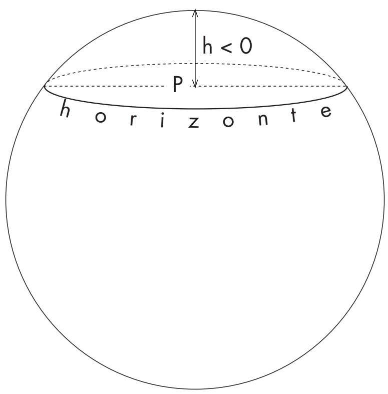

Figura 4

Horizontes lejanos

En el segundo apartado habíamos hallado $r(x)$, el radio del horizonte visible desde x. De su expresión se ve que $r \to R$ cuando $x \to \pm$ °. Esto implica que por muy alejados que estemos de un planeta nunca veremos completo su ecuador: el perfil del disco solar visible, aunque muy parecido, es algo menor que el ecuador del Sol.

En la figura siguiente se muestra la representación gráfica tridimensional (efectuada con el programa MapleV Release4) de la función que asocia a cada x la circunferencia de radio $r(x)$. Es decir, aquella que contiene el horizonte visible o imaginario desde cualquier x:

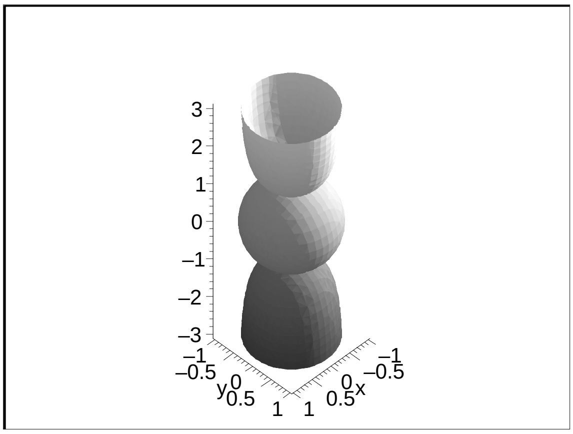

Figura 5
[Como antes, se ha tomado R = 1 y los valores de x se sitúan también en el eje vertical. El horizonte visible desde el infinito será el ecuador del planeta (el mismo que para x = 0)]

Se han representado sobre el eje vertical los valores de x para facilitar la comprensión del gráfico. Al efectuar en éste un corte por el punto x de dicho eje vertical mediante un plano perpendicular obtenemos una circunferencia de la que un arco será el horizonte visible desde x. La esfera intermedia entre ambos tubos infinitos (sendos cortes verticales en ella nos muestran los horizontes del antiplaneta) es también a la vez el propio antiplaneta o planeta «imaginario».

Epílogo

A la hora del crepúsculo regresé a la playa y la encontré vacía. Vacía de gente, pero plagada de pequeños cangrejos que emergían de la arena y recorrían a toda velocidad la distancia que mediaba entre el hueco abandonado y el de otro congénere que iban a ocupar. Igual que nosotros se habían mantenido ocultos durante las horas de la canícula. El mar seguía perezoso, más tranquilo si cabe. No se lo reproché, ¿quién es capaz de agitarse bajo el calor asfixiante que nos había atenazado a lo largo del día?

La línea del horizonte, mi horizonte, me pareció la misma que había visto por la mañana y que continuaba allí, lejos, sí, pero a igual lejanía. Al contraluz del atardecer la isla Mololosing era una mancha oscura, casi negra, cuyo perfil irregular creaba una extraña protuberancia en la línea de mi horizonte.

Ante la menguante bravura del disco solar que tras él se ocultaba me pregunté qué tierras serían las que ahora abrasaba. Un disco que ya no lo era, pues la refracción lo achataba transformándolo en una especie de elipse anaranjada, exprimiéndole las últimas gotas de jugo cálido. Iba a plantearme algunas cuestiones relacionadas con este fenómeno físico cuando un rumor interrumpió el silencio que me rodeaba. Un bote volvía de faenar. Varias personas sentadas en proa parecían compartir conmigo el espectáculo. Para ellas mi horizonte simplemente no existía. A mí el suyo me era del todo invisible. No quise dejar escapar la oportunidad de llevarme a casa una puesta de sol tan hermosa:

Atardecer en Lolak

Miquel Albertí
IES Pau Vila
Sabadell (Barcelona)
Federació dÉntitats
per l'Ensenyament de les
Matemàtiques a Catalunya