

Relojes de sol: un estudio analítico con ejemplos de la ciudad de Úbeda (Jaén)

Juan Ortega Moya

CON LA IMPLANTACIÓN de la LOGSE, algunos centros educativos ofertan un «Taller de Astronomía» como materia optativa en el segundo ciclo de la ESO, ello ha motivado el interés de bastantes profesores por estudiar y configurar el contenido curricular de esta materia. Su fuerte carácter transversal permite abordarla desde áreas tan distintas como Matemáticas, Física y Química, Historia, Biología y Geología, Filosofía, Tecnología, Informática, etc. y favorece que los estudiantes asimilen todos estos conocimientos de forma globalizada y conexas al mundo que los rodea. Desde el entretenimiento en la fabricación y uso de instrumentos ópticos hasta la elaboración de modelos explicativos de los fenómenos astronómicos, pasando por los registros de la Historia, hay un vasto campo de actividades enormemente motivadoras para el alumnado, y por qué no decirlo, también para los profesores.

Nuestras experiencias más inmediatas con la Astronomía son, sin duda, las relacionadas con el ir y venir de los días y los ciclos estacionales y lunares. Es ineludible dirigir nuestro interés al Sol para buscar explicación a la variación de las sombras de los objetos, a los eclipses, a la alternancia de las estaciones, etc. Todos estos fenómenos han atraído la atención del hombre desde tiempos prehistóricos y, desde una explicación mítica inicial, se ha evolucionado hasta la explicación científica y racional que hoy se tiene de ellos. Por tanto, parece natural, por su carácter cotidiano, observar y estudiar con el más sencillo y primitivo de los instrumentos astronómicos, el *gnomon*, que en su forma más simple se reduce a una varilla vertical clavada en el suelo.

Para las Matemáticas, el estudio de los relojes de sol es de un interés incuestionable, tanto desde el punto de vista educativo como científico. Eratóstenes atribuyó el descubrimiento de las cónicas a la construcción de estos relojes y, en el siglo XVI, Francesco Maurolico, en su *Tratado de*

En este artículo se realiza un estudio geométrico-analítico de los relojes de sol, aportando unas notaciones y terminología que simplifican las complicaciones trigonométricas del mismo, y utilizando ejemplos concretos que se encuentran en la ciudad de Úbeda (Jaén).

ARTÍCULOS

gnomónica, demostró que la sombra de una varilla vertical describe una cónica, cuyo tipo depende de la latitud del lugar en que se encuentre (del Río Sánchez, 1994).

El estudio de los relojes de sol puede hacerse de forma descriptiva, sintética o analítica. En los niveles iniciales, lógicamente debe predominar el enfoque descriptivo, prestando atención únicamente a los aspectos cualitativos para, después, avanzar con observaciones cuantitativas y trigonométricas. El tratamiento geométrico-analítico no aparece ni siquiera en los manuales al uso, pero desde él se puede hacer un profundo análisis de estos instrumentos.

El objetivo del trabajo que se expone a continuación consiste en ofrecer una terminología, unas notaciones y unos ejemplos para mostrar una forma sencilla de describir analíticamente estas construcciones.

Elementos de Astronomía

La Tierra se traslada alrededor del Sol describiendo una trayectoria prácticamente elíptica, que conocemos con el nombre de *eclíptica*, con el Sol situado en uno de los focos de esta elipse. El desplazamiento de la Tierra por la eclíptica es lento, pues tarda 365,25 días en recorrerla.

Simultáneamente, la Tierra está girando sobre su propio eje, el cual se encuentra inclinado $66^{\circ} 32' 30''$ respecto al plano de la eclíptica, dando una revolución completa en un día.

Durante un solo día, las posiciones relativas del Sol y de la Tierra apenas sufren variación en el espacio, sin embargo, para un observador situado en la superficie terrestre, el movimiento de rotación de la Tierra da lugar a que el Sol parezca moverse girando a su alrededor.

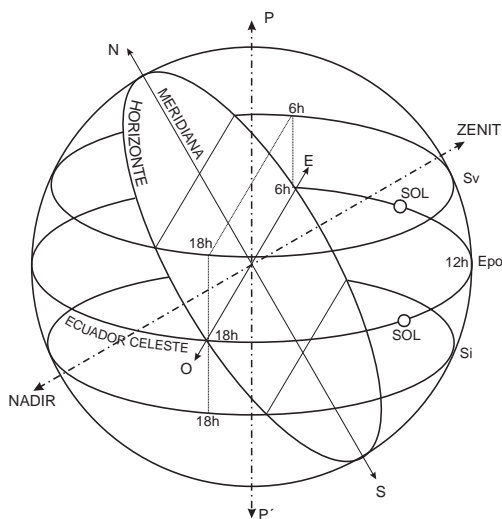


Figura 1

El estudio de los relojes de sol puede hacerse de forma descriptiva, sintética o analítica.

Prolongando los círculos, planos y ejes de referencia de la Tierra hasta los confines infinitos de la esfera celeste, la trayectoria aparente del Sol es siempre una circunferencia menor de la esfera celeste (figura 1), llamada *paralelo diurno*, de plano perpendicular al eje polar PP' . El centro del paralelo diurno está situado en el eje PP' pero se desplaza hacia arriba o hacia abajo del origen según la posición que tenga la Tierra en la eclíptica. En la figura 1 se han representado tres paralelos diurnos: el del solsticio de verano (Sv), el de los equinoccios (Epo) y el del solsticio de invierno (Si).

Por otro lado, dado que el tamaño de la Tierra es despreciable frente a las distancias astronómicas, el plano del horizonte, o plano tangente en un lugar fijado sobre la superficie terrestre, pasará por el centro de la esfera celeste y estará inclinado con respecto al ecuador celeste (prolongación del ecuador terrestre) un ángulo $\alpha = 90 - \varphi$, siendo φ la latitud geográfica del lugar considerado (figura 2). Por esta razón, el paralelo diurno formará también el mismo ángulo $\alpha = 90 - \varphi$ con el plano del horizonte.

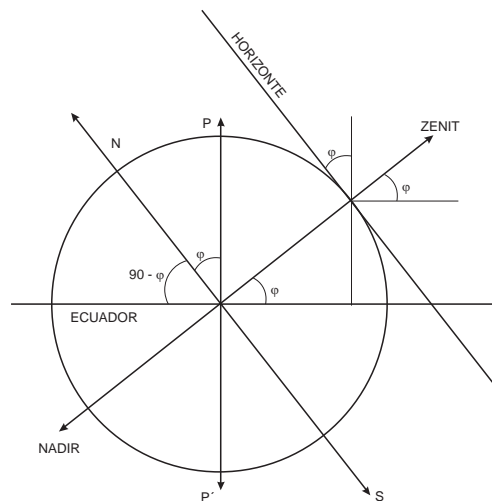


Figura 2

La división del paralelo diurno en 24 arcos iguales, de 15° cada uno, permite establecer la hora solar t en cualquier lugar de la Tierra.

Las figuras 1 y 2 se han representado para un lugar con una latitud igual que la de Úbeda, ciudad de la provincia de Jaén.

Notaciones, definiciones y proposiciones preliminares

El análisis matemático de los relojes de sol que aquí se va a exponer está basado enteramente en los conceptos de la geometría euclídea tridimensional; no obstante, con el fin de simplificar y abreviar los cálculos, se usará la siguiente terminología:

Definición 1: Dado un plano \neq por su ecuación implícita

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$$

y un punto P de coordenadas (x_p, y_p, z_p) , se escribirá $\neq(P)$ para simbolizar la cantidad:

$$\neq(P) = A \cdot x_p + B \cdot y_p + C \cdot z_p + D$$

Proposición 1:

$$\neq(P) = 0 \iff P \in \neq$$

Definición 2: Dado un plano \neq por su ecuación implícita

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$$

y un vector \vec{v} de coordenadas (v_1, v_2, v_3) , se escribirá $\neq(\vec{v})$ para simbolizar la cantidad:

$$\neq(\vec{v}) = A \cdot v_1 + B \cdot v_2 + C \cdot v_3 = (A, B, C) \circ (v_1, v_2, v_3) = \vec{N} \circ \vec{v}$$

Proposición 2: Si $X = P_0 + \lambda \cdot \vec{v}$ es la ecuación paramétrica de una recta r cualquiera, no paralela al plano $\neq = 0$, entonces el punto P de intersección de r y \neq viene dado por

$$P = P_0 - \frac{\neq(P_0)}{\neq(\vec{v})} \cdot \vec{v}$$

Proposición 3: Sean S un punto fijo del espacio, $X = P_0 + \lambda \cdot \vec{r}$ una recta r dada y $\neq = 0$ un plano (figura 3), entonces la proyección de la recta r sobre \neq desde S es otra recta r^* (supuesto que exista), cuyos puntos X^* vienen dados por la expresión paramétrica siguiente:

$$X^* = P_0 + l \cdot \vec{r} + m \cdot \vec{u}_0 + l m \cdot \vec{r} \quad [1]$$

siendo λ arbitrario, $\vec{u}_0 = \overrightarrow{SP_0}$ y

$$m = m(l) = \frac{-\neq(P_0) - l \cdot \neq(\vec{r})}{\neq(\vec{u}_0) + l \cdot \neq(\vec{r})} \quad [2]$$

y cuya dirección viene determinada por el vector

$$\vec{r}^* = \vec{u}_0 - \frac{\neq(\vec{u}_0)}{\neq(\vec{r})} \cdot \vec{r} \quad [3]$$

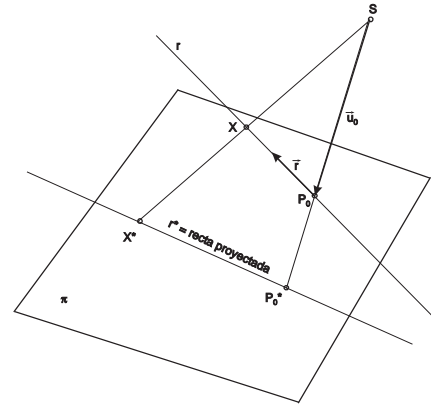


Figura 3

Demostración: Se tiene que

$$\begin{aligned} X^* &= X + m \cdot S\vec{X} = X + m \cdot (X - S) = P_0 + l \cdot \vec{r} + m \cdot (P_0 + l \cdot \vec{r} - S) = \\ &= P_0 + l \cdot \vec{r} + m \cdot (P_0 - S) + l m \cdot \vec{r} = P_0 + l \cdot \vec{r} + m \cdot S\vec{P}_0 + l m \cdot \vec{r} \end{aligned}$$

Además, como $X^* \in \neq$, se cumplirá

$$\begin{aligned} \neq(X^*) &= 0 = \neq(P_0 + l \cdot \vec{r} + m \cdot \vec{u}_0 + l m \cdot \vec{r}) = \\ &= \neq(P_0) + l \cdot \neq(\vec{r}) + m \cdot \neq(\vec{u}_0) + l m \cdot \neq(\vec{r}) \end{aligned}$$

Finalmente, sean

$$X_1^* = P_0 + l_1 \cdot \vec{r} + m_1 \cdot \vec{u}_0 + l_1 m_1 \cdot \vec{r}$$

$$X_2^* = P_0 + l_2 \cdot \vec{r} + m_2 \cdot \vec{u}_0 + l_2 m_2 \cdot \vec{r}$$

dos puntos arbitrarios de r^* . Entonces, ambos determinan el vector:

$$X_1^* X_2^* = X_2^* - X_1^* = (l_2 - l_1) \cdot \vec{r} + (m_2 - m_1) \cdot \vec{u}_0 + (l_2 m_2 - l_1 m_1) \cdot \vec{r} \quad [4]$$

y de [2] se llega a:

$$l_i m_i = \frac{-\neq(P_0) - l_i \cdot \neq(\vec{r}) - m_i \cdot \neq(\vec{u}_0)}{\neq(\vec{r})} \quad i = 1, 2$$

Sustituyendo en [4] obtenemos el vector:

$$\begin{aligned} X_1^* X_2^* &= (l_2 - l_1) \cdot \vec{r} + (m_2 - m_1) \cdot \vec{u}_0 + (l_2 m_2 - l_1 m_1) \cdot \vec{r} = \\ &= (m_2 - m_1) \left[\vec{u}_0 - \frac{\neq(\vec{u}_0)}{\neq(\vec{r})} \cdot \vec{r} \right] \end{aligned}$$

Definición 3: Dados dos puntos P y S , y dos planos π_1 y π_2 , se escribirá $\rho_{12}(P, S)$ para designar el valor del determinante:

$$\rho_{12}(P, S) = \begin{vmatrix} \rho_1(P) & \rho_1(S) \\ \rho_2(P) & \rho_2(S) \end{vmatrix}$$

Definición 4: Dados dos vectores \vec{r} y \vec{u} , y dos planos π_1 y π_2 , se escribirá $\rho_{12}(\vec{r}, \vec{u})$ para designar el valor del determinante:

$$\rho_{12}(\vec{r}, \vec{u}) = \begin{vmatrix} \rho_1(\vec{r}) & \rho_1(\vec{u}) \\ \rho_2(\vec{r}) & \rho_2(\vec{u}) \end{vmatrix}$$

Definición 5: Dados un punto P y un vector \vec{r} , y dos planos π_1 y π_2 , se escribirá $\rho_{12}(P, \vec{r})$ para designar el valor del determinante:

$$\rho_{12}(P, \vec{r}) = \begin{vmatrix} \rho_1(P) & \rho_1(\vec{r}) \\ \rho_2(P) & \rho_2(\vec{r}) \end{vmatrix}$$

Proposición 4: El punto X^* de intersección de la recta r^* , obtenida proyectando r desde S sobre el plano π_1 , con otro plano π_2 , viene dado por la siguiente expresión:

$$X^* = P_0 + \frac{\rho_{12}(P_0, \vec{u}_0)}{\rho_{12}(\vec{u}_0, \vec{r})} \cdot \vec{r} + \frac{\rho_{12}(\vec{r}, P_0)}{\rho_{12}(\vec{u}_0, \vec{r})} \cdot \vec{u}_0 \quad [5]$$

Demostración: En virtud de [1], X^* tendrá la expresión:

$$X^* = P_0 + l \cdot \vec{r} + m \cdot \vec{u}_0 + l m \cdot \vec{r}$$

o su equivalente:

$$X^* = P_0 + l \cdot (1 + m) \cdot \vec{r} + m \cdot \vec{u}_0$$

Sustituyendo a la vez en π_1 y π_2 , llegamos al sistema:

$$\begin{cases} \rho_1(X^*) = 0 = \rho_1(P_0) + l \cdot \rho_1(\vec{r}) + m \cdot \rho_1(\vec{u}_0) + l m \cdot \rho_1(\vec{r}) = 0 \\ \rho_2(X^*) = 0 = \rho_2(P_0) + l \cdot \rho_2(\vec{r}) + m \cdot \rho_2(\vec{u}_0) + l m \cdot \rho_2(\vec{r}) = 0 \end{cases}$$

de donde se despejan λ y μ , y se calcula $(1 + \mu)$.

Relojes de sol de cuadrante horizontal

Estas piezas suelen colocarse en suelos o jardines con una finalidad de capricho u ornamental. Como se demostrará más adelante, su varilla ha de orientarse *paralela al eje polar de la Tierra*, ello requiere darle una inclinación respecto al plano horizontal igual a la latitud ϕ del lugar en el que se ubique el reloj (véase la figura 2).

La base del planteamiento geométrico para su estudio es la figura 4. En esta figura, se ha construido un sistema de referencia con el origen en el extremo O del gnomon. El

plano XY es el plano del horizonte del lugar y R es la distancia del Sol al origen del sistema de referencia.

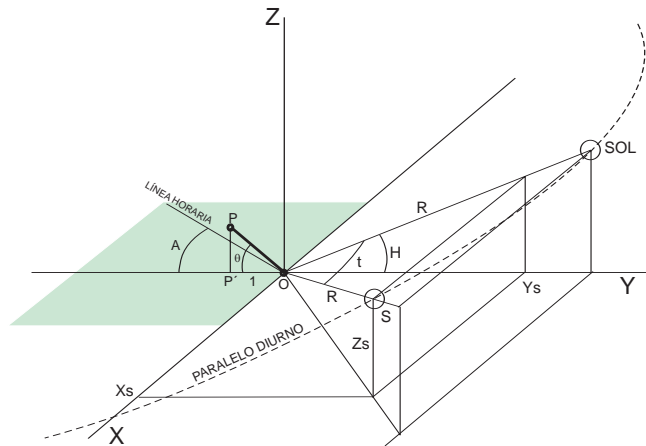


Figura 4. Cuadrante horizontal

Para simplificar el análisis se ha supuesto que el Sol se mueve de manera uniforme por el paralelo diurno correspondiente a los equinoccios (ver figura 1). Al final de este trabajo se indicará la forma de extender el estudio a cualquier paralelo diurno. Así mismo, la distancia Sol-Tierra, R , se considera constante en el transcurso de cada día. Estos supuestos no se dan en la realidad y son causantes del funcionamiento impreciso de los relojes solares.

El ángulo horario se nota con la letra t , y se supondrá medido a partir del instante en que el Sol culmina sobre el horizonte (Mediodía). La altura máxima del Sol sobre el horizonte se nota con la letra H , y en los equinoccios esta altura tiene el valor $H = 90 - \phi$, como ya se ha dicho anteriormente.

En el sistema de referencia tomado, el plano del horizonte π se confunde con el plano XY , cuya ecuación es:

$$\pi: z = 0$$

La sombra del gnomon en la hora t , denominada *línea horaria* t , se obtiene proyectando desde S la recta OP sobre el plano π , esta línea horaria forma un ángulo A con el semieje negativo de referencia OY , también llamado *ángulo horario* t . Dado que todas las líneas

horarias pasan por la base del gnomon, el único requisito para construir un cuadrante horizontal será determinar el ángulo A en cada una de las horas de soleamiento.

Según la proposición 3, cualquier sombra tendrá la ecuación:

$$X^* = P_0 + l \cdot \vec{r} + m \cdot \vec{u}_0 + l m \cdot \vec{r}$$

y el vector de dirección:

$$\vec{r}^* = \vec{u}_0 - \frac{\rho(\vec{u}_0)}{\rho(\vec{r})} \cdot \vec{r}$$

En nuestro sistema de referencia, se tiene:

$$P_0 = O = (0, 0, 0);$$

$$\vec{r} = (x_r, y_r, z_r) = O\vec{P} = (0, -1, \operatorname{tg}q);$$

$$\vec{u}_0 = S\vec{O} = (-x_s, -y_s, -z_s)$$

siendo

$$S = (x_s, y_s, z_s) = (R \operatorname{sent}, R \operatorname{cost} \cos H, R \operatorname{cost} \operatorname{sen} H)$$

las coordenadas del Sol en la hora t .

Utilizando estos datos, obtenemos:

$$\vec{r} = (0, -1, \operatorname{tg}q)$$

$$\vec{u}_0 = (-x_s, -y_s, -z_s) =$$

$$= (-R \operatorname{sent}, -R \operatorname{cost} \cos H, -R \operatorname{cost} \operatorname{sen} H)$$

$$P_0 = (0, 0, 0)$$

$$\rho(\vec{r}) = \vec{N} \circ \vec{r} = (0, 0, 1) \circ (0, -1, \operatorname{tg}q) = \operatorname{tg}q$$

$$\rho(\vec{u}_0) = \vec{N} \circ \vec{u}_0 = -z_s$$

$$\vec{r}^* = \vec{u}_0 - \frac{\rho(\vec{u}_0)}{\rho(\vec{r})} \cdot \vec{r} = (-x_s, -y_s, -z_s) + \frac{z_s}{\operatorname{tg}q} \cdot (0, -1, \operatorname{tg}q) =$$

$$= (-x_s, -y_s - \frac{z_s}{\operatorname{tg}q}, 0)$$

El ángulo A se determina inmediatamente a partir de lo anterior, llevado a la figura 5

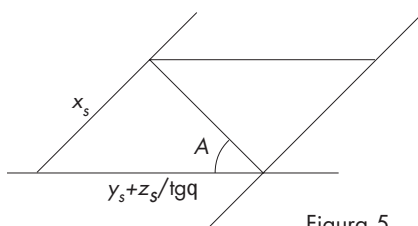


Figura 5

$$\operatorname{tg} A = \frac{x_s}{y_s + \frac{z_s}{\operatorname{tg}q}} = \frac{\operatorname{tg} t}{\cos H + \frac{\operatorname{sen} H}{\operatorname{tg}q}} = \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{sen} j \quad [6]$$

habiendo sustituido $H = 90 - \varphi$ y $\theta = \varphi$.

Consultando los mapas del Servicio Geográfico del Ejército se pueden establecer las coordenadas geográficas de la ciudad de Úbeda en $38^\circ 00' 45''$ de latitud norte y $3^\circ 22' 00''$ de longitud oeste.

Mediante la fórmula [6] se puede elaborar la tabla de ángulos de las líneas horarias para un cuadrante horizontal:

HORA(de la tarde)	0	1	2	3	4	5	6
t	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
Ángulos (A)	0°	$9,4^\circ$	$19,6^\circ$	$31,6^\circ$	$46,8^\circ$	$66,5^\circ$	90°

No existe ningún cuadrante de este tipo en la ciudad de Úbeda, lo cual da la oportunidad para adornar con ellos alguna plaza o jardín de esta hermosa ciudad monumental.

Relojes de sol de cuadrante vertical

Son los más extendidos y es frecuente verlos adornando fachadas de ayuntamientos, iglesias, palacios, etc.

A veces, se construyen sobre piezas portátiles de mármol, cerámica, etc. para permitir orientar exactamente su varilla paralela al eje polar, en la dirección Norte-Sur. Así es el reloj ubicado sobre el remate de un contrafuerte cilíndrico en la portada sur de la iglesia de San Nicolás de Úbeda.

Es raro encontrar fachadas perfectamente orientadas al Sur. Lo normal es que formen un cierto ángulo α con la línea Este-Oeste, al que se suele llamar ángulo de azimut de la fachada.

Su análisis geométrico es similar al del cuadrante horizontal, pero ahora, el plano de proyección \neq es la pared vertical en la que se fija el gnomon (figura 6), cuya ecuación viene dada por:

$$\neq: x \operatorname{tg} \alpha + y = 0$$



Reloj vertical.
Iglesia de San Nicolás de Úbeda (Jaén)

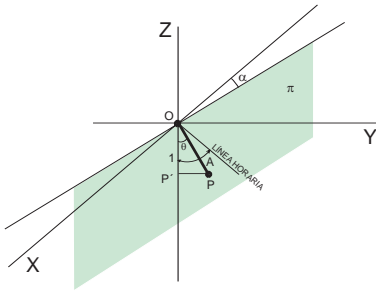


Figura 6. Cuadrante vertical

El diseño del cuadrante vertical sólo requiere la determinación del ángulo A para cada línea horaria.

Como en el apartado anterior, cualquier sombra tendrá la ecuación:

$$X^* = P_0 + l \cdot \vec{r} + m \cdot \vec{u}_0 + l m \cdot \vec{r}$$

y el vector de dirección:

$$\vec{r}^* = \vec{u}_0 - \frac{\rho(\vec{u}_0)}{\rho(\vec{r})} \cdot \vec{r}$$

Con respecto a la referencia de la figura 6, se tiene:

$$P_0 = O = (0, 0, 0);$$

$$\vec{r} = (x_r, y_r, z_r) = O\vec{P} = (0, \operatorname{tg} q, -1);$$

$$\vec{u}_0 = S\vec{O} = (-x_s, -y_s, -z_s)$$

siendo

$$S = (x_s, y_s, z_s) = (R \operatorname{sen} t, R \cos t \cos H, R \cos t \operatorname{sen} H)$$

las coordenadas del Sol en la hora t . Utilizando estos datos, obtenemos:

$$\rho(\vec{r}) = \vec{N} \circ \vec{r} = (\operatorname{tg} a, 1, 0) \circ (0, \operatorname{tg} q, -1) = \operatorname{tg} q$$

$$\rho(\vec{u}_0) = \vec{N} \circ \vec{u}_0 = -x_s \cdot \operatorname{tg} a - y_s$$

$$\vec{r}^* = \begin{pmatrix} \hat{e} \\ -x_s \\ x_s \cdot \operatorname{tg} a, -z_s - \frac{x_s \cdot \operatorname{tg} a + y_s}{\operatorname{tg} q} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sqrt{x_s^2 + x_s^2 \cdot \operatorname{tg}^2 a}}{z_s + \frac{x_s \cdot \operatorname{tg} a + y_s}{\operatorname{tg} q}} \quad [7]$$

Sustituyendo las coordenadas de S en [7] y reagrupando convenientemente, se llega a:

$$\operatorname{tg} A = \frac{1}{M + N \cdot \cot g t}$$

Donde M y N son constantes dependientes de la ubicación del reloj y de la inclinación de la varilla:

$$M = \operatorname{sen} a \cdot \cot g q$$

$$N = \operatorname{cos} a \cdot (\operatorname{sen} H + \cot g q \cdot \operatorname{cos} H)$$

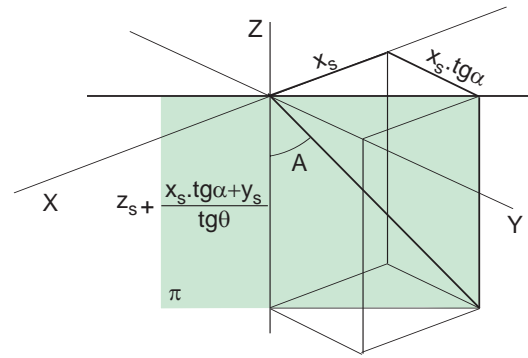
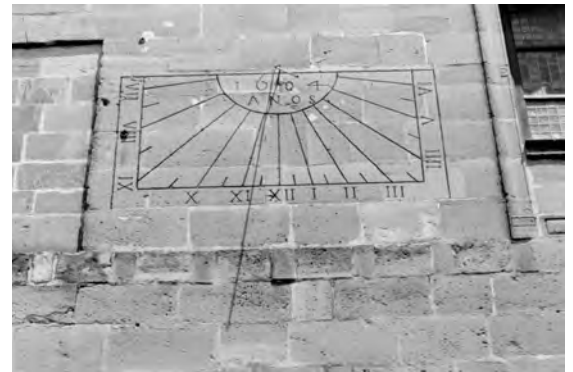


Figura 7. Cuadrante vertical declinante

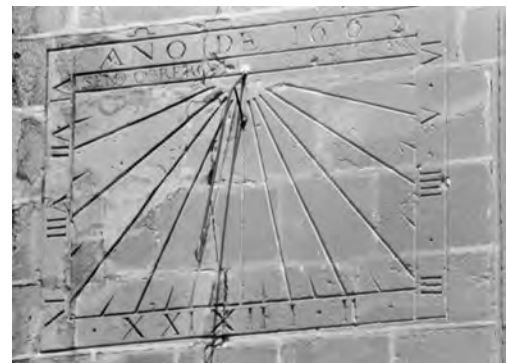
Si la pared vertical no tuviese declinación ($\alpha = 0$) y la varilla se orientase con un ángulo $\theta = 90 - \varphi$, entonces, asumiendo que $H = 90 - \varphi$, tendremos:

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{cos} j \cdot \operatorname{tg} t$$

Un ejemplo excelente de reloj declinante ($\alpha \cong 6^\circ$) se encuentra en la pared sur del Ayuntamiento Viejo de Úbeda, y otro ejemplar, sin declinación, se halla en la Capilla del Salvador.



Reloj vertical declinante. Ayuntamiento Viejo. Úbeda



Reloj vertical. Capilla de El Salvador. Úbeda

Relojes de cuadrante occidental u oriental

Estas piezas se hallan ubicadas en los muros o fachadas orientadas al Oeste (relojes occidentales) o al Este (relojes orientales). Su varilla ha de colocarse paralela al plano del cuadrante para mantener la orientación paralela al eje polar PP' .

Ambos modelos pueden contemplarse en las paredes de las dos torres que flanquean la fachada principal del Hospital de Santiago de Úbeda (figura 8).

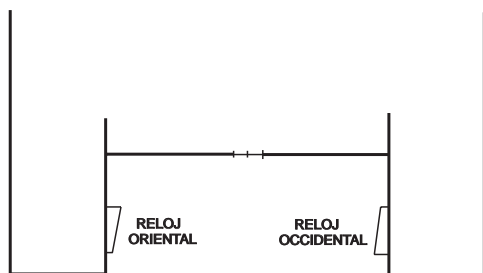


Figura 8. Relojes del Hospital de Santiago

La fachada principal de este monumento está orientada perfectamente al sur; sin embargo, al examinar los relojes se ve que las grapas que sujetan la varilla a la pared son de distinta longitud, lo que conlleva una cierta inclinación respecto a la meridiana local. Este ángulo de inclinación o azimut de fachada, como se suele llamar, se designará en el análisis con la letra griega β .



Reloj occidental.
Hospital de Santiago
Úbeda (Jaén)

Es probable que el diseñador de estos relojes supusiera que la fachada principal no se orientaba exactamente en la dirección norte-sur, por lo cual introdujo la desviación β para conseguir tal orientación.

Estudio del reloj occidental

Nos serviremos de la figura 9 para este propósito. En esta figura, se ha construido un sistema de referencia con el origen en el extremo O del gnomon. El plano XY es el plano del horizonte del lugar; R es la distancia del Sol al origen del sistema de referencia.

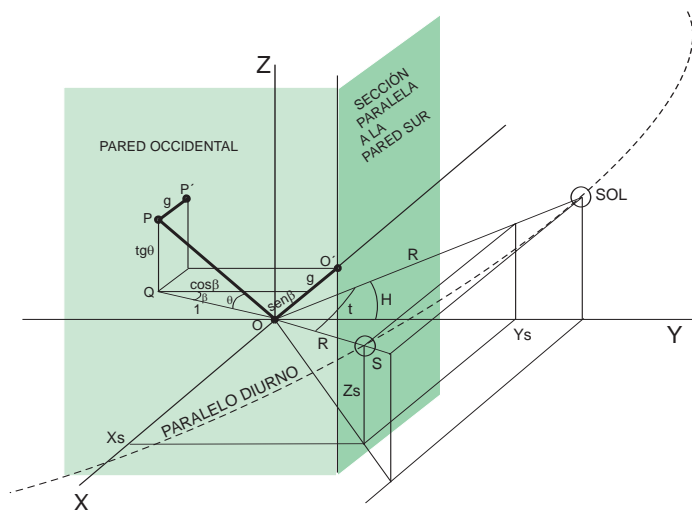


Figura 9. Reloj occidental

La pared occidental se llamará plano π_1 , y en el sistema de referencia tomado tiene la ecuación:

$$\pi_1: x + g + \text{sen}\beta = 0$$

La sección paralela a la pared sur por la grapa O' se llamará plano π_2 , y su ecuación es:

$$\pi_2: y = 0$$

La sombra del gnomon se obtiene proyectando desde S la recta OP sobre el plano π_1 . Por tanto, según la proposición 3, esta sombra tendrá la ecuación:

$$X^* = P_0 + l \cdot \vec{r} + m \cdot \vec{u}_0 + l m \cdot \vec{r}$$

para la cual se ha tomado:

$$P_0 = O; \quad \vec{r} = (x_r, y_r, z_r) = \vec{OP} = (-\text{sen}b, -\text{cos}b, \text{tg}q);$$

$$\vec{u}_0 = \vec{SO} = (-x_s, -y_s, -z_s)$$

siendo

$$S = (x_s, y_s, z_s) = (R \text{sen}t, R \text{cos}t \text{cos}H, R \text{cos}t \text{sen}H)$$

las coordenadas del Sol en la hora t .

La sombra de la varilla, proyectada sobre la pared occidental a las t horas es la *línea horaria* t , corta a la vertical que pasa por la grapa O' en un punto X_t^* y forma un ángulo A con dicha vertical, también llamado ángulo horario t (ver figura 10).

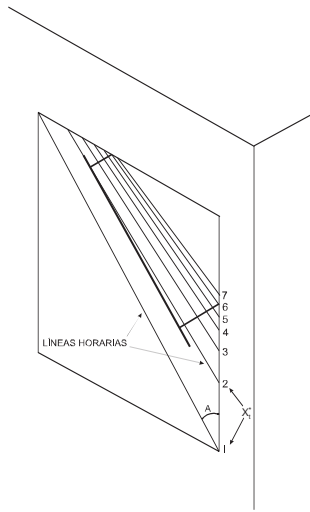


Figura 10

Una vez elegida la varilla y fijada por las grapas a la pared según un ángulo θ de inclinación, el diseño del reloj queda completamente definido calculando la distancia vertical de los puntos horarios respecto a la grapa O' , la cual coincide con la coordenada z^* de los puntos horarios X_t^* y determina el lugar donde se marcan las lecturas de las horas; el otro dato necesario es el ángulo A de las líneas horarias, para $t = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$, etc. ya que con estos dos datos se podrán marcar sobre el cuadrante las líneas horarias y sus correspondientes lecturas. Con los datos de la figura 9, obtenemos:

$$\vec{r} = (-senb, -cosb, tgq)$$

$$\vec{u}_0 = (-x_s, -y_s, -z_s) = (-Rsent, -Rcos t cos H, -Rcos t senH)$$

$$P_0 = (0, 0, 0)$$

$$\rho_1(P_0) = 0 + g + senb = g + senb$$

$$\rho_1(\vec{r}) = \vec{N}_1 \circ \vec{r} = (1, 0, 0) \circ (-senb, -cosb, tgq) = -senb$$

$$\rho_1(\vec{u}_0) = \vec{N}_1 \circ \vec{u}_0 = -Rsent$$

$$\rho_2(P_0) = 0$$

$$\rho_2(\vec{r}) = \vec{N}_2 \circ \vec{r} = (0, 1, 0) \circ (-senb, -cosb, tgq) = -cosb$$

$$\rho_2(\vec{u}_0) = \vec{N}_2 \circ \vec{u}_0 = -Rcos t cos H$$

$$\rho_{12}(P_0, \vec{u}_0) = \begin{vmatrix} \rho_1(P_0) & \rho_1(\vec{u}_0) \\ \rho_2(P_0) & \rho_2(\vec{u}_0) \end{vmatrix} = -Rcos t cos H \cdot (g + senb)$$

$$\rho_{12}(\vec{r}, P_0) = \begin{vmatrix} \rho_1(\vec{r}) & \rho_1(P_0) \\ \rho_2(\vec{r}) & \rho_2(P_0) \end{vmatrix} = cosb \cdot (g + senb)$$

$$\rho_{12}(\vec{u}_0, \vec{r}) = \begin{vmatrix} \rho_1(\vec{u}_0) & \rho_1(\vec{r}) \\ \rho_2(\vec{u}_0) & \rho_2(\vec{r}) \end{vmatrix} = -Rcos t cos Hsenb + Rsent cosb$$

Sustituyendo en [5], la coordenada z^* de X_t^* valdrá:

$$z^* = \frac{-Rcos t cos H \cdot (g + senb) - Rcos t senH cosb \cdot (g + senb)}{Rsent cosb - Rcos t cos Hsenb} =$$

$$= \frac{M}{N - tgt} \quad [8]$$

Siendo M y N dos constantes dependientes de las características constructivas del reloj y del lugar de su ubicación:

$$M = \frac{(g + senb)}{cosb} \cdot (cos Htgq + cosb senH) \quad [9]$$

$$N = cos H tgb \quad [10]$$

La determinación de estas dos constantes nos permite situar de manera precisa las lecturas horarias sobre la vertical de la grapa O' . Una aproximación para el reloj occidental del Hospital de Santiago sería:

$$M @ \frac{(0,10 + sen 4^\circ)}{cos 4^\circ} \cdot (cos 52^\circ \cdot tg 38^\circ + cos 4^\circ \cdot sen 52^\circ) =$$

$$= 0,2156234484$$

$$N @ cos 52^\circ \cdot tg 4^\circ = 0,04305124421$$

Con estas constantes y la fórmula [8] se crea la tabla adjunta de distancias verticales a la grapa O' en cada hora.

HORA	1	2	3	4	5	6	7
t	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°
Distancia (cm)	-96	-40	-22	-13	-6	0	+5

Examinando las fórmulas [8], [9] y [10] se constata que la distancia de las líneas horarias a la grapa O' es fuertemente dependiente de la longitud de la grapa menor (g) y del ángulo de inclinación β . Otra observación de interés concierne a la simplificación que tiene lugar cuando $\beta = 0$; en cuyo caso, la varilla iría paralela a la pared y z^* sería:

$$z^* = \frac{-g}{\cos j \cdot \text{tgt}}$$

Como se ha dicho, además de las distancias verticales a la grapa O', se precisa conocer el ángulo de inclinación A de cada línea horaria con la vertical. Dicho ángulo será el mismo que el formado por un vector de dirección de la sombra proyectada r^* con la vertical. Si se utiliza como vector de dirección de r^* el [3], se tendrá:

$$\cos A = \frac{\left| \vec{k} \circ \vec{r}^* \right|}{\left\| \vec{r}^* \right\|} = \frac{\left| \vec{k} \circ \vec{u}_0 - \frac{\rho_1(\vec{u}_0)}{\rho_1(\vec{r})} \cdot \vec{k} \circ \vec{r} \right|}{\left\| \vec{u}_0 - \frac{\rho_1(\vec{u}_0)}{\rho_1(\vec{r})} \cdot \vec{r} \right\|} = \frac{A_0 + A_1 \cdot \text{tgt}}{\sqrt{B_0 + B_1 \cdot \text{tgt} + B_2 \cdot \text{tgt}^2}} \quad [11]$$

Siendo A_0 , A_1 , B_0 , B_1 y B_2 constantes dependientes de las características constructivas del reloj:

$$A_0 = \text{sen}b \text{ sen}H @ \text{sen}4^\circ \cdot \text{sen}52^\circ = 0,0549688$$

$$A_1 = \text{tg}q @ \text{tg}38^\circ = 0,7812856$$

$$B_0 = \text{sen}^2b @ \text{sen}^24^\circ @ 0$$

$$B_1 = 2\text{sen}b \cdot (\text{sen}H \text{tg}q - \cos H \cos b) @ 0$$

$$B_2 = \cos^2 b + \text{tg}^2q @ 1,6055412$$

Al igual que antes, mediante la fórmula [11] se puede elaborar la tabla de ángulos de las líneas horarias:

HORA	1	2	3	4	5	6	7
t	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°
Ángulos (A)	40°	46°	49°	50°	51°	52°	52,7°

También hay una versión simplificada de [11] cuando $\beta = 0$:

$$\cos A = \text{sen}q \text{ fi } A = 90^\circ - q$$

El estudio del reloj oriental es en todo similar al del reloj occidental, por ello se omite su análisis.

Consideraciones finales

La generalización del estudio de los relojes de sol para un paralelo diurno cualquiera, que tenga cierta declinación δ respecto al ecuador, no presenta excesivas complicaciones. Para este fin, el sistema de referencia a adoptar sería el mismo que el utilizado en los apartados anteriores, pero la altitud máxima H del Sol sobre el horizonte dependerá de su declinación δ (figura 11):

$$H = 90 - j \pm d$$

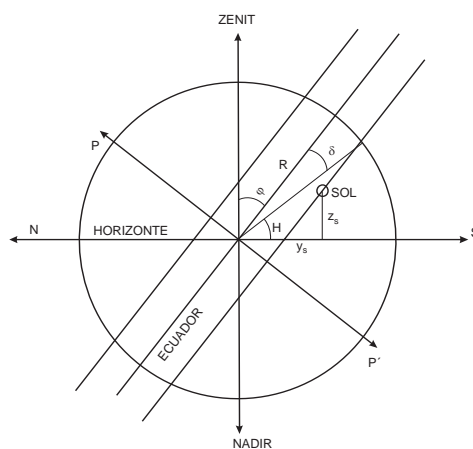


Figura 11

Las coordenadas del Sol en este sistema de referencia, en una hora dada t , tendrán las siguientes expresiones:

$$x_S = R \cdot \cos d \cdot \text{sen}t \quad [12]$$

$$y_S = R \cdot \cos d \cdot \cos t \cdot \text{sen}j + R \cdot \text{sen}d \cdot \cos j \quad [13]$$

$$z_S = R \cdot \cos d \cdot \cos t \cdot \cos j - R \cdot \text{sen}d \cdot \text{sen}j \quad [14]$$

las cuales coinciden con las anteriormente utilizadas si $\delta = 0$.

A modo de conclusión, seguidamente se aplica este planteamiento general para obtener algunos resultados importantes para la Gnomónica; tales son:

- la invariabilidad de las líneas horarias de los relojes de sol, con independencia del día en el que sean observados, lo que constituye la razón de ser de la Gnomónica; y
- las formas geométricas de las sombras arrojadas por las varillas verticales.

Invariabilidad de las líneas horarias

a) Relojes horizontales

Remitiéndonos a [6] y figura 5, las líneas horarias quedan determinadas mediante el ángulo A tal que

$$\operatorname{tg} A = \frac{x_s}{y_s + \frac{z_s}{\operatorname{tg} q}}$$

Sustituyendo [12], [13] y [14] en [6], se tiene:

$$\operatorname{tg} A = \frac{R \cdot \cos d \cdot \operatorname{sent} t}{R \cdot \cos d \cdot \cos t \cdot \operatorname{sen} j + R \cdot \operatorname{send} \cdot \cos j + \frac{R \cdot \cos d \cdot \cos t \cdot \cos j - R \cdot \operatorname{send} \cdot \operatorname{sen} j}{\operatorname{tg} q}}$$

Si $\delta = 0$, la expresión anterior se transforma en:

$$\operatorname{tg} A = \frac{1}{\cot g t \cdot (\operatorname{sen} j + \cos j \cdot \cot g q)} \quad [15]$$

Si $\delta \uparrow 0$, se puede arreglar en la forma:

$$\operatorname{tg} A = \frac{1}{\cot g t \cdot (\operatorname{sen} j + \cos j \cdot \cot g q) + \cos ec t \cdot \operatorname{tg} d \cdot (\cos j - \operatorname{sen} j \cdot \cot g q)}$$

Por tanto, los ángulos [15] y [16] sólo son iguales si $\theta = \varphi$. De ahí, se comprende la necesidad de colocar el gnomon del reloj horizontal con una inclinación igual a la latitud del lugar en el que vaya a ubicarse.

b) Relojes verticales

Volviendo a [7] y figura 7, las líneas horarias quedan determinadas mediante el ángulo A tal que

$$\operatorname{tg} A = \frac{x_s \cdot \sec a}{z_s + (x_s \cdot \operatorname{tg} a + y_s) \cdot \cot g q}$$

Sustituyendo [12], [13] y [14] en la expresión anterior y reagrupando sus términos, obtenemos:

$$\operatorname{tg} A = \frac{1}{\operatorname{sen} a \cdot \cot g q + \cos a \cdot \{ \cot g t \cdot (\cos j + \operatorname{sen} j \cdot \cot g q) + \cos ec t \cdot \operatorname{tg} d \cdot (\cos j \cdot \cot g q - \operatorname{sen} j) \}}$$

Para que los ángulos con $\delta = 0$ y con $\delta \uparrow 0$ coincidan, ahora, se requiere que $\theta = 90 - \varphi$, lo que implica que el gnomon debe inclinarse con la vertical un ángulo igual a la colatitud del lugar.

En definitiva, los resultados anteriores prueban que en ambos casos las varillas deben orientarse paralelamente al eje terrestre.

Forma de la sombra de una varilla vertical

Consideremos un sistema de referencia como el de la figura 4, con el gnomon OP dispuesto verticalmente. Pro-

yectando desde el Sol el extremo P de la varilla, se obtiene la «sombra» P^* sobre el plano horizontal:

$$P^* = O + l \cdot \vec{r} + m \cdot \vec{u} + l m \cdot \vec{r}$$

Siendo:

$$O = (0, 0, 0)$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = (0, 0, 1)$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{SO} = (-x_s, -y_s, -z_s)$$

$$\lambda = 1$$

$$\neq : z = 0$$

$$m = m(l) = \frac{-\rho(O) - l \cdot \rho(\vec{r})}{\rho(\vec{u}) + l \cdot \rho(\vec{r})} = \frac{-0 - 1 \cdot 1}{-z_s + 1 \cdot 1} = \frac{1}{z_s - 1} \quad \text{según [2]}$$

Con esto, llegamos a las siguientes coordenadas para P^* :

$$x^* = \frac{x_s}{1 - z_s} \quad [17]$$

$$y^* = \frac{y_s}{1 - z_s} \quad [18]$$

$$z^* = 0$$

Sustituyendo [13] y [14] en [18], y despejando $\cos t$:

$$\cos t = \frac{(1 + R \cdot \operatorname{send} \cdot \operatorname{sen} j) \cdot y^* - R \cdot \operatorname{send} \cdot \cos j}{R \cdot \cos d \cdot (\operatorname{sen} j + y^* \cdot \cos j)} = \frac{A \cdot y^* - B}{D} \quad [19]$$

Análogamente, utilizando [12], [14] y [19] en [17]:

$$\operatorname{sen} t = \frac{R \cdot \operatorname{send} + \operatorname{sen} j}{R \cdot \cos d \cdot (\operatorname{sen} j + y^* \cdot \cos j)} \cdot x^* = \frac{C}{D} \cdot x^*$$

Eliminamos el parámetro t , escribiendo:

$$1 = \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = \frac{C^2 \cdot x^{*2}}{D^2} + \frac{A^2 \cdot y^{*2} + B^2 - 2AB y^*}{D^2} = 1$$

Reagrupando términos y desarrollando D^2 , tenemos la cónica:

$$C^2 \cdot x^{*2} + (A^2 - R^2 \cdot \cos^2 d \cdot \cos^2 j) \cdot y^{*2} -$$

$$-2 \cdot (AB + R^2 \cdot \cos^2 d \cdot \operatorname{sen} j \cdot \cos j) \cdot y^* + (B^2 - R^2 \cdot \cos^2 d \cdot \operatorname{sen}^2 j) = 0$$

cuyo género viene determinado por el signo del discriminante Δ :

$$\Delta = -4 \cdot C^2 \cdot (A^2 - R^2 \cdot \cos^2 d \cdot \cos^2 j) \quad [20]$$

De [20] se deduce que el signo de Δ sólo depende del que tenga la expresión $A^2 - R^2 \cdot \cos^2 \delta \cdot \cos^2 \varphi$; por tanto, si esta expresión es positiva la cónica en cuestión será del género elipse, ello requerirá que se cumpla:

$$A^2 - R^2 \cdot \cos^2 d \cdot \cos^2 j > 0 \quad \text{fi}$$

$$\text{fi} \quad \cos j < \frac{A}{R \cdot \cos d} = \frac{1 + R \cdot \operatorname{sen} d \cdot \operatorname{sen} j}{R \cdot \cos d}$$

Teniendo en cuenta que R es muy grande y el rango de valores posibles para δ y φ , se llega, finalmente, a la conclusión de que la cónica anterior es una elipse cuando $\cot g \varphi < \operatorname{tg} \delta$, lo que implica que φ ha de ser mayor que $90 - \delta$, para cualquiera que sea el valor de δ . Es decir, la sombra del extremo de una varilla vertical es del género elipse en aquellos lugares cuya latitud supera los $66^\circ 32' 30''$. Por el contrario,

Juan Ortega
 IES San Juan de la Cruz.
 Úbeda (Jaén).
 Sociedad Andaluza
 de Educación Matemática
 «Thales»

la sombra de la varilla describirá una hipérbola si la latitud es inferior a este valor.

Bibliografía

- BALBUENA, L., D. DE LA COBA y L. CUTILLAS (1996): «La medida del tiempo a través del tiempo», *SUMA*, N.º 23, 33-38.
- BROWN, L.A. (1983): «La longitud». en J.R. NEWMAN: *Sigma. El mundo de las Matemáticas*, Tomo II, Grijalbo. Barcelona, 58-96.
- BUJÁN, D., Ana OTERO y Antón OTERO (1994): «A variabel sombra do sol», *SUMA*, N.º 17, 37-42
- DOMÉNECH, J. (1991): *Trazado y construcción de relojes de sol*, Aguaclara, Alicante.
- IZQUIERDO, F. (1969): *Geometría descriptiva*, Dossat, Madrid.
- DEL RÍO, J. (1994): *Lugares Geométricos. Cónicas*, Síntesis, Madrid.
- RIVAS, N. (1998): *Los cuadrantes solares de la ciudad de Úbeda*. Edita el autor.
- SÁNCHEZ, J.L. (1998): «Matemáticas aplicadas a la Astronomía: tiempo que transcurre entre la salida y la puesta del Sol en los solsticios», *SUMA*, N.º 29, 35-41.
- SERVICIO GEOGRÁFICO DEL EJÉRCITO (1991): *Mapa Militar de España. E 1:50.000 Hoja 20-36 (Úbeda)*, 4ª edición.

