SUMA 40
junio 2002, pp. 65-68

Un ejemplo de utilizar en el área de Estadística las representaciones gráficas con ordenador

Justo Cabezas Corchero
Francisco Moreno Soto

En este artículo se reflexiona sobre la incorporacián de gráficos tridimensionales a la educación matemática en Bachillerato mediante el uso de un sistema de Cálculo Simbólico, y se presenta un ejemplo de aplicación. Al final del artículo se propone una posible línea de ampliación de la actividad descrita y se hace una última reflexión sobre las posibilidades que, para el aula, nos ofrecen los sistemas de cálculo simbólico.

ARTÍCULOS

LAS DIFERENTES EXPRESIONES de una situación matemática han sido siempre uno de los objetivos de la propia matemática. Una situación que admita expresión funcional se puede expresar también gráficamente, creando así una nueva relación entre la situación y su gráfica, que resulta ser una relación clara. De esta claridad se deriva su bondad como método de comunicación de la situación, refrendada por la amplia tradición y extensión de su uso.

Por ello, las representaciones gráficas de funciones tienen una importante presencia en los contenidos de la educación matemática, contenidos de los que nos interesan ahora dos aspectos fundamentales: la construcción y la interpretación de las gráficas. Ambos se admiten como formativos.

La interpretación de los gráficos de las funciones en el plano aporta una información sobre las mismas que es ampliamente utilizada en las clases de matemáticas, de ciencias de la naturaleza y de ciencias sociales. La construcción de gráficos se muestra como medio de estudio sencillo y eficaz en los niveles elementales de la educación. Pero en Bachillerato la incorporación del cálculo diferencial como procedimiento auxiliar de la representación comienza a ser un problema para los estudiantes que, aunque conocen los algoritmos necesarios para llevarla a cabo, a la hora de interpretar los valores obtenidos en los mismos y plasmar el resultado en unos ejes cartesianos suelen tener escaso éxito.

Las representaciones de funciones en el espacio, generalmente, se obvian en los niveles elementales y medios de la educación debido a la complicación de su estudio y trazado, acudiendo si acaso a un dibujo no realizado por el estudiante y su interpretación apenas es testimonial. La interpretación de gráficos de superficies, que parece un instrumento formativo adecuado a la edad de nuestros estudiantes de Bachillerato, está hoy aún ausente de los contenidos usuales del mismo.

Los ordenadores posibilitan la representación gráfica en dos y tres dimensiones con una facilidad impensable hace unos años, lo que permite soslayar los problemas citados anteriormente e incorporar estas representaciones a la educación matemática. Ello, además, puede proporcionar nuevos ambientes de estudio y aprendizaje muy fructíferos y se han publicado muchos trabajos en este sentido (Carrillo y Llamas, 1999). Han aparecido unas nuevas estrategias de exposición e investigación, al principio, como suele ocurrir, imitando las estrategias anteriores al uso del ordenador, hasta que luego se abren paso otras ideas, que superan la concepción del ordenador como mero medio (Pérez, 1998).

En este artículo iniciamos una propuesta de estudio facilitada por el ordenador, que se puede llevar al aula a niveles medios de la enseñanza de la matemática. En ella queremos mostrar un ejemplo de interpretación gráfica de una situación matemática a partir de su representación en el plano (con unas funciones cuya complejidad la hace imposible en estos niveles sin el ordenador) y de la consideración de un parámetro como variable, transformando una familia uniparamétrica de funciones en el plano en una superficie mediante alguna generalización (Cabezas y Roanes, 1999). En concreto, se trata de detenerse en la aproximación que ofrece la distribución normal para la *t* de Student según el número de grados de libertad *n* (en la representación de la superficie se utilizará *n* continua). El programa utilizado es DERIVE v.5 (puede verse Roanes Macías y Roanes Lozano, 1996 y Kutzler, 2000).

La función de densidad de la distribución *t* de Student con *n* grados de libertad es:

$$t_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \qquad [1]$$

A partir de $n = 30$ la distribución se aproxima lo suficiente a la normal como para que se use ésta en muchos cálculos.

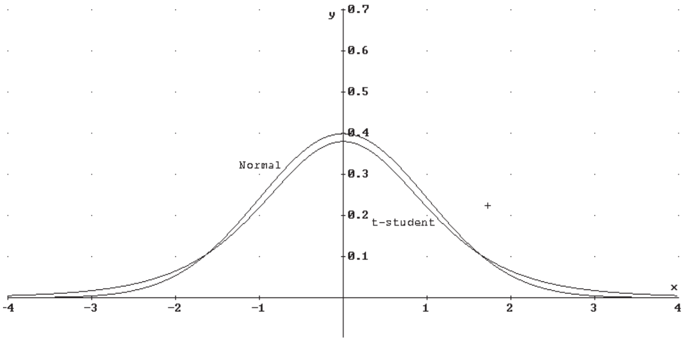
Vamos a estudiar de modo gráfico los errores producidos por esta aproximación. Supongamos $n = 5$. Aunque la función está implementada, la normal $N(0,1)$ se puede editar en DERIVE así:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad [2]$$

Para $n = 5$, la ecuación [1] sería:

$$\frac{1}{\sqrt{5\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{5+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{5}\right)^{-\frac{5+1}{2}}$$

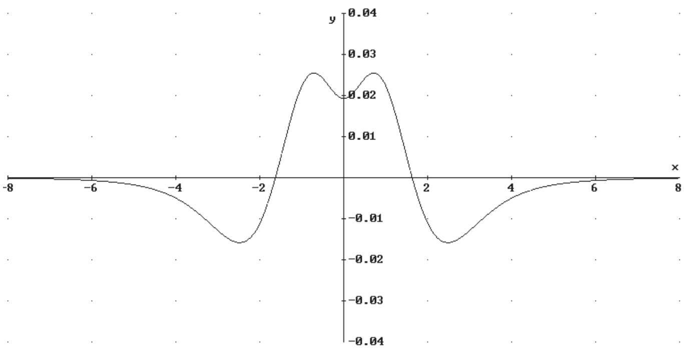
Podemos ver sus representaciones en la siguiente figura:



La diferencia entre los valores de la primera y la segunda función se obtienen editando la diferencia entre las expresiones [1] y [2]. Llamaremos a la función diferencia para muestra de tamaño *n*, $d_n(x)$.

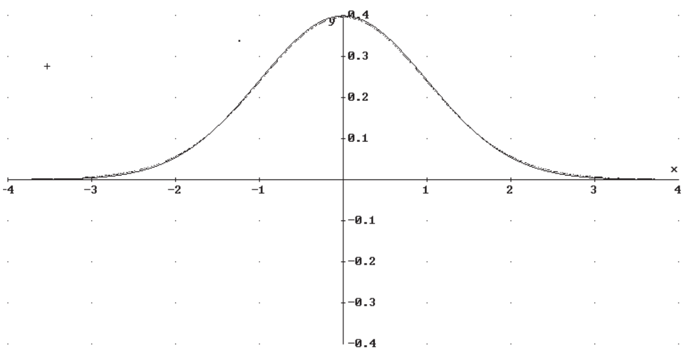
$$d_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

Por ejemplo, la gráfica de $d_5(x)$ es:

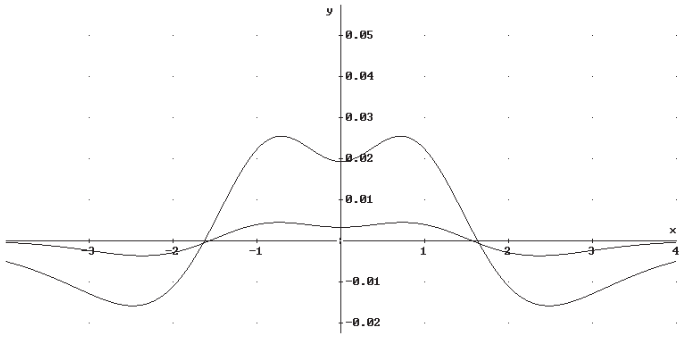


En este momento puede comentarse a los alumnos tanto las características de esta gráfica como la información que aporta.

Reiterando el proceso para $n = 30$ se obtienen las gráficas casi fundidas y por tanto las diferencias son mucho más pequeñas.



La gráfica de $d_{30}(x)$, comparada con la de $d_5(x)$ es:

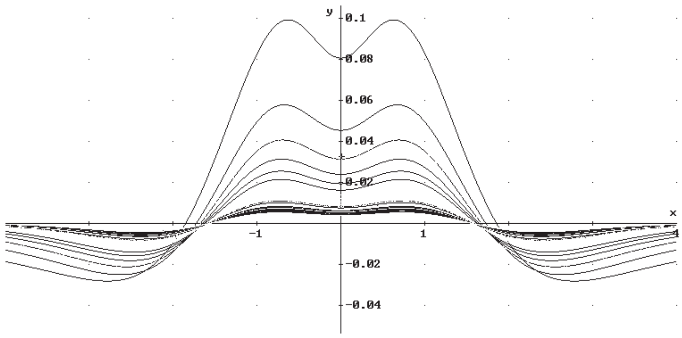


En cualquiera de estas gráficas se puede encontrar el error máximo (se puede derivar con Differentiate e igualar a cero para encontrar la abscisa del máximo mediante Solve y sustituir para encontrar la ordenada o, simplemente, aproximar la abscisa con Plot). Para $d_5(x)$ el error máximo es aproximadamente de 0,0255 en x = 0,711 y x = –0,711.

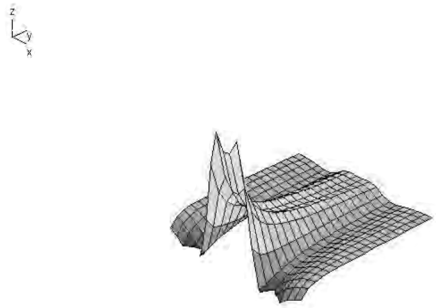
Puede interesar ver la evolución desde una hasta otra. Se puede hacer, por ejemplo, en el plano, representando la familia de funciones de $d_n(x)$ con n = 1,…,30, mediante la opción Vector que incorpora el sistema:

VECTOR (d(n), n, 1, 30, 1)

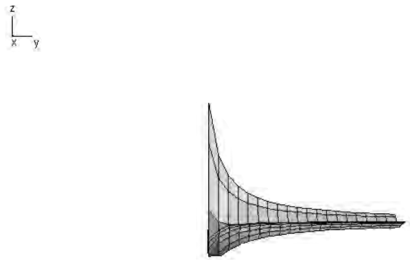
El resultado es:



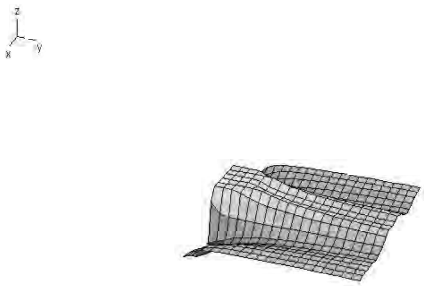
Esta familia de funciones también se puede estudiar como superficie. Basta editar la expresión diferencia de las expresiones [1] y [2]. La representación puede verse en la siguiente figura, donde se observa también la evolución de las gráficas de los errores al aumentar n, originando también otras lecturas y posibilidades de estudio.



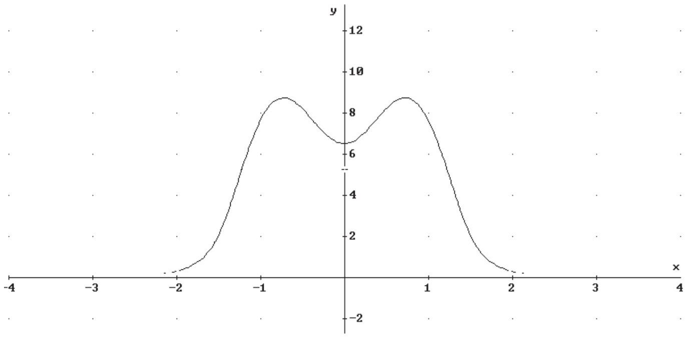
Por ejemplo, la evolución de los máximos y mínimos se puede ver moviendo convenientemente la gráfica:



O, por ejemplo, como las diferencias se expresan en el eje OZ, si deseamos hallar n tal que el error sea menor que k, basta cortar por el plano $z = k$. Las gráficas cercenadas tienen un error mayor. Para k = 0,015 resulta:



Una información más detallada se puede tener en el plano, pues basta representar el borde de la intersección anterior igualando la expresión a 0,015 y representándola en el plano. En la gráfica se puede calcular aproximadamente la solución, n = 9.



El modelo puede seguir dando frutos en la dirección que desee el profesor. Por ejemplo se puede estudiar la familia de funciones a la que pertenece la gráfica anterior. En todo caso la utilización de un sistema de cálculo simbólico para trabajar con familias uniparamétricas de funciones y su expresión como superficie es una posibilidad que se nos ofrece desde hace pocos años y sobre la que podemos construir algunas de nuestras clases.

Justo Cabezas
Universidad de Extremadura.
Sociedad Extremeña
de Educación Matemática
«Ventura Reyes Prosper»
Francisco Moreno
Universidad de Extremadura

Bibliografía

CABEZAS, J. y E. ROANES-LOZANO (1999): «Modificaciones curriculares posibilitadas por las nuevas tecnologías: aparición de contenidos», *Boletín de la Sociedad Puig Adam,* n.° 53, 20-31.

CARRILLO DE ALBORNOZ, A. y I. LLAMAS, (1999): «Trazado de curvas ilustres. Una propuesta con Cabri II», *Suma,* n.° 30

KUTZLER, B.: (2000): *Introduction to Derive 5*, Austria.

PÉREZ, J.: (1998). «Los sistemas de cálculo simbólico en la enseñanza de las matemáticas». *Actas del VIII Congreso de Educación Matemática*, Sevilla.

ROANES-MACÍAS, E. y E. ROANES-LOZANO (1996): *Primeros pasos en DERIVE y en Maple*, Facultad de Educación de la Universidad Complutense de Madrid.