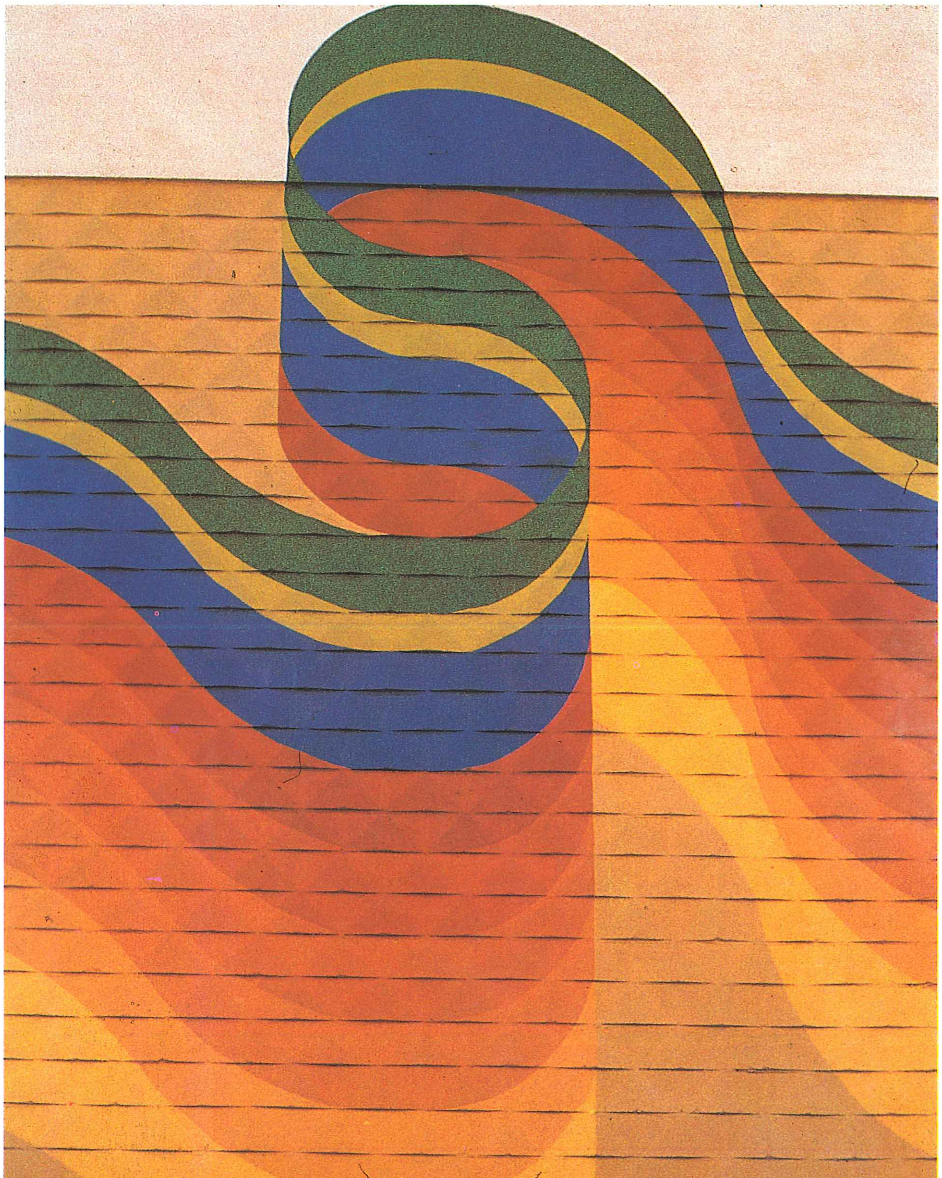
SUMA 4



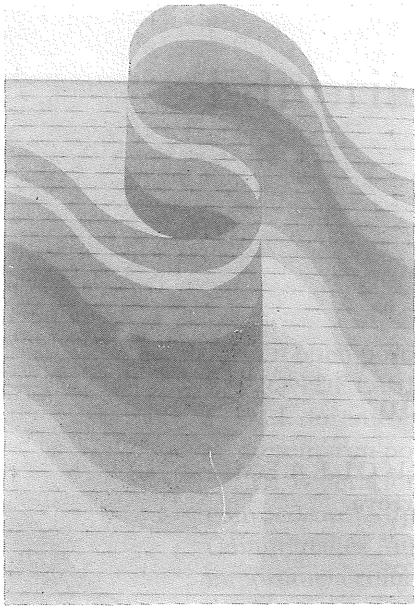
enseñanza y aprendizaje de las matemáticas   Otoño 1989

PANEL DE COLABORADORES

Aizpún López, A., SCPM «Puig Adam», Madrid.
Arias Vílchez, J., SAEM «Thales». I.B. «Auringis», Jaén.
Arrieta Gallastegui, J., Centro de Profesores, Gijón.
Azcárate Goded, P., EUPEGB, Cádiz.
Bou García, L., I.B. «Zalaeta», La Coruña.
Benítez Trujillo, F., SAEM «Thales», E.U. de Estudios Empresariales, Cádiz.
Burgués Flamarich, C., Escola de Mestres «S. Cugat», Univ. Autónoma, Barcelona.
Cajaraville Pegito, J., EUPEGB, Santiago de Compostela.
Cancio León, M.ª P., SCPM «Isaac Newton», Telde (Las Palmas).
Cardeñoso Domingo, J. M.ª, EUPGB, Melilla.
Castro Castro, A., Secret. Gral. Técn. Cons. Educación, Santiago.
Colectivo «Manuel Sacristán», Centro de Profesores, Algorta (Vizcaya).
Colera Jiménez, J., I.B. «Colmenar Viejo», Colmenar Viejo, Madrid.
Coriat Benarroch, M., SAEM «Thales», I.B. «Padre Poveda», Guadix (Granada).
Díaz Godino, J., SAEM «Thales», EUPEGB, Granada.
Dorta Díaz, J. A., SCPM «Isaac Newton», La Laguna.
Fernández Sucasas, J., EUPEGB, León.
Fortuny Aymemí, J. M.ª, Escola de Mestres «S. Cugat», Univ. Autónoma, Barcelona.
Fuente Martos, M., SAEM «Thales», I.B. «Averroes», Córdoba.
García Arribas, C., SAEM «Thales», I.B. «Padre Suárez», Granada.
García Cruz, J. A., SCPM «Isaac Newton», La Laguna.
García González, E., SCPM «Isaac Newton», Las Palmas.
García Cuesta, S., Centro de Profesores, Albacete.
Garrudo García, M., SAEM «Thales», Colegio Público, Palomares del Río (Sevilla).
Gil Cuadra, F., SAEM «Thales», EUPEGB, Almería.
Giménez J., EUPEGB, Tarragona.
Gómez Fernández, J. R., SCPM «Isaac Newton», Santa Cruz de Tenerife.
Grupo AZARQUIEL, ICE de la Universidad Autónoma, Madrid.
Grupo BETA, EUPEGB, Universidad de Extremadura, Badajoz.
Grupo CERO, Centro de Profesores, Valencia.
Grupo GAUSS, ICE de la Universidad de Salamanca, Salamanca.
Grup ZERO, Escola de Mestres «S. Cugat», Universidad Autónoma, Barcelona.
Guzmán Ozámiz, M. de, Facultad de Matemáticas, Univers. Complutense, Madrid.
Hernández Guarch, F., SCPM «Isaac Newton», Las Palmas.
López Gómez, J., SAEM «Thales», I.B. «Luis Cernuda», Sevilla.
Luelmo Verdú, M.ª J., Servicio de Innovación Educativa del MEC, Madrid.
Llinares Ciscar, S., SAEM «Thales», EUPEGB, Sevilla.
Martínez Recio, A., SAEM «Thales», EUPEGB, Córdoba.
Mayor Forteza, G., Dep. Matemáticas, Univ. Islas Baleares, Palma de Mallorca.
Mora Sánchez, J. A., Centro de Profesores, Alicante.
Moreno Gómez, P., Instituto Español, Andorra.
Nicolau Voguer, J., Centro de Profesores, Palma de Mallorca.
Nortes Checa, A., EUPEGB, Murcia.
Padilla Díaz, F. J., SCPM «Isaac Newton», Santa Cruz de Tenerife.
Pareja Pérez, J. L., SAEM «Thales», EUPEGB, Ceuta.
Pascual Bonis, J. R., SNPM «Tornamira», EUPEGB, Pamplona.
Pérez Bernal, L., SAEM «Thales», I. B. «Emilio Prados», Málaga.
Pérez Fernández, J., SAEM «Thales», IFP «Las Salinas», San Fernando (Cádiz).
Pérez García, R., SAPM «P. S. Ciruelo», I. B. «Miguel Servet», Zaragoza.
Pérez Jiménez, A., SAEM «Thales», I. B. «Nervión», Sevilla.
Petri Etxeberría, A., SNPM «Tornamira», C.P. «M.ª Ana Sanz», Pamplona.
Puig Espinosa, L., EUPEGB, Valencia.
Rico Romero, L., SAEM «Thales», EUPEGB, Granada.
Romero Sánchez, J., SAEM «Thales», C.P. «F. García Lorca», Huelva.
Romero Sánchez, S., SAEM «Thales», E.U. Politécnica «La Rábida», Huelva.
Ruiz Garrido, C., SAEM «Thales», Facultad de Ciencias, Granada.
Ruiz Higueras, L., SAEM «Thales», EUPEGB, Jaén.
Salvador Alcaide, A., I.B. «San Mateo», Madrid.
Sánchez Cobos, F. T., SAEM «Thales», C.P. «Virgen del Rosario», Jaén.
Santos Hernández, A., SCPM «Isaac Newton», La Laguna.
Seminario ACCIÓN EDUCATIVA (M. Aguilera, I. Callejo, C. Calvo, L. Ferrero), Madrid.
Socas Robayna, M. M., SCPM «Isaac Newton», La Laguna.
Soto Iborra, F., EUPEGB, Valencia.
Suárez Vázquez, J. A., SAEM «Thales», C.E. «Blanco White», Sevilla.
Varo Gómez de la Torre, A., SAEM «Thales», I.B. «Trafalgar», Barbate (Cádiz).
Velázquez Manuel, F., SCPM «Isaac Newton», Santa Cruz de Tenerife.
Vicente Córdoba, J. L., SAEM «Thales», Facultad de Matemáticas, Sevilla.

SUMA 4

enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Otoño 1989



Fernando Hernández Rojo

Edita:
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.
Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"
Presidente: Gonzalo Sánchez Vázquez
Apartado 1.160. 41080-Sevilla

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas "P. Sánchez Ciruelo"
Presidente: Rosa Pérez García
ICE Ciudad Universitaria. 50006-Zaragoza

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "Isaac Newton"
Presidente: Luis Balbuena Castellano
Apartado de Correos 329. 38080-La Laguna (Tenerife)

Sociedad Castellonenca de Matemáticas
Presidente: Charo Nomdedeu
C/. Mayor, 89. 12001-Castellón

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas "Tornamira" Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea
Presidente: Juan José Pacual Bonís
Dto. Matemáticas. EUPEGB. Plaza de S. José, s/n. 31001-Pamplona

Depósito legal: Gr. 752-1988

Fotocomposición: Lozano

Impresión: Grafsur. Armilla (Granada)

Suscripciones
Revista Suma Apdo. 1017. 18080 (Granada)

Condiciones de suscripción
Particulares: 2500 ptas. (tres números)
Centros: 3000 ptas. (tres números)
Números sueltos: 1000 ptas. (más gastos de envío)

Información

Miscelanea

Editorial

Un buen porcentaje de páginas de este número de SUMA se destina al tema POPULARIZACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS. Presentamos una crónica del encuentro organizado por el I.C.M.I. durante el pasado mes de septiembre en Leeds (Inglaterra) y las ponencias, que en él se presentaron por españoles.

La Federación Española de Profesores de Matemáticas, a través de la Revista SUMA, convocó un Grupo de Trabajo, formado por 33 profesores de matemáticas de diferentes Comunidades Autónomas del Estado Español, con la finalidad de estudiar un tema de gran importancia como lo es el de la Popularización de las Matemáticas.

Las sesiones de trabajo se desarrollaron durante los días 19, 20 y 21 del mes de Junio, en Sierra Nevada, Granada. Comenzaron con el debate del documento suministrado por ICMI, Study-4, cuyos autores son A.G. Howson, J.P. Kahane y H. Pollak publicado en el nº 2 de la Revista SUMA, y concluyeron con la redacción del documento que se publica en esta revista. Estas páginas pretenden resumir los debates que tuvieron lugar y ofrecer las conclusiones a las que se llegó. Están concebidas desde la volutad de dar no sólo unos puntos de vista sobre unas interrogantes internacionales sino también con el intento de provocar futuras actuaciones de popularización en nuestro país. Por todo ello, el documento debe leerse no como colofón a un proceso sino como un punto de partida en un intento de poner en marcha futuras acciones.

Es obvio, pero necesario, decir que en el grupo de trabajo son todos los que están pero que no están todos los que son. Algunos ausentes lo fueron por estar comprometidos con otras actividades en los días durante los que tuvieron lugar las sesiones del grupo de trabajo. Otros, por simple imposibilidad de conectar con ellos al desconocer sus direcciones postales y no haberlas podido conseguir dentro del periodo oportuno para haberlos citado. Y, por último, siempre queda la propia limitación de los organizadores que les hace desconocer actividades tan dignas como las aquí contempladas. Nuestras disculpas hacia quienes desarrollen alguna de estas últimas junto con el ofrecimiento de la Revista SUMA de que hagan llegar a su Redacción el contenido de las mismas ya que se ha abierto un banco de datos al respecto del que se dará información periódicamente.

Por último, hemos de agradecer al Prof. Dr. Claudi Alsina, representante español en el I.C.M.I., la presentación, junto a su ponencia, del documento que aquí se publica, en dicho Seminario Internacional. Así mismo, queremos reconocer el apoyo prestado para la formación del grupo de trabajo de la Subdirección General de Perfeccionamiento del Profesorado del Ministerio de Educación.

Revista "SUMA"

Utilidad e interés de la didáctica para un profesor (1ª parte)*

Guy Brousseau

Traducción española: J. Díaz Godino

Cuando se me pidió un artículo sobre "lo que la didáctica de las matemáticas puede aportar a UN profesor de secundaria" estuve fuertemente tentado a eludir el compromiso ya que la apuesta me parecía bastante difícil.

Esta reticencia proviene de un conjunto de circunstancias desfavorables y escandalosas:
—!la didáctica es difícil de explicar, sobre todo a los profesores¡
—frecuentemente es más difícil de explicarsela a medida que esperan más efectos de ella; desde este punto de vista, las condiciones de la enseñanza en el primer ciclo de secundaria son vividas como tan malas que justifican las expectativas más imperiosas;
—todavía es más difícil de justificar a sus ojos cuando piensan que la didáctica debe aportarles una ayuda para lo esencial, bajo forma de innovaciones, veremos después por qué;
—además, el tema que se me ha propuesto agrava la situación: se me pide presentar, no lo que la didáctica puede hacer, sino lo que pueda cambiar en la vida de UN profesor cualquiera de secundaria;
—por último, existe un contencioso rastrero con los innovadores y los partidarios de la didáctica-acción en relación a lo que es, puede y debe hacer la didáctica; el malentendido es tal que frecuentemente ha desalentado a los IREM a proponer una solución coherente para sobrevivir cuando el gobierno ha mostrado algunas veleidades de reorganizar este tipo de investigaciones pedagógicas; la didáctica ha sido presentada como una alternativa, mas bien como obstáculo, a las aspiraciones de una parte de los profesores que reivindican una concepción ampliada de la "investigación" y no ha obtenido por esta circunstancia ninguno de los medios de los que tiene necesidad incluso para existir.

Durante mucho tiempo me he abstenido de responder de otro modo que por mis trabajos y por el ejemplo de mis relaciones con los profesores y los maestros.

* N.R.–

1. Este trabajo es una traducción del artículo del profesor Guy Brousseau publicado en el número 21 de la Revista Petit x nº 21 pp. 47 a 68. La redacción de la Revista Suma, tras recibir la autorización del autor, ha considerado de interés su publicación en este número, tanto por el tema que trata como por el prestigio internacional de su autor.

2. Guy Brousseau fué alumno de la Escuela Normal y después maestro durante 10 años, iniciando sus estudios universitarios en Burdeos. En 1965, creó el CREM (Centro de Investigación sobre la Enseñanza de la Matemática, que se convertiría en el IREM en 1969) y en 1971 comienza un trabajo sistemático de observación en una escuela primaria: intenta hacer una escuela "para la investigación". La escuela Jules Michelet se crea oficialmente como "Escuela para la observación" en 1975. Este mismo año, obtiene en Burdeos - y al mismo tiempo en París y Estrasburgo - un D.E.A. de Didáctica de las Matemáticas. Desde hace 20 años, experimenta los objetos de enseñanza que él produce con la ayuda de la teoria de la transmisión de los conocimientos matemáticos que ha ideado, que enseña, y que continua construyendo: la didáctica de las matemáticas.

3. En el artículo se utiliza el término educación "secundaria". Entiéndase; educación para alumnos de 11 a 15 años.

Animado por la redacción de "Petit x" y el éxito de su revista, acepto hoy este desafío con la esperanza de aportar una contribución útil. La abnegación de los profesores por la causa de la educación les hace capaces de entender y comprenderlo todo, ésta es la única justificación de mi optimismo.

Objetos de la Didáctica

Tratemos pues de tomar un problema banal de enseñanza -un problema no resuelto- y de buscar lo que la didáctica puede hacer.

En la escuela elemental, los alumnos se entrenan, siguiendo las reglas del cálculo, en pasar de un término (sin variable) a otro - que es igual a él- hasta la obtención del **resultado** bajo su forma canónica. "3+4=7" es leido como: "efectuando correctamente el cálculo 3+4 se encuentra 7". 3+4 es quizás igual a 7, no puede sustituirlo como respuesta, no le es **equivalente**.

Cuando estos alumnos aprenden álgebra, se trata de entrenarles en pasar de una fórmula a otra que es lógicamente equivalente, hasta la obtención de una relación utilizable para lo que se quiere hacer. "3+4=7 y 7=4+x" implica "x=3".

Superficialmente, se podría pensar que el profesor y el alumno continúan sirviéndose de los mismos conocimientos antiguos a los cuales se unen los nuevos; se limita a escribir lo que anteriormente sólo se pensaba; bastaría ver "3+4" como un número, "x" como un número desconocido, "=" como la identidad ... De hecho, es bien conocido que todo ha cambiado a propósito de estas escrituras familiares: el uso que se hace, el sentido que se le da, el fin de las transformaciones que se realizan ... Al lector que parezca insuficiente esta introducción intuitiva y breve debe remitirse a los trabajos de Y. Chevallard sobre estas cuestiones.[1]

El alumno, por tanto, debe, no sólo aprender nuevos conocimientos, sino tambien re-aprender y re-organizar los antiguos y olvidar - o más bien des-aprender una parte.

¿En qué medida esta observación es compatible con las bases de la evaluación tal y como se practica hoy? ¿Estas bases siguen siendo válidas? ¿Podemos mejorarlas directamente sin implicar a los métodos didácticos y las concepciones de los enseñantes? No sabemos distinguir bien las diferentes relaciones que el enseñante y sus alumnos puedan tener con un mismo conocimiento, ni describir las diferentes significaciones que puede tomar según las circunstancias en las cuales sirve y según la persona que se sirve de él.

No sabemos afrontar bien el aprendizaje en términos de cambios de relaciones respecto del saber o en términos de transformaciones de conocimientos del alumno. No sabemos describir bien el papel de los conocimientos antiguos en la construcción de los conocimientos nuevos.

¿Qué lugar es preciso dejar en la enseñanza a estas reorganizaciones de los conocimientos antiguos en relación a las yuxtaposiciones de aprendizajes nuevos? ¿Este lugar depende de las nociones? ¿Existen conocimientos que se convierten en obstáculo para los aprendizajes ulteriores? ¿Existen técnicas didácticas más favorables que otras a este respecto?

Actualmente, la integración de los conocimientos nuevos a los antiguos se deja completamente a cargo del alumno, el profesor se contenta comunicando por etapas trozos del saber "verdadero" de nuestra época; ¿puede el enseñante prescindir del pasado del alumno dejándole entender que aparte de los algoritmos, todo lo que ha aprendido anteriormente es inutilizable? ¿Puede el alumno comprender lo que se le enseña bajo estas condiciones?

Los curricula construidos hoy no preven otra cosa que la yuxtaposición de los aprendizajes; ¿qué consecuencias observables se puede deducir de esta "insuficiencia", sobre la enseñanza, y sobre los pasos de un nivel escolar a otro? ¿y sobre las concepciones didácticas y epistemológicas de los profesores? ¿Se producen estas consecuencias? ¿Se pueden imputar sólo a esta causa?

Ciertamente, sería absurdo concluir que no es preciso enseñar el cálculo en la escuela primaria y no parece que sería fácil enseñar directamente el álgebra: **la enseñanza directa del saber definitivo es imposible** o en tal caso sería necesario renunciar a hacerlo funcionar. **La utilización y la destrucción de los conocimientos precedentes forman parte, por tanto, del acto de aprender.**

En consecuencia, es necesario admitir una cierta "reorganización didáctica" del saber que le cambia el sentido, y admite, por lo menos transitoriamente, una cierta dosis de errores y de contrasentidos, no solamente

[1] Ver Petit x, n. 5 y 19

por parte de los alumnos sino también del lado de la enseñanza. ¿Pero cómo transformar el saber para hacerle provisionalmente inteligible, sin hacerlo demasiado falso en los aspectos que no puedan ser borrados? ¿Y cómo rectificar a continuación los errores?

¿Y con qué derecho podría un profesor hacer sufrir transposiciones didácticas al saber cultural común? ¿Cómo regular las inevitables distorsiones? ¿Esta tarea puede estar completamente al cargo de UN profesor o incluso de ALGUNOS profesores? ¿Se les puede imponer que enseñen conocimientos falsos, incluso provisionalmente, sin un acuerdo cultural al respecto? ¿Este acuerdo se puede obtener si cada protagonista es conducido a tener que ignorar todo análisis serio? ¿Quién se encarga de esta transacción, qué organización social puede permitirla en condiciones honestas para todos?

Estas son algunas de las cuestiones "simples", casi ingenuas, que se plantean en didáctica de las matemáticas a propósito de UN FENÓMENO común relevante de su campo.

A propósito de este fenómeno, un primer carácter salta a la vista: es la complejidad, complejidad que, en dominios muy variados, requiere tanto investigaciones experimentales y reflexiones fundamentales como invenciones o investigaciones de ingeniería. Esta complejidad se resalta cuando se trata de plantear las cuestiones necesarias para las investigaciones, pero se hace agobiante, cuando para adoptar una decisión cualquiera, se trata de integrar las respuestas obtenidas eventualmente. Esta complejidad es suficiente para justificar la desconfianza: se podría invertir eternamente en investigaciones de detalle sobre la enseñanza, sin obtener otra cosa que sugerencias dispersas y gratuitas.

Un segundo carácter importante: las cuestiones planteadas requieren investigaciones en dominios de conocimientos muy diferentes, y de un modo que no parece posible responder independientemente a cada uno de ellos. Esta observación subraya la necesidad de una aproximación unitaria y sistémica de las cuestiones de didáctica.

Utilidad de la Didáctica

Es hora de inventariar las formas diferentes bajo las cuales un profesor de secundaria puede esperar ver que la didáctica de la matemática se manifiesta para él, los resultados que promete y los que ha obtenido. Es necesario explicar también porqué no se manifiesta actualmente de manera más evidente.

1. Técnicas para el enseñante

El profesor espera que AL MENOS la didáctica le proporcione lo esencial de LAS TECNICAS ESPECIFICAS de las NOCIONES A ENSEÑAR, compatibles con sus concepciones educativas y pedagógicas generales.

—Técnicas locales:

–comunes: preparaciones de lecciones, material de enseñanza, métodos claves puestos a punto, instrumentos de gestión, objetivos y evaluación;

–u optativos, para ciertos alumnos que presentan dificultades particulares.

—Técnicas globales, curricula para todo un sector de matemáticas, programas para varios años.

Esta expectativa es legítima, los didactas han comenzado a estudiar numerosas situaciones de enseñanza, originales o no, sobre todo al nivel elemental o superior. Pero estos estudios son largos y difíciles.

En el ejemplo anterior sobre el tratamiento de las escrituras, para la introducción del álgebra, todo o casi todo está por hacer, aún cuando algunas de las vias posibles comienzan a ser exploradas: ¿el álgebra se puede introducir hoy como recuperación teórica del estudio de la aritmética y de los números?, ¿o como sistema de designación de magnitudes?,¿o como instrumento del estudio de las funciones?, ¿o como sistema formal autónomo?, ¿cómo estenografía de algoritmos que se refieren a valores desconocidos o no determinados?, ¿cómo medio de generalización o de modelización?... Se pueden improvisar numerosos montajes pero antes de proponer algunos, es preciso examinar sus propiedades en relación a un número considerable de exigencias. Como hacía observar Dieudonne "mientras que apenas fue necesario un siglo para que la geometría elemental lograra una forma casi definitiva, han sido necesarios 13 siglos desde Diofanto para que el álgebra llegue a ser lo que ahora conocemos", !el paso no debe ser tan evidente¡

Además, el número de conocimientos a comunicar a los alumnos y por tanto el de situaciones específicas a proponerles es muy elevado. Para ser razonablemente comunicable a los enseñantes, la didáctica debe pues producir también conceptos unificadores, reagrupar los saberes, los problemas, las situaciones, los comportamientos de los alumnos, de manera que se permitan formas de intervención genéricas, según los tipos obtenidos.

La existencia de una técnica se apoya al menos sobre la identificación y el reconocimiento de prácticas y de sus resultados canónicos. Una ingeniería apoya las técnicas que propone sobre un campo científico. La comunicación, la utilización y la reproducción de las situaciones producidas reclama el recurso a conocimientos y saberes específicos.

Así la didáctica es el único medio de identificar exactamente lo que es un problema no resuelto de ingeniería didáctica, de identificar y de clasificar un trabajo original en este dominio, de precisar las condiciones de empleo y de reproducción de éste, y por tanto de reconocer y hacer reconocer las creaciones, las invenciones y los procesos de investigación y de producción científica en los enseñantes.

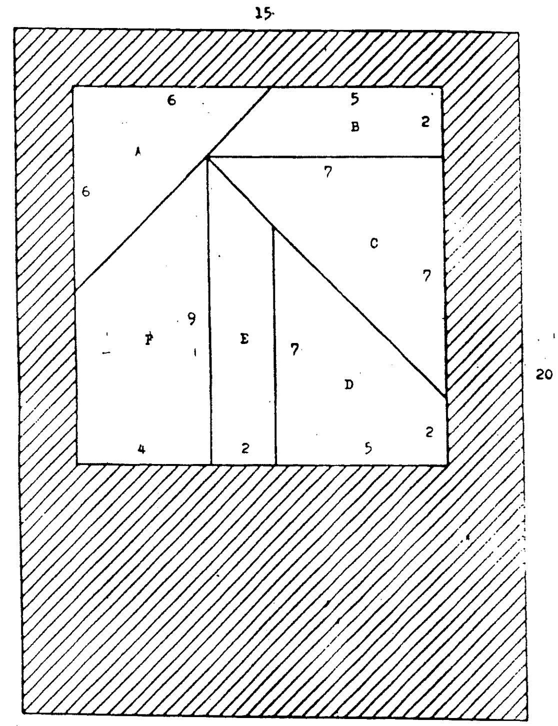
En definitiva, y haciendo respetar la parte técnica del oficio de profesor, la didáctica hace posible la negociación social de su trabajo. De este modo es el fundamento de la profesionalización de su actividad.

Pero el hecho de catalogar las situaciones de enseñanza no les da ninguna virtud para la enseñanza. ¿Qué ventajas podrían tener para los niños?

Los ejemplos a los cuales se puede uno referir muestran que las "buenas" situaciones, las que permiten realizar condiciones pedagógicas más exigentes, es decir, lecciones más seguras para el profesor siendo más abiertas para el alumno, no son verdaderamente comunicables si no son también bien estudiadas. La didáctica ha introducido situaciones más variadas y mejor adaptadas a intenciones específicas, como, por ejemplo, hacer adquirir un conocimiento por la acción, hacer adquirir un lenguaje, o una teoría, tratar un obstáculo epistemológico, ...

Se me perdonará que recuerde aquí un ejemplo personal pero bien conocido de los lectores de "**petit x**": la lección llamada "del PUZZLE".[2]

Indiquemos brevemente su contexto. Se trata, después de haber estudiado los racionales y los decimales como medidas (1,78 m por ejemplo), de extender su utilización por los alumnos a la designación y al cálculo de aplicaciones lineales (multiplicar por 1,78 por ejemplo). Los estudios muestran que los métodos clásicos de introducción, la mayoría fundados sobre la construcción explícita por composición de aplicaciones naturales ya conocidas por los alumnos (multiplicar por 178 y dividir por 100), presentan insuficiencias. La idea consistía en poner a los alumnos ante la obligación de utilizar implícitamente tales aplicaciones (una familia bastante numerosa) y de prever sus efectos y sus propiedades (ordenarlas, prever su suma, su producto, ...) de manera que sean conducidos a buscar un modo cómodo de designarlas. Era necesario pues que aparecieran (una sola en un primer lugar, después otra y así sucesivamente), antes que nada como solución implicita de un problema de acción, con el fin de plantear a continuación los problemas de comunicación que justificaran explícitamente la búsqueda de un sistema de designación.



(Brousseau, 1986)

Este problema de acción, recordémoslo, consiste para los alumnos en encontrar el medio de agrandar las piezas de un puzzle de tal manera que la pieza de lado 4 tenga por imagen una pieza de lado 7 y que el puzzle imagen funcione también como un puzzle verdadero.

La astucia consiste en pedir a los pequeños grupos (de dos alumnos para favorecer la expresión de los conflictos cognitivos que surgirán) que reproduzcan cada uno una pieza del puzzle (para favorecer los conflic-

[2] He presentado y estudiado esta lección en 1981 en "Problemas de didáctica de los decimales", Recherches en Didáctica des Mathématiques, Vol 2.1. Ha sido citada en "petit x" n. 9 (1985), pp 63-65 por Ph. Clapponi, en el n. 11 (1986), p20 por F. Pluvinage. En el n. 17 (1988) pp. 49-56, C. Morin da de manera detallada las conductas de los alumnos observados en las replicaciones que ha organizado.

tos que nacen de las tentativas de ajuste de las piezas). Les parecía claro que es necesario que la imagen de cada longitud se calcule con operaciones aritméticas elementales, pero cuáles. "¿La longitud medida +3cm"? "¿2 veces la longitud menos 1?". El intento de acoplar las piezas constituye un refuerzo real que no permite sino aplicaciones bastante próximas a 7/4: "dos veces la longitud menos 1" funciona casi bien, salvo para 0.5 cm como es lógico.

La búsqueda por los alumnos de una **solución intelectualmente satisfactoria** va a ser la fuente de la comprensión después de la explicitación de la propiedad fundamental de la linealidad: ES NECESARIO que la imagen de la suma de dos longitudes sea la suma de las imágenes de estas longitudes. Pero si la solución no aparecía demasiado pronto la aplicación x7/4 se va a situar en un entorno implícito de funciones próximas, en el sentido topológico, que prefigura la estructura estudiada un poco más tarde.[3]

El éxito de este proceso, experimentado en el curso CM2 en condiciones favorables ha proporcionado mucha esperanza y entusiasmo mostrando además que su generalización a todas las clases de sexto sería difícil.[4]

Estas esperanzas de los profesores en la ingeniería son legítimas, pero van acompañadas de presupuestos que lo son menos: es necesario que para su puesta en práctica, estas técnicas no exijan otros conocimientos ni otras condiciones que las que disponen actualmente los profesores, los alumnos y sus padres. Y sería preciso que su utilidad y su eficacia se revelen, no obstante, inmediatamente a los ojos de todos, bajo forma de ventajas manifiestas y regulares en relación a las prácticas actuales.

Ahora bien, estas prácticas son consideradas como bien conocidas pero no son descritas completamente; el número de parámetros de las que parecen depender les hace aparecer como muy poco homogéneas, y según el momento, pueden estar tan llenas de todas las virtudes como de todos los defectos.

Es muy difícil para un investigador o para un profesor, publicar para sus colegas, pero también leer la descripción detallada de las condiciones necesarias en una situación de enseñanza (en el estado actual de la didáctica, esta descripción reclama por lo menos una treintena de páginas) La costumbre le conduce a no describir, sino de manera sucinta, el desarrollo y los efectos, lo que de hecho es insuficiente para una buena reproducción (basta leer las revistas y las obras que describen lecciones para ver hasta qué punto estas relaciones pueden ser imprecisas, y compararlas con las que se hacían hace quince años para observar los progresos realizados). ¿Piensa usted que es sufiente enumerar las jugadas de una partida de **maestros del ajedrez** para que se **manifiesten** sus estrategias y para que se pueda "reproducir" una partida ganadora? A pesar de que la descripción exige esfuerzos considerables, todas estas precisiones aparecen como superfluas e incluso ofensivas para el lector, son recibidas como un discurso pedante.

Los términos empleados en estas descripciones deberían ser los que los profesores emplean en su trabajo. Pero sí es indispensable usar conceptos que difieren de los que los profesores utilizan para designar a los objetos relacionados, esto no será sino porque se quiere controlar la definición teórica; entonces aparece el siguiente dilema: por una parte la utilización de un término nuevo y alejado parece bastante costosa, por otra parte, la utilización del término corriente introduce contrasentidos y las hipótesis o los resultados más seguros suenan como evidencias pomposas —se cree saber porque se conoce— por último la introducción de un término evocador, aunque original, despierta con razón la desconfianza y la ironía cuando se puede utilizar una palabra familiar en lugar de una jerga.

En resumen, los profesores esperan la didáctica sobre un terreno donde ellos reinan como "maestros" (la palabra es acertada) y donde nada les prepara ni les motiva para recibir lo que realmente es.

2. Conocimientos sobre la enseñanza

El profesor puede esperar también que la didáctica se manifieste por medio de conocimientos relativos a distintos aspectos de su trabajo:

[3] El conjunto de los procesos se describe de manera detallada en N. et G. Brousseau, "Rationnels et Décimaux dans la scolarité obligatoire" IREM de Bordeaux. (535 páginas) (1987).

[4] Esta lección no es sino la introducción a un proceso que debe concluir para que los alumnos puedan encontrar y dominar todos los aspectos del empleo de las aplicaciones racionales y decimales. Aislada, colocada en un contexto desordenado, o administrada sin rigor puede no funcionar sino como un ejercicio de aplicación o como un soporte metafórico al discurso enseñado. Pero esta técnica es bastante sólida: incluso mal analizada y mal empleada conserva un cierto atractivo.

—sobre los alumnos, sus comportamientos, sus resultados en las condiciones específicas de la enseñanza;
—sobre las condiciones a crear en las situaciones de enseñanza y de aprendizaje;
—sobre las condiciones a mantener en la gestión o la conducción de la enseñanza;
—sobre los fenómenos de didáctica a los cuales están confrontados con todos los restantes compañeros de la comunicación de los saberes.

El primer punto es sobre el cual los resultados son ciertamente más numerosos y más seguros. Por otra parte, los profesores están siempre interesados por los informes que exponen los errores y las conductas de los alumnos, pero queda mucho por hacer para comprender las causas de estos errores y no limitarse a constatarlos; en este sentido, observemos más de cerca una de las cuestiones presentadas en la introducción:

"¿En qué medida el funcionamiento de los saberes "institucionalizados" depende de conocimientos no descontextualizados, enseñados previamente más o menos implícitamente? (Los conocimientos institucionalizados son los que el maestro enseña explícita y formalmente al alumno; son el objeto de los controles y el alumno sabe que deben ser aplicados).

"Comprender" para un niño, es establecer y relacionar bajo su propia responsabilidad los fenómenos o hechos presentados como "independientes", a la vez por el enseñante, por la situación, por su lenguaje y por los conocimientos aprendidos.

Por ejemplo, un niño puede comprender las primeras mediciones con la ayuda de la operación de contar , aprender las propiedades del orden de los números con la ayuda de la medición, controlar las operaciones con la ayuda del orden ("esto aumenta así pues no es preciso dividir") o de otra operación (multiplicar es sumar un cierto número de veces), comprender la operación de contar gracias a operaciones (trece es diez más tres) o la búsqueda de sucesores... y todas las relaciones posibles, verdaderas para los enteros, son buenas para dar sentido.

Estos conocimientos, ligados por el alumno personalmente, o gracias a la historia de la clase, no son todos institucionalizados por la actividad del enseñante, pero algunos si lo son, y justamente, en el contexto. Aparecen, en todos los casos, como indispensables para el funcionamiento conveniente de los conocimientos institucionalizados, enseñados por el profesor.

Para el alumno, estas propiedades de los naturales son las de los números en general, de todos los números.

Ahora bien, la inclusión del conjunto de los naturales en un subconjunto como los racionales o los decimales, al mismo tiempo que hace aparecer propiedades nuevas hace desaparecer otras: dejan de ser verdaderas para todos los números, o incluso no lo son para ninguno: multiplicar puede empequeñecer, un decimal no tiene sucesor ...

El enseñante no puede advertir convenientemente al alumno de esta ruptura, pues, ni la cultura, y en particular la tradición, ni la ingeniería didáctica ha producido todavía los instrumentos necesarios (ejercicios, advertencias, conceptos, observaciones, paradojas ...) Esta situación conduce al enseñante a provocar equivocaciones y malentendidos y a cometer errores al alumno. Estas concepciones falsas persisten pues están ligadas a una cierta manera de comprender las propiedades de los números naturales, y se puede observar los efectos de la ruptura durante muchos años.

Aún más importante es el mecanismo de este obstáculo: no es que los conocimientos enseñados sean defectuosos—en general los enseñantes atienden a este inconveniente tratando de mantenerse en un discurso incomprendido pero correcto— se debe a los instrumentos personales de la comprensión del alumno. No comprende, porque lo que se debería cambiar son justamente los medios de lo que él consideraba "comprender" hasta ese momento.

La didáctica no puede aportar la solución a tal problema mediante simples arreglos de ingeniería. Puede proponer eventualmente procesos de descontextualización, como los "cambios de cuadros" de R. Douady, o situaciones que permitan combatir un conocimiento-obstáculo, como los conflictos socio- cognitivos... pero la didáctica no puede hacer nada cuando la dificultad viene de que el enseñante ignora las referencias contextuales del alumno, necesarias para que no pierda el fruto de su experiencia en las nuevas adquisiciones. Es fácil mostrar que las causas de esta imposibilidad de manejar la memoria de los alumnos gracias a una memoria correcta del sistema son frecuentemente culturales. El problema debe ser atacado a este nivel. La didáctica debe interactuar con la cultura.

Pero los hechos que hemos evocado son los elementos de un fenómeno más amplio que envenena las relaciones entre padres, profesores y alumnos en los momentos de cambios de clase y de nivel:

Un profesor quiere recordar al alumno en dificultad los conocimientos de los cuales tiene necesidad; se trata de conocimientos bien institucionalizados: por tanto, deberían estar disponibles. Pero su empleo y su comprensión depende de un contexto; si este contexto es ignorado por el profesor, la situación se bloquea. Con frecuencia el alumno "descubre, después del examen, que conocía muy bien lo que se le pedía pero que no había comprendido la pregunta".

El único medio para el profesor de conocer las circunstancias de la creación de los conocimientos, es, bien haber enseñando él mismo la noción a este alumno, o disponer de un conjunto de refencias culturales, bien sean consecuencia de una tradición o de un conocimiento profesional (pero esta especie de "clasicismo" de la didáctica, si consiste en una institucionalización de los problemas, puede revelarse como una solución peligrosa que mata la reflexión matemática). Entonces puede evocar las situaciones de aprendizaje que no ha vivido porque son convencionalmente fijadas.

Ante las dificultades y las incomprensiones de numerosos alumnos en la utilización de conocimientos simples, es forzoso reconocer el fracaso (del alumno, de la enseñanza, del método, del programa ...) y pedir una focalización (del alumno, de la enseñanza, etc) sobre lo que es más fácil definir,evaluar y enseñar: los algoritmos, es decir sobre lo que quizás se precisa menos; el alumno sabe hacer una división pero no sabe cuándo es preciso hacerla.

Resultado: los responsables se preocupan, los profesores se conciertan, y para mejorar el paso de un nivel a otro, la enseñanza ignora y desprecia aún más los conocimientos contextualizados y personalizados del alumno. El proceso se autoalimenta hasta un momento donde aparece, para los enseñantes y los alumnos, la necesidad de romper con el psitacismo (la repetición desprovista de sentido). Esto es lo que ha pasado hace unos años: la noosfera (el conjunto de personas y grupos interesados en la creación y en la comunicación de los saberes de un cierto dominio) invita a un esfuerzo de invención, de originalidad y de innovación pedagógica. En consecuencia se supone que cada uno ignora el método personal del otro. El aumento de la variabilidad didáctica espontánea lleva a disminuir las oportunidades, para cada profesor, de articular y de tener en cuenta los conocimientos personales antiguos de sus alumnos.

El proceso ha sido facilitado por la existencia de textos del saber que se presentaban como universales y definitivos pero que han provocado también, de rechazo, un aplastamiento de la enseñanza mediante un conocimiento formal...

La didáctica comienza a poner en evidencia los factores de la evolución relativamente caótica de la transposición didáctica.

El juego del contrato didáctico viene acompañado de toda una familia de fenómenos en la que se percibe, a través de los desequilibrios y las correcciones, las reglas de la evolución del sistema o al menos el efecto de sus variables.

El estudio del CONTRATO DIDACTICO ha conducido al descubrimiento de fenómenos como los efectos "Topaze" y "Jourdain", el efecto del deslizamiento metadidáctico, el efecto de la analogía ... de los que hablaremos a continuación. Estos fenómenos pueden ser inferidos del modelo teórico y observados, tanto al nivel de una lección en una clase como en el conjunto de una comunidad.

El "efecto TOPAZE" consiste en lo siguiente: la respuesta del alumno está casi determinada de antemano, y el profesor negocia las condiciones en las cuales se producirá, y que le darán un sentido. Trata de procurar que este sentido sea lo más rico y lo más exacto posible y para ello propone las cuestiones más abiertas. En caso de fracaso, proporciona información para facilitar la respuesta. Se termina por aceptar condiciones que provocan la respuesta del alumno sin que éste tenga que comprender el menor sentido, como en la primera escena de "TOPAZE" de Pagnol.

El "efecto JOURDAIN" es una forma de efecto Topaze: para evitar un debate sobre el conocimiento con el alumno, y eventualmente el reconocimiento de un fracaso, el profesor acepta admitir como índice de un saber o de una deducción auténtica, una producción o una conducta del alumno que no son de hecho sino respuestas triviales —por tanto desprovistas de valor e incluso de sentido— Ejemplos: la escena del "Bourgeois gentilhomme" de Molière donde el profesor de filosofía revela a M. Jourdain que hace prosa o aquella en que hace discursos pedantes mientras que Jourdain cree aprender la ortografía pronunciando las vocales.

El DESLIZAMIENTO METADIDÁCTICO ha tomado una gran envergadura y ha tenido consecuencias importantes en un pasado reciente: cuando fracasa un intento de enseñanza, el profesor a veces se propone retomar de nuevo su texto para explicarlo y completarlo. De medio de enseñanza, esta primera tentativa, se convierte en objeto de estudio y a veces en objeto de enseñanza; la forma se convierte en fondo. Por ejemplo, para explicar el lenguaje conjuntista, fundamental, pero en ruptura con el pensamiento natural, los profesores de los años 70 han querido utilizar, bajo la forma de los famosos diagramas de Venn y otras "patatas", los esquemas que Euler había inventado para Catalina de Rusia en sus "cartas a una princesa de Alemania". Como esta metáfora no era un buen modelo y con la intención de vulgarizarla, era necesario fabricar nuevas convenciones y enseñar el medio de enseñar como si fuera el objeto: el lenguaje conjuntista para la lógica, el diagrama para el lenguaje formal, el vocabulario de los diagramas para los dibujos, las convenciones para el vocabulario. El deslizamiento metadidáctico ha escapado al control de la comunidad, provocando magníficos malentendidos durante mas de 10 años a una escala planetaria, sin hablar de las secuelas que experimentamos todavía sobre la epistemología del público y de los profesores.

Pero existen otros fenómenos de este tipo que dependen del saber planteado y de las circunstancias.

No es seguro que las producciones cognitivas al final de la investigación formen un conjunto de conceptos perfectamente adaptados a su comunicación y a la formación de los alumnos. Existen "puntos ciegos" de la cultura. Saberes útiles para el desarrollo de un individuo no figuran en tanto que nociones científicas en la cultura, y la enseñanza no puede evidentemente llenar esta falta: por ejemplo, la enumeración de colecciones —aspectos furtivos de la combinatoria— o la representación del espacio para la organización de acciones, desplazamientos, medidas, —sectores devorados por el debate geométrico del matemático— o incluso el pensamiento natural —absorbidos por la lógica, etc.

De manera más general, el modo de producción "natural" de la actividad matemática, solicitado sin descanso por los buenos profesores, no puede ser recibido y reconocido como tal, es necesario pues sustituir el modo de construcción y el lenguaje en uso. Si no es posible hacer esto inmediatamente, todo el sistema se encuentra ante el problema de "memorizar" conocimientos transitorios, de un estatuto incierto, no reconocidos por la ciencia, después de hacerles evolucionar, sin poder expresarlos ni reconocerlos.

El esfuerzo concedido para obtener los saberes, independientes de las situaciones donde funcionan (descontextualización), se paga en pérdida de sentido y de operacionalidad en la enseñanza. El establecimiento de las situaciones (recontextualización) inteligibles se paga en deslizamientos de sentidos (transposición didáctica). La retransformación en saberes del alumno o en saberes culturales repite el proceso y agrava los riesgos de deriva. La didáctica es el medio de administrar estas transformaciones y en primer lugar, de comprender sus leyes.

Volvamos a la gestión de las expresiones algebraicas por los alumnos. Y. Chevallard ha mostrado el fenómeno de conservación ostensiva de la información: un contrato didáctico implícito encarga al alumno "conservar" la información que se le confía; bajo este punto de vista en la expresión "3.x=0" el 3 muestra alguna cosa: es diferente de 4, por tanto debe estar presente a través de las transformaciones matemáticas. Deducir "x=0" contradice este contrato, como consecuencia el alumno un poco distraido transforma el resultado en "x=1/3" o en "x=-3".

El inventario de fenómenos ligados al contrato didáctico está todavía en plena expansión.

Sin embargo, mostrar y estudiar fenómenos es una cosa, actuar sobre ellos, es otra. Los trabajos con la coherencia de M. Artigue son todavía rarísimos: después de haber estudiado la reproductibilidad de las situaciones didácticas, ha observado la obsolescencia de las utilizadas para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales y ha comenzado a proponer soluciones.

3. Conclusiones

La didáctica puede, finalmente, ayudar al profesor a modificar su estatuto, su formación y sus relaciones con la sociedad:

—actuando directamente sobre el estatuto de los conocimientos que utiliza;

—actuando sobre los conocimientos de sus compañeros profesionales, y sobre los de los padres y del público;

—desarrollando mejores oportunidades para el público y para los ciudadanos de utilizar la enseñanza de manera más satisfactoria para ellos;

—dando mejores posibilidades a los poderes públicos o privados de administrar la enseñanza con medios más apropiados.

Esta parte de las aportaciones de la didáctica no es ciertamente realizable a corto plazo ya que exige una evolución considerable de las estructuras escolares y de las mentalidades, pero todo me hace pensar que este será su papel social y que progresamos en esta dirección.

La obra matemática de Luis A. Santaló

Enrique Vidal Abascal

Me resulta muy agradable poder comentar la obra matemática de un gran amigo, Luis A. Santaló, con quien me encontré por primera vez siendo los dos estudiantes en Madrid, y con el que siempre he mantenido una entrañable amistad.

Terminada la Licenciatura en Ciencias Matemáticas en Madrid, por los años treinta, se traslada a Hamburgo y se incorpora a la escuela del Profesor W. Blaschke. Es allí donde estaban comnenzando los estudios, de lo que por primera vez se llamaba "Geometría Integral", sobre medidas de figuras geométricas basadas en la teoría de las Probabilidades. El origen de estos estudios se remonta a Buffon (1777), Barbier (1860) y Crofton (1868), pero es a partir de 1926 cuando comienzan una serie de trabajos sistemáticos sobre esta materia, entre otros, E. Cartan, G. Polya y W. Blaschke, relacionando esas cuestiones con invariantes integrales frente a un grupo de transformaciones de un grupo de Lie.*

En 1935, Blaschke inicia una serie de publicaciones con el título general "Geometría Integral", y desde el principio destacan los trabajos del gerundense Santaló, por la importancia y originalidad de los resultados encontrados, que pronto adquieren renombre universal. A pesar de los discípulos y colaboradores que tenía Blaschke, todos ellos grandes matemáticos, que constituían la escuela de Hamburgo, y entre los que estaban, S.S. Chern, H. Hadwige, W. Maak, O. Varga y A. Muller, el continuador de la Geometría Integral y su gran impulsor después de Blaschke va a ser Santaló.

Su obra es de una fecundidad y extensión asombrosa y solamente de Geometría Integral podría citar más de 60 interesantes trabajos. Sólo lo haré de tres de ellos:

Integral Geometry on surfaces, Duke Math. Journal vol. 16, (1949).

Integral Geometry in projective and affine paces. Annals of Math, vol. 51, pp. 739-755, (1950).

Integral Geometry in general spaces. Proceedings Int. Congres of Math. Cambridge, Mass. (1950).

Durante bastantes años, hasta los sesenta que nos volvimos a encontrar en Santiago, en uno de los Congresos de Geometría que aquí organizábamos, nuestra relación aunque estrecha, fue epistolar. Fruto de ella fueron algunos de mis trabajos relacionados con una sistematización de la Geometría Integral, generalizando los invariantes integrales de Poincaré-Cartan, (*A Generalization of Integral Invariants,* Proceedings of American Math. Society, vol. X, pp. 721-727, (1959), y en el que relacionaba las medidas en el sentido de Chern con las definidas en los espacios cocientes de foliaciones.

Alguno de sus teoremas son clásicos tal como el llamado de Poincaré-Santaló que se resume en la fórmula:

$$\int n dK = 4LL_0$$

donde L_0 es la longitud de una curva fija, K es otra curva móvil de longitud L, y "n" son los puntos de intersección de los contornos.

En la que puede llamarse "Escuela de Geometría Integral de Santaló", se enmarcan discípulos directos como Balanzat en Buenos Aires, (en donde se había exiliado Santaló en 1939, y donde ya estaba Rey Pastor), o a través de sus publi-

* Por aquellos años, más concretamente en 1934, hice las oposiciones a Cátedras de Instituto, yo creo, aunque ya no me fío de mi memoria, con un hermano de Luis, Marcelo Santaló. Me dieron una plaza en Santa Cruz de la Palma. No estuve mucho tiempo, porque pronto fui pensionado a Ginebra, en un Centro en el que entre otros trabajaban Claperade y Piaget. Luego volvía a mi trabajo en diversos Institutos de Galicia: Monforte, La Estrada, Vigo, Pontevedra y Santiago. Fue en 1954 cuando conseguí una Cátedra en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Santiago, y en esta Universidad trabajé hasta mi jubilación, en 1979.

caciones y relaciones escritas como Stoka, rumano que pasó varios años en la Universidad de Toulouse o yo mismo. Posiblemente esta Escuela se refuerza a partir de 1951, año en el que fue llamado a dar un curso en la Universidad de Chicago. Fruto de este curso fue una publicación en la conocida colección, Actualités Scientifiques et Industrielles, Nº 1.198, Hermann, Paris, 1953, titulada: *Introduction to Integral Geometry*.

A finales de los cincuenta comienza una fecunda colaboración con la Editorial Universitaria de Buenos Aires, EUDEBA, y entre otros magníficos textos universitarios, recordamos: *Vectores y Tensores*, 1961, *Geometría Proyectiva*, 1966, *Geometrías no euclideas*, y *Geometría Diferencial*, así como otras publicaciones de carácter más divulgativo o en relación con la Educación Matemática. Es en este último campo en el que, desde diversas institucioens, desarrolla una importante labor, y sigue enviándome a Santiago libros como: *La Enseñanza de las Matemáticas en la Escuela Secundaria*, también publicado por EUDEBA, y *Probabilidad e Inferencia Estadística*, Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos, Washington, 1970.

En enero de 1976, en un acto que presidió Gabriel Ferraté como Rector de la Universidad Politécnica de Barcelona, se inauguró el "Instituto de Matemática Aplicada", siendo su primer director Enric Trillas. Es en esta inauguración donde se anuncia que Santaló puede ser nombrado doctor "honoris causa" por la Universidad Politécnica de Barcelona, y es a partir de entonces cuando se le rinden diversos homenajes en su país, y se le concede el Premio Príncipe de Asturias.

Santaló es una mente clara, fecunda e ingeniosa, con una inteligencia portentosa y un sentido humano y bondadoso que lo hacen una de las figuras científicas españolas más destacadas de nuestro siglo. Su largo alejamiento de España y de su tierra catalana, ha sido uno de los hechos más lamentables para el posible desarrollo de la ciencia española, tan desfasada en todas las épocas; pero el ejemplo, de su inteligencia, su capacidad de trabajo, su hombría de bien y su nobleza, nos hacen ser optimistas.

Santiago de Compostela, 25 de Septiembre de 1989

NOTA:

El mejor libro para aquellos que quieran profundizar en la obra matemática del Profesor SANTALO es:

Luis A. Santalo
"Integral Geometry and Geometric Probability".
Encyclopedia of Mathematics and its applications
Volume 1
Addison–Wesley
Reading, Mass. U.S.A., 1976

Se trata de un volumen de 400 páginas en las que se estudia en profundidad los conceptos de probabilidad, medida, grupos y geometría, que forman la base de la geometría integral. En él se intenta, como puede leerse en el prólogo de Santaló, hacer una síntesis de los temas más importantes de esta ciencia, incluyendo sus orígenes y sus aplicaciones, y tratando de mostrar como las relaciones entre la geometría, la teoría de grupos, y la probabilidad, pueden dar frutos en todos y en cada uno de esos campos. Se incluyen resultados y tendencias hasta finales de los años setenta.

GIAN-CARLO ROTA, *Editor*
ENCYCLOPEDIA OF MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS
Volume 1

Section: Probability
Mark Kac, *Section Editor*

Integral Geometry
and
Geometric Probability

Luis A. Santaló
University of Buenos Aires

With a Foreword by
Mark Kac
The Rockefeller University

1976

Addison-Wesley Publishing Company
Advanced Book Program
Reading, Massachusetts

London · Amsterdam · Don Mills, Ontario · Sydney · Tokyo

La colección en la que está publicado el libro, y de la que es el volumen primero, tiene como editor a Gian-Carlo Rota del Departamento de Matemáticas del M.I.T.

Escrito 25 años antes existe también otro libro interesante pero difícil de conseguir:

J. Rey Pastor y L.A. Santaló Sors
"Geometría Integral"
Espasa Calpe. Madrid 1951.

Generación y resolución de problemas: dos ejemplos

Eliseo Borrás Veses; Magda Morata Cubells

¿Bajo que condiciones una situación matemática es un problema para una persona? Tiene que interesarle y representar un reto, de forma que se sumerja en ella para intentar su resolución. Pero además, se detectan otras características en el proceso de generación y resolución de problemas:

—Requiere un tiempo muy variable, imposible de predecir de antemano.

—Lo que se busca suele ser bastante impreciso; las preguntas que perfilan un problema van surgiendo sincronizadas con las conjeturas y los resultados parciales o aproximados que se van encontrando.

—Un problema puede abordarse con diferentes niveles de rigor y precisión.

—La analogía es un recurso valioso, que puede guiar la búsqueda de soluciones.

—Los medios disponibles (como una calculadora o un ordenador) abren nuevas vías de resolución y análisis que, de otro modo, estarían vedadas.

Dos problemas en los que interviene el azar

Lo que sigue es el relato del proceso de desarrollo y resolución de dos problemas de azar. Los presentamos aquí porque lo hemos pasado bien al intentar resolverlos y porque creemos que muestran claramente algunas de las características anteriores.

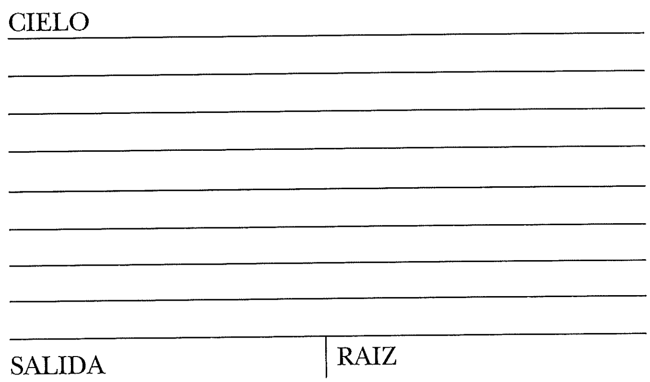
Hace ya bastante tiempo que leímos el siguiente juego [1]; nos pareció divertido e interesante para la clase de matemáticas. A diferencia de otros juegos que habíamos estudiado y propuesto, en éste veíamos solamente sus posibilidades como instrumento para aumentar la comprensión sobre el comportamiento del azar, pero no como modelo de ningún proceso físico, biológico...

Llegar al cielo

Es un juego para dos jugadores.

El jugador A trata de hacer crecer su árbol hasta el "cielo", mientras que el jugador B trata de impedírselo.

Se juega sobre un tablero como el siguiente:



El jugador A lanza una moneda. Si el resultado es cara, el árbol se alarga una rama. Si es cruz, el árbol se alarga dos ramas.

El jugador B lanza la moneda una vez por cada rama que haya dibujado su contrario. Si sale cara, detiene el crecimiento de esa rama colocando una ficha en su extremo. Si sale cruz, la rama queda viva y puede seguir reproduciéndose.

El jugador A lanza de nuevo la moneda una vez por cada rama viva, para decidir sobre su forma de crecer.

Y así sucesivamente.

El jugador A gana si consigue llegar al cielo. En caso contrario, el ganador es el jugador B.

Al jugar repetidas veces descubrimos que el juego es ventajoso para el jugador B. Los intentos de calcular teóricamente la probabilidad de ganar de cada uno de los dos jugadores, para el caso de n capas, resultaron infructuosos: al utilizar un diagrama en árbol, aparecen demasiadas ramas y el cálculo de las probabilidades de que gane A o B es demasiado complejo; lo mismo ocurre si se intenta tratar como una cadena de Markov y se dibuja su grafo.

Decidimos proponer este juego a nuestros alumnos que, utilizando diversos procedimientos, llegaron a conclusiones parecidas a las nuestras.

Los alumnos, a medida que iban jugando y aumentaba su conocimiento del problema, fueron haciéndose preguntas a las que intentaron responder. Estas son algunas de ellas:

—"¿Tiene ventaja alguno de los dos jugadores?"

—"¿Cuánto más tendría que apostar el jugador B, que tiene más posibilidades de ganar?"

–"¿Cuánto tarda el jugador A (medido en ramas del árbol), por término medio, en llegar al cielo?"

—"¿Cuánto tarda el jugador B, por término medio, en ganar al A y en qué escalera del cielo?"

Jugando y anotando el resultado y el desarrollo de cada partida, dieron respuesta aproximada a estas cuestiones. Estos son algunos de los resultados y conclusiones que obtuvieron (tabla 1).

"El juego es ventajoso para el jugador B; pero si A logra pasar las primeras capas, aumentan sus posibilidades de ganar".

"A ganará aproximadamente un 9% de las partidas y B un 91%. De cada 1000 ptas., A deberá apostar 90 y B 910, para que el juego sea más justo".

Y el problema pasó al limbo

Varios meses después, el estudio de *Procesos de nacimiento y muerte* [2] y la preparación de un taller de azar nos llevó a plantearnos el siguiente problema, cuya simulación nos pareció sencilla.

Tabla 1

Grupo	Ganador A	Ganador B	Total Partidas
1	1	19	20
2	2	22	24
3	9	41	50
4	1	19	20
5	2	38	40
6	3	47	50
7	8	42	50
8	2	44	46
9	3	47	50
totales	31	319	350

Desaparición de un apellido

Un hombre y todos sus descendientes varones tiene exactamente 2 hijos. Aproximadamente la mitad de los hijos son varones. Teniendo en cuenta que el apellido sólo se transmite a través de los hijos varones, ¿es muy fácil que su apellido desaparezca en su familia? ¿Y si el número de hijos es igual a 3?

Inicialmente se piensa que en un 50% de casos se perpetuaría el apellido, pero algunas simulaciones no avalan esta idea. ¿Cómo seguir? ¿A qué preguntas es interesante y posible responder? Estas son algunas de las que surgieron:

—*¿Cuál es la probabilidad de que el apellido desaparezca?*

Habría que simular la transmisión del apellido varias veces y comprobar en cuántos casos desaparece y en cuántos no. Pero surge inmediatamente un problema: ¿hasta qué generación debemos ensayar la transmisión? No es lo mismo observar lo que ocurre durante tres generaciones que durante 300. Así pues,

—*¿Cuál es la probabilidad de que desaparezca, como muy tarde, en la enésima generación?*

Asociada a la cuestión anterior surge ésta otra:

—*¿Cuál es la duración media (en generaciones) de un apellido?*

Si cada hombre tiene dos hijos, los datos obtenidos en 100 simulaciones repetidas, para varias generaciones, van perfilando conjeturas más precisas:

Tabla 2

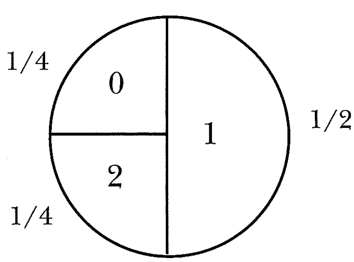
Generación	Se pierde	No se pierde	Generación	Se pierde	No se pierde
1	23	77	11	74	26
2	31	69	12	80	20
3	47	53	13	79	21
4	52	48	14	74	26
5	60	40	15	81	19
6	64	36	16	82	18
7	74	26	17	83	17
8	69	31	18	85	15
9	63	37	19	81	19
10	77	23	20	80	20

La probabilidad de que desaparezca un apellido aumenta con el número de generaciones y, a partir de la 5ª, ya es mayor del 50%.

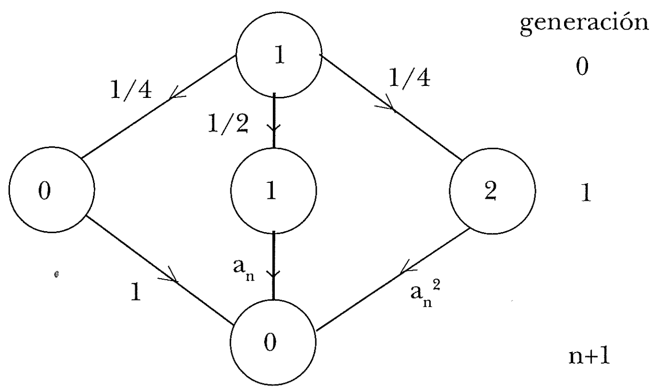
Intentamos también la resolución teórica de este problema utilizando diagramas en árbol y cadenas de Markov. Ambas herramientas, a pesar de su potencia, se revelaron de nuevo inoperantes.

Y, ¡por fin!, una solución teórica. Como tantas otras veces, encontramos en la obra *Probabilidad y Estadística* de A. Engel [2] la ayuda que necesitábamos.

La ruleta adjunta permite efectuar el sorteo para determinar los descendientes inmediatos de cada hombre.



Sea a_n la probabilidad de que el apellido desaparezca, como máximo, en la n-sima generación. El grafo que sigue (en el que dentro de cada círculo se ha representado el número de varones) [2]:



permite deducir una relación recursiva para a_n:

$$a_{n+1} = 1/4 + 1/2\, a_n + 1/4\, a_n^2; \qquad a_1 = 1/4;$$

que da lugar a la tabla 3:

Generación	a_n	Generación	a_n
1	0.250	26	0.876
2	0.391	27	0.880
3	0.483	28	0.883
4	0.550	29	0.887
5	0.601	30	0.890
6	0.641	31	0.893
7	0.673	32	0.896
8	0.700	33	0.899
9	0.722	34	0.901
10	0.741	35	0.904
11	0.758	36	0.906
12	0.773	37	0.908
13	0.786	38	0.910
14	0.797	39	0.912
15	0.807	40	0.914
16	0.817	41	0.916
17	0.825	42	0.918
18	0.833	43	0.919
19	0.840	44	0.921
20	0.846	45	0.923
21	0.852	46	0.924
22	0.858	47	0.926
23	0.863	48	0.927
24	0.867	49	0.928
25	0.872	50	0.930

la cual confirma los resultados obtenidos por simulación.

Para estudiar la evolución del apellido a largo plazo, como la sucesión anterior es creciente y está acotada superiormente, se puede calcular

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} a_{n+1}$$

en la relación recursiva anterior:

$$a = 1/4 + 1/2\ a + 1/4\ a^2,$$

de donde a = 1. Es decir, a largo plazo, el apellido siempre acabará por desaparecer.

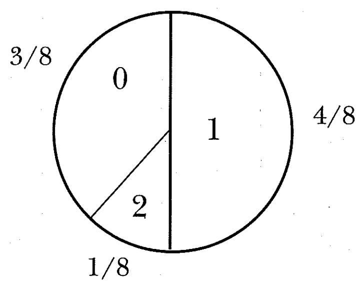
De manera análoga, se trabaja en el caso de tres hijos posibles en cada reproducción.

Primera vuelta atrás

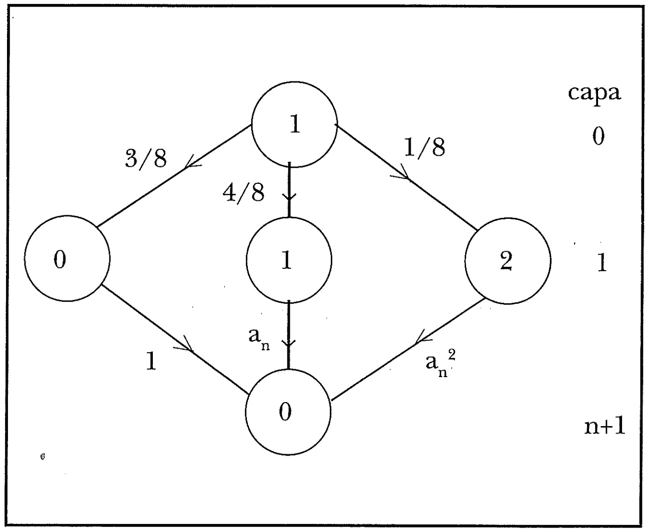
En el calor del trabajo surgió una pregunta: ¿No será este problema análogo a *Llegar al cielo,* que había quedado tiempo atrás sin resolver teóricamente?

En este último caso hay un doble sorteo (jugador A y B) compuesto cada uno por un número de lanzamientos de una moneda igual al de ramas vivas.

La siguiente ruleta servirá para realizar un sorteo equivalente.



Al construir el grafo recursivo análogo al de la *Desaparición de un apellido* (en el que cada nodo representa el número de ramas del árbol) resulta:



de donde se obtiene, para la probabilidad a_{n+1} de que B gane como máximo en la capa n+1:

$$a_{n+1} = \frac{3}{8} + \frac{4}{8} a_n + \frac{1}{8} a_n^2$$

siendo $a_1 = 3/8$

¿Cuál es la probabilidad de que gane B, si no se limita el número de capas?

Esta probabilidad será $a = \lim a_n$. De la expresión anterior se obtiene:

$$a = \frac{3}{8} + \frac{4}{8} a + \frac{1}{8} a^2$$

de donde a = 1. Luego con un número ilimitado de capas ganaría siempre B.

¿Cuál es la probabilidad de que B gane como máximo al cabo de n capas?

La relación recursiva anterior permite calcular esta probabilidad para 1, 2, 3... capas. Ver tabla 4.

La ventaja de B, para 7 capas es abrumadora. La simulación del juego un elevado número de veces, utilizando de nuevo el ordenador confirmó la bondad de la solución. Estos son los resultados obtenidos para un total de 10.000 simulaciones. Ver tabla 5

Tabla 4

Capa	a_n	Capa	a_n
1	0.375000	26	0.999674
2	0.580078	27	0.999755
3	0.707100	28	0.999816
4	0.791049	29	0.999862
5	0.848744	30	0.999897
6	0.889418	31	0.999923
7	0.918592	32	0.999942
8	0.939772	33	0.999956
9	0.955283	34	0.999967
10	0.966712	35	0.999975
11	0.975173	36	0.999982
12	0.981456	37	0.999986
13	0.986135	38	0.999990
14	0.989626	39	0.999992
15	0.992233	40	0.999994
16	0.994182	41	0.999996
17	0.995641	42	0.999997
18	0.996733	43	0.999998
19	0.997551	44	0.999998
20	0.998164	45	0.999999
21	0.998623	46	0.999999
22	0.998968	47	0.999999
23	0.999226	48	0.999999
24	0.999420	49	1.000000
25	0.999565	50	1.000000

Tabla 5

Generación	Jugador A	Jugador B	Generación	Jugador A	Jugador B
1	6261	3739	14	98	9902
2	4257	5743	15	72	9928
3	2905	7095	16	49	9951
4	2030	7970	17	43	9957
5	1489	8511	18	31	9969
6	1114	8886	19	25	9975
7	776	9224	20	16	9984
8	586	9414	21	12	9988
9	453	9547	22	10	9990
10	294	9706	23	3	9997
11	164	9754	24	7	9993
12	128	9836	25	1	9999
13	98	9872			

Hay un ajuste casi perfecto entre los resultados experimentales y los teóricos. *El juego es, en efecto, considerablemente más ventajoso para B que para A.*

¿Cómo modificar el juego para que sea más equitativo?

Una posibilidad sería la introducción de un sistema de apuestas que equilibrasen la enorme ventaja de B. En este caso, las apuestas deberían estar aproximadamente en la proporción 1:11.

Pero parece mucho más interesante modificar las reglas del juego. Por ejemplo, se podría hacer que al lanzar la moneda el jugador A, la rama se alargara en otras 3 si sale cara y sólo en una si sale cruz. Estos son los resultados obtenidos para diferentes posibilidades de crecimiento:

Tabla 6

Ramas posibles: 1 y 3

Nº de capa	Prob. de B
1	0.313
2	0.469
3	0.566
4	0.631
5	0.679
6	0.716
7	0.745
8	0.768
9	0.787
10	0.804

Ramas posibles: 1 y 4

Nº de capa	Prob. de B
1	0.281
2	0.405
3	0.473
4	0.515
5	0.544
6	0.563
7	0.577
8	0.588
9	0.596
10	0.601

Ramas posibles: 2 y 3

Nº de capa	Prob. de B
1	0.188
2	0.281
3	0.336
4	0.372
5	0.397
6	0.414
7	0.427
8	0.436
9	0.443
10	0.448

Ramas posibles: 2 y 4

Nº de capa	Prob. de B
1	0.156
2	0.223
3	0.257
4	0.275
5	0.286
6	0.292
7	0.296
8	0.298
9	0.299
10	0.300

A medida que aumenta la tasa de crecimiento del árbol, aumentan las posibilidades de que gane A. El juego es casi equitativo para 2 y 3 ramas.

Si se estudia este caso con más detalle.

Tabla 6

Capa	a_n	Capa	a_n
1	0.18750	26	0.46387
2	0.28093	27	0.46393
3	0.33646	28	0.46397
4	0.37246	29	0.46400
5	0.39703	30	0.46402
6	0.41437	31	0.46404
7	0.42689	32	0.46405
8	0.43608	33	0.46407
9	0.44289	34	0.46407
10	0.44799	35	0.46408
11	0.45183	36	0.46409
12	0.45474	37	0.46409
13	0.45695	38	0.46409
14	0.45863	39	0.46409
15	0.45991	40	0.46410
16	0.46089	41	0.46410
17	0.46164	42	0.46410
18	0.46221	43	0.46410
19	0.46265	44	0.46410
20	0.46299	45	0.46410
21	0.46325	46	0.99999
22	0.46345	47	0.99999
23	0.46360	48	0.99999
24	0.46372	49	1.00000
25	0.46381	50	1.00000

se comprueba que la probabilidad de que gane B se estabiliza (con 5 decimales) a partir de la capa número 40. A largo plazo se produciría un equilibrio entre A y B, ligeramente favorable al jugador A.

Segunda vuelta atrás

La explosión de posibilidades que se ha producido al abordar de nuevo *Llegar al cielo* sugiere otras alternativas para *Desaparición de un apellido:*

—¿Qué ocurrirá si el número de hijos que cada varón tiene se elige, al azar, por ejemplo entre 0, 1, 2 y 3? ¿Y si se asignan diferente probabilidades a los números anteriores?

—¿Qué tipo de reproducción daría lugar a un equilibrio entre la probabilidad de que se pierda el apellido y la de que permanezca?

Una reflexión

Para terminar, merece la pena poner el acento en algo que solemos practicar poco en nuestras clases: la fructífera relación modelo-experimentación-teoría. La experimentación con modelos, la simulación y el juego en este caso, genera problemas, perfila conjeturas y, además, es una poderosa guía para buscar soluciones teóricas, confirmándolas o rechazándolas. La práctica cotidiana de la experimentación permite poner a punto técnicas de gran utilidad, sugiere conceptos y sitúa las matemáticas al alcance de la mayoría de los alumnos.

Referencias

[1] Engel, Varga, Walser (1976), *Hasard ou strategie?,* OCDL, París.

[2] Engel A. (1988), *Probabilidad y Estadística, vol. II,* Mestral, Valencia.

La influencia de la Revolución Francesa en la enseñanza elemental de la matemática

Montanuy Fillat, Manuel; Núñez Espallargas, José Mª; Servat Susagne, Jordi

Repercusión de la Revolución Francesa en el desarrollo de la matemática

Con la llegada de la Revolución Francesa se produjo un profundo cambio en la manera de concebir la ciencia, pasando la matemática a desempeñar un papel esencial en esta nueva concepción.

Durante el siglo XVIII en Francia se había planteado un enfrentamiento entre la escuela cartesiana y la escuela newtoniana.

Los cartesianos a través de su método pretendían reducir el mundo de los hechos al mundo de los conceptos, así la técnica la subordinaban a la ciencia y ésta a la matemática. Como dato indicador de esta subordinación, debemos señalar el hecho de que Laplace, pocos años antes de la Revolución, propusiera la institución de un examen de matemáticas a los posibles inventores de máquinas. La Academia de las Ciencias, que desde su fundación en 1666 hasta finales de 1793 mantuvo la dirección y el control de la ciencia y de la técnica francesa, estaba dominada por las ideas cartesianas. Sus dictámenes, ante una patente de invención, se hacían más que apreciando la adecuación práctica de la máquina, analizando su correcta deducción de los principios teóricos.

Por su parte, la escuela newtoniana daba prioridad a los hechos experimentales y a los fenómenos observables. En consecuencia, invertían el orden de prioridades cartesiano, las matemáticas, y las ciencias en general, hallaban su justificación en la aplicabilidad práctica. El lugar donde más se desarrollaron estas ideas fue en Inglaterra, propiciando que fuera este país el centro de la Revolución Industrial, aunque como contrapartida, los ingleses aportaron pocas innovaciones en el campo de la matemática teórica, siendo los cartesianos los que, al dar a las matemáticas un papel preponderante, consiguieron avances más notables en ese campo.

D'Alembert al proyectar "L'Encyclopédie", tenía como modelo la "Cyclopedia" del inglés Chambers, pero al pretender construir la ciencia sobre bases exclusivamente empíricas como había hecho éste, se encontró con que los datos de la experiencia sensible eran insuficientes para explicar los conceptos científicos de la época. Los enciclopedistas, entonces, sin abandonar las ideas de la escuela newtoniana, y sin caer en el cartesianismo absoluto, toman de éste el método deductivo y se proponen como objetivo formular la física newtoniana en un lenguaje matemático riguroso. De este modo, la matemática adquiere un lugar preponderante en la construcción de la ciencia, pero sin pretender reducir totalmente la ciencia a la matemática.

Durante el período de la Revolución se dejan de lado estas cuestiones de estructuración de la ciencia para dar un mayor énfasis a los aspectos político-sociales de la ciencia.[1] Así hay una preocupación por reorganizar el mundo de la ciencia, de la técnica y de la educación.

Por lo que se refiere a las matemáticas se relegan las antiguas investigaciones en los campos de la mecánica y de la astronomía, y se estimulan los estudios de temas más relacionados con la vida económica, industrial y militar.[2]

[1] Un resumen muy sintético sobre esta cuestión puede verse en ISRAEL, G.: *La Revolució Francesa i la matemática.* Ulisses. Vol. 6. Barcelona, 1978, págs. 184-191.

[2] STRUIK, D.J.: *A concise History of Mathematics.* New York, Dover Publications, 1987 (4 ed.), pág. 141.

Especial importancia dentro de esta línea de acción, tuvo la unificación del sistema de pesas y medidas en el que la Revolución Francesa jugó un papel principal.

Hacia un sistema único de medidas

La creciente expansión del comercio, así como la conquista de nuevos territorios ultramarinos, se veía entorpecida por la diversidad de unidades de medidas, que variaban no sólo de un país a otro, sino también dentro del propio país de una región a otra, e incluso, entre localidades vecinas. Por estas razones las potencias europeas fueron las más interesadas en intentar unificar el sistema de unidades de medida. Se enfrentaron dos tendencias diferentes. Por un lado, Inglaterra, con una visión práctica, se limitó a abolir todos los sistemas excepto el de la ciudad de Londres, cuyos pesos y medidas fueron obligatorios para toda la nación a partir de 1824.

Francia, en cambio, con un enfoque más racionalista, prefirió instaurar un sistema de medidas nuevo, cuyas unidades estuvieron relacionadas entre sí de un modo simple y, además, adaptando como múltiplos y submúltiplos potencias de diez, lo que facilitaba los cálculos y evitaba las reducciones engorrosas. Se observó que la base de este nuevo sistema debía ser una unidad de longitud, pues todas las demás unidades podían relacionarse con ella.

En 1792 la Asamblea Nacional Francesa, a propuesta de un grupo de científicos, encarga a una comisión medir con la máxima exactitud posible el arco de meridiano comprendido entre Dunkerque y Barcelona, pues se había acordado tomar la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre como la nueva unidad de longitud, a la que denominan "metro".

Cumplida su misión, presentan los resultados de sus trabajos al gobierno, el cual nombró otra comisión, llamada de "pesas y medidas", formada por veintidós expertos, en la que junto a los franceses participaron representantes de otros países. Esta comisión se reunió en París en 1799 estableciendo el patrón definitivo de longitud, los nombres de todas las unidades de medida, su relación mútua y la denominación de los múltiplos y submúltiplos. Fue necesario que transcurrieran cuarenta años para que el sistema métrico decimal fuera el único legal en Francia. En 1837 el rey Luis Felipe decreta que a partir del primero de enero de 1840 entre en vigor a todos los efectos el nuevo sistema de medidas.

A finales del siglo XVIII la situación en España, en cuanto a los sistemas de medidas se refiere, eran tan diversa y compleja como en Inglaterra o Francia.

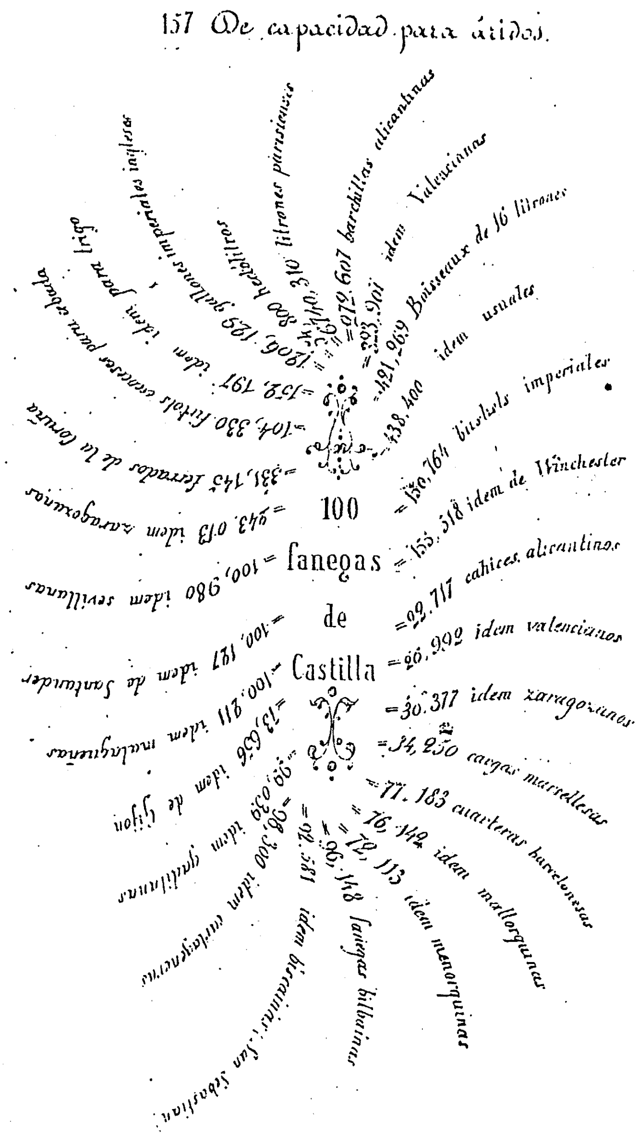
Junto a la variedad de nombres, existía la de equivalencia, las cuales no seguían reglas de formación sencillas y comunes de unas medidas a otras. A estas dificultades se unía la de emplear equivalencias distintas según fuera la materia a medir.

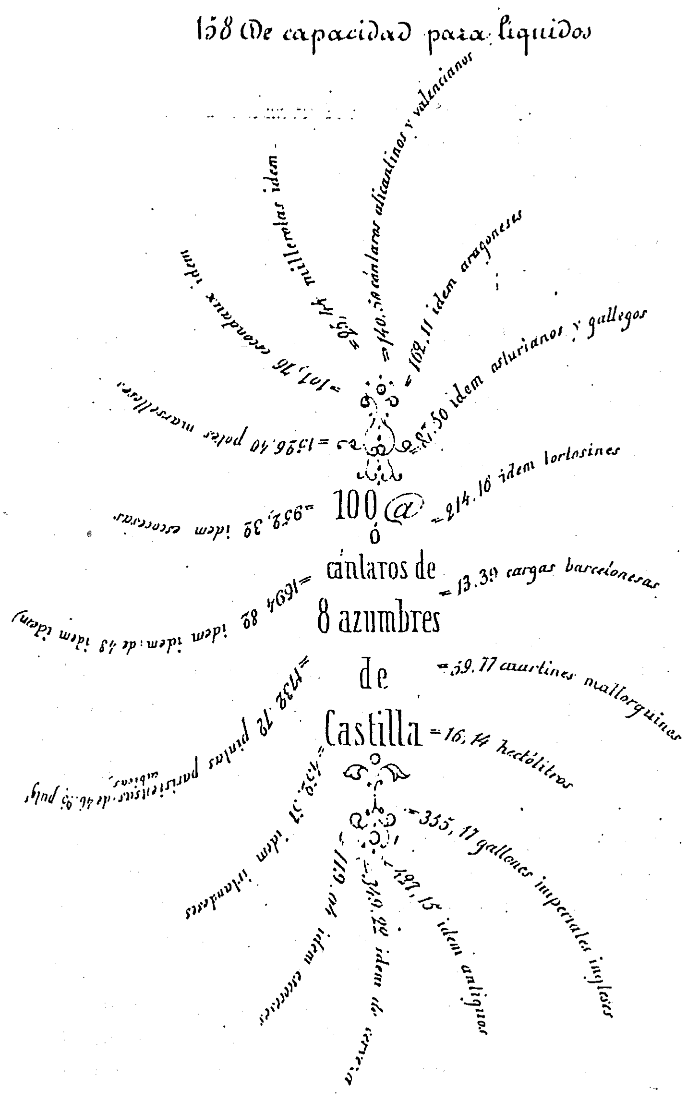
Además los valores de las unidades de medida y sus equivalencias variaban de una región a otra e incluso dentro de una misma región.

La administración española mostró preocupación para encontrar una solución a esta gran diversidad de medidas que dificultaba el desarrollo e intercambio comercial. En el reinado de Carlos IV se enviaron dos representantes, Gabril Ciscar y Agustín Pedrayes, a la comisión de "pesas y medidas" que, como hemos indicado, se reunió en París en 1799. A su regreso en 1800, Ciscar, presentó al gobierno español una memoria en la que, tras comentar las ventajas del nuevo sistema, propone una nomenclatura castellana de las nuevas pesas y medidas y expone sus equivalencias con respecto a las pesas y medidas españolas.[3] Pero, al igual que en Francia, hubo una fuerte oposición al nuevo sistema, en parte debida a razones políticas y en parte a la novedad y extrañeza de los nombres con que se designaron las unidades. Carlos IV no se decide a introducir el nuevo sistema, para intentar unificar las pesas y medidas mandó utilizar a partir de 1801 en todos sus dominios las más usadas en Castilla. Sus unidades eran: para la longitud la vara, cuyo patrón se guardaba en Burgos; para la capacidad de áridos la media fanega, cuyo patrón se encontraba en Avila; para la capacidad de líquidos el cuartillo, cuyo patrón se conservaba en Toledo; y para el peso el marco, cuyo patrón se archivaba en el Consejo de Castilla.

Al instaurarse, en 1820, un gobierno liberal, "las Cortes emprendieron una obra encaminada a desarraigar los obstáculos tradicionales que se oponían al desarrollo moderno del país".[4] Ciscar aprovechando el momento coyuntural envió a las Cortes, con ocasión de tratarse en ellas la unificación del sistema de pesas y

[3] Ciscar y Ciscar, G.: *Memoria elemental sobre los nuevos pesos y medidas decimales fundados en la naturaleza.* Madrid, Imprenta Real, 1800.
[4] Tuñón de Lara, M.: *La España del siglo XIX.* París, Librería Española, 1968, pág. 42.





medidas, una segunda memoria[5] en la que defendía no sólo la base decimal del sistema métrico, sino también su nomenclatura, oponiéndose de este modo, tanto a los autores que propugnaban la continuidad con el sistema tradicional, como a aquellos otros que, aceptando las ventajas de la base decimal, proponían nombres españoles para las unidades del sistema.[6]

La labor legislativa de este gobierno liberal no pudo prosperar ya que en 1823, de nuevo, se instaura el régimen monárquico absolutista. El mismo Ciscar, así como otros destacados liberales, tuvo que marchar al exilio.

El proceso de introducción del sistema métrico quedó detenido durante otros 20 años, hasta que en 1843 se inicia el reinado de Isabel II, caracterizado en su primera etapa por un gobierno moderado que lleva a cabo una labor de centralización administrativa. En este contexto, debe situarse la promulgación de la ley de 19 de julio de 1849 que implanta el sistema métrico decimal como el único oficial en todos los dominios españoles. En el artículo 2º de esta ley, se estableció como patrón del metro el que se conservaba en el Conservatorio de Artes de Madrid y que había sido construido por Gabriel Ciscar y Agustín Pedrayes.

[5] CISCAR Y CISCAR, G.: *Apuntes sobre medidas, pesos y monedas que pueden considerarse como una segunda parte de la memoria elemental sobre los nuevos pesos y medidas decimales, fundados en la naturaleza en 1800.* Madrid, Imprenta Real, 1821.

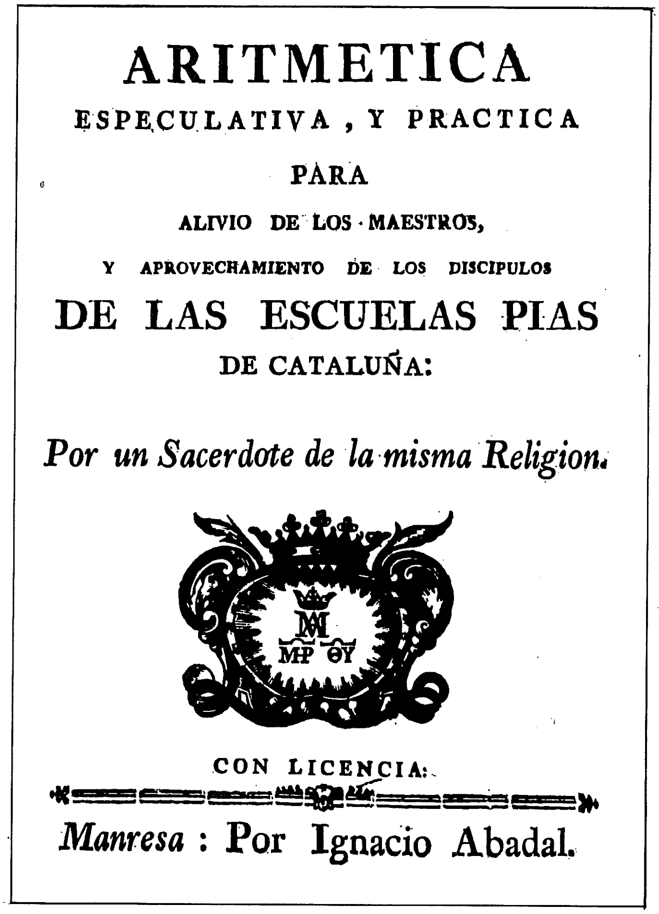
[6] ALSINA, C. Y MARQUET, LL.: *Pesos, mides i mesures.* Barcelona, Caixa de Pensions, 1981, pág. 42.

La ley daba también un margen de tiempo para adaptarse al nuevo sistema, fijando el 1 de enero 1860 como la fecha oficial de entrada en vigor.

El sistema métrico y los números decimales en los programas de aritmética elemental

Para consolidar la utilización del sistema métrico en el país era necesario introducir su enseñanza en la escuela. Así queda contempaldo en el artículo 11 de la ley de 1849: "En todas las escuelas públicas o particulares en que se enseñe o deba enseñarse la aritmética o cualquiera otra parte de las matemáticas, será obligatoria la del sistema legal de medidas y pesas y su nomenclatura científica, desde primero de 1852, quedando facutlado el gobierno para cerrar dichos establecimientos siempre que no cumplan con aquella obligación". Este artículo obligó a reestructurar la enseñanza de la aritmética en las escuelas primarias, esto supuso no solamente la introducción del nuevo sistema de medidas; sino también la de los números decimales y el cálculo con este tipo de números, ya que de este modo era posible operar con las nuevas unidades y comprender las indudables ventajas que aportaban sobre el sistema tradicional de medidas.

Hasta la introducción del sistema métrico decimal no se había sentido la necesidad de enseñar los números decimales en la escuela elemental. Los objetivos de la enseñanza de la aritmética a este nivel se reducían, básicamente, a conocer y aplicar las cuatro reglas, las operaciones con quebrados y a saber calcular con las pesas y medidas tradicionales. Como los antiguos sistemas no seguían ni en su equivalencia ni en la construcción de múltiplos y submúltiplos de la unidad las potencias de diez los cálculos se llevaban a cabo utilizando los entonces llamados "números complejos". Era frecuente que un libro de aritmética elemental dedicara una parte muy considerable de texto impreso a describir los sistemas de medidas y las operaciones con los números denominados en su variada casuística. Así, si analizamos el contenido de los libros de texto de las Escuelas Pías fundadas por la Orden de los Escolapios o Piaristas (que junto con las escuelas llamadas Reales por estar a cargo del Rey su mantenimiento, eran las únicas que entre finales del siglo XVIII y principios del XIX impartían de un modo totalmente gratuíto su enseñanza,[7] se observa como la proporción de páginas dedicadas a estas cuestiones varía entre un tercio en las obras de aritmética elemental a casi la mitad en las de aritmética mercantil.[8]


ARITMETICA
ESPECULATIVA, Y PRACTICA
PARA
ALIVIO DE LOS MAESTROS,
Y APROVECHAMIENTO DE LOS DISCIPULOS
DE LAS ESCUELAS PIAS
DE CATALUÑA:
Por un Sacerdote de la misma Religion.

CON LICENCIA:
Manresa : Por Ignacio Abadal.

Aunque el trabajar con las medidas antiguas requería mucho esfuerzo de memoria y de cálculo, la introducción del sistema métrico decimal no simplificó las cosas inmediatamente. Durante los primeros años de su obligatoriedad y para explicar y divulgar el nuevo sistema de

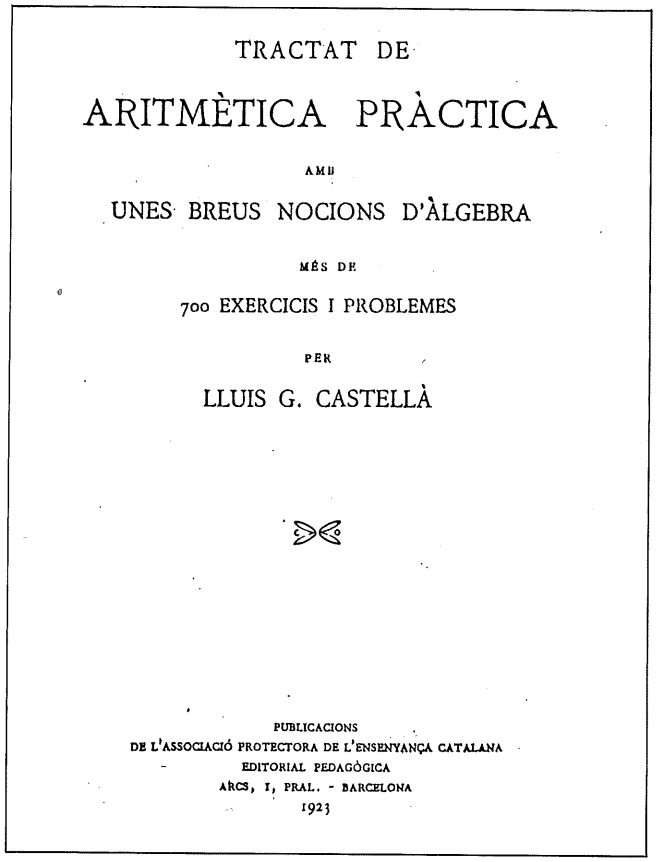
7 Cossio, M.B.: *La enseñanza primaria en España.* Madrid, R. Rojas, 1915 (2 ed.), pág. 21.

8 Anónimo: *Aritmética especulativa y práctica para alivio de los maestros y aprovechamiento de los discípulos de las escuelas Pías de Cataluña.* Manresa, Ignacio Abadal, (c. 1800). Esta obra consta de tres partes: la primera dedicada a las cuatro operaciones básicas, la segunda a los quebrados y la tercera a los números denominados, siendo esta última parte la más extensa.
Ferrer de la Concepción, F.: *Tratado de aritmética mercantil para uso de los discípulos de las Escuelas Pías de Cataluña.* Barcelona, Miguel y Tomás Gaspar, 1821. No hay subdivisión en apartados, pero de las 160 páginas que consta la obra, aproximadamente 70 están dedicadas a los sistemas de medidas y a los números denominados.

medidas se publicaron multitud de pequeños manuales que, independientemente de los libros de texto o como complemento de ellos, describían de un modo práctico la manera de operar con las nuevas unidades.[9] por lo que se refiere a los libros de texto, los programas se vieron inicialmente recargados, pues a estudio de los números decimales y de sus operaciones, necesarios para comprender y aplicar el nuevo sistema de medidas, se siguió dedicando un buen número de páginas a la descripción de los sistemas tradicionales y al cálculo con los números denominados o complejos.

La coexistencia en la escuela de los dos sistemas se mantuvo durante un largo período de tiempo, aunque a medida que el sistema decimal resultaba más familiar el estudio de los sistemas tradicionales se fue reduciendo progresivamente. A principios del presente siglo aún se publicaban textos de aritmética en los que se trataban con bastante amplitud de detalle los antiguos sistemas de medida y se hacían cálculos con ellos. Este es el caso, por ejemplo, aunque no el único, de la aritmética utilizada en los colegios de las Hermanas Carmelitas donde, en el prólogo de la edición de 1906, se insiste todavía en la importancia del conocimiento "del sistema métrico con las reducciones de cada clase de medidas antiguas de todas las provincias de España a las modernas o métricas, y viceversa".[10] En 1923 en un texto de aritmética para uso de las escuelas catalanas se expresa la conveniencia de conocer las medidas tradicionales y sus equivalencias: "Com que, malgrat la prohibició d'usar en el trafec comercial altres mesures que les que no siguin del Sistema Mètric Decimal, el poble no s'ha amarat encara bé d'asquest, el conèixer l'antic que era usat a Catalunya, així com també l'equivalència de les nesures antigues amb les del sistema nou".[11] Y, en fin, casi cien años después de su abolición oficial, en los años cuarenta y en plena posguerra española, podemos localizar manuales de aritmética que incluyen sólo de un modo testimonial, en un apéndice, las tablas de las unidades tradicionales de medida, aunque ya sin realizar operaciones con este sistema.[12]

Si bien la introducción del sistema métrico en las escuelas implicaba necesariamente también, como ya


TRACTAT DE

ARITMÈTICA PRÀCTICA

AMB

UNES BREUS NOCIONS D'ÀLGEBRA

MÉS DE

700 EXERCICIS I PROBLEMES

PER

LLUIS G. CASTELLÀ

PUBLICACIONS
DE L'ASSOCIACIÓ PROTECTORA DE L'ENSENYANÇA CATALANA
EDITORIAL PEDAGÒGICA
ARCS, I, PRAL. - BARCELONA
1923

hemos señalado, la de los números decimales, el estudio de estos números aparece incorporado en algunos textos escolares anteriores a 1849. Ciñéndonos a los manuales de aritmética elemental, pues los de aritmética superior ya incluían el cálculo con decimales desde aproximadamente mediados del siglo XVIII, es necesario distinguir entre los que formaban parte de un programa de ense-

[9] Dos de las primeras obras que aparecieron con esta finalidad son: ARAVACA, A.: *Cartilla decimal. Contiene nociones de aritmética decimal y tablas de relaciones y reglas, para reducir las monedas, pesas y medidas que en el día se usan en España a las que establece el nuevo Sistema Métrico.* Valencia, Imp. José Rius, 1852.

PICATOSTE, F. Y FERNÁNDEZ, J.R.: *Esplicación del Nuevo Sistema Legal de Pesas y Medidas.* Madrid, Imp. Pedro Montero, 1853.

[10] ANÓNIMO: *Aritmética teórico-práctica para los colegios del Instituto de Hermanas Carmelitas de la Caridad. Primera parte.* Vich, Trip. Católica de San José, 1906 (3ª ed.), pág. 6.

[11] CASTELLA, LL. G.: *Tractat d'aritmètica pràctica amb breus nocions d'àlgebra.* Barcelona, Associació Protectora de l'Ensenyança Catalana, 1923, pág. 36.

[12] Un texto que incorpora un apéndice con las medidas tradicionales es, por ejemplo, *Aritmética. Grado tercero.* Burgos, Hijos de Santiago Rodríguez, 1944, págs. 219-221.

ñanza profesional y los que iban dirigidos a las "escuelas de niños".

En la formación de ciertas profesiones los cálculos con precisión hacían imprescindible el empleo de las aproximaciones con números decimales. Esto ocurría, por ejemplo, con aquellas profesiones relacionadas con las artes que servían a la arquitectura. La Academia de San Fernando que tenía a su cargo la formación de estos profesionales e influenciada por las reformas educativas francesas encomendó a Antonio de Varas en 1800, que a la sazón era su director, la redacción de un manual de matemáticas elementales para uso de sus estudiantes que resumiera de un modo sencillo, pero conservando lo esencial, el tomo primero de los famosos *Elementos de Matemáticas* de Benito Bails editados en 1778. Varas considera que, junto al estudio de las operaciones con números enteros, con quebrados y con números denominados, deben figurar las operaciones con números decimales y justifica su inclusión en una obra elemental por que "los quebrados comunes y números denominados se pueden calcular por el mismo sistema (de los números enteros) reduciéndolos antes a decimales, cuya práctica facilita sobremanera las operaciones de la Aritmética y aproxima cuanto conviene sus resultados".[13]

No resultaba tan evidente la necesidad de introducir los cálculos con números decimales en los textos de aritmética expresamente dedicados a las "escuelas de niños" de la época, que no conducían a una formación profesional concreta y sólo tenían como objetivo cubrir la enseñanza básica. Por ello destaca por su carácter precursor la labor de José Mariano Vallejo, notable matemático y buen conocedor de primera mano de los avances y de la orientación estructuradora y práctica a la vez de la matemática francesa surgida después de la Revolución. En su libro, *Aritmética de niños,* cuya primera edición es de 1804, de los doce capítulos en que está dividida la obra, dos (el VIII y el IX), se dedican al concepto y al cálculo con números decimales.[14] La inclusión de estos temas la hace Vallejo respondiendo a su firma convicción pedagógica de que estos números no debían reservarse para estudios superiores o especializados, sino que debían formar parte de la enseñanza elemental, y así lo manifiesta con toda claridad en el prólogo de la tercera edición: "he conseguido el principal objeto que me propuse al componerla (la obra), cual era el de que se estendiese a toda clase de personas el conocimiento del cálculo de las decimales, que hasta entonces sólo se reservaba para las cátedras de matemáticas".[15]

[13] (BAILS, B. Y VARAS, A.): *Aritmética y Geometría Práctica de la Real Academia de San Fernando.* Madrid, Imp. de la Viuda de Ibarra, 1801, pág. 3.

[14] Del éxito que alcanzó esta obra es una buena muestra el número de sus ediciones. La última (que nosotros sepamos) es la número 16 y fue editada en París por Bouret en 1883.

[15] VALLEJO, J.M.: *Aritmética de niños escrita para uso de las escuelas del Reyno.* Madrid, Imp. que fue de García, 1824 (3ª ed.), pág. VII.

Teorema de Thales. Aplicaciones

Miguel A. Pueyo Losa

Introducción

En el presente trabajo se expone una experiencia llevada a cabo con alumnos del segundo y tercer año del Ciclo Superior de la E.G.B. referente al estudio de los triángulos.

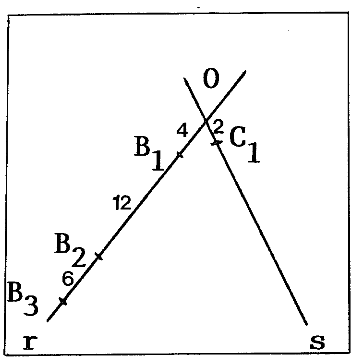
El énfasis inicial se pone en el estudio del TEOREMA DE THALES, teorema que el alumno descubre a través de mediciones que realiza, por el recortado y la manipulación de los triángulos que obtiene.

Como aplicación de este teorema descubre las relaciones métricas en los triángulos rectángulos, obteniendo "triángulos en posición de Thales" cuando aquellos se cortan por la altura relativa a la hipotenusa.

Se aborda finalmente la resolución de triángulos rectángulos y como aplicación de este estudio a la informática se introducen los diagramas de flujo y su traducción al lenguaje de programación Basic.

1. Introducción. Práctica

Dibuja en una cartulina dos recetas secantes r y s. Señala sobre la recta r tres puntos B_1, B_2 y B_3 que disten de O 4, 16 y 22 centímetros respectivamente.
Señala sobre la recta s un punto C_1 que diste 2 centímetros de O.

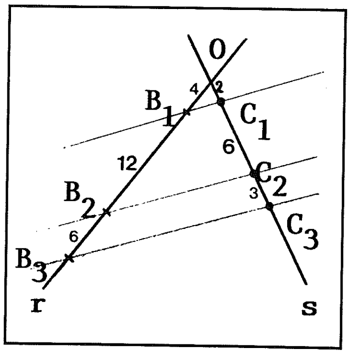


$$\left.\begin{array}{l} OB_1 = 4\ \text{cm} \\ OB_2 = 16\ \text{cm} \\ OB_3 = 22\ \text{cm} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} B_1B_2 = 12\ \text{cm} \\ B_2B_3 = 6\ \text{cm} \end{array}$$

$$OC_1 = 2\ \text{cm}$$

Traza la recta que pasa por B_1 y C_1 y paralelas a ésta, empleando la escuadra y el cartabón, que pasen por los puntos B_2 y B_3. A los puntos de intersección de dichas paralelas con la recta s llámales C_2 y C_3.

Comprueba que los sementos OC_2 y OC_3 miden 8 y 11 centímetros respectivamente



Resulta entonces:

$$\frac{OB_1}{OC_1} = \frac{4}{2} = 2 \; ; \qquad \frac{OB_2}{OC_2} = \frac{4+12}{2+6} = 2; \qquad \frac{OB_3}{OC_3} = \frac{4+12+6}{2+6+3} = 2$$

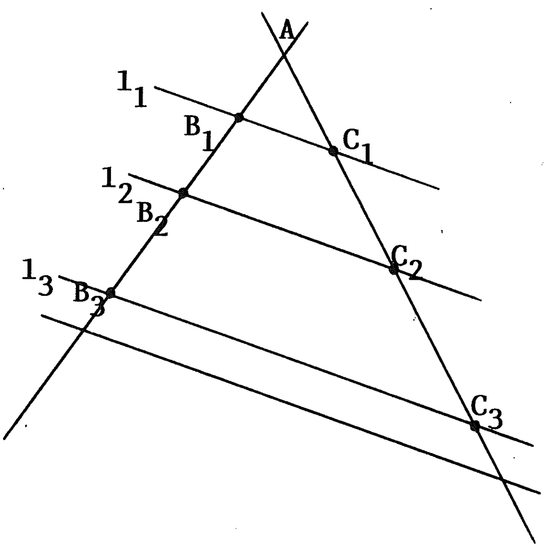
$$\frac{B_1B_2}{C_1C_2} = \frac{12}{} = 2; \qquad \frac{B_1B_3}{C_1C_3} = \frac{12+6}{6+2} = 2; \qquad \frac{B_2B_3}{C_2C_3} = \frac{6}{3} = 2$$

De donde se deduce:

FIG. 4

$$\boxed{\frac{OB_1}{OC_1} = \frac{OB_2}{OC_2} = \frac{OB_3}{OC_3} = \frac{B_1B_2}{C_1C_2} = \frac{B_1B_3}{C_1C_3} = \frac{B_2B_3}{C_2C_3} = 2} \rightarrow \text{constante de proporcionalidad}$$

2. Teorema de Thales



Las rectas l_1, l_2 y l_3 son paralelas.
Al igual que antes obtendremos:

(1) (2)

$$\boxed{\frac{AB_1}{AC_1}} = \boxed{\frac{AB_2}{AC_2}} = \boxed{\frac{AB_3}{AC_3}} = \cdots\cdots\cdots = \frac{AB_n}{AC_n}$$

(si fuesen n rectas)

Por las propiedades de las proporciones (si se cambian los medios se obtiene una proporción equivalente a la primera)

$$\underbrace{\boxed{\frac{AB_1}{AB_2} = \frac{AC_1}{AC_2}}}_{(1)} \; ; \; \underbrace{\boxed{\frac{AB_1}{AB_3} = \frac{AC_1}{AC_3}}}_{(2)} \; ; \; \cdots\cdots\cdots$$

> Si un haz de rectas paralelas se corta por dos rectas secantes, los segmentos determinados sobre una de las secantes son proporcionales a los determinados sobre la otra.

TEOREMA DE THALES

PROFESOR

El alumno debe comprobar experimentalmente este teorema realizando diversas prácticas y mediciones hasta que lo interiorice. Unas prácticas deben ser libres y otras propuestas, dirigidas hacia:

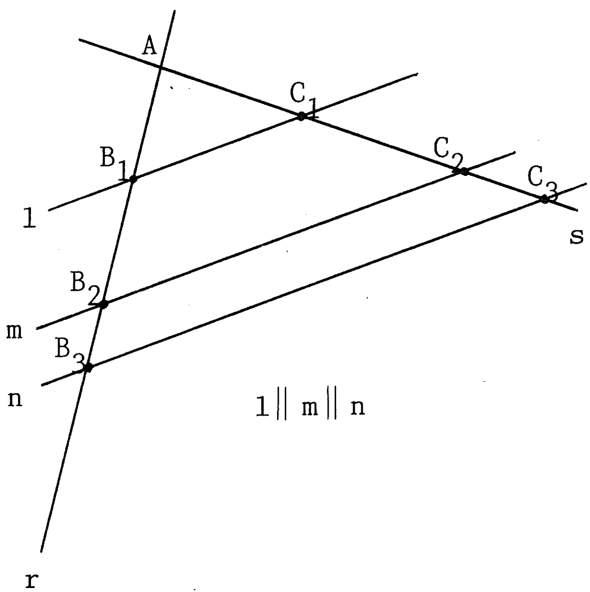
- *—Dividir un segmento en partes iguales.*
- *—Obtener el segmento* ***cuarto proporcional*** *a tres dados.*
- *—Obtener el segmento* ***tercero proporcional*** *a dos dados.*
- *—Dividir un segmento en partes proporcionales a otros dados.*

Hemos comprobado la relación existente entre los segmentos correspondientes determinados sobre las rectas secantes.

Pero *¿qué relación existirá entre los segmentos determinados sobre las rectas paralelas?*

3. Triángulos en posición de Thales

Cuando un haz de rectas paralelas es cortado por dos rectas secantes, se obtienen triángulos con un vértice común que se dicen en *posición de Thales.*



$$\left.\begin{array}{c}\widehat{B_1AC_1}\\ \widehat{B_2AC_2}\\ \widehat{B_3AC_3}\end{array}\right\}$$ triángulos en posición de Thales

Los triángulos en posición de Thales son *semejantes,* es decir tienen sus ángulos iguales y los lados homólogos son proporcionales.

$\hat{A}$ es común a los tres triángulos

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{B}_3\\ \hat{C}_1 = \hat{C}_2 = \hat{C}_3\end{array}\right\}$$ por correspondintes

AB_1, AB_2 y AB_3 se oponen a ángulos iguales y se dice que son lados *homólogos*

También son homólogos AC_1, AC_2 y AC_3

Práctica 2

Sigue los pasos que a continuación describimos:

Paso1. Coge tres cartulinas de colores diferentes (p.e. rojo, azul y verde). Puedes elegir también tres hojas de papel charol.

Paso 2. Coloca una sobre otra como se indica en la figura 1.

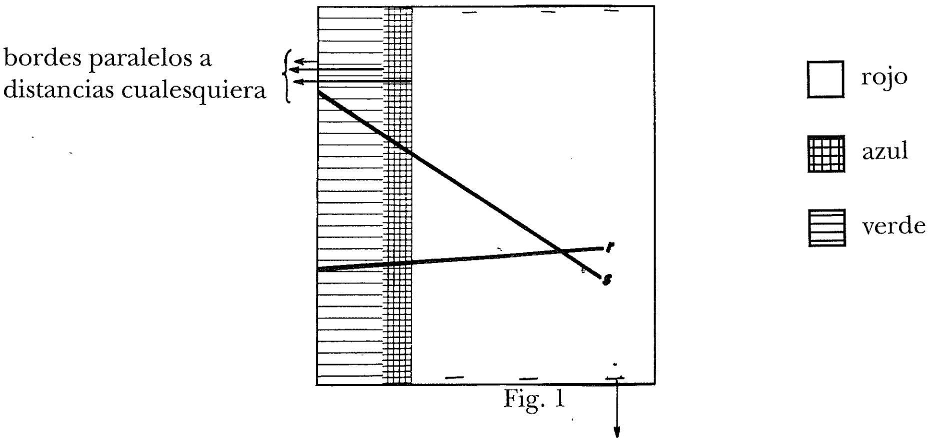
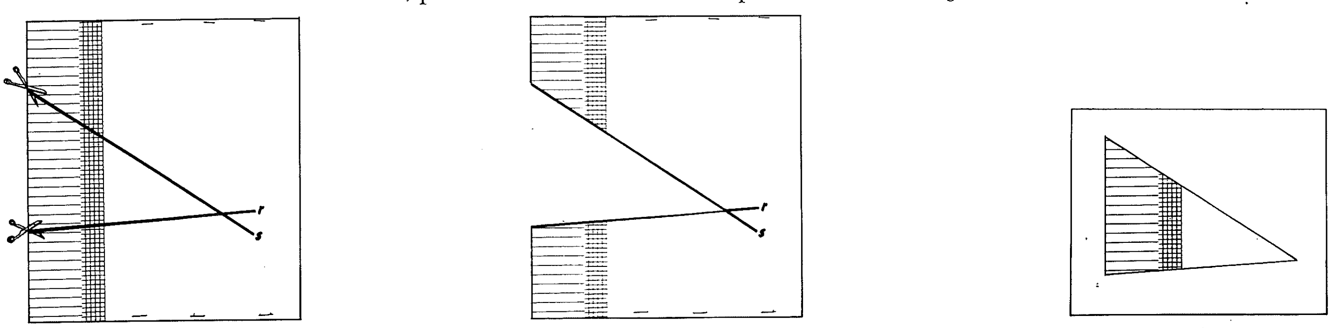


Fig. 1

Paso 3. Para que no se muevan las cartulinas puedes graparlas por los extremos superior e inferior.
Traza dos rectas secantes que pasen por las tres cartulinas y se corten sobre la primera (fig. 2).

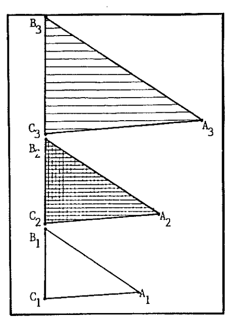
Paso 4. Corta las tres cartulinas, procurando no se muevan, por las líneas dibujadas.



a) b) c)

Fig. 2
Hemos obtenido tres triángulos en posición de Thales.

Paso 5. Separa los 3 triángulos y ponles nombres a los vértices.



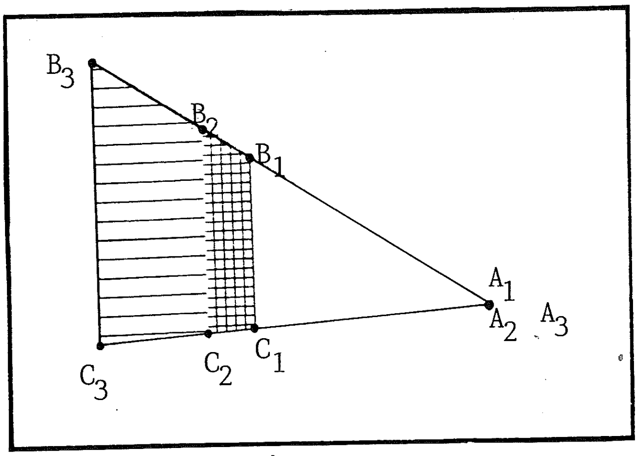
Ya sabemos que: $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \widehat{A_3}$

$$\widehat{B_1} = \widehat{B_2} = \widehat{B_3}$$

$$\widehat{C_1} = \widehat{C_2} = \widehat{C_3}$$

Pero vamos a comprobarlo

Paso 6. Cuando cortamos las cartulinas, los ángulos $\widehat{A_1}$, $\widehat{A_2}$ y $\widehat{A_3}$ estaban superpuestos.



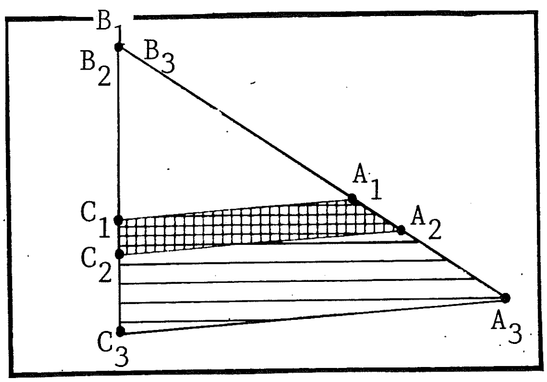
Por el teorema de Thales se tiene que:

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2} \quad (1)$$

$$\frac{A_1B_1}{A_3B_3} = \frac{A_1C_1}{A_3C_3} \quad (2)$$

$$\frac{A_2B_2}{A_3B_3} = \frac{A_2C_2}{A_3C_3} \quad (3)$$

Paso 7. Superpón ahora los ángulos $\widehat{B_1}$, $\widehat{B_2}$ y $\widehat{B_3}$ y comprueba que coinciden.



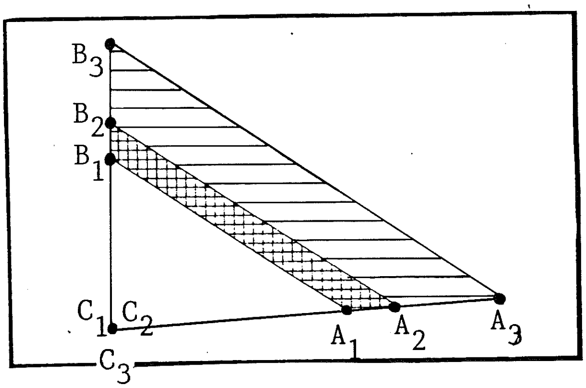
Aplicando el teorema de Thales obtenemos:

$$\frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{B_1A_1}{B_2A_2} \iff \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2} \quad (1)$$

$$\frac{B_1C_1}{B_3C_3} = \frac{B_1A_1}{B_3A_3} \iff \frac{B_1C_1}{B_3C_3} = \frac{A_1B_1}{A_3B_3} \quad (2)$$

$$\frac{B_2C_2}{B_3C_3} = \frac{B_2A_2}{B_3A_3} \iff \frac{B_2C_2}{B_3C_3} = \frac{A_2B_2}{A_3B_3} \quad (3)$$

Paso 8. Por último superpón los ángulos $\widehat{C_1}$, $\widehat{C_2}$ y $\widehat{C_3}$ y comprueba que también coinciden.



Aplicando el teorema de Thales obtenemos:

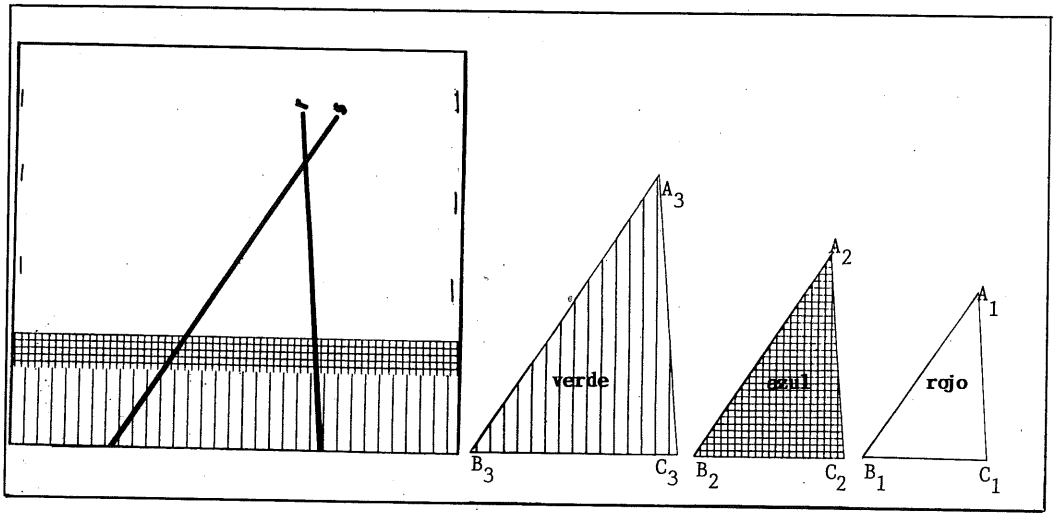
$$\frac{C_1B_1}{C_2B_2} = \frac{C_1A_1}{C_2A_2} \iff \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2}$$

$$\frac{C_1B_1}{C_3B_3} = \frac{C_1A_1}{C_3A_3} \iff \frac{B_1C_1}{B_3C_3} = \frac{A_1C_1}{A_3C_3}$$

$$\frac{C_2B_2}{C_3B_3} = \frac{C_2A_2}{C_3A_3} \iff \frac{B_2C_2}{B_3C_3} = \frac{A_2C_2}{A_3C_3}$$

Conclusión

—Al cortar las cartulinas por las líneas dibujadas obtuvimos tres triángulos en posición de Thales.
—Comprobamos que los tres tienen sus ángulos iguales.



De las proporciones obtenidas al aplicar el teorema de Thales resulta:

Por **(1)** $$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} \Rightarrow \overset{\triangle}{A_1B_1C_1} \sim \overset{\triangle}{A_2B_2C_2}$$

Por **(2)** $$\frac{A_1B_1}{A_3B_3} = \frac{A_1C_1}{A_3C_3} = \frac{B_1C_1}{B_3C_3} \Rightarrow \overset{\triangle}{A_1B_1C_1} \sim \overset{\triangle}{A_3B_3C_3}$$

Por **(3)** $$\frac{A_2B_2}{A_3B_3} = \frac{A_2C_2}{A_3C_3} = \frac{B_2C_2}{B_3C_3} \Rightarrow \overset{\triangle}{A_2B_2C_2} \sim \overset{\triangle}{A_3B_3C_3}$$

~ signo de semejanza

—La relación de semejanza entre triángulos es de *equivalencia*: En el paso 8 hemos comprobado la propiedad *transitiva* de esta relación.

Dos o más triángulos son semejantes si tienen sus ángulos iguales
y entonces sus lados homólogos son proporcionales.
Los triángulos en posición de Thales son triángulos semejantes.

PROFESOR:

—Con prácticas como la descrita se pretende que el ritmo acelerado de aprendizaje que en casos imponemos, se relentice adecuándolo a las necesidades de cada alumno, y realizando éste cuantas prácticas, mediciones y comprobaciones estime necesarias, interiorice los "conceptos importantes".

—En el esquema que sigue, aparecen secuenciados los conceptos y apartados que pensamos debían tratarse a continuación, todos ellos íntimamente relacionados con el *teorema de Thales*, al objeto de reforzarlo mostrando al alumno algunos de los múltiples resultados de interés que de él se derivan.

- Razón de semejanza.

↓

- Casos de semejanza de triángulos.

↓

- Razón de los perímetros en dos triángulos semejantes.

↓

- Razón de las áreas en dos triángulos semejantes.

↓

- Polígonos semejantes. Construcción de polígonos semejantes.

↓

- La escala como razón de semejanza. Planos y mapas.

↓

- Proyección de un punto y un segmento sobre una recta.

↓

- RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

↓

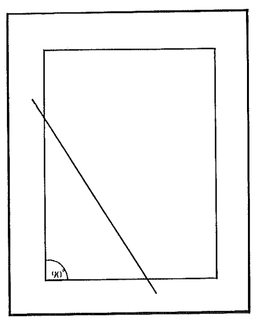
1

4. Relaciones métricas en los triángulos rectángulos

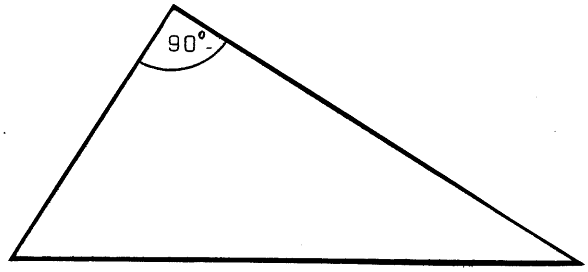
Práctica 3

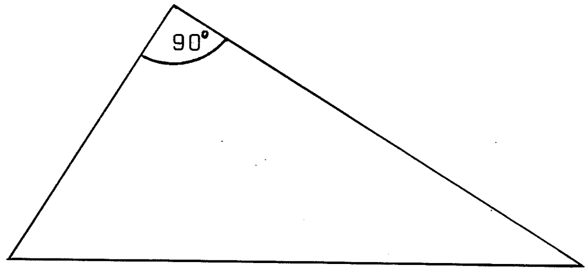
—Coge dos cartulinas o dos hojas de papel charol de diferentes colores, superpónlas y traza una recta que corte a dos bordes perpendiculares, como se indica en la figura.

—Corta por la línea dibujada.

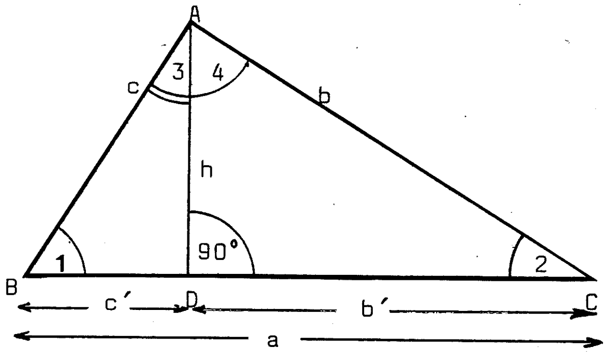


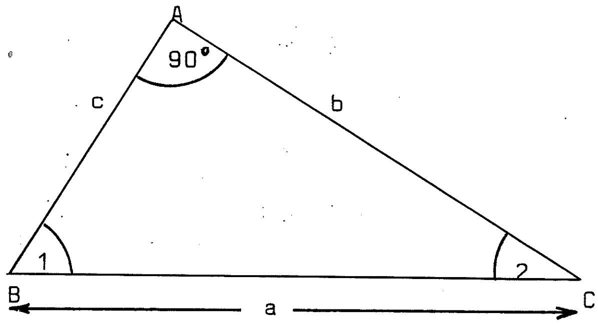
Se obtienen dos triángulos rectángulos *iguales.*





—Designa con letras a los elementos de cada triángulo y traza en uno de ellos, utilizando la escuadra o el cartabón, la altura relativa a la hipotenusa.





Elementos:

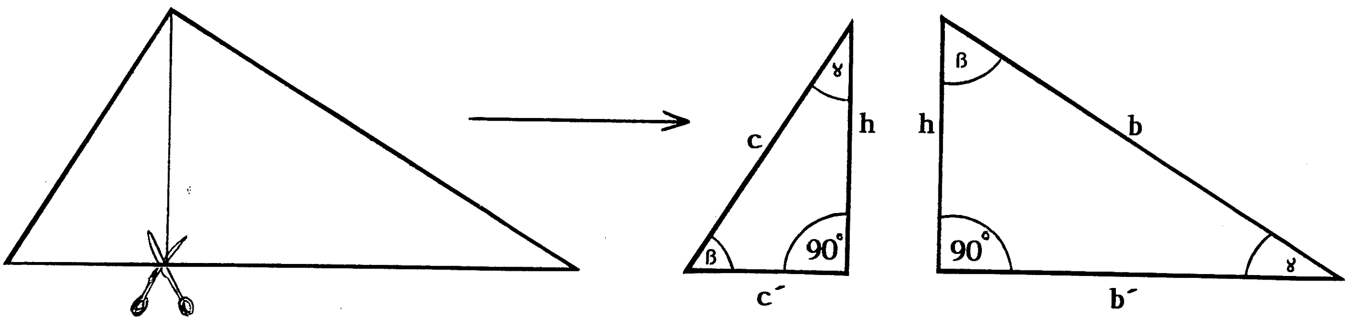
a hipotenusa; b, c catetos; h altura relativa a la hipotenusa;
b', c' proyecciones de los catetos b y c sobre la hipotenusa.

Fíjate en la relación existente entre los ángulos $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$ *y* $\hat{4}$.

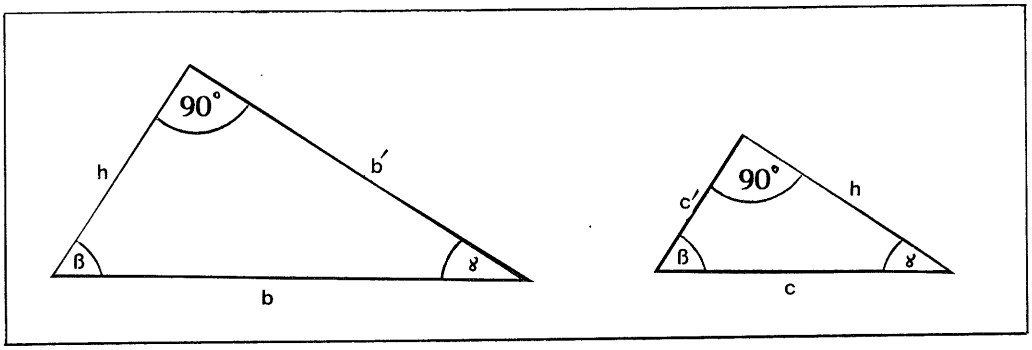
$$\left.\begin{array}{l}\hat{1}+\hat{3}=90^\circ \\ \hat{4}+\hat{3}=90^\circ\end{array}\right\} \Longrightarrow \hat{1}=\hat{4}=\hat{\beta}$$

$$\hat{\gamma}=\hat{3}=\hat{2} \Longleftarrow \left\{\begin{array}{l}\hat{4}+\hat{3}=90^\circ \\ \hat{4}+\hat{2}=90^\circ\end{array}\right.$$

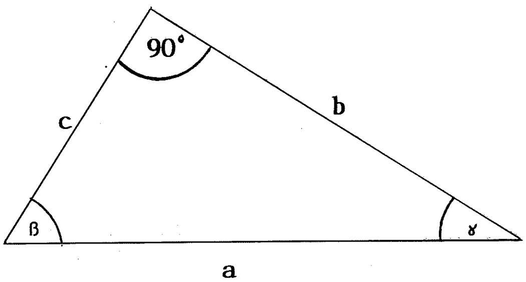
—Corta por la altura uno de los triángulos.



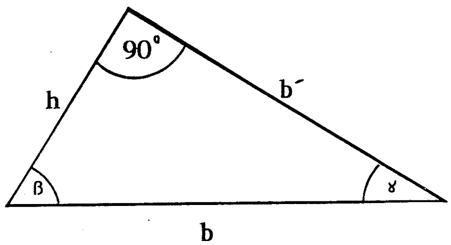
—Dales la vuelta, como se indica en la figura, a los dos triángulos resultantes.



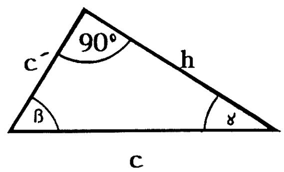
—Tenemos ahora tres triángulos rectángulos semejantes. Tienen los tres ángulos iguales.



Triángulo grande

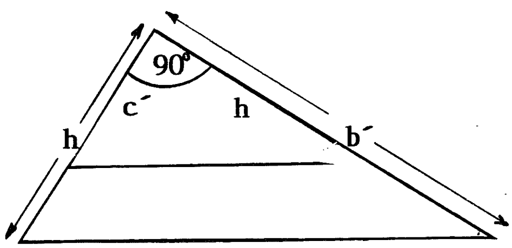


Triángulo mediano



Triángulo pequeño

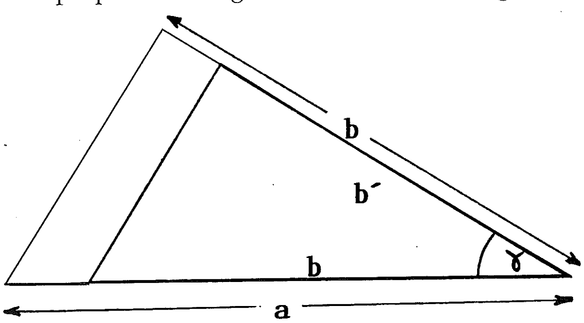
—Superpón el triángulo pequeño sobre el mediano haciendo coincidir los ángulos rectos.



Resultan 2 triángulos en posición de Thales.
Aplicando el Teorema de Thales se obtiene:

$$\frac{c'}{h} = \frac{h}{b'} \Longrightarrow h^2 = b' \cdot c'$$

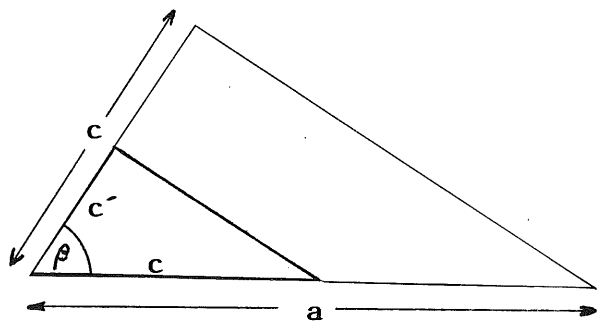
—Superpón el triángulo mediano sobre el grande de modo que coincidan los dos ángulos $\hat{\gamma}$



Resultan 2 triángulos en posición de Thales.
Aplicando el Teorema de Thales se obtiene:

$$\frac{b'}{b} = \frac{b}{a} \Longrightarrow b^2 = a \cdot b'$$

—Por último, superpón el triángulo pequeño sobre el grande haciendo coincidir los ángulos $\hat{\beta}$.

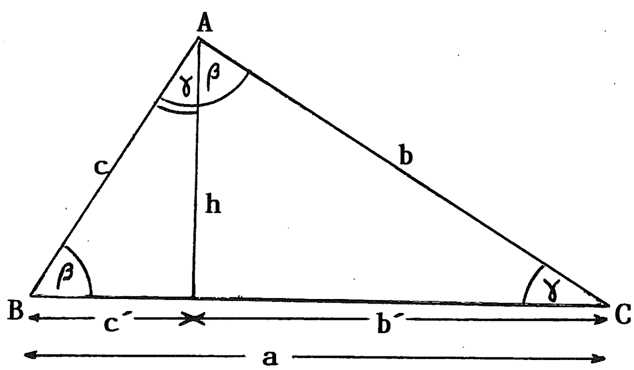


Resultan 2 triángulos en posición de Thales. Aplicando el Teorema de Thales resulta:

$$\frac{c'}{c} = \frac{c}{a} \Longrightarrow c^2 = a \cdot c'$$

Conclusión

Fíjate en las relaciones que hemos obtenido entre los elementos de un triángulo rectángulo



$$\boxed{a = b' + c'} \quad (1)$$

$$\frac{c'}{h} = \frac{h}{b'} \longleftrightarrow h^2 = b' \cdot c'$$

En un triángulo rectángulo, la altura es media proporcional entre los dos segmentos en que divide a la hipotenusa.
(TEOREMA DE LA ALTURA)

$$\frac{b'}{b} = \frac{b}{a} \longleftrightarrow b^2 = a \cdot b'$$

$$\frac{c'}{c} = \frac{c}{a} \longleftrightarrow c^2 = a \cdot c'$$

En un triángulo rectángulo, cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.
(TEOREMA DEL CATETO)

Si sumamos miembro a miembro las dos últimas igualdades (Teorema del Cateto), resulta:

$$\begin{array}{rcl} & b^2 = & a \cdot b' \\ + & c^2 = & a \cdot c' \\ \hline & b^2 + c^2 = & a \cdot b' + a \cdot c' = a \cdot \overbrace{(b' + c')}^{(1)} = a \cdot a = a^2 \end{array}$$

$a^2 = b^2 + c^2$ En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos (TEOREMA DE PITÁGORAS)

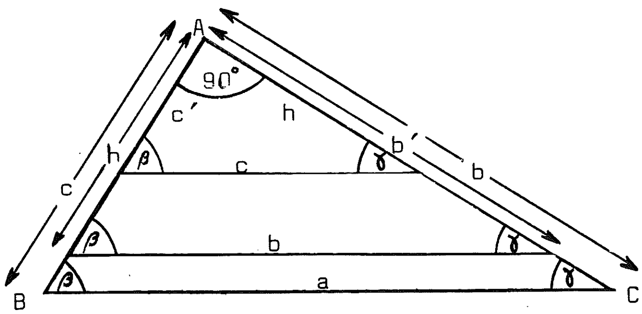
$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2} \longrightarrow \begin{array}{|l|}\hline a = \sqrt{b^2 + c^2} \\ \hline b = \sqrt{a^2 - c^2} \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} \\ \hline \end{array}$$

para calcular la hipotenusa

para calcular los catetos

PROFESOR

Al alumno se le debe proponer que obtenga todas las relaciones posibles que se dan entre los elementos de un triángulo rectángulo.



pequeño - mediano $\frac{h}{b'} = \frac{c'}{h} = \frac{c}{b}$

pequeño - grande $\frac{c}{a} = \frac{c'}{c} = \frac{h}{b}$

mediano - grande $\frac{b}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{h}{c}$

y compruebe que de las 9 proporciones obtenidas, tres son *continuas* y dan lugar a los *teoremas del cateto y de la altura.*

Como refuerzo de todos los teoremas estudiados, trataríamos a continuación:

—Cálculo de la altura de un triángulo equilátero.
—Cálculo de la diagonal de un cuadrado y de un rectángulo.
—Cálculo de la apotema de un polígono regular.
Los 3 apartados como aplicación del Teorema de Pitágoras)
—Construcción de un cuadrado de igual superficie que la de un rectángulo dado (Teorema del cateto)
—Media proporcional de 2 segmentos (Teorema de la altura o Teorema del cateto).
—Tercera proporcional de 2 segmentos (Teorema de la altura o Teorema de Thales).
—Construcción de un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia dada. (Teorema de Thales).

Todo lo hasta aquí tratado bajo el título "TEOREMA DE THALES. APLICACIONES", se propone para su estudio en el primer año de la Secundaria Obligatoria (12-16), dejando para el segundo la "RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS".

Funciones y Gráficas

Félix Alayo

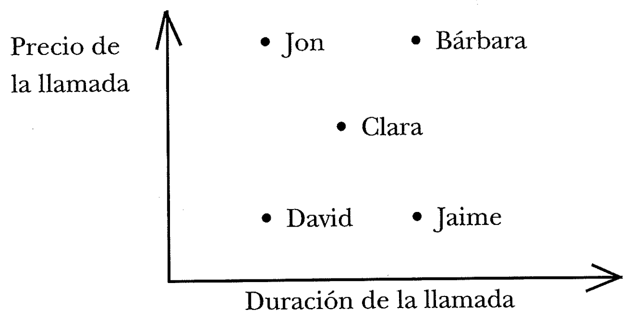
La orientación que tradicionalmente se da a este tema es sumamente abstracta y en la mayoría de los casos carece completamente de sentido para nuestros alumnos. Ciertamente muchos de ellos acabarán haciendo una gráfica más o menos aproximada a partir de la fórmula algebraica que nosotros les demos (en ocasiones camuflada con algún pequeño enunciado), pero esto carecerá de significado alguno para la mayoría. Difícilmente adquirirán una comprensión global sobre los comportamientos y tendencias generales de funciones y gráficas. Cuando se les plantee una situación nueva, volverán a cometer exactamente los mismos errores que antes de iniciar el tema y la utilidad de lo aprendido será casi exclusivamente la de superar con éxito las matemáticas escolares.

Sin embargo también hay otras formas de trabajar. Podemos plantear en clase situaciones realistas, próximas a los alumnos y sobre las que todos puedan opinar, al margen de su nivel de competencia matemática. De esta forma conseguiremos que las ideas previas de los estudiantes salgan a la luz. La discusión sobre estas ideas genera situaciones de conflicto en el alumno que pueden permitirle revisar sus concepciones previas.

A continuación se presentan dos problemas extraídos del módulo "The Language of Functions and Graphs" del Shell Centre de la Universidad de Nottingham [1] y se comenta lo ocurrido en el aula con un curso de 2º de REM cuando se ha trabajado con ellos, primero en pequeños grupos de tres alumnos (intentando llegar a un consenso dentro de cada grupo) y luego en un debate general del conjunto de la clase.

Llamadas telefónicas

Un fin de semana. Cinco personas hicieron llamadas a varias partes del país. Anotaron el precio de sus llamadas y el tiempo que estuvieron en el teléfono en la siguiente gráfica:



—*¿Quién puso una llamada a larga distancia? Explica con cuidado tu razonamiento.*
—*¿Quién realizó una llamada local? Explícalo.*
—*¿Quiénes hicieron llamadas a la misma distancia aproximadamente? Explícalo de nuevo.*
—*Copia la gráfica y marca otros puntos que representen a personas que hicieron llamadas locales de diversa duración.*
—*Si hicieras una llamada local mostrando todas las llamadas telefónicas realizadas desde Bilbao en un fin de semana, ¿cómo sería? Dibuja un esquema e indica claramente las suposiciones que haces.*

Estas fueron algunas de las ideas que surgieron a lo largo de un debate en clase:

—*¿Quién llamó a larga distancia?*

Varios: "Jon y Bárbara, porque son los que más pagan".

Fernando: "Sólo Jon, porque paga mucho y habla poco".

Varios: "Pero los dos pagan lo mismo".

Gran discusión. Alguién dice que "el que habla mucho y paga mucho es el que llama más lejos". Al final parece que se aclara.

—*¿Quién realizó una llamada local?*

Varios: "David y Jaime, porque los dos hablan poco".

Fernando y alguno más: "Sólo Jaime, porque paga poco y es el que más habla".

De nuevo gran discusión. Parece que el debate anterior no ha sido suficiente ya que vuelven a surgir los mismos errores. Insistimos. Al final se acepta el criterio de que por el mismo precio, llama más lejos el que menos habla.

—*¿Quiénes hicieron llamadas a la misma distancia aproximadamente?*

Alguien: "Jon y David, porque los dos hablan el mismo tiempo".

Iratxe: "Jon y David y también Bárbara y Jaime".

Fernando ha sugerido ya que son David, Clara y Bárbara. De momento me limito a apuntarla como una posibilidad más, pero no la discutimos todavía. Abordamos lo expuesto por los demás. Tras un buen rato de discusión se llega a la conclusión de que hay que relacionar las dos variables, y entonces Fernando vuelve a insistir en que "son David, Clara y Bárbara, porque Clara habla el doble que David y paga el doble, y Bárbara habla el doble que Clara y paga el doble".

Surge la idea de la proporcionalidad, aunque no se menciona el término. Iratxe hace un "descubrimiento": "Entonces Jon, Clara y Jaime también llaman a la misma distancia, porque Clara llama el doble y paga el doble y Jaime también".

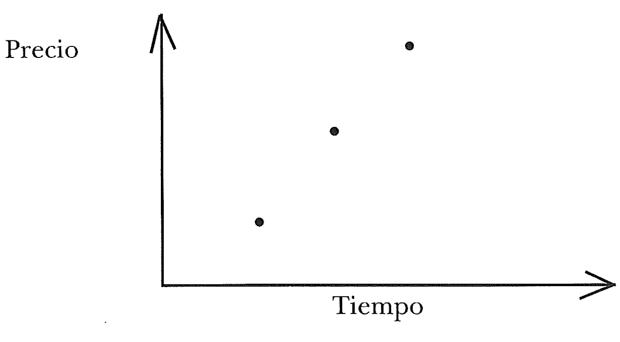
Sabin: "No; Clara paga la mitad".

Recogemos de nuevo la propuesta de Fernando y todos están de acuerdo en que es correcta porque doble-doble... Pregunto: "¿Cómo se llama eso en matemáticas?"

Subin: "Que son proporcionales".

—*Marcar otros puntos que representen a personas realizando llamadas locales.*

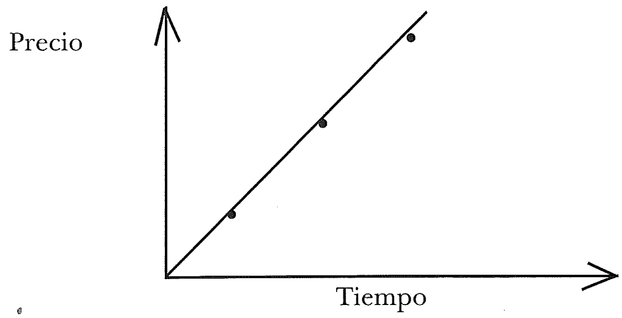
Nadie da ninguna idea. En realidad, al llegar a este punto mientras trabajaban en grupos se habían desmoralizado un poco. Mando salir a Raúl para que haga un gráfica en la pizarra. A pesar de que dice que no sabe, marca tres puntos y explica la relación doble-doble...



"¿Alguien puede decir más puntos?"

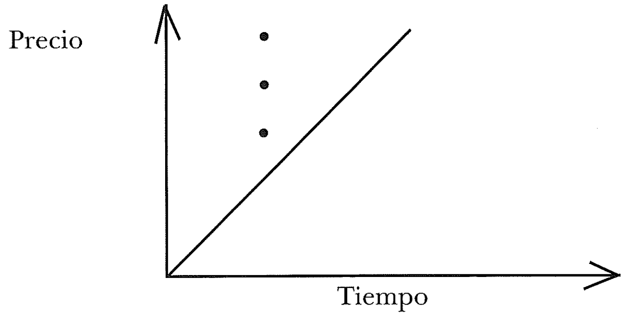
Txentxo: "Sí. Otro más arriba y a la derecha".

Sale a marcarlo y amplía: "Todos los que están sobre esta recta".



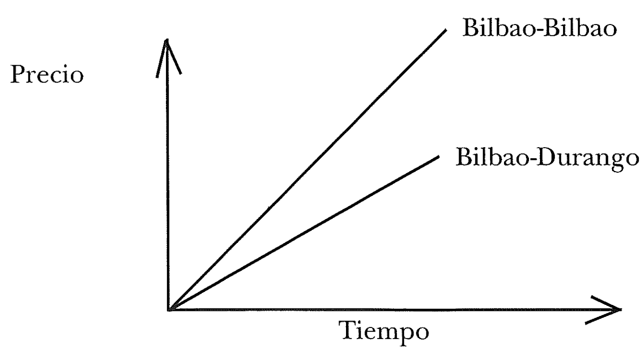
Están de acuerdo. Surge alguna duda cuando pregunto si es realmente una recta o una curva, pero todos están de acuerdo en que tiene que ser una recta y que pasa por el origen ("si no habla, no paga nada"). Me quedan dudas sobre el nivel de comprensión real. Planteo: "Estas son todas las llamadas locales, por ejemplo Bilbao-Bilbao. Vamos a marcar todas las llamadas realizadas de Bilbao a Durango".

Sobre el gráfico anterior, Raúl propone:

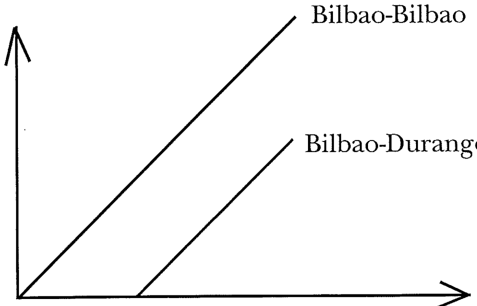


"porque tienen que pagar más".

Se discute y Arturo propone una recta.



Iratxe corrige la recta de Arturo. Propone marcar los ejes y concluye que tiene que ser una recta paralela a la anterior.

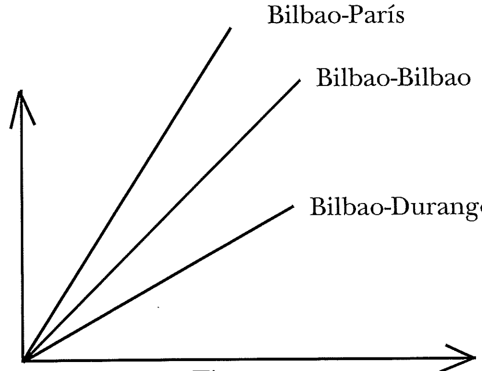


—(Dudas) *¿Tiene que cortar el eje?*
Iratxe: "Sí". Resto, dudas.
—*¿Qué significa ese punto?*
Alguien: "Que habla dos minutos".
—*¿Cuánto paga?*
Varios: "Nada".

Se acuerda que no se puede hablar gratis dos minutos. Volvemos a la propuesta de Arturo.

Raúl: "No puede ser, porque por el mismo precio el de Durango habla más".

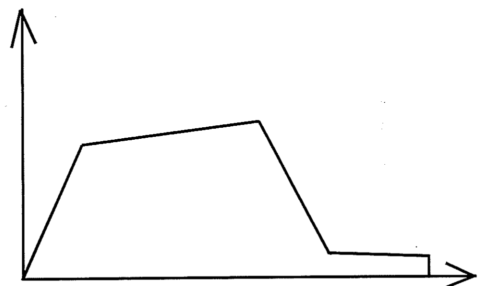
Alguien sugiere que Bilbao-Durango tiene que estar por encima de Bilbao-Bilbao. Para asegurar que esto se ha entendido, propongo representar todas las llamadas de Bilbao a París. Todos están de acuerdo con la recta que dibuja Belén.



Observar que en este caso no se pretendía que saliera la función escalonada, aunque de haber salido se habría tratado.

¿Qué deporte?

¿Qué deporte producirá una gráfica como ésta?



Elige la mejor de las siguientes respuestas y explica claramente por qué se ajusta a la gráfica.

Escribe las razones por las que rechazas las demás.

Pesca.
Salto con pértiga.
100 metros lisos.
Paracaidismo.
Golf.
Tiro con arco.
Lanzamiento de jabalina.
Salto de altura.
Salto de trampolín.
Billar.
Carrera de obstáculos.
Esquí acuático.

Este es un problema muy abierto que da mucho juego. En primer lugar, se observa una tendencia a identificarlo con los saltos o con la carrera de obstáculos por la similitud a la gráfica con la trayectoria de los atletas (aunque la gráfica se refiere a la velocidad). En el fondo de estas interpretaciones, se está considerando la gráfica como un mero dibujo de la situación. Este es un error muy extendido y que lo podremos observar casi siempre que tratemos de gráficas relacionadas con situaciones "reales".

Pero también salen muchos deportes, algunos de los cuales ni siquiera se habían propuesto, que pueden dar lugar a gráficas similares a la propuesta:

—100 metros lisos: "sale el corredor, va cada vez más rápido, luego sigue a la misma velocidad y al cruzar la meta casi se para, pero sigue andando un rato".

—La pesca: Hay dos interpretaciones: una incorrecta, que sencillamente asocia la gráfica con la forma de la caña (estamos en el mismo error que en los saltos), y otra que aporta una explicación razonable: "tiras la caña y luego al caer al agua, se queda casi quieta por allí hasta que se engancha".

—Lanzamiento de jabalina. Nuevamente dos interpretaciones. La primera, incorrecta, describe la trayectoria de la jabalina: "lanzas la jabalina, va por el aire y al caer no se clava, sino que sigue un poco por el suelo" (otra vez la identificación gráfica-dibujo). La segunda describe la velocidad del lanzador: "coge carrerilla, lanza la jabalina y luego se queda casi quieto dando unos saltitos por el impulso".

—Fútbol: "sale el futbolista desde la defensa corriendo cada vez más, luego se cansa...": Ante las dificultades para explicar un cansancio tan repentino, rectifica: "sale desde la defensa, cada vez más rápido, pasa por el centro de campo muy rápido y cuado llega al área contraria se queda casi quieto, regateando, tira, mete gol y se para". Ante esta explicación, otro alumno propone algo similar para el baloncesto.

—Paracaidismo: al lanzarse el paracaidista va cada vez más rápido, hasta que llega un momento en que la resistencia del viento se iguala con la fuerza de la gravedad, al abrir el paracaidas se produce un brusco frenazo y continúa el descenso a velocidad constante hasta llegar al suelo. Hay que suponer que nos referimos a la velocidad vertical. Esta solución (también aportada por algún alumno, aunque sin tanto detalle) podría ser "la solución oficial". pero no está claro que sea más válida que otras de las expuestas anteriormente.

Discutiendo el problema con un grupo de colegas, una profesora apuntaba también la posibilidad de que fuera el esquí acuático practicado por alguien no muy experto: al salir aumenta rápidamente la velocidad, luego se estabiliza y enseguida se cae al agua (lo que supone un frenazo); después nada un rato hasta llegar a la orilla en la que definitivamente se para.

Una nota final: los alumnos siguen discutiendo este problema en el pasillo cuando termina la clase.

[1] MALCON SWAN. *The Language of Functions and Graphs.* Join Matriculation Board. Shell Centre for Mathematical Education. University of Nottingham. 1985.

Apuntes para un tratado de cocotología

Miguel de Unamuno
Edi. Espasa Calpe. Colección Austral nº 141

La afición de Unamuno a las pajaritas y al fastidio que sentía ante aquellas personas "que no se salen nunca de su papel y adoptan siempre un continente severo", le llevan a burlarse de sí mismo a través de D. Fulgencio, pedagogo y hombre de ciencia como el propio Unamuno, y a elevar a la categoría de ciencia el juego manual de las pajaritas de papel.

Apuntes para un tratado de cocotología, es un proyecto de investigación en torno a las pajaritas de papel que nos puede hacer reir por sus desaforadas pretensiones, por las extrapolaciones místicas que contiene y por lo cómico de su objeto, pero que quizás no se encuentre tan alejado de tantos proyectos e investigaciones como hoy se producen capaces de dar al traste con el buen humor de Unamuno, si es que levantase la cabeza.

Pero ésto no es todo, los Apuntes contienen sabrosas observaciones geométricas que posiblemente le sugerirán al lector otras muchas y le incitarán a la búsqueda, pues: "la razón de ser de la pajarita de papel es su perfección geométrica... que consiste en poder inscribirse en su propio óvulo-cuadrado... Claro está que... no hay pajarita alguna que cumpla con toda exactitud rigurosa su ideal, su ideal geométrico".

Este ideal geométrico se manifiesta en su anatomía, ya que "La pajarita es, ante todo, un ser triánguli-rectánguli-isocélico" en donde está presente "la misteriosa relación de inconmensurabilidad", y hasta su fisiología, que consiste en el dinamismo de mantenerse en pie, contiene de nuevo una "¡nueva, maravillosa y sorprendente armonía triangular!".

E incluso, ¿no estará en lo cierto D. Fulgencio al conjeturar que el ancestral Tangram tiene en la pajarita de papel su origen y su razón de ser?

Mª Dolores Iriarte Bustos

N.R.

En el número anterior de "SUMA", en el artículo *Unamuno y las matemáticas*, por error tipográfico, aparecía la frase "Y yo encomendaría un asunto delicado a un puro matemático..." y debería decir "Y yo **no** encomendaría un asunto delicado a un puro matemático...".

Buscando recursos para el aula

Luis Carlos Cachafeiro Chamosa,

Introducción

El presente artículo estudia aquellos materiales que pueden ser utilizados por el profesor de matemáticas en el aula, englobándolos según la forma de uso así como por el lugar de dónde fueron extraídos.

Cita unas experiencias de colaboración entre profesorado de Física y Química y Matemáticas realizadas en el centro de trabajo del autor del artículo.

Indica la necesidad de un mayor acercamiento entre ambos colectivos, señalando que los laboratorios de Ciencias Experimentales son un precioso lugar donde encontrar recursos para el aula de Matemáticas.

¿Dónde puede encontrar el profesor de matemáticas materiales para el aula?

El profesorado de Matemáticas mantiene una doble postura en cuanto a la vinculación de la asignatura con el medio que lo rodea:

De una parte, los objetos de estudio son de tipo teórico, y por tanto sin vinculación exacta con objetos de los llamados "reales".

De otra parte, debe mostrar que su reino es, por lo menos en parte, de este mundo, y por tanto, mostrar que sus materiales sí pueden ser aplicados a situaciones y acciones de la vida presente o futura de sus alumnos.

Esta doble vertiente, se observa nítidamente en los tradicionales problemas la aritmética de "mercado": si bien correspondían a situaciones de tipo comercial, los valores que tomaban eran absolutamente ridículos. De esta forma, ante la acusación de que las matemáticas no sirven para nada, ello puede interpretarse o bien como un cumplido o bien como un reproche.

Partimos de que ni actualmente ni históricamente las matemáticas fueran asignaturas inútiles, aunque la función social de ciertas actividades fueran otras muy diferentes de las exclusivamente prácticas.

En el micromundo de la enseñanza de las matemáticas queda aún más patente la necesidad de mostrar el valor de uso de dicha materia, pues si el alumno está aprendiendo para mejorar la sociedad futura, es obvio que necesita conocer tales valores, además de que por razones de tipo pedagógico es necesario que el aprendizaje se encuentre vinculado al medio que rodea al alumno, allí donde ésto sea posible.

Forma de los recursos

Las situaciones de la vida real pueden utilizarse de tres formas:

Como problemas reales, o bien réplicas de la vida real, cuya resolución necesite de instrumentos matemáticos conocidos. Aquí se engloban los "ejemplos". Un caso de este tipo se trata el de la aritmética comercial.

Un segundo caso es el de la "modelización". A partir de una situación cotidiana se intenta "matematizar" para poder conocerla profundamente. Esto en principio parece ser un método más natural que el anterior. La construcción de *la derivada* suele desarrollarse de esta forma en bastantes casos a partir de un caso de móviles.

Un tercer caso, es el uso de situaciones reales, como recursos de tipo metodológico, de forma que ayuden a la construcción de las matemáticas mediante actividades motivadoras. La forma en cómo se introducen estos recursos pedagógicos pueden ser a su vez, bien del primer tipo, como un ejemplo "llamativo" o del segundo para partir de una situación motivadora que se intenta matematizar.

Tanto por razones ideológicas como de desconocimiento y otras, se produjo una barrera que impide comunicar a las matemáticas y al mundo del alumno.

Situaciones para usar en el aula

En su inmensa mayoría, se suelen recoger del llamado medio social, conjunto de características muy heterogéneas tanto colectiva como individualmente, en la que influyen factores como el hábitat, comunicación, profesiones paternas, intereses, etc.

Últimamente han aparecido interesantes trabajos de conexión de las matemáticas con el medio geográfico (mapas, hábitat), con el que se pueden trabajar áreas, trigonometría, semejanzas, estadística, etc.

También las artes plásticas y por ende, los modelos geométricos, están proliferando en su relación con actividades matemáticas. Las razones de ello vienen dadas por una recuperación moral del estudio de la Geometría (arrinconada por el Algebra) al comprobar la potencia de sus actividades y recursos, casi sin utilizar de nuestra mente, así como gracias a la multiplicación de nuevos materiales utilizados de reciente creación.

En cuando a las Ciencias de la Naturaleza, diremos que están tan cerca... y tan lejos. Desde luego, que se trata de las partes del mundo más implicadas en las construcciones matemáticas y donde ésta encuentra sus modelos más potentes. Pero ello, se traduce en muy poco a nivel educativo.

Se observa que hay tres elementos claros de colaboración:

La Matemática proporciona a otras Ciencias modelos teóricos: recta asociada a la medida, el espacio euclídeo y no euclídeo, etc.

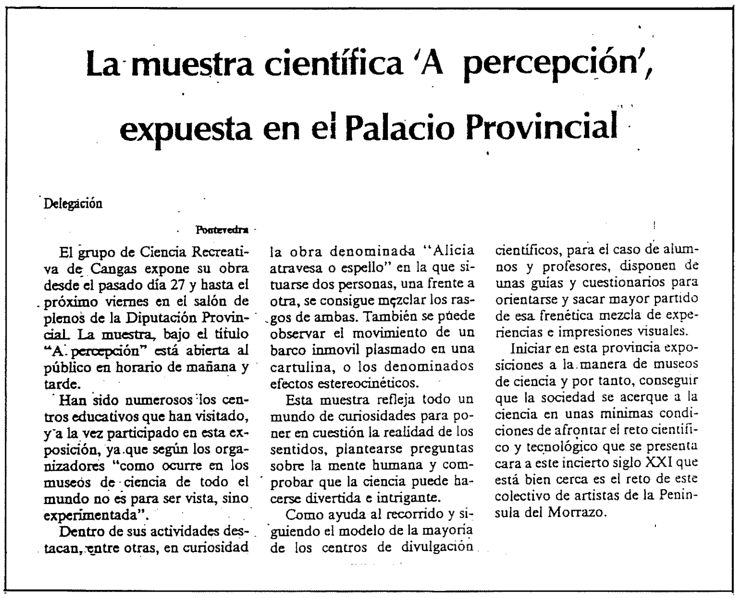
Proporciona elementos de solución de algunos de los problemas que se presentan al científico: ej. métodos de resolución de ecuaciones.

Introduce la posibilidad de análisis e interpretación estadística de los resultados obtenidos en los experimentos. En general la idea que el científico tiene de las matemáticas es excesivamente utilitarista, como una simple herramienta.

Una experiencia de colaboración

En el Instituto de Bachillerato "María Soliño" de Cangas de Morrazo, a partir del curso 86-87, funciona un equipo de profesores y alumnos que, bajo el nombre de Ciencia Recreativa, han recopilado y elaborado experiencias en torno al tema interdisciplinar de la PERCEPCIÓN. Este tema aglutinó al equipo y, a partir de tales experiencias, se ha construido una exposición al estilo de un pequeño (en temática y extensión) Museo de la Ciencia.

A partir de esas experiencias, cada profesor, por su parte, consiguió tener un material para utilizar en su materia curricular. Que el profesor lo sea de una materia y no en otra repercute haciendo más hincapié en unas u otras características de los fenómenos.



La muestra científica 'A percepción', expuesta en el Palacio Provincial

Delegación

Pontevedra

El grupo de Ciencia Recreativa de Cangas expone su obra desde el pasado día 27 y hasta el próximo viernes en el salón de plenos de la Diputación Provincial. La muestra, bajo el título "A percepción" está abierta al público en horario de mañana y tarde.

Han sido numerosos los centros educativos que han visitado, y a la vez participado en esta exposición, ya que según los organizadores "como ocurre en los museos de ciencia de todo el mundo no es para ser vista, sino experimentada".

Dentro de sus actividades destacan, entre otras, en curiosidad la obra denominada "Alicia atravesa o espello" en la que situarse dos personas, una frente a otra, se consigue mezclar los rasgos de ambas. También se puede observar el movimiento de un barco inmovil plasmado en una cartulina, o los denominados efectos estereocinéticos.

Esta muestra refleja todo un mundo de curiosidades para poner en cuestión la realidad de los sentidos, plantearse preguntas sobre la mente humana y comprobar que la ciencia puede hacerse divertida e intrigante.

Como ayuda al recorrido y siguiendo el modelo de la mayoria de los centros de divulgación científicos, para el caso de alumnos y profesores, disponen de unas guías y cuestionarios para orientarse y sacar mayor partido de esa frenética mezcla de experiencias e impresiones visuales.

Iniciar en esta provincia exposiciones a la manera de museos de ciencia y por tanto, conseguir que la sociedad se acerque a la ciencia en unas minimas condiciones de afrontar el reto científico y tecnológico que se presenta cara a este incierto siglo XXI que está bien cerca es el reto de este colectivo de artistas de la Peninsula del Morrazo.

Esta experiencia significativa de la positiva colaboración entre profsores y los diferentes enfoques que pueden desarrollarse en un mismo experimento es la que se denominó VER LA VOZ.

Utilizando un osciloscopio y un micrófono, se puede observar la "forma" de las ondas sonoras. Esto está muy relacionado con la Física, pero fue utilizado para trabajar en matemáticas, en el estudio de las funciones trigonométricas y operaciones sobre funciones como la multiplicación por escalares, suma, representación, qué ocurre cuando a una función se le suma otra función periódica cuyo período sea divisor entero del primero etc.

Aquí, el recurso "motivador" se iniciaba, al intentar todos los alumnos "ver" su voz, alterar sus parámetros (de intensidad, frecuencia y timbre) y comprobar que estos actos eran matematizables y a su vez observables en la gráfica del osciloscopio.

Otro recurso metodológico utilizado, el caleidoscopio, permitió estudiar en COU detalladamente los procesos de reflexión, con elementos tan "ricos" como: haz de rectas que pasan por un punto, plano (de reflexión) que contiene al foco y al observador, mediante la descomposición de la reflexión siguiendo la ley de Descartes, etc. La óptica y las matemáticas, por supuesto, tienen muchísima relación.

Estas no son sino una muestra de los usos múltiples que se dieron a partir de la exposición antes mencionada.

Posibilidades de colaboración entre otras ciencias y las matemáticas

En el grupo de Ciencia Recreativa constatamos cómo un buen número de experiencias tienen un carácter ambivalente y sólo un cierto "enfoque" llevará a considerar la experiencia del campo de las Matemáticas, la Física o la Biología.

En este sentido, se puede aportar desde las matemáticas una cierta "sutileza" de razonamiento, al intercambiar con el científico experimental los datos de sus experimentos. De éste se pude decir que sólo ve en las matemáticas fórmulas para aplicar.

Pero, esta forma utilitarista de ver las mátematicas no es positiva. En Ciencias Naturales, se realizan pocos estudios estadísticos de la multitud de datos recogidos. Hay campos de investigación como el análisis operativo que aún darán mayores posibilidades al estudio de los datos.

Es sintomático cómo grandes prejuicios de la medicina, tuvieron (y tienen) su base en un mal análisis e interpretación de los datos. Uno de los más relevantes fue el que identificaba la inteligencia con el volumen craneal. De ello deducían ¡que la mujer tenía menor inteligencia que el hombre!, aunque no se atrevieran a decir, siguiendo su razonamiento, que el adulto de menor estatura fuera menos inteligente que el más alto.

Los laboratorios de Física, Química, Biología y Geología, son un maravilloso lugar para el matemático interesado: poliedros en un caso, análisis de las proporciones en otros, material para el trabajo con cónicas, funciones de todo tipo, e incluso intricados elementos de álgebra booleana, y mil y un objetos a utilizar se encuentran en ellos.

La colaboración entre profesores de distintas materias es uno de los campos más sin explotar en la enseñanza. La participación del matemático, en las experiencias del laboratorio permitirá que el enfoque a dar al trabajo sea más completo y rico en contenidos.

Disponemos por tanto de un amplio campo por explotar para el profesorado de matemáticas.

Y a veces también para el profesorado de Física, Biología, etc.

La curiosa historia de...

Un sencillo problema astronómico

Hay un problema astronómico muy sencillo, pero que tuvo una evidente importancia en la antigüedad, y que aún hoy puede resultar difícil de resolver para mucha gente. Es el siguiente:

"¿Cómo demostrarías de una manera prácticamente irrefutable, a una persona de la calle que no tenga ninguna formación científica, que el Sol está (mucho) más lejos de la Tierra que la Luna?"

Nada de aparatos ni de teorías astronómicas, por supuesto. No, no, tampoco valen, obviamente, los eclipses. Sólo la observación del cielo "a ojo desnudo".

Mariano Martínez Pérez

SUMA

enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Otoño 1989

Nombre y Apellidos: ____________________

Calle: ____________________

Población: ____________________ C.P.: ____________

Provincia/País: ____________________ Tfno.: (   ) ____________

CIF: ____________ Centro de trabajo ____________________

Firmado: ____________________ Fecha: ____________

Firma:

Deseo suscribirme por 3 números a partir del número ________ inclusive

Cuyo importe haré efectivo mediante:

- ❐ Cheque bancario adjunto
- ❐ Domiciliación bancaria
- ❐ Giro Postal Nº_______ Fecha ____________
- ❐ Contra reembolso
- ❐ Transferencia a:c.c. 6719644, Caja Postal, Urb. Camino de Ronda, Granada.
  c.c. 007.01.289530, Caja General de Ahorros. Urb. Camino de Ronda, Granada

Estado español: Particulares: 2.500 ptas.
Centros: 3.000 ptas.
Europa: 25$ ídem.
Resto del mundo: 35$ ídem.

Señores, les agradeceré que con cargo a mi cuenta corriente/libreta atiendan al recibo que anualmente les presentará la revista «SUMA» correspondiente al pago de mi suscripción a la citada revista.

(Sólo para el Estado Español)

Banco/Caja: ____________________

Agencia: ____________________ Nº C/C: ____________

Calle: ____________________

Población: ____________________ C. Postal: ____________

Provincia: ____________________

Titular: ____________________

Firmado: ____________________ Fecha: ____________

Firma:

Suscripción

Los miembros de cualquiera de las Sociedades que componen la Federación reciben la Revista por el mero hecho de ser socios. Si no pertenece a ninguna Sociedad y desea recibir SUMA en su domicilio envía, debidamente cumplimentado, **el boletín adjunto a Revista SUMA, Apdo. de Correos 1017, 18080 Granada (España).** A esta dirección se pueden solicitar, también, **los números atrasados, al precio de 1000 ptas. más gastos de envío.**
La suscripción le será renovada al finalizar el período inicial indicado si no nos comunica, por escrito, su deseo de causar baja.

Domiciliación Bancaria

Si decide suscribirse a SUMA, puede optar por cualquiera de las formas de pago que aparecen en el boletín de suscripción. No obstante nos permitimos sugerirles la domiciliación bancaria como forma más cómoda de hacer efectivo el importe de la suscripción. En ese caso rellene con letra clara los datos bancarios que aparecen en el boletín.

Agradeceríamos la reseña de dirección postal de Centro/Institución o persona interesada, para enviarle información sobre la presente publicación. Gracias.

Enviamos información de SUMA a:

Nombre y Apellidos: ____________________

Dirección: ____________________ C.P. ____________

Población: ____________________ Provincia: ____________

Este envío es por sugerencia de:

Nombre y apellidos: ____________________

Dirección: ____________________

Población: ____________________ C.P. ____________

Provincia: ____________________ Un saludo

SUMA

Apdo. 1017

18080 GRANADA

ESPAÑA

41 Reunión de la Comisión Internacional para el estudio y mejora de la enseñanza de las matemáticas (C.I.E.A.E.M.)

Informe elaborado por Florencio Villarroya

Entre los días 23 y 29 de julio del 89, se ha celebrado en la Universidad Libre de Bruxelles el 41 Encuentro de la CIEAEM.

El tema de la Reunión ha sido *Papel y concepción de los programas de Matemáticas*, a su vez dividido en cuatro subtemas:

1: Panorama de las situaciones nacionales

1) El contexto del programa
2) La concepción de los programas
3) La evolución de los programas

2: Los programas y la construcción del saber

1) ¿Cómo presentar un programa? ¿Cómo una lista de conceptos, cuestiones, actividades?

2) ¿Se debe concebir la enseñanza de las matemáticas como modelada sobre las teorías matemáticas?

3) ¿Cómo organizar la enseñanza de las matemáticas para que la formalización de los conceptos aparezca como respondiendo a las necesidades de las demostraciones?

3: El profesor y el programa

1) ¿Cómo debería de utilizar el programa el profesor para construir sus clases?

2) ¿Qué es lo que realmente pasa en las clases?

3) ¿Es posible imaginarse la organización de una enseñanza sin recurrir a ningún programa?

4: El alumno y el programa

1) ¿Qué es lo que motiva al alumno para estudiar el contenido del programa?

2) ¿Qué aprende realmente?

3) ¿En qué medida puede utilizar sus propias ideas, sus propias cuestiones y sus propias estrategias?

A cada uno de los subtemas se dedicó una jornada completa, distribuyéndose el tiempo de la siguiente manera:

En primer lugar una mesa redonda o serie de miniconferencias, de dos horas de duración en la que algunos profesores invitados expresaban su punto de vista sobre el tema, presentada por el presidente del subtema que a su vez actuaba de moderador del debate.

Los profesores invitados fueron:

Subtema 1: Presidente: André Hardy (Bélgica)
Izzy Weinzwig (USA)
Douglas Quadling (GB)
Luis Puig (España)
Diana Rosenberg (Argentina)
Alfred Warbecq (Bélgica)
Desmond Broomes (Barbados)

Subtema 2: Presidente: Christine Keitel (RFA)
Carmen Azcárate (España)
Antoine Bodin (Francia)
Peter Hilton (USA)
Nicolas Rouché (Bélgica)
Georges Schoemaker (Países Bajos)

Subtema 3: Presidente: Catherine Inchley (GB)
André Antibi (France)
Emma Castelnuovo (Italia)
Francine Dubreuq (Bélgica)
Leonor Filipe (Portugal)
Kazadi wa Mashinda (Zaïre)
Julianna Szendrei (Hungria)

Subtema 4: Presidente: Rijke Dekker (Países Bajos)
Arlette Chevalier (Francia)
Kathleen Hart (GB)
Leen Streefland (Países Bajos)

Grupos de trabajo

A continuación de cada sesión plenaria sobre uno de los subtemas, se organizaron varios grupos de trabajo, para profundizar y debatir los temas presentados en la mesa redonda inicial a lo largo de dos sesiones (una por la mañana y otra por la tarde).

A su vez, en estos grupos se presentaban algunas comunicaciones relacionadas con el subtema del día.

Se procuraba que la presencia de las personas en los grupos fuese estable a lo largo de la semana.

Actividades complementarias

La última sesión de la tarde se dedicaba a conferencias, la "Feria de las Ideas" o presentación de vídeos y materiales diversos.

Discusión general:

Al final de los cuatro días de trabajo, cada uno de los diferentes grupos escribió, resumidas, las principales ideas debatidas en su seno. Estas ideas fueron posteriormente debatidas en sesión plenaria y se escribieron como resultado del encuentro, pero sin ánimo de ser conclusiones definitivas, sino meras indicaciones sobre el estado de la cuestión en el momento actual, tal y como lo ve la CIEAEM.

Informe del grupo A: (animado por Lucía Grugnetti y Stefan Turnau).

Una práctica pedagógica eficaz, e incluso innovadora, no es necesariamente el resultado de un "buen" programa, ni incompatible con uno "malo".

El oficio de enseñante debe de incorporar una componente de investigación didáctica permanente.

La elaboración de los programas debería de ser tomada tanto por los enseñantes en sus clases como por los centros de investigación.

Sería deseable que la relación entre los programas de secundaria y de nivel superior fuera examinada, en un futuro, por la CIEAEM.

Un programa oficial no puede servir en ningún caso como coartada para una mala enseñanza: al contrario, tendría que inspirarse en las experiencias llevadas a cabo con éxito, evolucionar continuamente y tener en cuenta toda nueva experiencia o investigación.

Los manuales escolares aseguran una primera concretización de los programas para los profesores, los cuales, sin embargo, no condicionarán a ellos su enseñanza. Incumbe de manera importante a los profesores el adaptarse a los intereses, necesidades y posibilidades de cada grupo particular de alumnos.

Habría que hacer un estudio en profundidad sobre las variables susceptibles de influir fuertemente en las prácticas pedagógicas en la enseñanza de las matemáticas, independientemente de los programas.

De manera general, se puede decir que rara vez se conceptualiza en el momento oportuno.

Si el profesor está atento a la provocación del interés y a la motivación en sus alumnos, tomará consciencia de la importancia de las estrategias puestas en práctica para resolver problemas y entonces traducirá los programas en situaciones de actividad, más que de pasivas asimilaciones: el entrenamiento en la reflexión activa conducirá a la conceptualización.

No se olvidará que las matemáticas se construyen tanto a partir de la realidad, como en el interior de si misma.

Habría que evitar que un programa se redujese sólo a la simple preparación de exámenes y por tanto, repensar la propia naturaleza de los exámenes decisivos.

El conjunto de estos problemas requiere una profunda reflexión sobre la formación de los enseñantes de todos los niveles, incluído el universitario.

Informe del grupo B: (animado por Sylvianne Pahud, Luis Puig y Maggy Schneider).

Los ejes fundamentales de este grupo han sido:

1. Existe una tensión entre, por una parte las finalidades utilitarias de la enseñanza impuestas por el contexto social (adquirir tal competencia técnica para seguir tales estudios o ejercer determinada profesión...) y por otra, ya los objetivos de formación (hacer que los alumnos sean autónomos...) ya del deseo de desarrollar la capacidad de conceptualizar y formalizar.

2. Lo importante no es oponer los polos descritos en 1, sino conciliarlos.

3. Para llegar a un acuerdo sobre los medios de conciliar estos polos, es necesario precisar de antemano expresiones como "verdadero problema", "programa basado sobre actividades", "programa basado sobre la coherencia matemática", "aproximación intuitiva", "dialéctica abstracto-concreta", ...

4. Para mejorar la calidad de la enseñanza, los pro-

gramas no constituyen más que una variable entre otras. En particular, el papel de los enseñantes y su formación son capitales desde este punto de vista. Para ello se invocan 5 dimensiones: personalidad y características (edad,...) del profesor, condiciones de trabajo (acceso a una documentación...) invitación a la iniciativa del profesor, integración de éste en la investigación, interés en hacer vivir al profesor la metodología que se juzgue más provechosa para los alumnos ("acercamiento a través de los problemas"...)

5. Las realidades sociales e institucionales influyen fuertemente en la puesta en marcha de los programas: exámenes oficiales, libros de texto, continuidad del programa para un determinado alumno.

A modo de conclusión, los animadores tienen la impresión que incluso si los miembros del grupo han utilizado constantemente el término "programa", implícitamente, han hablado en términos de "currículum". Sin embargo, no han evocado explícitamente la distinción entre los dos conceptos.

Informe del grupo C: (animado por Paulo Abrantes y Julia Szendrei).

1. Los libros de texto y los materiales didácticos "crean" a veces malos programas puesto que hay errores, malentendidos,...

La utilización adecuada de materiales es importante... Pero el material también puede ser reunido por los alumnos y los profesores, o incluso ser creado por ellos.

2. Se presentan dos perspectivas:

a) Evitar toda posible confusión entre las palabras corrientes y los términos matemáticos (desde el principio).

b) Ocuparse de estos problemas —ser riguroso a veces, pero en otras ocasiones aceptar una utilización menos precisa de las palabras (implícitamente, sabemos que no se utilizan definiciones rigurosas).

(*) Habría que hacer una distinción entre lo que le está "permitido" al profesor y a los alumnos.

3. El concepto matemático es, en algunos casos, un fin en sí mismo; en otros, puede ser una ayuda durante el proceso de resolución de un problema. A este respecto, las decisiones dependen de la perspectiva adoptada.

4. Aquel que desarrolle los programas deberá tener en cuenta el proceso de formación de los maestros. Pero esto no debería ser considerado como un método para introducir un programa bien acabado; debe ser un proceso continuo interconectado con el desarrollo del programa. No hay programas "teacher-proof" pero si hay profesores "programme-proof".

5. Un buen programa tiene que incluir un "capítulo cero" (que explique la filosofia subyacente); tiene que ser rico en sugerencias y ejemplos de actividades; no tiene que ser una lista de temas. Además, el texto tendría que incluir una bibliografía pertinente para ayudar al profesor a desarrollar su trabajo.

El programa no tiene que ser una sucesión *lineal* de temas o adquisición de conocimientos.

6. Hay que tener siempre en la mente que no hay una solución única al problema de redactar un buen programa.

7. ¡El programa tendría que ser un desafío para el profesor!

8. Ciertas comunicaciones demostraron que algunas de las ideas formuladas aquí no son una simple visión sino algo que se puede esperar por la experiencia.

9. Si el profesor es flexible y actúa en consonancia con lo que sucede en la clase, esto no significa que no deba tener nada preparado; al contrario, la estructura y los objetivos deben estar preparados en profundidad por los profesores.

10. Los profesores deben de estar formados de acuerdo con los métodos y la atmósfera deseadas para su trabajo con los alumnos de manera que reciban una experiencia viva y agradable en la resolución de problemas, el descubrimiento de actividades, etc., una ocasión para sentir los problemas de diferentes alumnos (y volverse más paciente...)

11. El profesor *es,* en cierto sentido, un investigador. Los profesores necesitan condiciones (tiempo, etc.) para cumplir este papel. Además deberían de verse implicados en la investigación de problemas matemáticos sencillos.

12. El profesor tiene un papel *único* que jugar en el proceso de investigación en educación – es el único que tiene contacto permanente con los alumnos en "situaciones reales". El *propio concepto* de profesor tendría que ser más elevado.

13. El papel de las asociaciones de profesores es decisivo para:

a) Desarrollar visitas, libros, materiales (aparte de los libros de texto).

b) Dar oportunidad a los profesores de actuar como investigadores, discutir su trabajo y sus perspectivas, intercambiar experiencias...

14. Es importante distinguir la motivación externa y la motivación intrínseca. Esta última depende de la edad y de la personalidad, y cambia con el tiempo y con las situaciones.

15. Los *problemas* no están en los materiales concre-

tos, sino en la *mente*; por ello un objeto es bueno si provoca la curiosidad y la ocasión para *crear* problemas.

16. Hay una gran brecha entre las matemáticas y las matemáticas escolares; esto viene desde las matemáticas *más recientes,* casi únicamente del formalismo.

17. A menudo, la motivación viene del desafío intelectual, cualquiera que sea el problema planteado.

18. Una de las condiciones esenciales para desarrollar la motivación entre los alumnos es la existencia de un profesor motivado con relación tanto a las matemáticas como a la enseñanza.

19. El interés de los estudiantes individualmente, las cosas con las que se encuentran bien, o que pueden hacer bien, deberían de ser el punto de partida para construir nuevas experiencias de enseñanza.

20. El papel de los juegos es importante en el aprendizaje de las matemáticas (alto grado de libertad,...)

21. El programa tiene que ser lo suficientemente flexible para aceptar diferentes tipos de motivación para diferentes alumnos.

Informe del grupo D: (animado por Paolo Boero y Nicole Nantais).

1. *Apreciación*

a) Las comunicaciones han permitido permanecer ligado al tema y han sido los elementos provocadores de la discusión.

b) Las comunicaciones han enriquecido las discusiones sin estar estrechamente ligadas a los subtemas del día y han permitido una interacción entre los diferentes temas.

2. *Hilo conductor*

A lo largo de las discusiones el concepto de dualidad sobre la idea de autonomía y sobre la idea de condicionamiento ha surgido sin haber sido impuesto. Se ha intentado tratar esta dualidad sin juicio de valor a priori.

De hecho, los programas pueden concebirse de modo que favorezcan la autonomía del enseñante o, al contrario, engendrar una forma de condicionamiento. Pero en la práctica, el enseñante puede aplicar muy bien el programa según su propia concepción incluso si los que lo hicieron lo habían enfocado de otra manera.

La formación profesional del enseñante puede concebirse y realizarse de acuerdo con una perspectiva de autonomía o de condicionamiento. La actividad del enseñante en su clase también puede orientarse en el sentido de la autonomía o del condicionamiento del alumno sin que necesariamente exista una relación entre la formación del maestro y su manera de enseñar.

3. *Forma de las discusiones*

Programas

3.1. Razones de ser y peligros.

3.1.1. Seguridad para el maestro.

Peligro: lo empuja hacia la desresponsabilización frente a la elección de la formación de los alumnos.

3.1.2. Uniformidad sobre el territorio de un país.

Peligro: Olvidar las exigencias y necesidades locales.

3.1.3. Valor legal de los títulos de estudio que dan acceso a las diferentes profesiones.

Peligro: Desequilibrio cultural si las matemáticas se utilizan con medio de selección.

Contenidos de los programas

En los diferentes países los programas incluyen más o menos:

a) contenidos matemáticos (nociones)

b) competencias exigibles

c) indicaciones metodológicas

d) referencias metodológicas

b) y c) podrían engendrar el condicionamiento de las prácticas pedagógicas.

Los programas no deben atar la investigación didáctica.

Formación de los enseñantes

3.2. Observaciones

—Los programas de formación de profesores están a menudo en contradicción con los programas institucionales escolares.

—Hay que buscar las mejores condiciones para convertir los cursillos prácticos en útiles y productivos para lograr desarrollar la autonomía de los profesores.

—Hay que permitir a los enseñantes hacer el "maquillaje" de los programas.

—La investigación tiene que partir de los problemas reales que el enseñante encuentra en sus clases.

De todo ello se desprenden dos concepciones distintas de la relación entre la investigación y la formación de los maestros:

—El enseñante se hace investigador.

—El enseñante trabaja dialécticamente con los investigadores.

—Se siente la necesidad de superar la dimensión individual de la tarea de enseñar por el trabajo de equipos.

Queda sin resolver el problema de la conexión entre la investigación fundamental en educación y la formación inicial y continua de los maestros.

Métodos de enseñanza en clase

3.3.

—Distinción entre temas dirigidos y situaciones abiertas.

—Valor y peso de cada una de las introducciones aisladas o integradas de acuerdo con diferentes parámetros:

-Edad de los alumnos, motivación, dificultades, realidad de las clases,...

-Los contenidos

-La formación profesional

—Importancia y valor de la toma de consciencia por parte del alumno de su porpia forma de aprender o de trabajar.

—Diferentes maneras de tratar la interdisciplinariedad tanto en el interior de las matemáticas como con otras disciplinas.

—Hacer resaltar que las matemáticas forman parte de la cultura y de la vida cotidiana de todo ciudadano.

Informe del grupo E: (animado por Annie Berté y Diana Rosenberg).

Tenemos diferentes contextos según los países representados en el grupo, pero, en todos los países, los profesores necesitan ayuda. Somos conscientes de que esta ayuda no puede venir de los programas. ¿Por qué?

Dos opiniones diferentes en el grupo:

1. El programa debe limitarse a un contenido mínimo y abierto para dejar libertad a los profesores.

2. El programa tiene que contener algunas indicaciones para impedir que determinados grupos (editores,...) tengan demasiado poder y dejar demasiada responsabilidad a los profesores.

Las dos partes están de acuerdo sobre el hecho de que hay que dejar bastante libertad a los profesores porque es necesario adaptar la metodología a los cambios sociales. ¿Pero cómo saber que metodologías están disponibles para esta adaptación social? Aquí los profesores necesitan ayuda. Tienen que organizarse en asociaciones para obtener una formación continua, intercambiarse experiencias, conectarse con los investigadores en educación y los investigadores en matemáticas. Los programas pueden ser un instrumento de innovación y tienen que ser experimentados antes de su aplicación con el fin de evitar el *KAOS.* Si el contexto del país lo permite sería deseable que los responsables explicasen las razones políticas por las cuales ciertos temas del programa han sido seleccionados (ejemplo: informática).

Informe del grupo F: (animado por Bernard Héraud y Jasper Selwyn).

Idea central

Las diferentes contribuciones y discusiones han ido en el sentido de desarrollar un programa (currículum):

—que tenga en cuenta el entorno social del niño;

—y que sea el más accesible para todos.

Distintas posibilidades para alcanzar este objetivo:

1. El programa visto desde la *multidisciplinariedad;* ej.: los problemas de aprendizaje de la matemática debidos al lenguaje, en relación con el estudio de la lengua materna.

2. El programa visto desde la multidisciplinariedad, ligado al *contexto ambiental;* ej.: partir del estudio del río Tajo.

3. El programa no troceado en términos de conocimientos esparcidos, sino más bien en función de *temas matemáticos* que se van desarrollando junto a los alumnos; ej.: programa construído sobre los conceptos globales de descomposición, regularidades, simetrías.

4. El programa visto en función de un *análisis de la construcción* del saber, con el fin de facilitar la comprehensión de los conceptos de base; ej.: analizar la construcción del área a través de un modelo comprensivo.

5. El aumento de la *motivación* y la disminución de la *ansiedad* gracias al empleo del ordenador por parte del alumno; ej.: aplicación de un sistema experto para alumnos de medios desfavorecidos.

6. Incorporación de *trabajos abiertos* (proyectos) en el programa nacional de forma obligatoria; ej.: el diploma nacional en Gran Bretaña exige la realización de proyectos de clase, incluídos en la evaluación.

Cuestiones que se plantean

1. ¿Cuál es la mejor manera de beneficiarse del ordenador
   —para la motivación de los alumnos
   —para la interpretación de datos
   —para desarrollar los conceptos?

2. ¿Es necesario evaluar la calidad de la enseñanza a través de exámenes? Pueden implantarse otras formas (ej.: evaluación de proyectos, tests mentales, entrevistas orales,...)

3. ¿Cuál es el mínimo necesario de conocimientos para desarrollar los conceptos matemáticos y las habilidades intelectuales?

4. ¿Cómo establecer una formación de los profeso-

res que les permita conseguir las siguientes cualidades:

–conocer bien su materia;

–saber *explotar* las situaciones que se presentan en la vida de la clase;

–saber *juzgar* sobre el tiempo oportuno para sistematizar una noción;

–saber *seleccionar* las situaciones-problemas apropiadas que permitan una mejor utilización del programa;

–tener una relación *positiva* y *creativa* hacia los alumnos?

Respuesta parcial a la última cuestión

El profesor debe

–ser respetado y reconocido en la sociedad;

–ser capaz de trabajar *en equipo;*

–poder tener tiempo disponible para trabajar en *proyectos de investigación* (enseñante-investigador).

Comentario

He preferido incluir las conclusiones parciales de cada uno de los seis grupos de trabajo, aunque pueda esto dar lugar a:

—Por una parte, una cierta repetición de los resultados.

—Por otra, al intentar buscar el equilibrio o el consenso entre los participantes, quizá las ideas más radicales, o más brillantes, no aparecen recogidas.

Adenda

1. En el nº 5 de esta revista se publicará una de las intervenciones de uno de los participantes en el subtema 2, Antoine BODIN del IREM de Besançon, que parece interesante incluir, sobre todo ahora que en nuestro país se debaten diseños curriculares.

2. Se anunciaron los lugares de celebración de los siguientes encuentros:

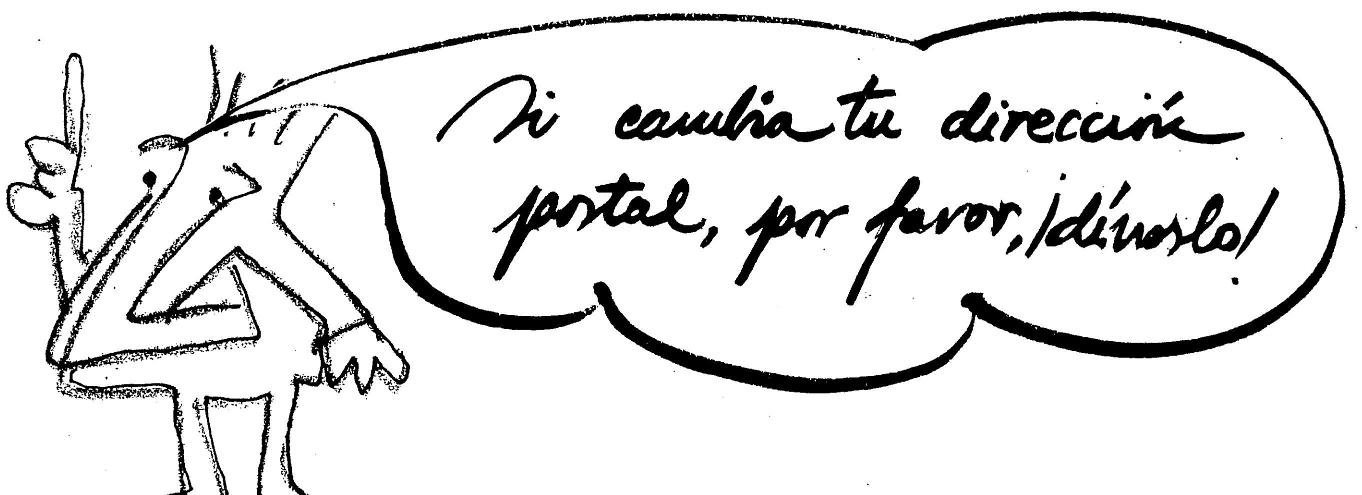
Julio de 1990 Cracovia (Polonia)

Año 1991, en algún lugar del Zaïre.

Y para 1992, está previsto Chicago, en fecha próximas al I.C.M.E.-7, a celebrar en Quebec (Canadá), para el 93 en Cerdeña (Italia) y el 94 en Montpellier (Francia).

Los que quieran recibir las Actas de la CIEAEM, pueden dirigirse bien a Francis Michel, Avenue des Campanules, 28, B-1180 Bruxelles, bien a la Secretaría General de la CIEAEM, Rijke Dekker, Weteringschans 185 III, NL-1075 KK Amsterdan.

Aprovecho la ocasión para anunciar que los que deseen recibir información sobre el ICME 7º, pueden dirigirse a Université de LAVAL, Quebec QC, CANADA GlK 7P4, o por télex 021-05131621 Unilaval QBC.



RESEÑAS

Actividades matemáticas (A.M).
Divertimientos matemáticos (D.M).
Más actividades matemáticas (M.A.M.).
Aún más actividades matemáticas (A.M.A.).
Brian Bolt
Ed. Labor S.A. (1988, 1989)

El título original de una de las primeras publicaciones de "Matemáticas Recreativas" del siglo XVII nos puede dar una idea de la cantidad de temas que pueden incluirse en este "género":

Mathematicall Recreations, or a Collection of Sundrie Problemes, extracted out the Ancient and Moderne Philosophers, as Secrets in Nature, and Experiments in Arithmeticke, Geometrie, Cosmographie, Horologographie, Astronomie, Navigation, Musicke, Optckis, Architecture, Staticke, Machanicks, Chimestrie, Waterworkes, Fireworks, etc. Not vulgary made manifest untill this Time... Most of which were written first in Greek and Latine, lately compiled in French, by HENRY VAN ETTEN Gent. And now delivered in the English Tongue with the Examinations, Corrections, and Argumentations (translated by William Oughtred).

Publicaciones de principios de este siglo, como las obras de H.E. Dudeney o de W.W. Rouse Ball, que se hicieron clásicas gracias en parte a que supusieron un primer intento de acercamiento a las escuelas, hasta las más recientes de M. Gardner o M. Guzmán, que en bastantes ocasiones han intentado divulgar nuevos aspectos de La Matemática, etc., todas han tratado, de una u otra forma, de acercar las matemáticas en su concepción más general a especialistas o no de cualquier edad a través del aspecto lúdico o de entretenimiento.

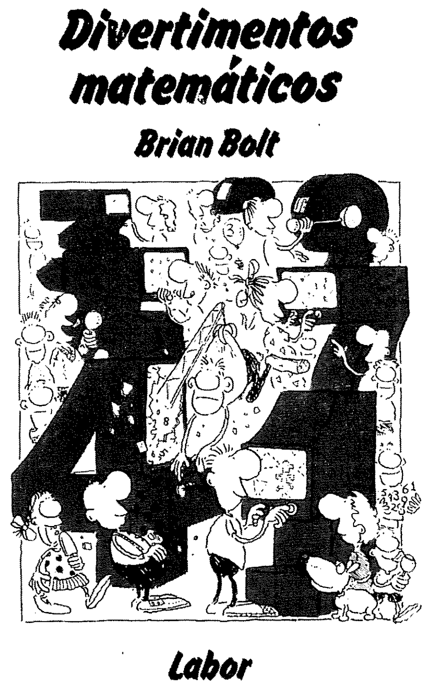
Los cuatro libros (A.M., D.M., M.A.M. y A.M.A.M.) editados por Labor vienen a engrosar la vasta lista de pubicaciones de este tipo que últimamente están apareciendo. Corresponden a la traducción de respectivos títulos ingleses editados en versión original por "Cambridge University Press" en 1982, 84 y 87, y pueden considerarse una colección de "Matemáticas Recreativas", que en principio no sabemos si se irá ampliando.

Presentan un formato atractivo de unas 130 páginas por libro (unas 200 en el último) con muchos dibujos ilustrativos. La parte final de cada libro (más un tercio de las páginas) está dedicada a soluciones y comentarios, donde se recorre el/los camino/s que se puede/n seguir para llegar a la/s solución/es, se hacen referencias históricas (sobre todo en el caso de problemas clásicos) o bibliográficas y, en definitiva, se procura estimular el interés por el pensamiento creativo.

Es difícil hacer una colección de unos 400 problemas, pasatiempos o actividades sin recurrir a clásicos y así ocurre fundamentalmente en D.M., donde el contenido es menos novedoso. (Problemas de ajedrez, cuadrados mágicos, cruces de trenes, etc. aunque también con originales).

A.M., M.A.M. y A.M.A.M. presentan otros puntos claves de interés que merecen destacarse:

—Incorporan gran número de actividades que requieren manipulación: dibujos y construcciones con materiales muy asequibles (papel o cartón, palos, pajas, hilo, etc.), puzzles y rompecabezas, o el uso de la calculadora:



* Construye tu propio harmonógrafo.

* Estructuras rígidas en dos o tres dimensiones.

* Pon una fábrica de poliedros.

* Construye una computadora con cajas de cerillas.

* Contorsiones con calculadora.

—Muchas de las actividades se presentan en forma de juegos fácilmente adaptables a distintas edades o niveles:

* Golf con calculadora.

* El juego de las isometrías.

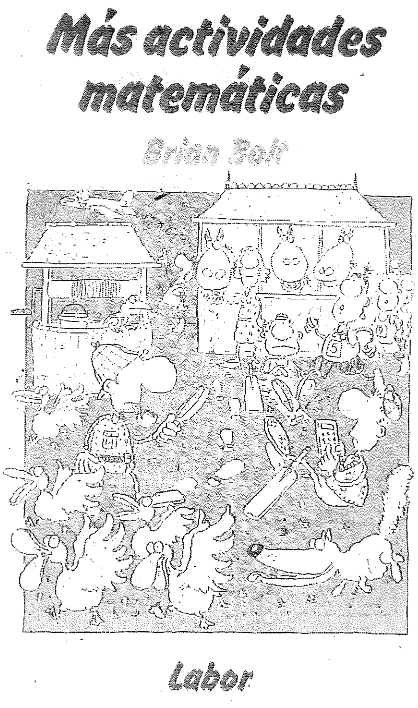
* El juego de rodar cubos.

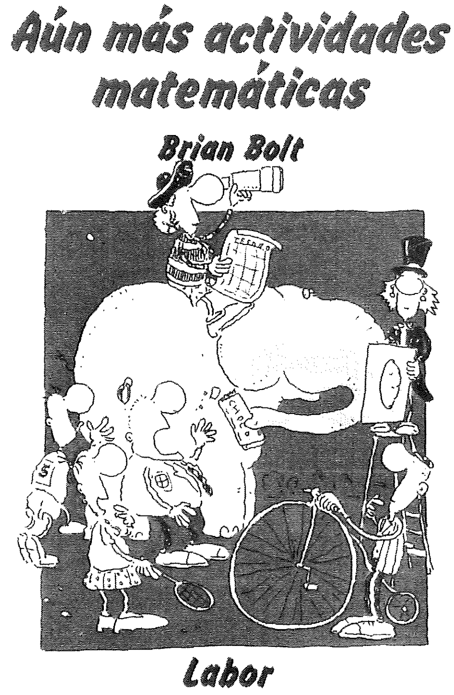
* ...

Así por ejemplo en *el juego de las isometrías,* una serie de cartas indican a cada jugador el movimiento que puede hacer con una pieza triangular que se mueve sobre un cierto tablero (traslación, giro o simetría). Evidentemente el tablero y los movimientos pueden simplificarse o complicarse tanto como se quiera.

También juegos más o menos conocidos dan pie al planteamiento de problemas:

* Surakarta (un juego indonesio)





* Mejoremos nuestra suerte con el Monopoly

* ...

—Aparecen bastantes mecanismos relacionados con algún aspecto matemático (engranajes, mecanos, balancines, brocas especiales, convertidores de movimiento circular a rectilíneo, bombas rotativas, desarrollos en bicicletas, etc.) en lo que podría considerarse "ingeniería recreativa". No son de extrañar estas actividades si se tiene en cuenta que B. Bolt y J.E. Hiscocks son autores de la obra *Machines, Mechanisms and Mathematics.*

En definitiva, cuatro libros cuyo interés puede sintetizarse en los siguientes aspectos:

—Constituyen una buena colección de problemas, pasatiempos y actividades.

—El formato, estructuración e ilustraciones refuerzan el aspecto lúdico y los hacen atractivos.

—No se necesitan grandes conocimientos de matemáticas para resolver los temas que se plantean. Pocos necesitan más matemáticas que las de los primeros cursos de BUP, y la mayoría son asequibles para personas con un nivel del último ciclo de EGB.

—Muchas de estas actividades son aprovechables en nuestras clases (alumnos de 9 a 16 años) y no sólo en "concursos" o "clubs" de matemáticas.

La mayoría de actividades o problemas están destinadas a estimular el desarrollo de los conceptos geométricos, espaciales y de la comprensión numérica, por lo que hay que advertir que no se encuentran prácticamente temas directamente relacionados con estadística-azar o lógica matemática (paradojas lógicas, conjuntos, etc.).

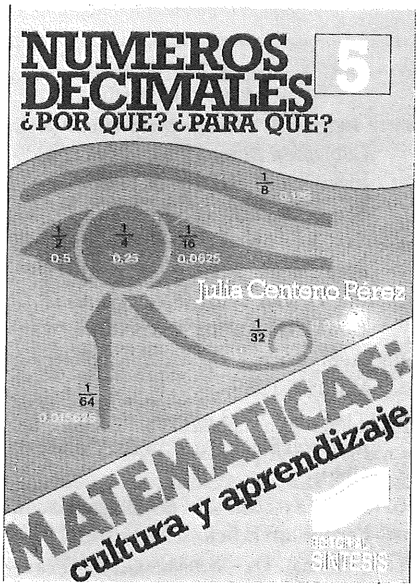
Miguel de la Fuente Martos

NÚMEROS DECIMALES, ¿PORQUÉ? ¿PARA QUÉ? Centeno, J.; Editorial Síntesis, Madrid 1988

Hay conceptos matemáticos que, con el paso del tiempo acrecientan su importancia dentro de las necesidades culturales de los ciudadanos: este es el caso de los números decimales. Hoy día han ganado "la batalla" por la representación práctica de los números, frente a otras formas de expresión como las fracciones o las raíces; a pesar de la pérdida de exactitud que en ocasiones acarrea su uso, con ellas se gana en coherencia, generalización de ideas y claridad de expresión. No es extraño, pues que hayan sido adoptados por calculadoras y ordenadores, lo que a su vez ha potenciado enormemente su difusión.

Encontramos números decimales en el supermercado, en la oficina y también en la base del análisis y del álgebra. En esta diversidad de ubicaciones prácticas y teóricas está su grandeza y también la dificultd para armonizar el proceso de su enseñanza. De ahí la valía de este estudio monográfico sobre el tema en el que conviven la idea propiamente matemática, el aprendizaje y la cultura, y de los que tan escasos estamos en lengua castellana.

Durante mucho tiempo los matemáticos españoles han tenido una fuerte influencia francesa, que en los últimos



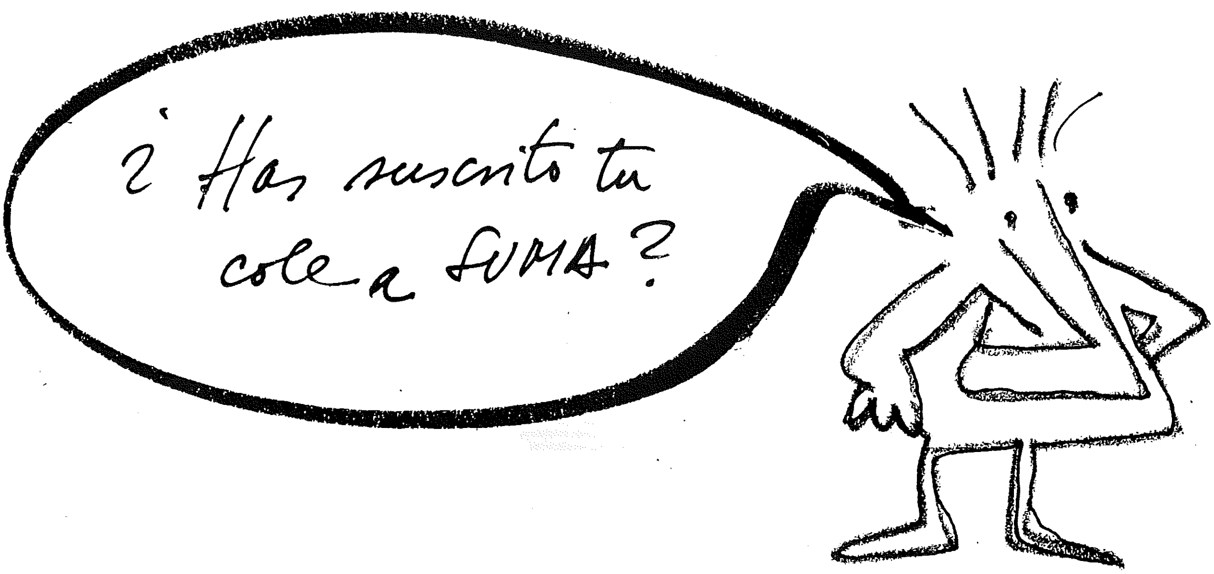
años parece retroceder frente al empuje arrollador de la cultura anglosajona. En este libro podemos descubrir que, en Didáctica de la Matemática, la influencia de las corrientes francesas sobre nosotros es aún fuerte. No obstante, en él se incluyen muchas otras referencias que nada tienen que ver con la cultura francesa por lo que el esfuerzo de síntesis es notable.

El libro está dividido en cuatro partes. En la primera y en la segunda los números decimales se tratan desde los puntos de vista social, histórico y matemático. En la tercera se abordan los problemas que plantea la planificación de su enseñanza en clase. Después de describir distintas formas para presentar teóricamente los números en la enseñanza elemental, pasa a continuación a otras, ligadas en este caso a materiales didácticos concretos de reconocido prestigio. Para la autora, en todas las presentaciones de los números decimales hay una serie de interrogantes didácticos y para responderlos recurre a la teoría de las situaciones didácticas, íntimamente unida al profesor Brousseau de la Universidad de Burdeos.

A pesar de que la tercera parte del libro se decante por la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau como hilo armonizador del proceso didáctico, en la cuarta se asegura que "en el estado actual de la escuela, un maestro no puede utilizar en su totalidad ninguna teoría refinada de la enseñanza de los decimales". En base a ello adopta una postura ecléptica, ya vislumbrada en otras partes del libro, que le lleva a presentar en esta última un "cajón de sastre" en el que recoge situaciones, ejercicios y actividades desconectadas entre sí, pero interesantes y que al profesor en activo no le resultará difícil ubicar en el proceso que siga para reseñar los decimales.

Resumiendo, el libro es un estudio fenomenológico, curricular, histórico, epistemológico y, fundamentalmente, de teoría y práctica de la enseñanza de los números decimales. Util para los profesores de Básica y Media, y ello porque si las primeras actividades escolares consisten en clasificar, ordenar, contar y operar con colecciones finitas, en una etapa posterior se consideran como actividades fundamentales las de comparar, medir y operar con las magnitudes básicas longitud, masa, superficie, volumen que deben ser tratadas en la enseñanza primaria y que requieren del concurso de entes matemáticos como los racionales o los racionales decimales. A partir de su puesta en escena en el ciclo medio de EGB estarán presentes, de un modo directo o no, en el trabajo escolar de los años siguientes y no se completará el ciclo de su enseñanza hasta que en el bachillerato se estudie el número real.

Enrique Castro Martínez
Departamento Didáctica de las Matemáticas
Universidad de Granada



Novedades bibliográficas

ALSINA C. y otros. *Simetría Dinámica.* Síntesis, Madrid, 1989.

ARNAL, J. *Elaboración y validación de un test de instrucción* (2 tomos). Promolibro, Valencia, 1989.

BOLT, B. *Aún más actividades matemáticas.* Labor, Barcelona, 1989.

COMPANY, J. y otros. *El aprendizaje del cálculo y la resolución de problemas.* Promolibro, Benissa, Alicante, 1989.

CORIAT, M. y otros. *Nudos y nexos: redes en la escuela.* Síntesis, Madrid, 1989.

CORLAT, M. y otros. Seis para cuadrar. Servicio de Publicaciones del MEC. Col. Documentos de Trabajo, Madrid, 1989.

DEVLIN, K. *Mathematics: The new golden age.* Penguin Books.

FERNÁNDEZ, J. – RODRÍGUEZ, Mª I. *Juegos, puzzles y pasatiempos en la didáctica de las matemáticas.* Síntesis, Madrid, 1989.

GARDNER, M. *Los porqués de un escriba filósofo.* Tusquets Editores, Barcelona, 1989.

(Selección y presentación). *Nuevos acertijos de Sam Loyd.* Vol. II, Gránica, Barcelona, 1989.

GUYK, E. *Juegos Matemáticos Recreativos.* Mir, Moscú, 1989.

HERNÁNDEZ, F. – SANCHO, J. *Para enseñar no basta con saber la asignatura.* Laia, Barcelona, 1989.

HOPKINS, D. *Investigación en el aula: Guía del profesor.* P.P.U., Barcelona, 1989.

KRAGH, H. *Introducción a la Historia de la Ciencia.* Crítica, Barcelona, 1989.

MARTÍN, M. y otros. *Iniciación al álgebra.* Síntesís, Madrid, 1989.

MARTÍNEZ RECIO, A. y otros. *Metodología activa y lúdica de la geometría.* Síntesis, Madrid, 1989.

MAZA GÓMEZ, C. *Conceptos y numeración en la educación infantil.* Síntesis, Madrid, 1989.

Sumar y restar: El proceso de enseñanza/aprendizaje de la suma y de la resta. Visor, Madrid, 1989.

MEIROVITZ, M. – JACOBS, P. *Pensamiento visual. Desafíe a su inteligencia / 2.* Ediciones Martínez Roca, S.A., Barcelona, 1989.

OLMO, Mª A. y otros. *Superficie. Volumen.* Síntesis, Madrid, 1989.

PIAGET, J. – GARCÍA, R. *Hacia una lógica de significaciones.* Gedisa, Barcelona, 1989.

PUIG, L. – CERDÁN, F. *Problemas aritméticos.* Síntesis, Madrid, 1989.

SANZ LERMA, I. *Nuevas perspectivas en la Educación Matemática.* Servicio Editorial Universitario del País Vasco. San Sebastián, 1989.

SEGOVIA, I. y otros. *Estimación y cálculo aproximado.* Síntesis, Madrid, 1989.

SHASHA, D. *Las intrigantes aventuras del doctor Ecco.* Labor, Barcelona, 1989.

SIERRA, M. y otros. *Divisibilidad.* Síntesis, Madrid, 1989.

SMULLIAN, R. *5000 años a. de C. y otras fantasías filosóficas.* Cátedra, Madrid, 1989.

SOFIO, A. *La base de las Matemáticas.* Penthalon Ediciones, Madrid, 1989.

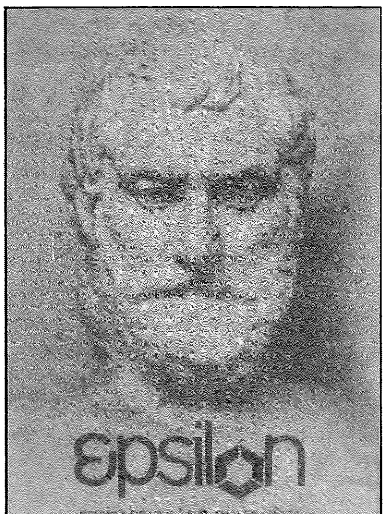
STUFFLEBEAM, D. – SHINKFIEL, A. J. *Evaluación sistemática. Guía teórica y práctica.* Paidos-MEC. Barcelona, 1989.

TRAFTON, P. – SHULTE, P. *Yearbook 1989.* National Council of Teachers of Mathematics.

VALDERRAMA, M.J. *Métodos Matemáticos aplicados a las Ciencias Experimentales.* Pirámide, Madrid, 1989.

WERTSCH, J.V. *Vigotsky y la formación social de la mente.* Paidos, Barcelona, 1989.

WITTROCK, M.C. *La investigación de la enseñanza I. Enfoques, teorías y métodos.* Paidos, Barcelona, 1989.



INDICE

I. ARTICULOS

II. EXPERIENCIAS EN EL AULA

III. ACTUALIDAD

IV. PROBLEMAS

Recomendaciones

Las siguientes indicaciones tienen por objeto conseguir una paulatina normalización en el estilo de presentación de los textos. No deben ser consideradas como obstáculo o dificultades añadidas a las generalmente ya de por sí precarias condiciones en que se realizan los trabajos sino como metas a las que debemos ir tendiendo.

La propias indicaciones son susceptibles de alteración en función de los medios tecnológicos de impresión de que la redacción pueda ir disponiendo.

1. Indicaciones de carácter general

Todo texto presentado deber ser (física o conceptualmente) legible, coherente (en contenido y en notación) y manipulable —para propósitos de imprenta— por personas no versadas en el tema de que el texto trate.

Se aconseja explícitamente, a quienes envíen artículos, piensen que el lector medio no sabe tanto del tema como ellos mismos. Se puede tener consideración hacia el lector de muy diversas maneras; por ejemplo, cabe

a) redactar una introducción (no necesariamente limitada al primer párrafo) que sitúe informalmente el contenido del artículo en un contexto generalmente más conocido;

b) plantearse si el esquema «definición-teorema-demostración» no podría ser sustituido por otro más «amigable»;

c) atender al hecho incuestionable de que muchos lectores preferirán enfrentarse a textos claros y concisos antes que a ristras de fórmulas;

d) estructurar el artículo de modo que el hilo conductor no quede ahogado por divagaciones...

2. Indicaciones específicas

2.1. *Escritos*

Los escritos deberían presentarse por duplicado, en papel DIN-A4, escritos a máquina por una sola cara.

El título debe ser descriptivo y corto.

En hoja aparte, figurará un breve resumen en castellano y la traducción de éste al inglés (independientemente de la lengua utilizada en el artículo).

Es deseable que la longitud de los artículos no sobrepase las 15 páginas; sin embargo, este número jamás será un requisito de aceptación o de rechazo. (La redacción se reserva la posibilidad, en artículos más largos, de publicarlos en dos entregas de la revista si los autores muestran su acuerdo.) Se invita a los autores a ser escuetos, pero sin abusar de sobreentendidos.

Tanto la página del resumen como la primera página del artículo deben contener el nombre y apellidos y centro de trabajo de quienes lo han realizado.

Siempre deberá figurar una dirección completa a la que deba remitirse la correspondencia y, en su caso, pruebas de imprenta.

2.2. *Símbolos y unidades*

Todos los artículos deben ser coherentes en lo relativo a símbolos y a unidades. Si no son de uso común, deben aparecer adecuadamente definidos.

Los símbolos matemáticos pueden ser escritos a mano o a máquina y no deben surgir ambigüedades. Los símbolos poco usuales y las letras de un alfabeto como el griego deben ir anotadas al margen. Distíngase muy bien la letra O del número 0, la letra *l* del número 1 y de la prima, la letra *k* de la letra *kappa*, etc. Empléese una notación coherente para vectores (por ejemplo: negrita o indicación de esto con un subrayado sinuoso) o para numerar expresiones matemáticas (por ejemplo: números entre paréntesis a la derecha de la expresión).

2.3. *Referencias bibliográficas*

Toda referencia a obras previamente publicadas debe ir numerada entre corchetes ([ ]) a lo largo del texto. Al final de éste aparecerá la lista completa de citas en el mismo orden numérico.

Los artículos de revistas se citarán con la siguiente pauta:

Autor/a/es: Nombre (inicial/es) y apellido(s).

Título: (el que corresponda).

Revista: Nombre o abreviatura comúnmente utilizada para referirse a ella.

Número: (el que corresponda, subrayado).

Páginas: (número de la página inicial)-(número de la página final) ocupada(s) por el artículo.

Año: (cuatro cifras).

Los libros se citarán con la siguiente pauta:

Autor: ...

Título: ...

Editorial: ...

Lugar de edición: ...

Año de edición: ...

2.4. *Notas a pie de página*

Deben ir correlativamente numeradas con superíndices a lo largo del artículo.

2.5. *Listados de ordenador (programas, tablas, etc.)*

Se enviarán listados originales (evítense rigurosamente las fotocopias) que se reprografiarán para evitar errores. También se aceptarán negativos en blanco y negro de listados originales.

2.6. *Ilustraciones*

Aunque las ilustraciones interrumpirán el texto publicado, deben remitirse en hojas separadas del manuscrito con indicación de la colocación óptima. Los autores deben asegurar la calidad de los trazos, de los símbolos empleados y, en general, de todos los elementos de las ilustraciones teniendo en cuenta que éstas se someterán a reprografía directa en escala próxima a 1:2.

El número de ilustraciones no está limitado; se ruega eviten redundancias en el material gráfico.

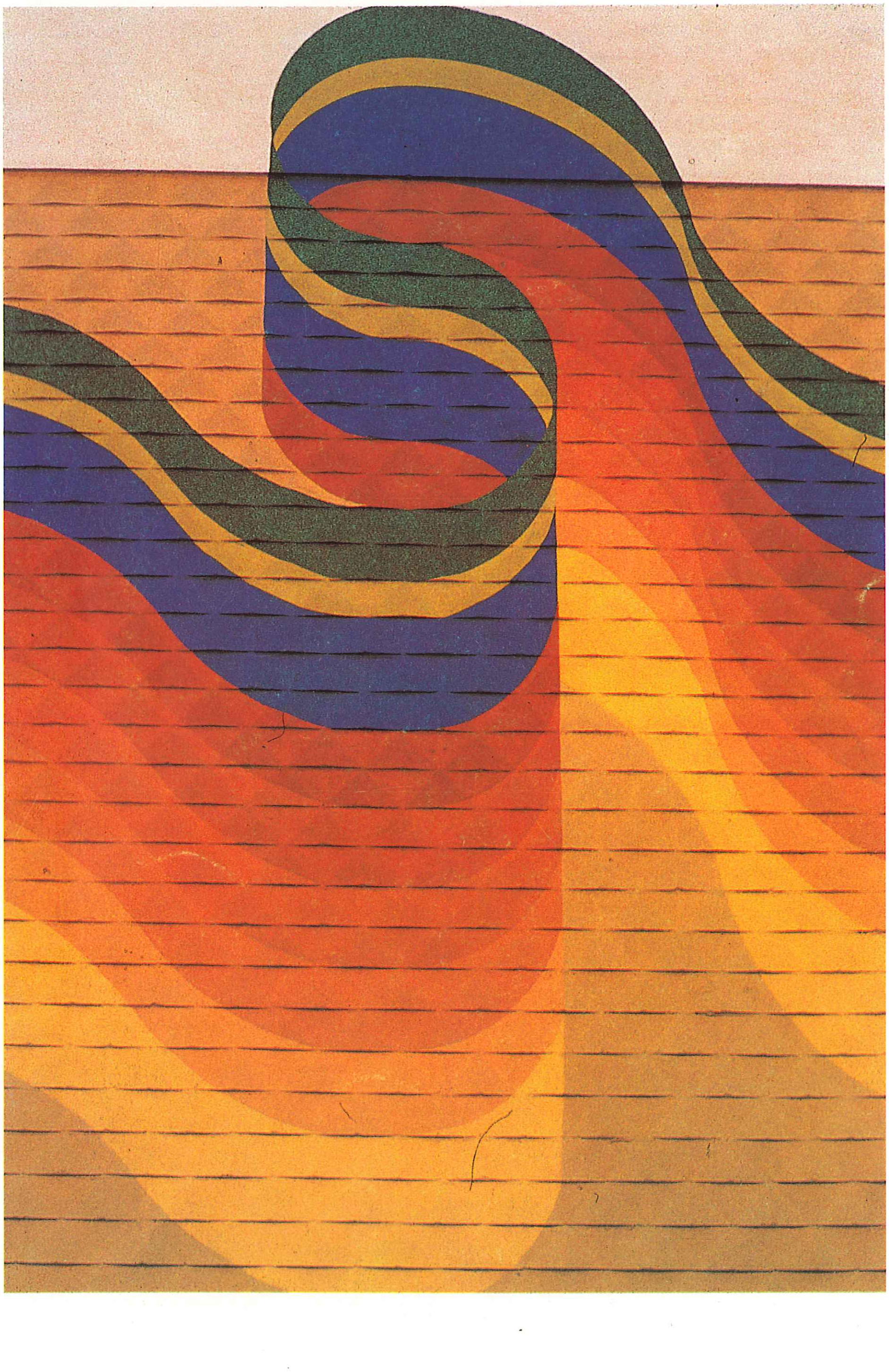
2.7. *Fotografía en blanco y negro*

Sólo podrán publicarse fotografías remitidas con negativos. Si las fotografías requieren algún comentario, leyenda o símbolo especial, se numerarán y en folio aparte se indicará el contenido de tales adiciones.

2.8. Enviar a cualquiera de las personas que figuran en el Panel de Colaboradores o a

Revista *SUMA*
Apdo. 1017
18080 Granada.
ESPAÑA

SUMA 4



enseñanza y aprendizaje de las matemáticas Otoño 1989

Leeds y la popularización de las matemáticas

Claudi Alsina y Miguel de Guzmán

Este artículo es una crónica de urgencia de los eventos celebrados en Leeds (Inglaterra) del 17 al 22 de septiembre de 1989. En esta típica ciudad inglesa han confluido toda una serie de actividades que han hecho del lugar una auténtica capital de las Matemáticas populares. Durante este breve, pero intenso, intervalo de tiempo se han celebrado simultáneamente el Congreso ICMI sobre el tema de popularización y la macro-exposición "Pop Maths Roadshow". Pasemos a contemplar en sus diferentes apartados estas dos manifestaciones.

1. El estudio de ICMI

Con setenta participantes provenientes de veinte países, ICMI ha estructurado una amplia gama de debates y presentaciones que al final darán lugar al libro "Popularization of Mathematics" que los servicios editoriales de la Universidad de Cambridge pondrá en circulación en 1990. Esta publicación será, de alguna forma, la síntesis, el reflejo y el testamento abreviado de muchas horas de trabajo. Todo empezó con el documento de G. Howson, J.P. Kahane y J. Pollack abriendo interrogaciones y provocando reflexión y diálogo y acabará en este libro con la voluntad, no de cerrar el tema, sino precisamente de marcar un punto referencial en este campo.

Durante el congreso se han dado quince comunicaciones que podríamos calificar de paradigmáticas sobre los diez temas centrales de popularización (temas sobre los cuales han pivotado también las discusiones, conclusiones y artículos de las actas preliminares del congreso): "Matemáticas en diferentes culturas", "Radio", "Competiciones", "Exposiciones", "Juegos y Puzzles", "TV y Películas", "Revistas y Libros", "Temas Matemáticos para Popularizar", "La Filosofía de la Popularización" y "La Imagen de las Matemáticas y de los Matemáticos". Los planteamientos generales de estos distintos temas tuvieron cierta unanimidad en el enfoque: todo el mundo reconoce la necesidad de hacer popular una disciplina que no lo es, es deseo general llegar a un buen uso de los medios de comunicación (en especial televisión), juegos, puzzles y poblemas parecen elementos claves, etc. Podríamos decir que ha existido bastante similitud con las ideas del documento español que se publica en este mismo número de SUMA. Ahora bien, en el momento de concretar las situaciones actuales, sus características y sus horizontes, la diversidad cultural de los países es grande y se aprecian ya no sólo diferencias económicas y sociales sino también ideológicas. De forma absolutamente simplificadora y siguiendo el tradicional argot periodístico de los bloques podríamos decir que hay un bloque de influencia americana en el cual caben acciones de popularización frescas, interdisciplinarias y atractivas (por ejemplo la serie americana de Square TV popularizando matemáticas al estilo de Barrio Sésamo), un bloque de influencia académica que pone por delante el rigor y los temas universitarios como bandera (por ejemplo las conferencias en la B.B.C. del Profesor Zeeman) y un tercer bloque donde, no existiendo ni lo más elemental, se admira que alguien pueda preocuparse por la popularización (por ejemplo, la situación de Malawi donde no existen ni pizarras ni, a veces, escuela). Si bien para lo que es doctrina general cabe esperar a la redacción-síntesis final, quizás cabría destacar aquí algunas acciones no españolas de popularización que fueron presentadas en Leeds y que tienen un carácter ciertamente original:

a) El canal de radio francés "France Culture" ha emitido programas monográficos, de hasta dos horas, dedicados a matemáticos incluyendo detalles tan entrañables como entrevistas a familiares y secretarias de dichos matemáticos que aportaron su visión de primera línea del personaje y su labor. Un nuevo canal (5º) de la B.B.C. empezará a emitir temas culturales estando abiertas las puertas al panorama científico.

b) Una experiencia popular en Australia ha consistido en organizar visitas matemáticas de la ciudad de Melbourne involucrando a cientos de escolares, y sus familiares, en contar cosas de la ciudad, medir edificios, evaluar el tráfico o conocer los cálculos que deben realizarse en el ZOO para saber el peso de los animales y, en consecuencia, su alimentación.

c) La producción masiva de vídeos en todos sus niveles (escolar, institutos, universidad...) está a la orden del día como un elemento a utilizar en la clase de forma complementaria (Producción COMAP de S. Garfunkel). La producción televisiva de vídeos se contempla más como acción educativa y entusiasmadora para público en general (Square TV) o como labor de formación permanente (BBC).

d) Hay un buen progreso en la elaboración de exposiciones aunque hay una falta considerable de salas permanentes de Matemáticas en los actuales Museos Científicos (situación que parece no se dará en el nuevo centro de Dinamarca).

e) Las acciones extraescolares acaparan muchos esfuerzos: desde los programas californianos de Matemáticas para toda la familia, a los encuentros-excursión de la Asociación de Profesores de Matemáticas de Inglaterra donde fichas de juegos, materiales y matemática a partir de actuaciones corporales revisten enorme interés.

f) Los juegos y puzzles en sus más variadas presentaciones siguen siendo, por supuesto, los elementos más difundidos ya sea en libros, en la prensa diaria o en las jugueterías.

g) El tema de la prensa en su vertiente no recreativa sigue siendo muy controvertido por doquier aunque el incremento de revistas y su difusión viene a paliar en parte la pobre situación matemática en los diarios.

h) El maravilloso (por excesivo) presupuesto francés para "La Villette" de París sigue permitiendo a dicho centro estar en el candelero mundial. ¡Hasta trabajan actores en teatros del propio Museo! El año 90 parece que "el agua" centrará la temática de moda y en el 91 el tema de las Comunicaciones será el central.

i) Los temas computacionales tendrán su buen impulso próximamente con motivo del centenario de Babbage.

j) Las competiciones en sus más diversos niveles siguen siendo una actividad con creciente participación e interés.

2. El "Pop Maths Roadshow"

En diversos edificios de la Universidad de Leeds se han hecho coincidir multitud de elementos: la exposición Horizontes Matemáticos de Francia, la exposición inglesa sobre nudos, la exposición sobre juegos y matemáticas en culturas primitivas, la exposición sobre geometría en la producción textil, la exposición sobre filatelia matemática, la exposición de esculturas geométricas de Robinson, talleres de ordenadores, talleres de juegos, laboratorio de puzzles, etc. Este complejo que ahora itinerará por Inglaterra ha reunido a su alrededor actividades continuas para los grupos visitantes: proyección ininterrumpida de vídeos y películas, talleres con material, competiciones y conferencias populares. El esfuerzo ha sido, como ya se puede intuir, enorme. El éxito escolar y ciudadano, en esta primera fase, espectacular. Quizás el complejo adolece de cierto carácter heterogéneo y se echa en falta una unidad y una mejor riqueza de presentación formal, pero ahí está y cabe esperar una buena marcha en los próximos meses.

3. Una consideración final

Hay una voluntad que ciertamente alcanzó consenso: la posibilidad de que las acciones de popularización sirvan, por encima de todo, para lograr *actitudes* positivas, en todos los niveles sociales. La popularización exigirá enormes esfuerzos y muchas colaboraciones. El tema está abierto, los precedentes son alentadores, el reto está en marcha.

Juegos y matemáticas*

Miguel de Guzmán

Matemática, arte y juego

La matemática es una actividad humana extraordinariamente polifacética. Es, por supuesto, una ciencia, es más, es el paradigma y modelo de la actividad científica. Es un instrumento poderoso para la exploración del universo y para la utilización adecuada de los recursos en él disponibles. Es modelo de pensamiento que sirve como campo privilegiado para el estudio de las capacidades de la mente humana. Pero, además, y muy profundamente, la matemática ha sido y es *arte y juego* y esta componente artística y lúdica es tan consubstancial a la actividad matemática misma que cualquier campo de desarrollo matemático que no alcanza un cierto nivel de satisfacción estética y lúdica permanece inestable, buscando una expresión más acabada que sea capaz de ofrecer una visión unitaria, placentera, divertida,... como una sinfonía o un poema en gestación busca, en la mente de su autor, la forma de expresión más bella posible. En lo que sigue analizaremos esquemáticamente las relaciones de la matemática con el juego, dejando a un lado el análisis de su componente artística, examen que ha sido realizado por autores tales como Garret Birkhoff, Helmut Hasse, Andreas Speiser, Hermann Weyl,...

Naturaleza de la actividad lúdica

La actividad lúdica ha sido analizada en profundidad por el sociólogo Johann Huizinga en su obra *Homo ludens*. Él destaca como características del *juego* los siguientes rasgos:

—Es una actividad *libre,* en sentido de la *paideia* de los griegos clásicos, es decir se ejerce por amor de ella misma, no por razón del provecho que de ella se deriva.

—Con una *cierta función* en el desarrollo del hombre. El cachorro humano, como el animal, juega y se prepara con ello para la competición y la vida en general. El adulto juega y se evade, se relaja, se libera.

—El concepto de juego *no coincide con el de broma.* El juego ha de ser tomado en serio. El peor revientajuegos es quien se lo toma en broma.

—El juego, como el arte, produce *placer a través de su contemplación y su ejecución.*

—Es una actividad *separada de la vida ordinaria* en el tiempo y en el espacio.

—Se dan ciertos elementos de *tensión,* cuya liberación y catarsis causa placer.

—Da lugar a *lazos muy especiales* entre los practicantes del mismo juego. Emerge una especie de hermandad muy especial.

—Crea a través del establecimiento de sus reglas, *un nuevo orden, una nueva vida,* llenos de ritmo y armonía.

Un somero análisis de la actividad matemática permite comprobar cómo todas estas características están presentes en muchas de las formas de nuestro quehacer matemático. La matemática, en su misma esencia profunda, es *también* juego, si bien este juego involucra otras facetas, como las apuntadas al comienzo, científica, instrumental, filosófica, que hacen de la matemática uno de los pilares básicos de la cultura humana.

El ejercicio del juego y de la matemática

Si la matemática y el juego tienen muchos rasgos en común en lo que se refiere a su finalidad y a su naturaleza profunda, no es menos cierto que también participan de la misma estructura esencial en lo que respecta a su

* N.R. Este trabajo ha sido el eje de la conferencia que el autor desarrolló en Leeds, por invitacion de I.C.M.I., durante el Congreso sobre Popularización de las Matemáticas.

mismo ejercicio. Esto es particularmente interesante a la hora de preguntarnos por los métodos más adecuados de transmitir a un público amplio el interés profundo y el entusiasmo que las matemáticas son capaces de suscitar, así como una primera familiarización práctica con sus modos habituales de proceder.

Un juego cualquiera comienza con la introducción de unas cuantas reglas, algunos objetos iniciales, piezas, cuya función queda definida por dichas reglas, exactamente del mismo modo que los objetos de una teoría matemática quedan determinados por definición implícita: "Sean dados tres sistemas de objetos. Los objetos del primer sistema serán llamados puntos,..."

Quien se inicia en la práctica del juego ha de adquirir una cierta familiarización con sus reglas, relacionando unas piezas con otras como el novicio va comparando y haciendo interactuar los primeros elementos de una teoría matemática. Son los ejercicios elementales del juego o de la teoría. El practicante que va avanzando en el dominio del juego es capaz de hacerse con unas cuantas técnicas sencillas que en circunstancias especiales dan buen resultado. Son los lemas y hechos básicos generalmente asequibles en un primer enfrentamiento serio con los problemas del campo en cuestión.

El estudio más profundo de un juego con cierta historia le dará a conocer los resultados y estilos peculiares de proceder que los jugadores más avanzados que le han precedido han transmitido a la posteridad. Son jugadas más complicadas, más profundas, que han requerido una especial inspiración por hallarse más lejos de los elementos básicos iniciales. Esto corresponde en matemáticas al estadio de asimilación por el estudiante de los grandes teoremas y métodos que se han ido gestando a lo largo de los siglos. Son los procesos de pensamiento de los verdaderamente grandes puestos a su disposición para hacer luz en situaciones confusas y delicadas.

Más adelante, en los grandes juegos, donde la presencia de problemas interesantes nunca se agota, el practicante avanzado trata de resolver de modo original situaciones inéditas del juego. Corresponde a la investigación en problemas abiertos en matemáticas.

Finalmente, unos pocos son capaces de crear juegos nuevos, fértiles en ideas y situaciones de interés, que dan lugar a estrategias posibles originales y a procesos lúdicos innovadores. Esto corresponde a la creación de nuevas teorías matemáticas, ricas en ideas y problemas en si mismas, y posiblemente con aplicaciones para atacar problemas abiertos y para explorar más profundamente niveles de la realidad hasta entonces en penumbra.

El impacto de los juegos en la matemática

Son muchos los casos en que una pregunta interesante realizada en un plano lúdico o bien una observación ingeniosa sobre una situación aparentemente inocente han dado lugar a nuevos modos de pensar en matemáticas. Como Leibniz escribió en 1715: "Nunca son los hombres más ingeniosos que en la invención de los juegos. El espíritu se encuentra ahí a sus anchas..." Y el mismo Littlewood, en nuestro siglo, escribía: "Un buen chiste matemático es mejor, y mejor matemática, que una docena de artículos mediocres".

Y es que las preguntas y situaciones que son capaces de romper los bloqueos intelectuales y que hacen avanzar el pensamiento matemático surgen muy a menudo cuando somos capaces de colocarnos en una actitud distendida y juguetona, fuera del contexto serio y severo con que se reviste normalmente la ciencia oficial.

En el inicio de la combinatoria se suele colocar el *Libro de los Cambios (I Ching)* con su conocida distribución de símbolos adivinatorios y los cuadrados mágicos con sus significaciones místicas.

Los juegos con piedras de los pitagóricos dieron lugar a interesantes teoremas en teoría de números. Las paradojas de Zenón deben leerse como una especie de burlona denuncia de una forma de pensar prevalente entre los matemáticos contemporáneos. El mismo Euclides, según parece, se sirvió de la falacia en sus *Pseudaria*, un libro desaparecido, para interesar a sus alumnos en los procesos correctos de pensamiento. Arquímedes, con su *Problema bovinum* y su *Contador de arena* se enfrenta claramente a situaciones de sabor lúdico para afilar sus instrumentos matemáticos.

La lista de objetos matemáticos que han venido a la existencia motivados por el espíritu de los juegos sería interminable. Baste señalar algunos de los nombres de matemáticos famosos que se podrían destacar en este contexto: Fibonacci, Fermat, Pascal, Leibniz, Euler, Bernoulli, Gauss, Hamilton, Hilbert; Von Neumann;... Un esquema breve, pero muy enjundioso, de la evolución de las recreaciones matemáticas se puede ver en el artículo de W.L. Schaaf en la Encyclopaedia Britannica titulado *Number Games and Mathematical Recreations.*

Matemáticas en los juegos

La riqueza en temas matemáticos de los juegos que se han ido creando a lo largo de los siglos y de los que se crean en la actualidad es impresionante. La mejor manera de darse cuenta de ello consiste en ojear las obras clásicas de Lucas, Ball (Ball y Coxeter) así como las compilaciones bibliográficas de W.L. Schaaf sobre la literatura reciente de juegos matemáticos, editada por el National Council of Teachers of Mathematics.

Junto a la aritmética, la geometría, la teoría de números, como fuentes clásicas de las recreaciones, figuran la topología, la geometría combinatoria, la teoría de grafos, la lógica, la teoría de la probabilidad,... En todos estos campos antiguos y nuevos figuran innumerables problemas abiertos, posiblemente tan difíciles como el último teorema de Fermat, esperando probablemente la creación de nuevos métodos de pensamiento que sean capaces de resolverlos. De muchos de ellos no se podría decidir con precisión si entran en la categoría de matemática seria o de puzzle ocioso. Probablemente se puede afirmar con razón que cualquier juego o puzzle suficientemente profundo puede llegar a tener repercusiones muy importantes en aspectos interesantes de la matemática. En la creación de puzzles o juegos el hombre puede desplegar con más libertad su imaginación sin necesidad de encasillarla en absoluto en las estructuras conceptuales o metodológicas de una teoría tradicional ya constituida.

Entre los muchos ejemplos de juegos en los que se pueden poner de manifiesto los esquemas de pensamiento comunes con la actividad matemática quisiera proponer únicamente el de la *rana saltarina,* un juego para una sola persona que a mi me llama especialmente la atención por la riqueza de niveles distintos a los que se puede afrontar, desde el meramente manipulativo al hondamente matemático, así como por la riqueza de métodos heurísticos que en su exploración se pueden ensayar.

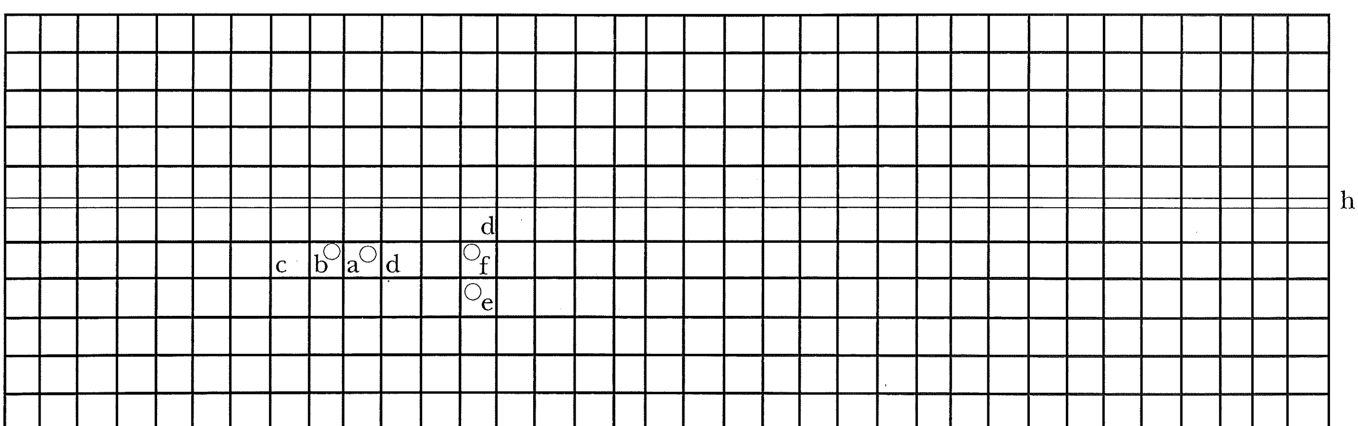
Se considera una cuadrícula infinita con una línea horizontal distinguida h. Se colocan al principio del juego un número cualquiera de fichas, una en cada uno de los cuadros bajo la línea h, arbitrariamente distribuídas. Una vez colocadas en el tablero se empiezan a mover. Las reglas del movimiento son las siguientes: Una ficha puede saltar sobre otra situada a su derecha a un cuadro vacío y la ficha sobre la que se ha saltado se retira del tablero. Por ejemplo la ficha del cuadro A en la figura puede saltar al cuadro C y la del cuadro B desaparece entonces del tablero. Análogamente, una ficha puede saltar hacia la izquierda (la de E salta a G sobre la ficha en F que desparece). El juego consiste en tratar de responder a la siguiente pregunta: ¿Cuántas fichas como mínimo habrá que colocar inicialmente bajo H y en qué situación se deberán poner para, mediante los movimientos permitidos, lograr colocar una ficha en la fila quinta encima de h?

Juego en la matemática

Hay mucha matemática profunda con sabor a juego. De entre los temas modernos se pueden señalar unos cuantos en los que esto es más patente. Sobre algunos de ellos incluso se pueden idear juegos entretenidos y nada triviales:

—*Teorema de los cuatro colores.* Todo mapa en el plano se puede colorear adecuadamente con cuatro colores.

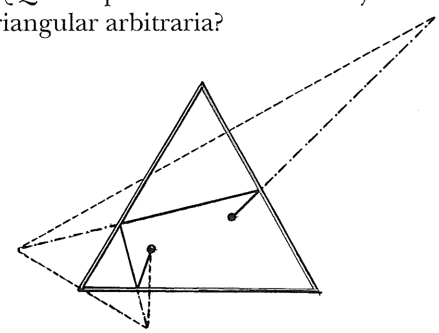
—*Teorema de Ramsey* (versión elemental). Dados seis puntos sobre una circunferencia, si se unen dos a dos y se pintan los segmentos resultantes o bien de rojo o bien de verde, entonces hay necesariamente al menos un triángulo formado por segmentos del mismo color.



—*Teorema de Sperner.* Un triángulo ABC se triangula, es decir se hace una partición de él en triángulos pequeños de modo que cada dos de estos son, o disjuntos, o tienen un sólo vértice en común, o bien sólo tienen todo un lado en común. A los vértices de la triangulación se les da los nombres A,B,C arbitrariamente con la única restricción de que ningún vértice situado sobre el lado AB del triángulo original se llame C, ningún vértice sobre BC se llame A y ningún vértice sobre CA se llame B. Entonces necesariamente hay un triángulo de la partición cuyos vértices se llaman A,B,C.

—*Problema de la aguja (Kakeya).* Hallar el ínfimo de las áreas de las figuras planas en las que una aguja de longitud unidad puede maniobrar de modo continuo de tal manera que al final ocupe la posición inicial pero en sentido invertido.

—*Problema del billar triangular.* Las trayectorias ideales de una bola de billar puntual en una mesa de billar rectángular son periódicas o bien llenan densamente la mesa, es decir pasan arbitrariamente cerca de cualquier punto. ¿Qué se puede decir de las trayectorias en una mesa triangular arbitraria?



Otros muchos problemas se podrían citar con el mismo sabor a juego: teoremas del punto fijo, teorema de Helly, conjetura de Hadwiger, conjetura de Borsuk,...

Los juegos como instrumento para la enseñanza y la popularización de la matemática

Martín Gardner ha expresado con cierto la situación: "Con seguridad el mejor modo de despertar a un estudiante consiste en presentarle un juego matemático intrigante, un puzzle, un truco mágico, una paradoja, un modelo o cualquiera otra de entre una veintena de posibilidades que los profesores aburridos tienden a evitar porque parecen frívolas" (Carnaval Matemático, Prólogo).

El investigador matemático experimentado suele comenzar su aproximación a la cuestiones que le atraen en clave de juego, como el niño que se acerca a un juguete, abierto a la sorpresa, al misterio que espera desvelar poco a poco, con el esfuerzo placentero del descubrimiento. ¿Por qué no fomentar el espíritu lúdico en el acercamiento didáctico a todos los temas matemáticos? El juego matemático bien escogido puede conducir al estudiante de cualquier nivel a la mejor atalaya de observación y aproximación inicial a cualquiera de los temas de estudio con los que se ha de enfrentar. Los beneficios de hacerlo así son innumerables: apertura, desbloqueo, motivación, interés, diversión, entusiasmo,...

Por otra parte, como hemos visto antes, la semejanza de estructura de la matemática y los juegos permite comenzar a ejercitar en estos las mismas herramientas, los mismos procesos de pensamiento que son útiles en los desarrollos matemáticos. Las habilidades heurísticas en matemáticas pueden iniciarse con enorme fruto en la práctica y exploración de juegos muy diversos, como por ejemplo la obra de Averbach y Chein, *Problem Solving Through Mathematical Games,* ha puesto certeramente de manifiesto con una magnífica colección de juegos matemáticos recopilados con este propósito.

Pero sobre todo, el espíritu lúdico de acercamiento a los problemas matemáticos más serios es el aspecto que más puede beneficiar al estudiante, impregnando positivamente toda su personalidad científica para el futuro, como estudiante y como posible investigador.

Desde el punto de vista de la popularización de las matemáticas, el efecto de los juegos matemáticos es tan obvio que no insistiré mucho. En la dedicatoria de la obra maestra de Berlekamp, Conway y Guy, *Winning Ways for your Mathematical Plays,* los autores escriben, con toda justificación, "To Martin Gardner who has brought more mathematics to more millions than anyone else". Matemáticas y juegos, como hemos tenido ocasión de ver, son a menudo indiscernibles en su contenido, pero mucho más aún en el espíritu y los métodos con que se pueden abordar. La matemática es un grande y sofisticado juego que, además, resulta ser una obra de arte intelectual, portadora en innumerables ocasiones de una gran luz para explorar el universo y con repercusiones prácticas de gran alcance. Los intentos de popularización de la matemática a través de la presentación de sus potentes aplicaciones, de aspectos interesantes de su historia, a través de la biografía de algunos de los matemáticos famosos, de sus relaciones con la filosofía u otros aspectos del pensamiento humano pueden servir eficazmente para acercar la matemática a muchas personas. Pero posiblemente ningún otro método acercará a una persona más a lo que constituye el quehacer interno de la matemática como un juego bien escogido.

Didáctica e historia de las matemáticas*

José L. Carlavilla Fernández y Gabriel Fernández García

Nuestro trabajo en la E.U. de Formación de Maestros de Ciudad Real, nos ha ofrecido la posibilidad de orientarnos hacia un campo muy específico de las Matemáticas como es el de su Didáctica. En los Estudios Universitarios de la Licenciatura de Matemáticas hemos recibido una formación vacía en Didáctica. Ha sido pues el trabajo con nuestros alumnos en el aula, la búsqueda de libros, cursos y compañeros interesados en este tema, los que han posibilitado esta experiencia.

Uno de los aspectos que consideramos insuficientes en las clases de Didáctica que impartimos a nuestros alumnos es el divorcio existente entre Historia de las Matemáticas y Didáctica de las Matemáticas. En nuestros programas de la asignatura Didáctica de las Matemáticas, siempre incluíamos algunos temas relativos a su Historia, pero raramente se le proponía a los alumnos la problemática de los conocimientos históricos en Didáctica. La inclusión de dichos temas tenían unos objetivos más humanistas y culturales que didácticos, aún siendo evidente que la Historia de las Matemáticas puede ofrecer grandes posibilidades de tipo didáctico.

La Historia de las Matemáticas ofrecen a nuestros maestros distintas ideas para su actividad didáctica, ya sea como historia de cuestiones particulares que se presentan en clase de manera explícita, ya sea como fuente de temas en los que se puede proponer de nuevo, de manera implícita, contextos para la construcción de determinados conceptos y habilidades matemáticas con alumnos de 6 a 13 años.[1]

En cualquier caso nos parece muy importante la motivación que a través de ella se podría inducir en los alumnos para favorecer el diálogo con ellos y dirigir el proceso de su cultura matemática.

Otro de los aspectos que también nos preocupa de forma especial, se refiere al concepto que generalmente nuestros alumnos, (muchos de ellos por haber cursado el Bachillerato de Letras con escasos conocimientos matematicos), tienen sobre las Matemáticas. Intentamos crear en ellos una actitud positiva hacia esta materia haciendo una matemática *comunicativa* que no fuese motivo de marginación considerada sólo asequible para gente *rara* o de inteligencia superior.

El querer hacer una *Matemática comunicativa* estrechamente vinculada con su Historia, ha sido pues el principal citerio que hemos seguido en la elaboración del libro Historia de las Matemáticas, del que somos autores. Su título no es muy explícito y, si nos atenemos a él de una forma estrictamente literal, podría ser considerado como un libro más sobre Historia de las Matemáticas. Nos hubiese gustado que en la portada del libro apareciese como título el que nosotros habíamos propuesto en principio *Desde que el hombre empezó a contar: historias, cuentos, problemas y cosas de matemáticas* y que el complejo mecanismo de su publicación, al final lo cambió.

Es un libro de *comic* que hace un recorrido por todas las épocas de la historia, intentando dar a conocer las distintas estapas del desarrollo de las matemáticas, así como, un conocimiento humanista de sus creadores, relacionando todo esto, con los aconteceres sociales ocurridos, y proponiendo una serie de *cuestiones matemáticas* vinculadas a este devenir histórico y aunque, en algunos casos, esta vinculación no sea muy directa, sí nos sirve de pretexto para proponerlas.

Es difícil explicar en pocas páginas un proceso histórico acontecido, a veces, en miles de años, con lo que se corre el riesgo de dar una imagen deformada de dicho proceso histórico. Asumimos dicho riesgo con la debida precaución aunque el resultado en algunos casos haya podido ser la presentación de procesos históricos muy complejos como fáciles o banales; no obstante, esta ausencia de rigor podría ser justificada con el pretexto de llegar a un sector del público muy amplio que, en algunos casos, posee escasa cultura matemática (esudiantes de 12 a 16 años, profesores de Educación Primaria y Secundaria, estudiantes universitarios de Magisterio...).

No ha sido nuestra intención escribir el libro para que fuese utilizado por personas a un determinado nivel ni tampoco pensamos acotarlo sólo para aquellos que por su quehacer cotidiano estén vinculados de alguna forma con las matemáticas. Es nuestro deseo que personas ajenas a la matemática puedan encontrar en este libro un estímulo para su estudio, o bien que les sirva para rectificar el rechazo que muchas veces se tiene sobre las mismas.

A continuación les presentamos una breve muestra del contenido de este libro comprendiendo quince láminas de las diferentes épocas:

* N.R. Este trabajo fue presentado por sus autores en Leeds durante el Seminario Internacional sobre Popularización de las Matemáticas

[1] P. Boero, *Utilización de la Historia de las Matemáticas,* SUMA 2, pp. 27,28, 1989.

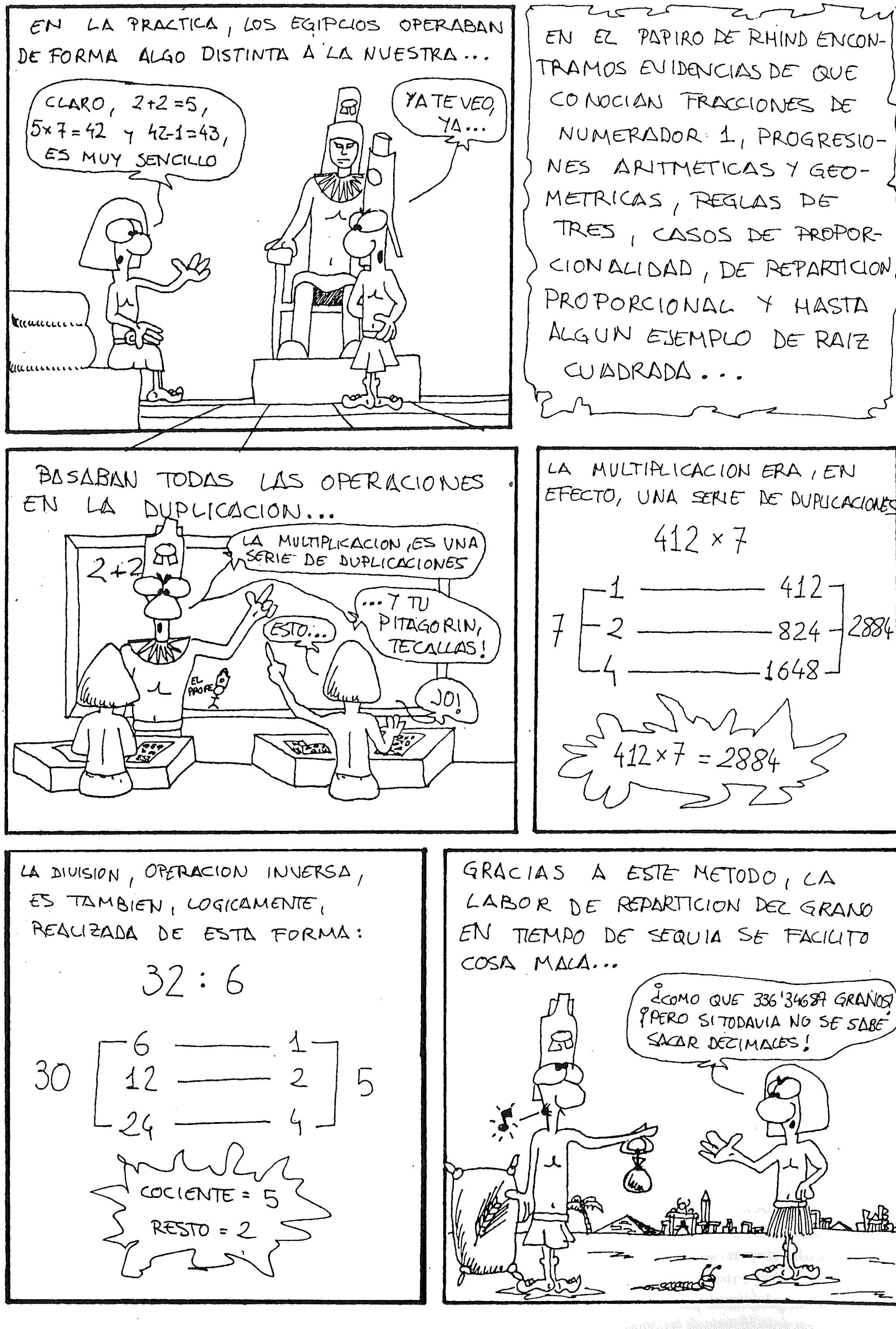
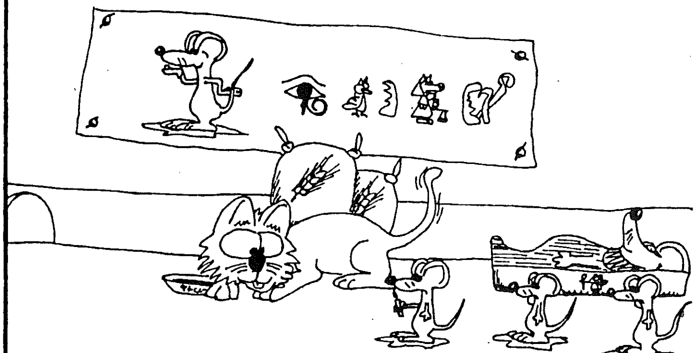


Lámina 1: Matemáticas en Egipto.

ESTE EJEMPLO, EL PROBLEMA 79 DEL PAPIRO DEL RHIND, NOS DA UNA IDEA DEL SISTEMA EGIPCIO DE CALCULO:

"HABIA UNA PROPIEDAD COMPUESTA POR 7 CASAS; CADA CASA TENIA 7 GATOS; CADA GATO SE COMIA 7 RATONES; CADA RATON SE COMIA 7 GRANOS DE CEBADA; CADA GRANO HABRIA PRODUCIDO 7 MEDIDAS... ¿CUANTO SUMABA TODO ESTO?"



... ACTUALMENTE SERIA:

7	CASAS
49	GATOS
343	RATONES
2401	GRANOS
16807	MEDIDAS
19.607	

... PERO UN EGIPCIO LO HUBIESE HECHO ASI:

7 CASAS × PARA UNA CASA

1	CASA
7	
49	
343	
2401	
2.801	

... Y MULTIPLICANDO:

7	1	2801
	2	5602
	4	11204

19.607

EN TOTAL, TODO SUMARIA 19.607

Lámina 2: Matemáticas en Egipto.

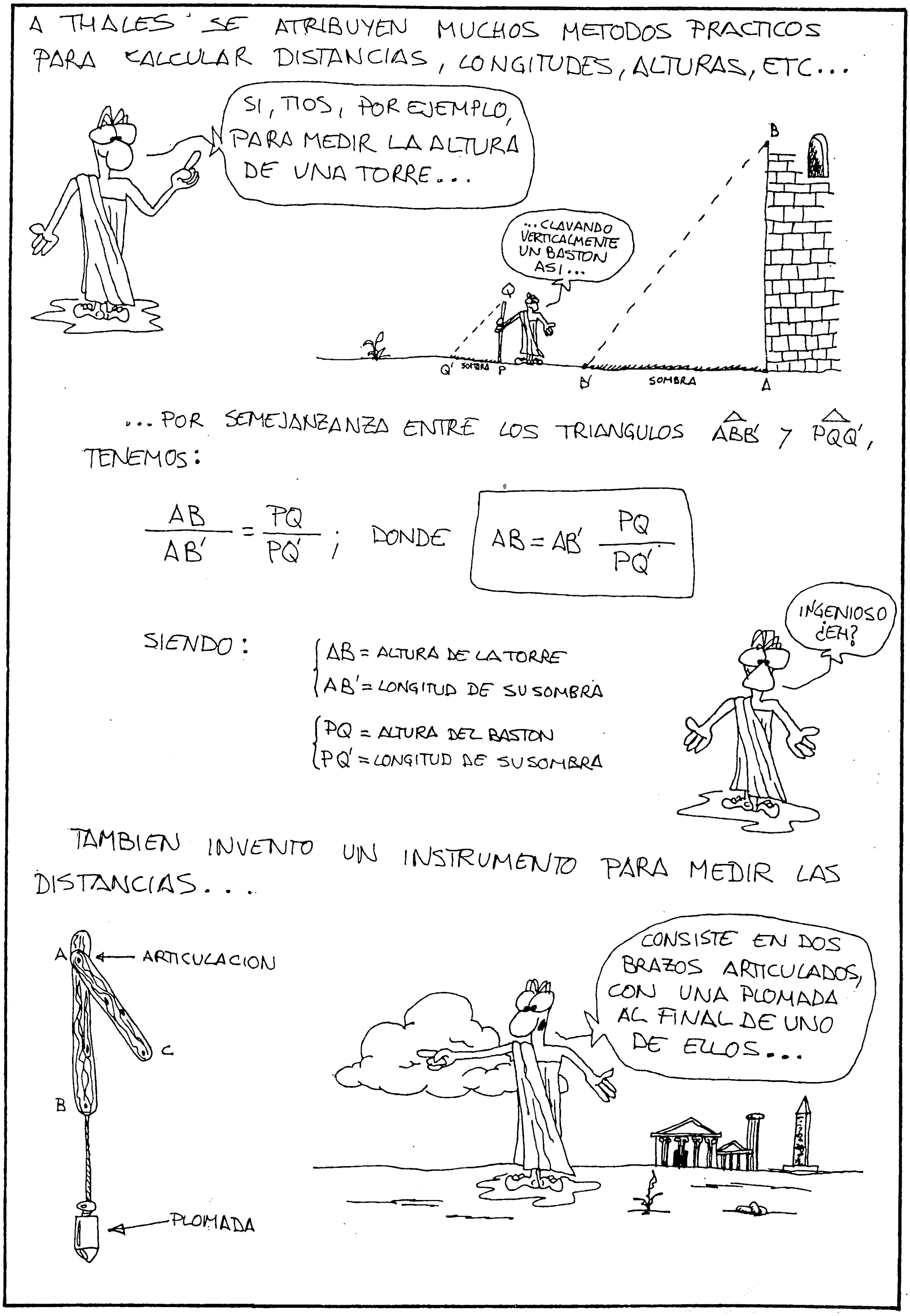


Lámina 3: Tales de Mileto

Lámina 4: Tales de Mileto.

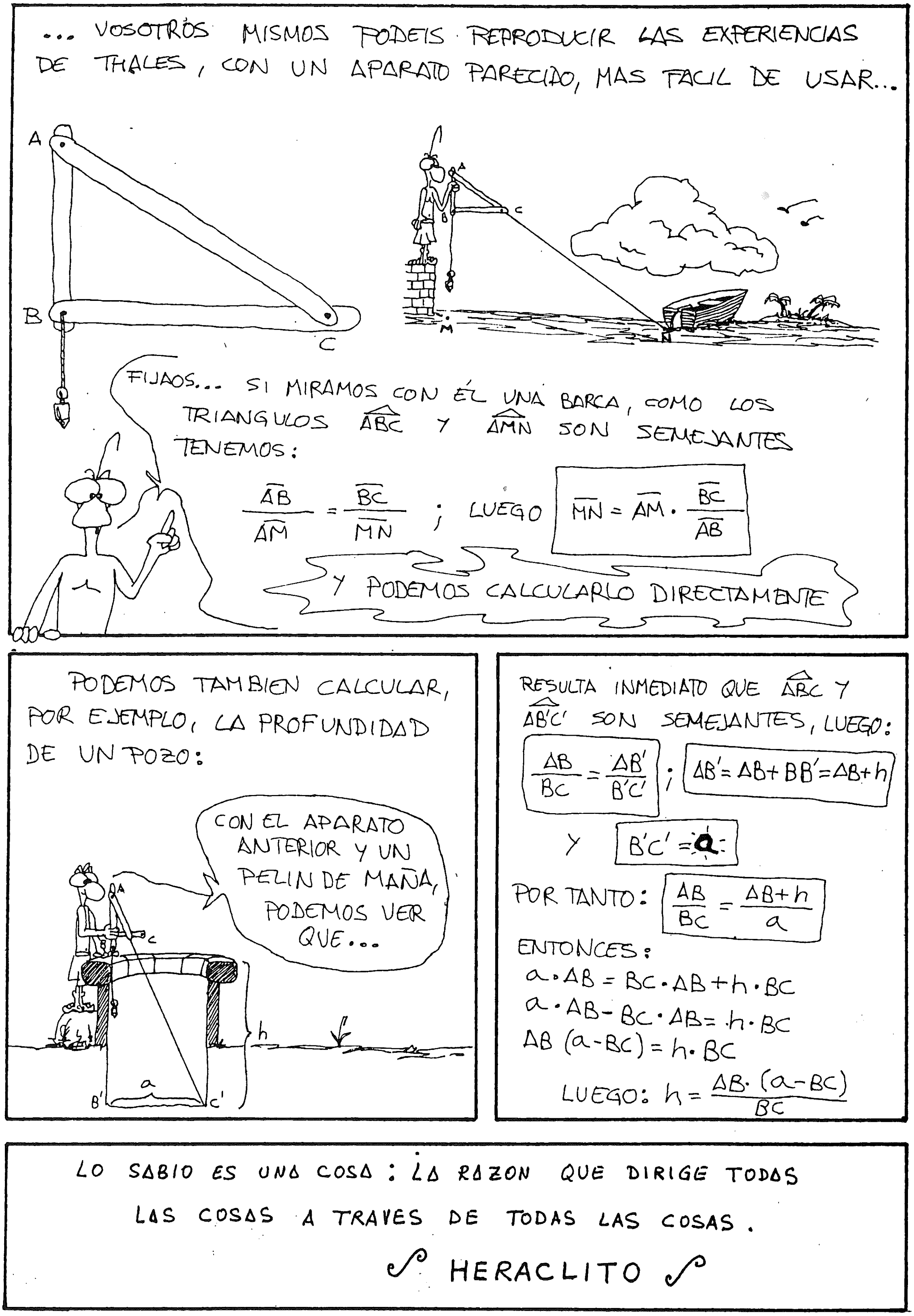


Lámina 5: Tales de Mileto.

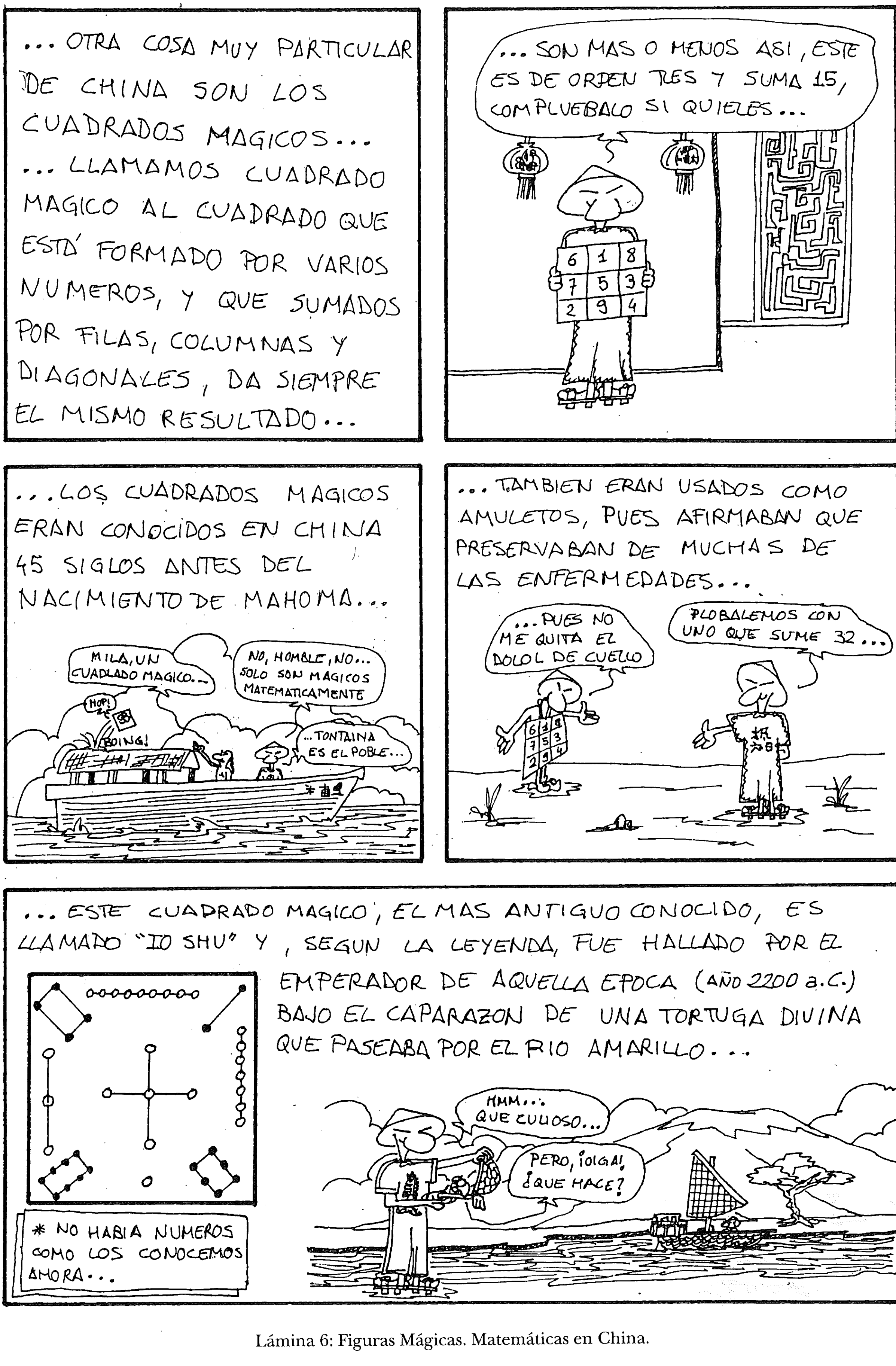


Lámina 6: Figuras Mágicas. Matemáticas en China.

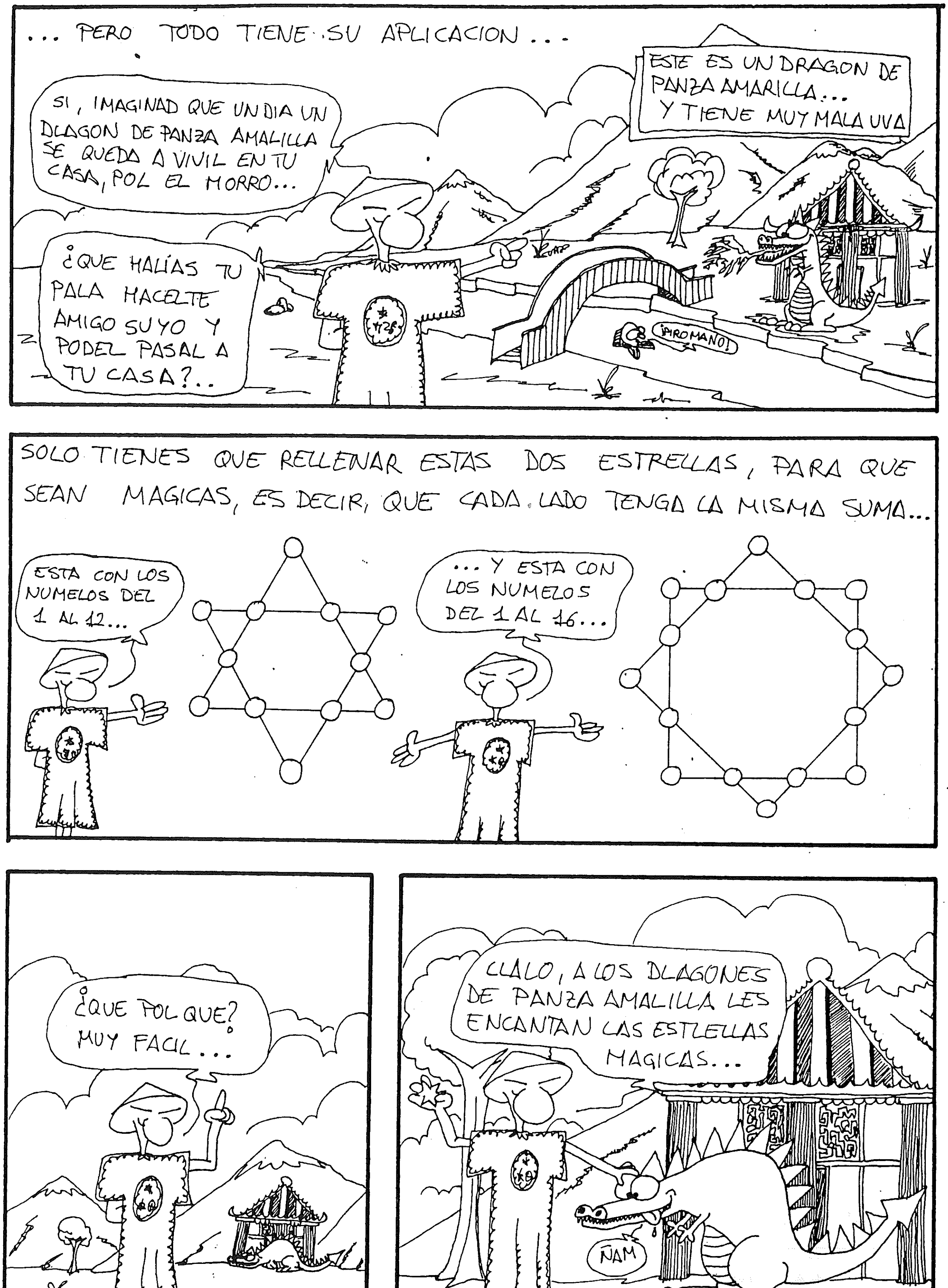


Lámina 7: Figuras Mágicas. Matemáticas en China.

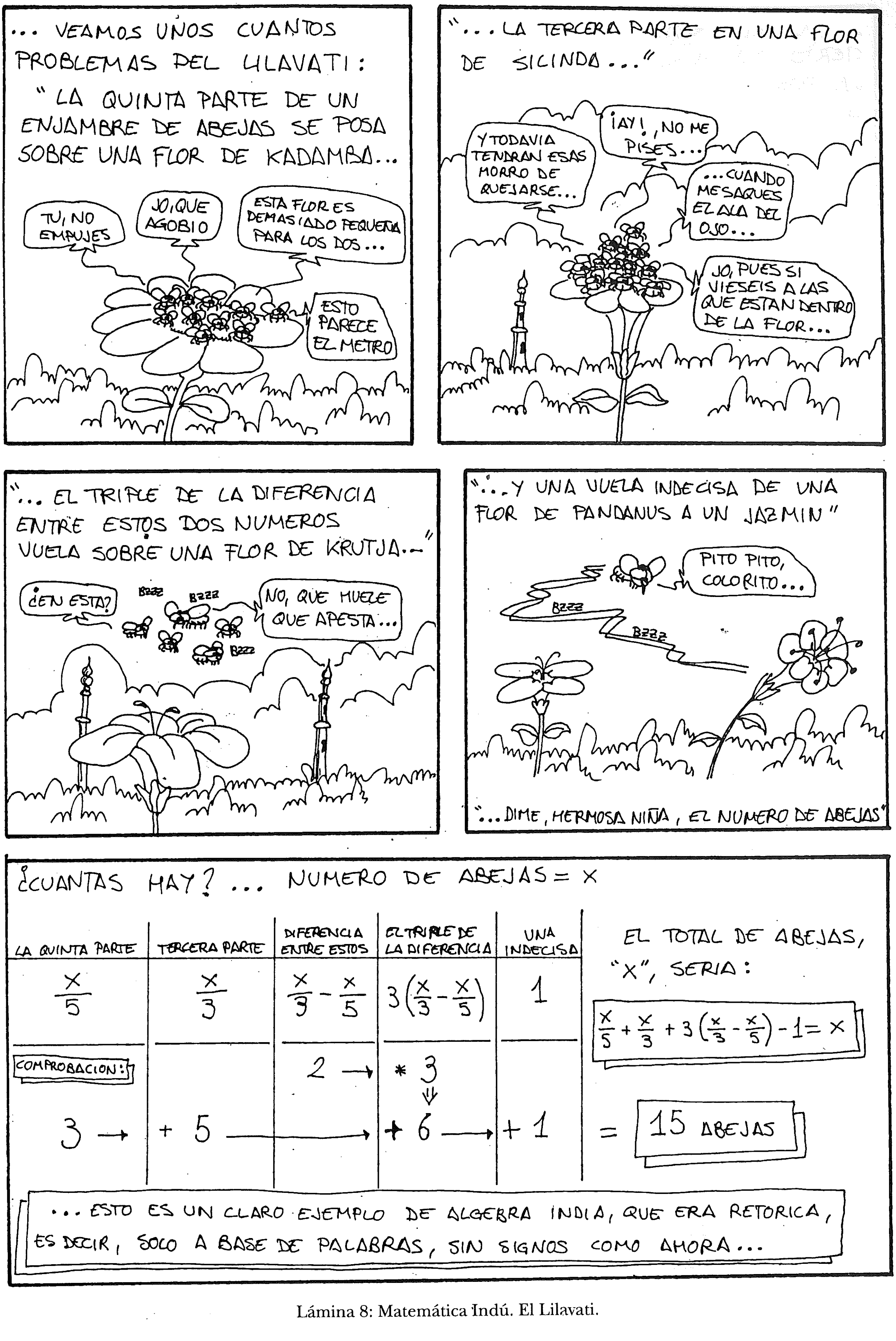


Lámina 8: Matemática Indú. El Lilavati.

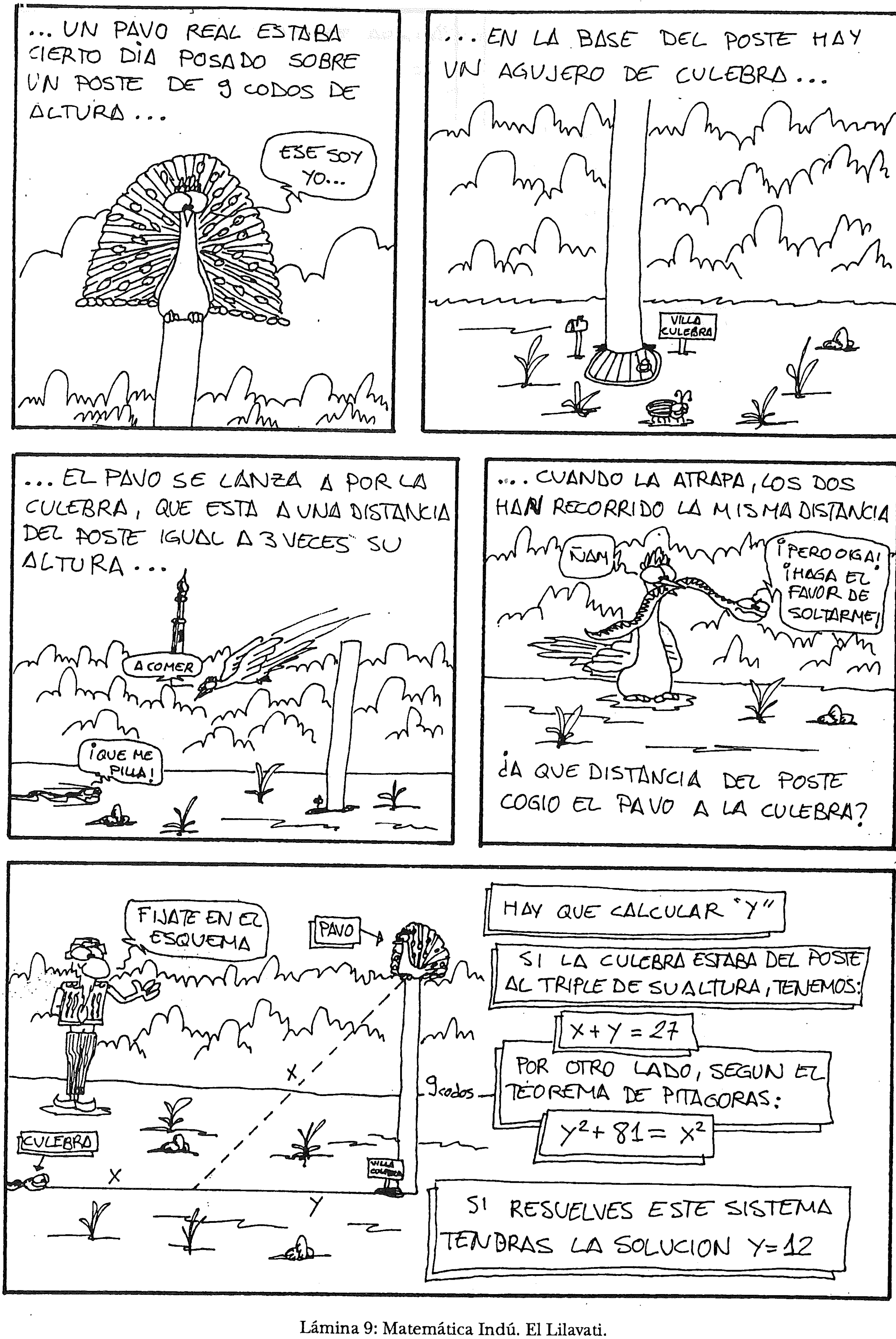


Lámina 9: Matemática Indú. El Lilavati.

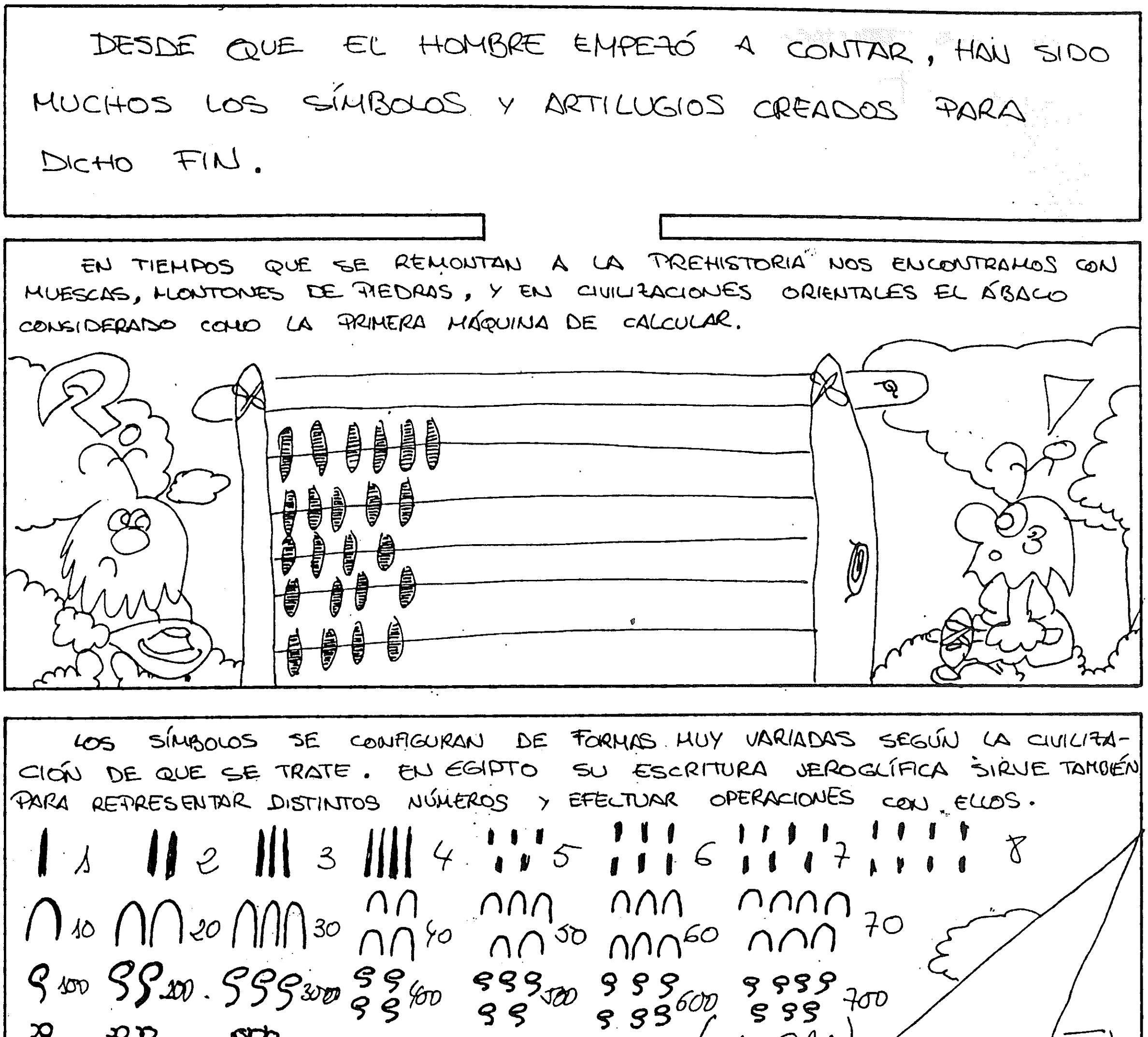


Lámina 10: Sistemas de Numeración.

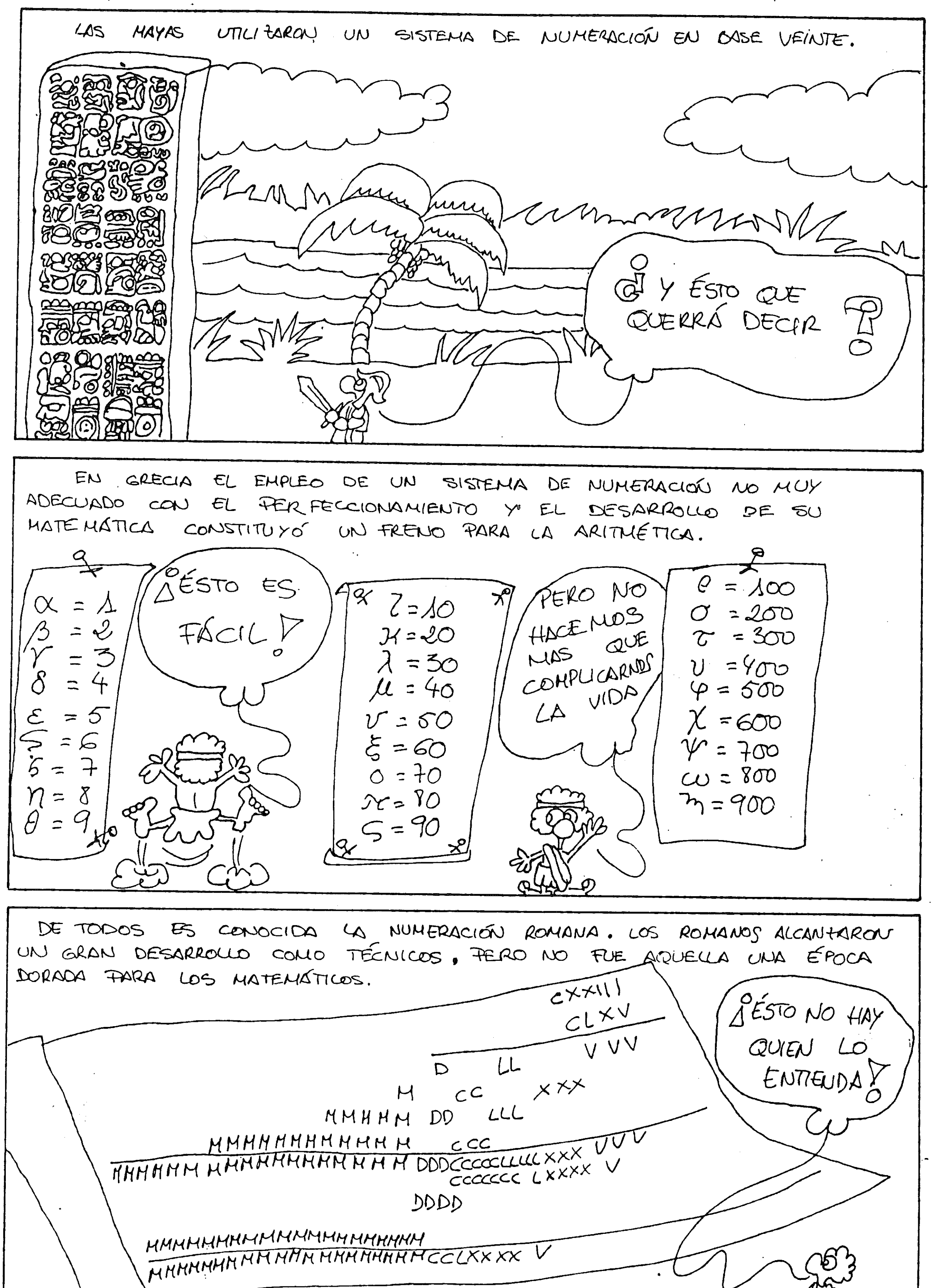
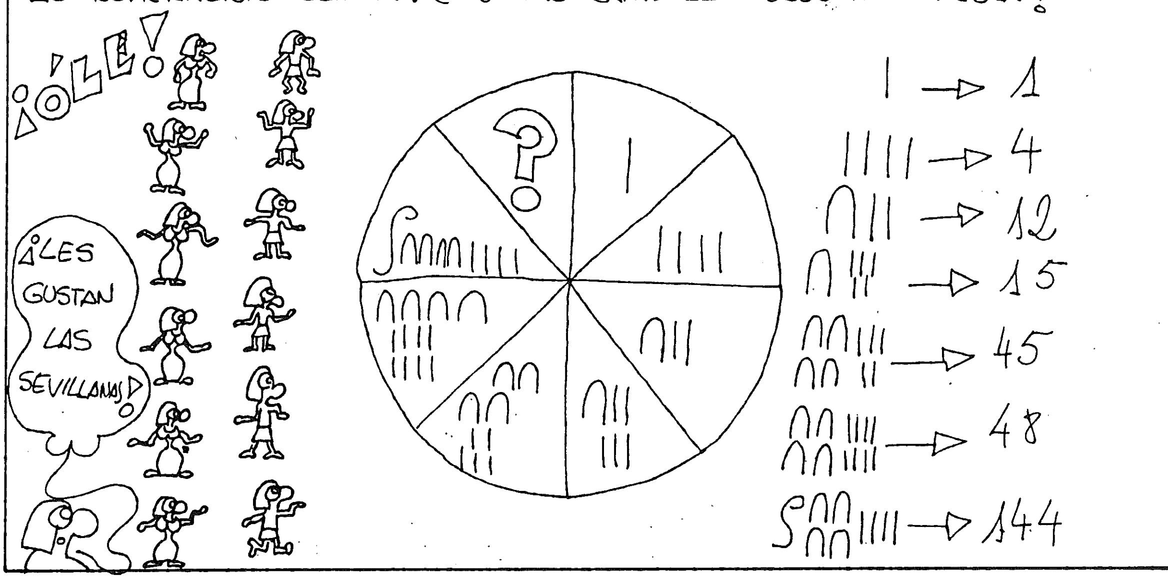


Lámina 11: Sistemas de Numeración.

SISTEMA DE NUMERACIÓN

AUNQUE NO LO CREAS, TODO TIENE SU SENTIDO, INCLUSO LA PROGRESIÓN DE LOS NÚMEROS QUE APARECEN EN ESTE CÍRCULO ESCRITO EN NUMERACIÓN EGIPCIA. ¿SERÍAS CAPAZ DE DESCUBRIR LA REGLA?



A LA TERCERA VA LA VENCIDA

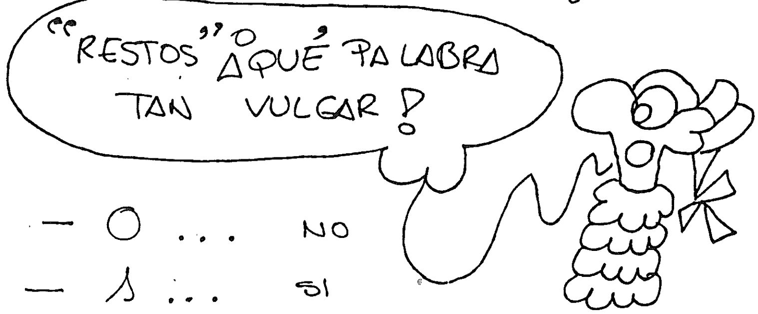
COMO VERÁS, NUESTROS TRES HONGOS ESTÁN ADORNADOS CON CUATRO NÚMEROS MAYAS. BUENO, MÁS EXACTAMENTE LOS DOS PRIMEROS, PORQUE EN EL TERCERO UNO DE LOS HUECOS ESTÁ OCUPADO POR UN SIGNO DE INTERROGACIÓN. PERO SEGURO QUE TÚ, DE UNA SIMPLE OJEADA, ERES CAPAZ DE DESCUBRIR LA CIFRA QUE DEBIERA OCUPAR EL CUARTO LUGAR.

Lámina 12: Sistemas de Numeración.

FERMAT - SIGLO XVII

UN NÚMERO PRIMO MAYOR QUE 4 AL DIVIDIRLO POR 4

¿QUÉ RESTOS PUEDE DAR?

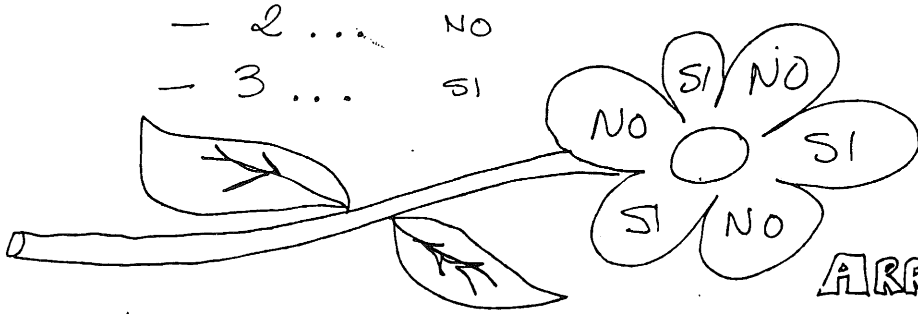


— 0 ... NO

— 1 ... SI

— 2 ... NO

— 3 ... SI



ARRIBA

RESTO 1 = 5 13 17 29 37 ...

RESTO 3 = 7 11 19 23 27 ...

ABAJO

$$5 = 1 + 4 = 1^2 + 2^2$$
$$13 = 4 + 9 = 2^2 + 3^2$$
$$37 = 1 + 36 = 1^2 + 6^2$$

¿SERÁ CIERTO EN GENERAL? ¿SERÁ CIERTO PARA LOS DE ABAJO?

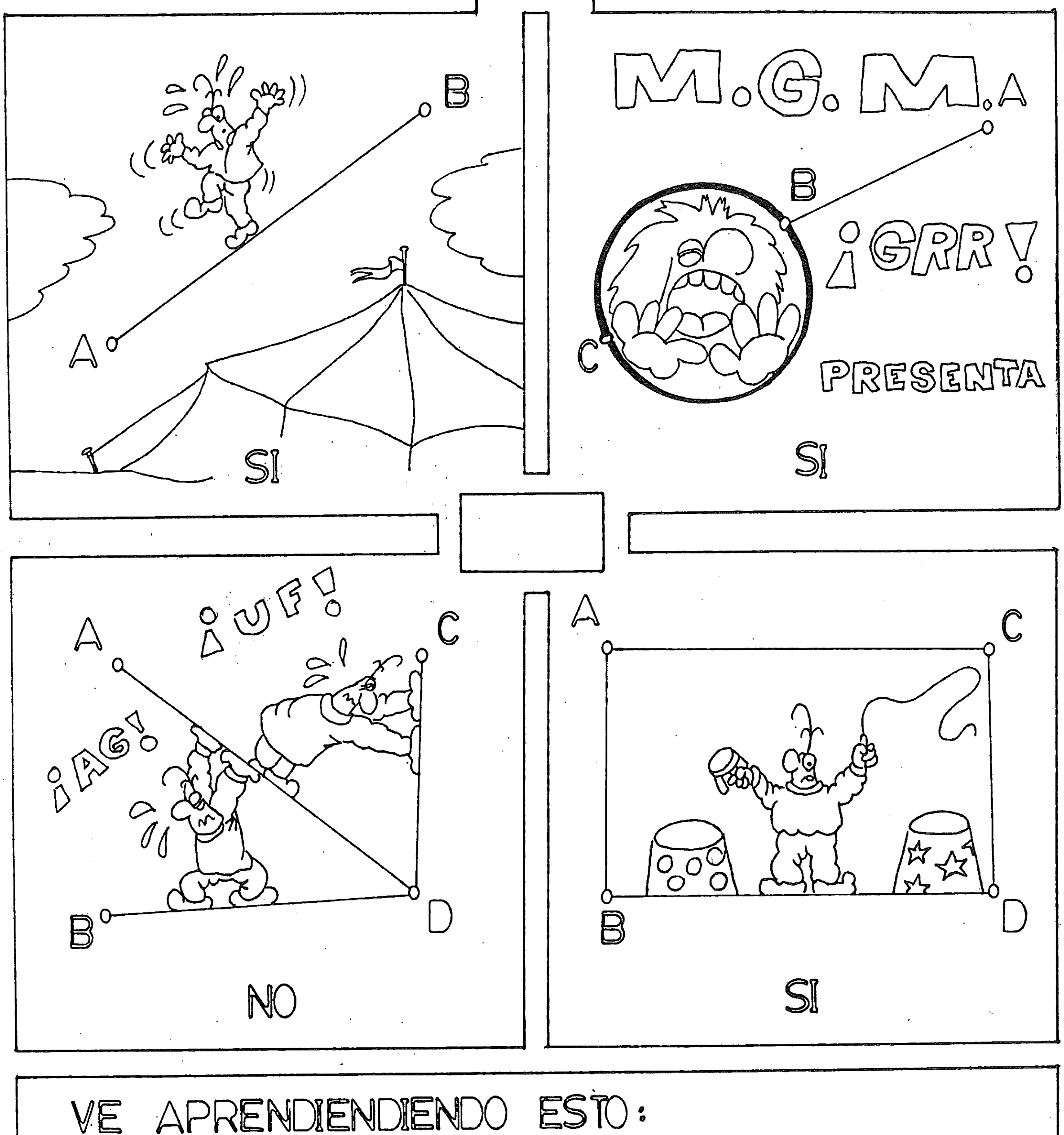
TEOREMA DE FERMAT:

"TODO NÚMERO PRIMO QUE AL DIVIDIRSE POR 4 DA RESTO 1 SE PUEDE PONER COMO SUMA DE DOS CUADRADOS Y SI DA RESTO 3, NINGUNO SE PUEDE PONER COMO SUMA DE CUADRADOS".

Lámina 13: Teoría de números: Férmit.

EULER - SIGLO XVIII - "SIN LEVANTAR EL LAPIZ"

¿SABRÍAS REPETIR LAS SIGUIENTES FIGURAS SIN LEVANTAR EL LÁPIZ DEL PAPEL Y SIN REPETIR DOS VECES UNA MISMA LINEA?



VE APRENDIENDIENDO ESTO:

VÉRTICE
- PAR: DE ÉL SALE UN NÚMERO PAR DE CAMINOS.
- IMPAR: DE ÉL SALE UN NÚMERO IMPAR DE CAMINOS.

Lámina 14: Euler: "Sin levantar el lápiz".

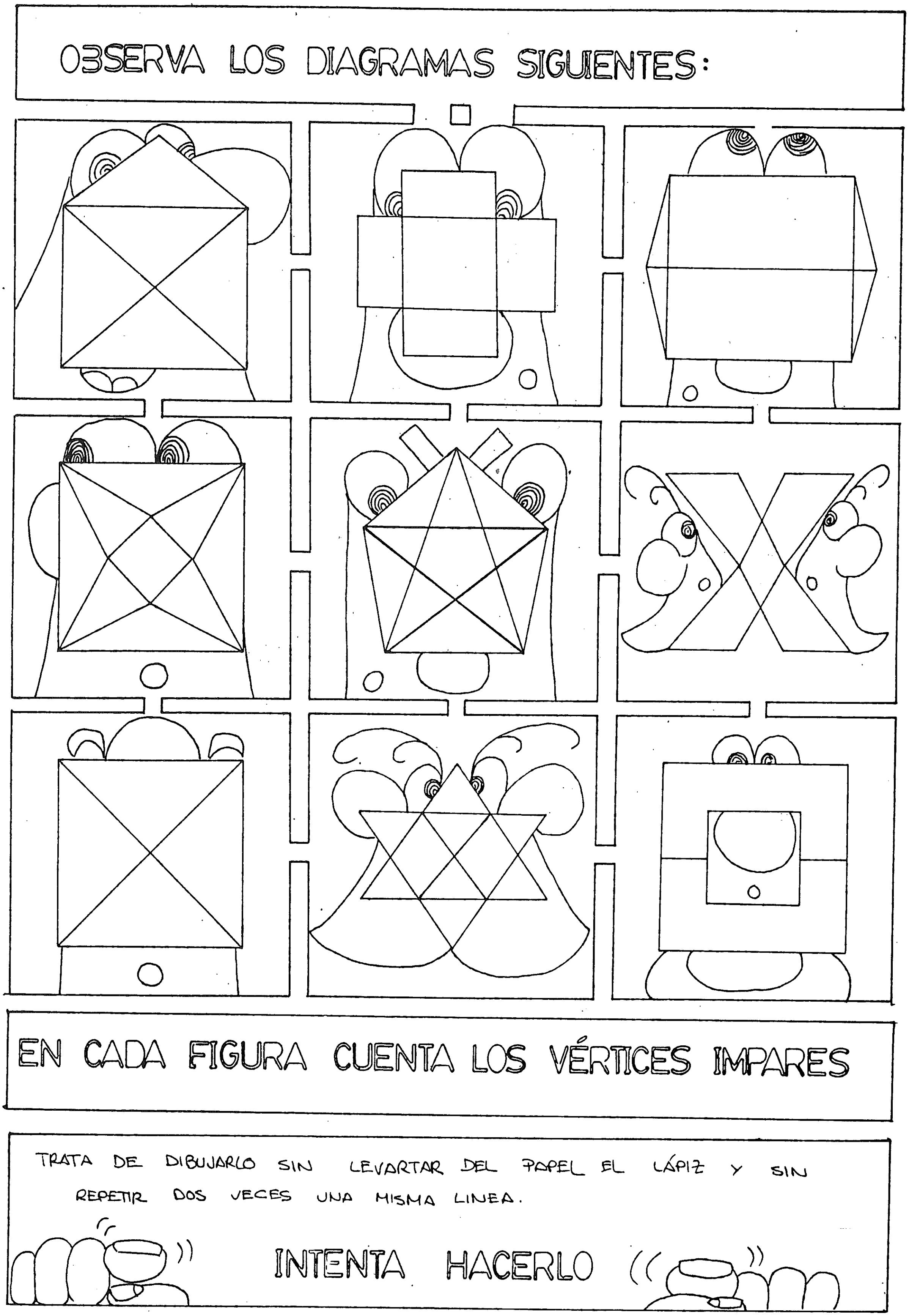


Lámina 15: Euler: "Sin levantar el lápiz".

SUMA

enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Otoño 1989

Suscripción

Los miembros de cualquiera de las Sociedades que componen la Federación reciben la Revista por el mero hecho de ser socios. Si no pertenece a ninguna Sociedad y desea recibir SUMA en su domicilio envía, debidamente cumplimentado, **el boletín adjunto a Revista SUMA, Apdo. de Correos 1017, 18080 Granada (España).** A esta dirección se pueden solicitar, también, **los números atrasados, al precio de 1000 ptas. más gastos de envío.**

La suscripción le será renovada al finalizar el período inicial indicado si no nos comunica, por escrito, su deseo de causar baja.

Domiciliación Bancaria

Si decide suscribirse a SUMA, puede optar por cualquiera de las formas de pago que aparecen en el boletín de suscripción. No obstante nos permitimos sugerirles la domiciliación bancaria como forma más cómoda de hacer efectivo el importe de la suscripción. En ese caso rellene con letra clara los datos bancarios que aparecen en el boletín.

Nombre y Apellidos: ____________________

Calle: ____________________

Población: ____________________ C.P.: ____________

Provincia/País: ____________________ Tfno.: (   ) ____________

CIF: ____________ Centro de trabajo ____________

Firmado: ____________________ Fecha: ____________

Firma:

Deseo suscribirme por 3 números a partir del número ________ inclusive

Cuyo importe haré efectivo mediante:

- ❒ Cheque bancario adjunto
- ❒ Domiciliación bancaria
- ❒ Giro Postal Nº _______ Fecha __________
- ❒ Contra reembolso
- ❒ Transferencia a:c.c. 6719644, Caja Postal, Urb. Camino de Ronda, Granada.
  c.c. 007.01.289530, Caja General de Ahorros. Urb. Camino de Ronda, Granada

Estado español: Particulares: 2.500 ptas.
Centros: 3.000 ptas.
Europa: 25$ ídem.
Resto del mundo: 35$ ídem.

Señores, les agradeceré que con cargo a mi cuenta corriente/libreta atiendan al recibo que anualmente les presentará la revista «SUMA» correspondiente al pago de mi suscripción a la citada revista.

(Sólo para el Estado Español)

Banco/Caja: ____________________

Agencia: ____________________ Nº C/C: ____________

Calle: ____________________

Población: ____________________ C. Postal: ____________

Provincia: ____________________

Titular: ____________________

Firmado: ____________________ Fecha: ____________

Firma:

Agradeceríamos la reseña de dirección postal de Centro/Institución o persona interesada, para enviarle información sobre la presente publicación. Gracias.

Enviamos información de SUMA a:

Nombre y Apellidos: ____________________

Dirección: ____________________ C.P. ____________

Población: ____________________ Provincia: ____________

Este envío es por sugerencia de:

Nombre y apellidos: ____________________

Dirección: ____________________

Población: ____________________ C.P. ____________

Provincia: ____________________ Un saludo

SUMA

Apdo. 1017

18080 GRANADA

ESPAÑA

I CIBEM

Sevilla 24-29 Septiembre 1990

Lugar de celebración: Universidad de Sevilla. **Idiomas Oficiales:** Español y Portugués.

ESTRUCTURA

1. CONFERENCIAS PLENARIAS
   —Prof. C. Alsina. Título: "Los 90 son nuestros. Ideas educativas para una Matemática feliz".
   —Prof. U. D'Ambrosio. Título: "Las matemáticas y su entorno socio-cultural".
   (Conferencia de clausura).
   —Prof. E. Luna. Título: "El papel de la Investigación en el Mejoramiento de la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática en un Contexto Latinoamericano".
   —Prof. J. Ponte. Título: "Investigaçao em Edicaçao Matemática em Portugal: 1984-1989".
   —Prof. L. A. Santaló. Título: "La Matemática para no matemáticos". (Conf. inaugural).
2. PANELES
   1. Renovación y reformas.
   2. Informática y enseñanza.
   3. Formación del Profesorado.
   4. Educación matemática en grupos culturalmente diferenciados.
   5. Investigación en educación matemática.
   6. Estadística y enseñanza.
   7. Geometría en las enseñanzas primaria y secundaria.
   8. Resolución de problemas.
3. COMUNICACIONES
   —En este apartado tendrán cabida trabajos de investigación didáctica, talleres, etc.
   —El tiempo destinado a cada comunicación será de 20 minutos y 15 minutos de debate, si procede.
   —Un esquema de la comunicación deberá ser enviado al Comité Organizador antes del día 28 de Febrero de 1990, siendo la fecha límite de recepción de la comunicación (10 folios máximo, escrito por una cara a doble espacio) el 30 de abril de 1990.
4. EXPOSICIONES
   Durante el congreso se podrán exponer todo tipo de material de apoyo a la educación matemática. Los interesados deberán comunicar sus características, así como las necesidades de espacio, antes del 30 de abril de 1990.

PROGRAMA

Día 24: De 9 a 11 h.: Recepción.– De 11,30 a 13,30 h.: Apertura y Conferencia.– De 16,30 a 18,30 h.: Panel.– De 19 a 20 h.: Comunicaciones.

Día 25: De 9 a 11 h.: Conferencia.– De 11,30 a 13,30 h.: Paneles.– De 16,30 a 18,30 h.: Comunicaciones.– De 19 a 20 h.: Comunicaciones.

Día 26: Libre.

Día 27: De 9 a 11 h.: Conferencia.– De 11,30 a 13,30 h.: Paneles.– De 16,30 a 18,30 h.: Comunicaciones.– De 19 a 20 h.: Comunicaciones.

Día 28: De 9 a 11 h.: Conferencia.– De 11,30 a 13,30 h.: Paneles.– De 16,30 a 18,30 h.: Comunicaciones.– De 19 a 20 h.: Comunicaciones.

Día 29: A las 10 h.: Conferencia.– A las 12,30 h.: Clausura.

INSCRIPCION

Apellidos:.. Nombre:.....................
Dirección: ....
Ciudad: .... C.P.:.................. País:.....................
Teléf.:...............................
Centro de trabajo:
Nivel: Primaria ❑ Secundaria ❑ Universitaria ❑ Otros ❑
¿Pertenece a alguna sociedad o asociación: Sí ❑ No ❑
Indique cual:

Señale tres paneles de su interés (Indicar el número):
Nombre de (los) acompañante(s):
1)
2)
3)

Cuota de Inscripción:

Se establecen dos tipos de cuotas: ordinaria y especial. Se podrán acoger a la segunda modalidad cualquier socio de las Sociedades Españolas Federadas, de la Asociación de Profesores de Matemáticas de Portugal y los participantes de países iberoamericanos.

Número de participantes: 1.000.

	Cuotas	
Plazos	Especial	Ordinaria
Hasta 30-5-90	11.000 ptas. (100$) ❑	15.000 ptas. (135$) ❑
Hasta 30-8-90	14.000 ptas. (125$) ❑	18.000 ptas. (160$) ❑
En el Congreso	17.000 ptas. (150$) ❑	21.000 ptas. (185$) ❑

(Señale con una cruz la cuota de pago)

Cada acompañante pagará el 20% de la cuota.
Forma de pago.
Talón nominativo a nombre de: SAEM "THALES"

ALOJAMIENTO

RESIDENCIA UNIVERSITARIA:
¿Cuántas plazas? ....
(Habitaciones individuales y dobles)
Alojamiento y desayuno, precio máximo persona y día 2.200 pts.
Plazas limitadas.
(Los gastos se abonarán en la propia Residencia Universitaria).

CAMPING

	Categoría	Adultos	Niños
Sevilla:			
Apdo. 938, Telf. 514379			
C. Madrid-Cádiz, Km. 534	2ª	275	225
Dos Hermanas:			
Club de Campo. Telf. 720250			
Avda. de la Libertad, 13	1ª	290	220
Villsom. Telf. 720828			
C. Sevilla-Cádiz, Km. 555	2ª	290	235

Si desea presentar comunicación rellene el siguiente boletín:
Tema:
Título:
Esquema de la comunicación (20 líneas)

I CIBEM
S.A.E.M. "THALES" – Facultad de Matemáticas – Apartado 1160 – 41080 – SEVILLA – ESPAÑA

Hacia unas matemáticas populares (*)

1. REFLEXIONES GENERALES

1.1. Introducción

Popularizar las Matemáticas es ofrecer nuevas vias de comunicación entre esta bella, pero a veces impopular ciencia, y la sociedad en todos sus niveles.

Usar las posibilidades de la prensa, radio, T.V., video, exposiciones, museos, publicaciones, concursos, etc. para una mejor comprensión y uso escolar y social de las Matemáticas es un tema de actualidad y en él se han centrado las discusiones e intercambio de experiencias que, finalmente, se han plasmado en este documento de reflexiones y propuestas.

La necesidad de popularizar las Matemáticas surge de la situación de impopularidad actual.

Yo me hice finalmente de Letras. No me llamó vocación alguna, a pesar de que escribía un diario y poemas ruborosos ... Mas bien fue una elección de huida: yo me fugué de las Matemáticas. (...)

Hoy hay pro-ble-mas (decía mi profesor de Matemáticas): Si un tren sale de Segovia a las 22.37 horas, y otro lo hace desde ... (...)

Y salía -de la clase de Matemáticas- con la mano en la boca y un extraño sabor a tren en el alma. Claro, en cuanto pude me hice de Letras. Ahora tengo una calculadora superpotente que cabe bajo un sello, los billetes de tren me los traen a casa de la agencia (con la hora de salida y llegada bien clara) ...

Este párrafo forma parte de un artículo de Fabricio Caivano, Director de la Revista Cuadernos de Pedagogía, titulado Matemáticas de tercer grado, publicado en la sección "EL sacapuntas" de Comunidad Escolar.

Ya es hora de atacar nuestra impopularidad, al menos, en aspectos fácilmente atajables. Demos credibilidad a las Matemáticas escolares, resolvamos problemas a la sociedad y no planteemos problemas inútiles, pongamos de manifiesto los valores, las destrezas y las actitudes que las Matemáticas pueden desarrollar. No pretendamos que todos nuestros alumnos sean aptos para las Matemáticas porque en la escuela lo más importante no son las Matemáticas, ni su maravilloso orden, ni la potencia de sus métodos. Lo verdaderamente importante, y no nos cansamos de decirlo, es el alumno. A su alrededor debe girar todo lo demás. Un alumno que no es un recipiente vacío al cual hay que llenar con los sabios conocimientos del profesor, un alumno que puede pensar correctamente, aunque su lógica no sea aún todo lo potente que deseamos, un alumno al que hay que resolver problemas y no plantearle situaciones de supervivencia escolar.

La impopularidad de las Matemáticas se manifiesta dentro y fuera de la escuela y está unida a los conceptos de dificultad, incomprensión del lenguaje simbólico, selección social, tedio, frialdad, inutilidad, etc. En clara contradicción con esta situación se da a la vez un senti-

(*) Este documento ha sido elaborado por:
Claudi Alsina, Luis Balbuena, Luis C. Cachafeiro, Fernando Corbalán, Mariano Domínguez, Manuel Fernández, Francisco R. Fernández, Miguel de la Fuente, José Mª Gairín, Isabel García, Mª José García, Evaristo González, Salvador Guerrero, Felipe López, Vicente Meavilla, Charo Nomdedeu, Juan Núñez, Mª de los Angeles Ortiz, Francisco Padilla, Luis Pérez, Javier Pérez, Rafael Pérez, Antonio Pérez, Victoriano Ramírez, Antonio L. Rodriguez, Ceferino Ruiz, Angel Salar, Gonzalo Sánchez, Juan A. Suárez, Carmen Da Veiga, Manuel Vela, Enrique Vidal, Florencio Villarroya

miento reverencial que asigna a las Matemáticas un papel estelar de rigor y de paradigma científico, recurriendo muy a menudo la propia sociedad a esta ciencia para realizar sus procesos de filtro social.

De ahí que la popularización debe interesar no sólo a los educadores matemáticos sino a la sociedad en general, en cuyo desarrollo de calidad de vida y progreso, están implicadas las Matemáticas. En una sociedad cambiante, tecnológicamente evolutiva y con una creciente matematización, las Matemáticas pueden aportar una mayor y mejor comprensión del mundo, un mayor desarrollo de las capacidades críticas y participativas del ciudadano, un mayor acercamiento a la realidad, a sus problemas y sus soluciones. Por todo ello, las acciones de popularización que hagan posible un estudio y comprensión más útil, inteligible , ameno y divertido, redundarán en una mayor vocación, disfrute y desarrollo de esta vieja ciencia, hoy rabiosamente joven.

Si bien han existido experiencias españolas en este campo de la POPULARIZACION, hoy en día parece conveniente que se realicen esfuerzos masivos.

En un momento de reforma del sistema educativo, con un panorama social cada vez más tecnificado, con una población a la que hay que ofercer una actualización científica, técnica y cultural, lograr que las matemática pueda "llegar" de forma interesante y amena, aparte de útil, es un auténtico reto para todos.

Con la POPULARIZACION de las Matemáticas, su aprendizaje, su enseñanza y su utilización pueden ser experiencias altamente gratificantes.

Para finalizar esta introducción, no debemos olvidar el papel que sobre la popularización de las Matemáticas vienen realizando diferentes colectivos organizados como Sociedades de Profesores de Matemáticas o como Grupos. A modo de pequeño homenaje, recordemos, ahora que se está conmemorando el 2º Centenario de la Revolución Francesa, el **furor de asociarse** que reinaba en París por aquellos años. Los historiadores especialistas en el evento aún no dejan de sorprenderse por la gran cantidad de clubes a los que la gente acudía para distraerse y adquirir conocimientos. Parece ser que éstos, junto a las sociedades literarias y los gabinetes de lectura, se debieron a la poca fortuna de las reformas de las letras y las ciencias así como por el carácter cerradísimo de los medios académicos. Pero resultaron ser mucho más útiles, con ellos se estaba poniendo en marcha algo así como una opinión pública que pretendía hacer sentir todo su peso en las decisiones que afectarían su porvenir. Actualmente, y debido a aquella gesta, ya no es preciso que nos reunamos para derribar al despotismo, pero sí para popularizar las Matemáticas en ciudades y pueblos, en ambientes académicos y populares, e intentar influir como un gran grupo de opinión ante decisiones que nos afecten profesionalmente.

Contemplamos, pues, la popularización como un factor renovador y positivo que permite apuntar hacia nuevos horizontes de la educación matemática en su sentido más ámplio y global.

1.2. Algunos principios generales sobre popularización

En este apartado apuntaremos siete principios básicos que pueden guiar los procesos de popularización.

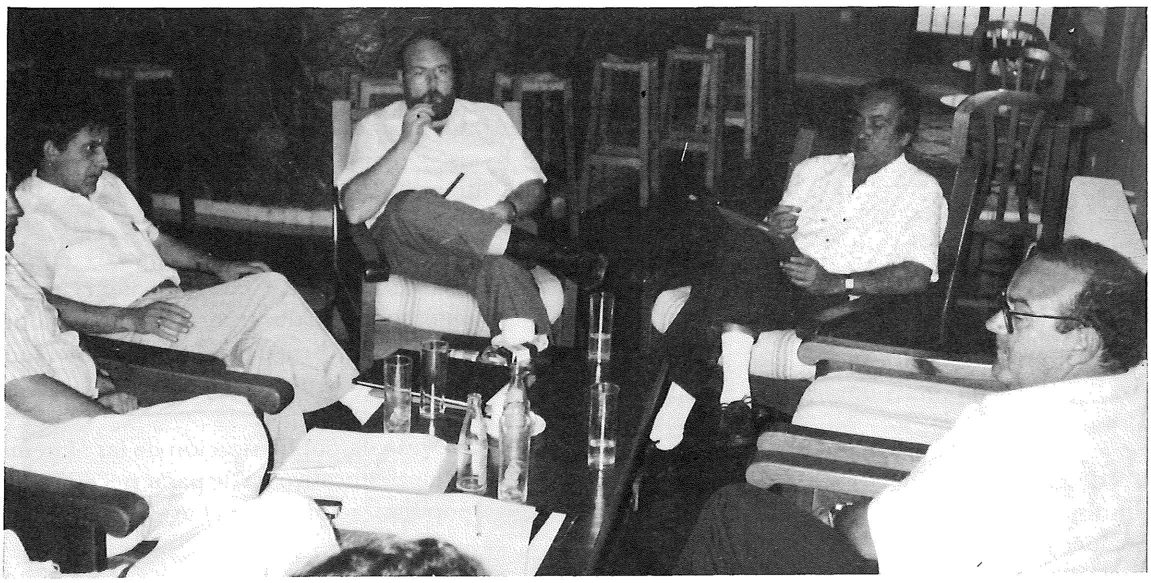
a) La popularización de las Matemáticas debe desarrollarse en todos los ámbitos: escolares, sociales, profesionales,... distinguiendo en cada caso los objetivos a alcanzar y los métodos más eficaces a adoptar.

Frente a la "no-popularidad" actual hay un largo camino a recorrer que empieza irremisiblemente por el medio escolar en todos sus diferentes niveles, teniendo en cuenta las limitaciones y potencialidades de cada caso. Es algo reconocido que, hasta ahora, el único contacto de la mayoría de las personas con las Matemáticas se reduce a su paso por la escuela. Pero esta acción educativa debe extenderse fuera de las aulas. No es factible una popularización que se olvide de la planificación curricular o del contexto social y cultural al que se dirige.

Por supuesto, evitar la "impopularización" es el primer paso a dar. En este sentido, dar un quiebro a lo inútil (torre de quebrados, orgía de paréntesis, idolatría a la X, etc.) es imprescindible.

b) La popularización de las Matemáticas debe adaptarse a las características culturales, históricas y lingüísticas de la población.

Mientras que en ciertos niveles profesionales algunas técnicas generales de popularización (revistas internacionales, películas en inglés, etc.), pueden ser eficientes, en los niveles escolares y sociales el impacto de la popularización será mayor si no existen dificultades lingüísticas y culturales de difusión, es decir si se usan códigos de fácil comunicación. Una película sobre Matemáticas y problemas de tráfico o sobre temas financieros será más interesante si se narra en lengua materna (doblada y no subtitulada), y aún más si lo que se explica es aplicable al país de emisión: niños de New York viendo soluciones al tráfico de Barcelona o niños de Barcelona aprendiendo a contar en dólares pueden tener cierta perplejidad ante el tema. Sin embargo, ello no debe ser un límite rotundo al carácter universal de las Matemáticas ni debe caerse en una situación forzadamente localista.



Prof. C. Ruiz, V. Ramírez, C. Alsina, M. Fernández, F.R. García (de izda. a dcha.)

Las Matemáticas son historia y cultura, por lo que no es necesario conectarlas si no es con otros aspectos de la Historia y la Cultura, ya sean de nuestro entorno próximo o en conexión con otros aspectos más lejanos y generales (modelos cósmicos, tecnología, economía, etc.).

c) La popularización de las Matemáticas debe usar todos los medios posibles de comunicación, explorando en cada caso el lenguaje más adecuado, asequible y divertido.

Aunque en principio cualquier tema relacionado con las Matemáticas (noticias, juegos, aplicaciones, biografías, investigación, etc.) puede ser presentado a través de cualquier medio de comunicación (libro, periódico, revista, TV, video, cine, ...) no cabe la menor duda de que unos pueden ser más adecuados que otros según el tema en cuestión o para el nivel al que van dirigidos. Es decir, no debe confundirse ni el medio ni el mensaje: una biografía puede resultar correcta en un programa de radio; un teorema, en un libro; unos modelos geométricos, en un video. Captando y usando el medio y el lenguaje adecuados se logrará una normalidad y con ello una mayor difusión, evitándose el efecto nefasto de la anormalidad que supone explicar geometría por radio, o filmar una demostración escrita.

El grado de diversión y amenidad es también importante. La seriedad del rigor, la corrección, el orden, etc., no debe confundirse con la monotonía y la pobreza, debiéndose evitar un cierto sentimiento "franciscano" y "victoriano" imperante en el oficio matemático.

d) La popularización de las Matemáticas debe ser una labor conjunta de educadores matemáticos y profesionales de los distintos medios de comunicación.

Si una partitura necesita músicos y una obra de teatro, actores, la popularización de las Matemáticas necesita esfuerzos compartidos entre educadores matemáticos (no siempre sensibles o familiarizados con los medios de comunicación) y profesionales (no siempre preparados para asimilar los temas a tratar)

e) La popularización de las Matemáticas debe seleccionar los temas, teniendo en cuenta tanto su interés como sus posibilidades comunicativas.

Si bien hay temas generales, fáciles y necesarios de popularización sencilla, hay temas abstractos para los que no se ha encontrado aún una fácil presentación. Admitiendo que no debe falsearse la presentación, ni prometer soluciones fictícias o aplicaciones demagógicas, hay que ser cuidadosos con ciertos tópicos. No siempre será fácil dar una idea de una conjetura o de los resultados de los últimos ganadores de las medallas Fields, pero matemáticos profesionales de la especialidad sí podrían dar una buena descripción, al menos a especialistas, de otros temas. En cambio, fuera de estos ambientes difícilmente podría asumir temas de variable compleja, variedades diferenciales, iteración o programación cibernética avanzada. Usar denominaciones como "fractales", "teoría de catástrofes", "caos" o "inteligencia artificial" puede crear confusión y falsas expectativas.

f) Un intento maximalista de popularización a ultranza de todos los temas puede producir falsas popularizaciones: un contenido caduco o inadecuado aunque "se vista" de video, filmina o comic, no se convierte en brillante.

El uso de publicidad o marketing no debe hacer confundir el verdadero valor de un producto. Un/a matemático/a desnudo/a en revistas del corazón o un libro de texto que regala llaveros o la firma de un futbolista podrán tener fama, ser conocidos, pero pueden no tener nada de positivo. También hay materiales de pura diversión que a lo mejor (o a lo peor) no logran comunicar nada. Así será bueno distinguir fama y popularización, diversión y provecho.

g) La popularización de las Matemáticas puede ser un interesante campo de realizaciones en el contexto de la Educación Matemática.

Visto el panorama de los 90, donde información e imágenes ocuparán un papel muy importante, investigar las posibilidades de popularización matemática en formación, información y reciclaje (de una población con más necesidades de puesta al día) serán temas muy interesantes. Debiéndose mostrar por encima de todo la dimensión humana de las Matemáticas, donde el rigor, implicación y deducción son compatibles con sonrisa, queja y felicidad.

1.3. Popularización y el momento actual español de reforma educativa.

En toda España, estamos actualmente en un proceso de elaboración de los contenidos de los diseños curriculares. Creemos que es por ello oportuno expresar una serie de reflexiones generales sobre la consideración de las Matemáticas dentro del ámbito escolar:

a) Los objetivos que se marquen para la Reforma deben contemplar la necesidad de popularizar las Matemáticas

Hemos de destacar que el actual proceso de reforma consiste no sólo en una posible modificación de los contenidos y de las metodologías sino también en conseguir que las Matemáticas lleguen mejor a los alumnos (y por tanto a más alumnos), y que se conviertan en una disciplina que dé respuesta a sus necesidades (intelectuales, lúdicas, etc.) en función de sus capacidades. Una consecuencia de este planteamiento será la disminución de su impopularidad, pues, en la mayoría de las veces, el origen de ésta se encuentra en la propia escuela.

b) El proceso de popularización de las Matemáticas en el sistema educativo ha de pasar necesariamente por su popularización entre el profesorado.

Si el profesorado es considerado como motor principal de toda reforma, es evidente que también lo es en el objetivo de conseguir la popularización. Será de su actuación de la que se consiga este efecto. Esto lleva consigo el poner a disposición del profesorado el conocimiento, las estrategias y los materiales necesarios para dotarle de los medios que conduzcan a este fín. Esto puede hacerse de distintas formas: para algunos profesores sólo exigirá una difusión de resultados matemáticos; para otros pueden ser los aspectos lúdicos (Matemáticas recreativas) o los pedagógicos los que provoquen una mayor popularización.
Es en este campo donde las Asociaciones de Profesores pueden actuar, ya que es difícil que las Administraciones Educativas consigan cubrir este objetivo.

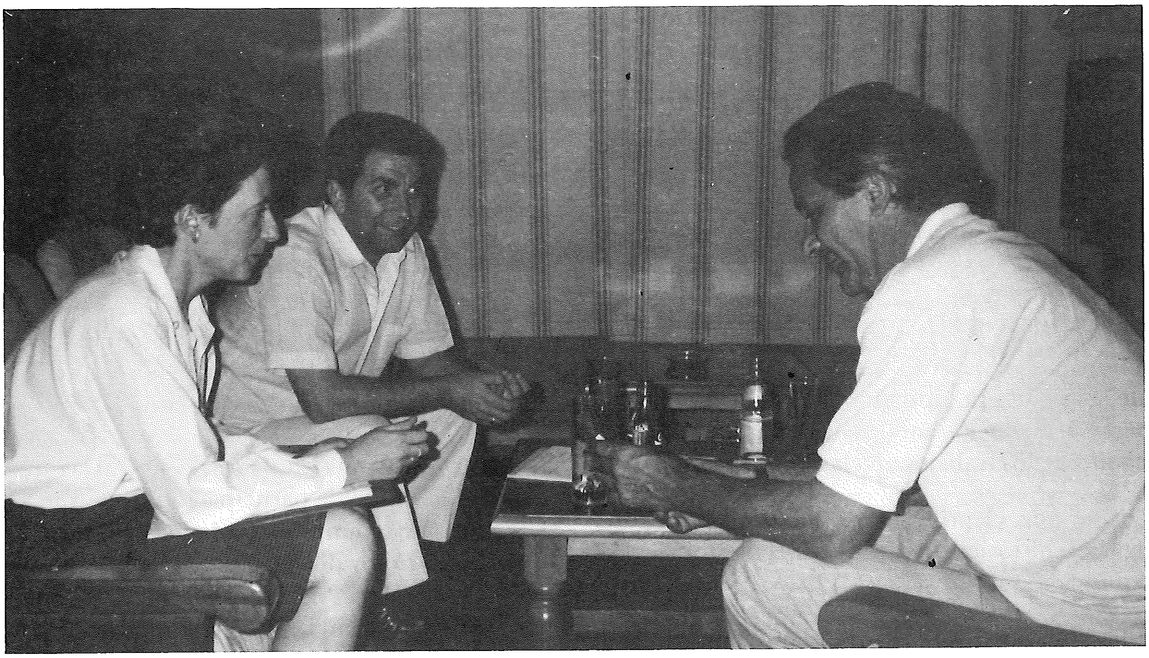
c) La popularización de las Matemáticas puede aportar materiales interesantes para enseñar y aprender Matemáticas.
Además de la exposición pública correspondiente, muchos materiales de popularización pueden ser

posteriormente usados en clase con el valor añadido de la participación activa, el debate, las interrogaciones, etc.

d) La popularización como objetivo didáctico no debe suponer una renuncia a aspectos esenciales de las Matemáticas.

Entendemos que las Matemáticas como disciplina escolar tienen un importante rol que no puede ser cubierto por ninguna otra disciplina. En ese sentido, su posible popularización ha de hacerse sin renunciar a esos aspectos. A través de las Matemáticas, el alumno debe, entre otras cosas, cultivar su capacidad de abstracción, ejercitar para potenciar su rigor lógico, llegar a captar el valor de las generalizaciones ...

¿Es el lenguaje matemático un aspecto esencial al que debemos renunciar en beneficio de la popularización de las Matemáticas? De todos es sabido que en Matemáticas se usa un lenguaje reducido, lleno de símbolos y códigos específicos. Ciertos términos han sido sacados del lenguaje cotidiano y presentan, en el contexto matemático, un significado totalmente diferente al que se les da en la sociedad. Por ejemplo, para cualquier ciudadano las palabras integrar, derivar, sentido, cubo ... tendrán un significado que nada tiene que ver con el que se les da en las clases de Matemáticas. El alumno, sobre todo en los niveles elementales, se encuentra con que tiene que razonar, expresarse y pensar en un "idioma extraño". Parte del trabajo de todo profesor de Matemáticas consiste en acercar a los alumnos a estos aspectos. El profesor es "bilíngüe", pero tiene que trabajar utilizando un lenguaje llano e, incluso, reemplazando los nombres matemáticos por otros de más cómodo uso por los alumnos. La elevación progresiva en el nivel de abstracción del lenguaje matemático es un aspecto a cuidar por los profesores si deseamos que las Matemáticas sean más populares. Rey Pastor comparaba el avance de un alumno por una asigantura con una excursión en la que hay atajos, experiencias, diversiones, peligros ... Debemos conseguir que la excursión se realice por lugares donde se hable la misma lengua que los excursionistas y sin olvidar que:



Prof. Mª J. García, S. Guerrero, L. Balbuena (de izda. a dcha.)

El empleo de cualquier vocablo presupone una experiencia compartida, de la que el vocablo es el símbolo. Si nos hablan del sabor del café, es porque lo hemos probado, si nos hablan del color amarillo, es porque ya hemos visto limones, oro, trigo y puestas de sol. (BORGES, J.L., Prólogos, Edit. Torres Agüero, Buenos Aires (1975).

e) Los textos escolares como instrumento de popularización.

A estas alturas resulta incuestionable la incidencia que tiene el libro de texto en el desarrollo del currículo escolar ya que, en muchos casos es casi la única fuente que utiliza el profesor para el desarrollo de su labor. Este hecho nos hace recomendar a los autores de textos y a las editoriales que consideren como uno de sus objetivos la popularización de las Matemáticas a través de sus obras.

En este sentido, las Sociedades de Profesores y las Administraciones Educativas deben fomentar aquellas obras escolares que contribuyan con sus contenidos, métodos, etc., a incrementar la popularidad de esta disciplina así como denunciar aquellas que lo hagan en sentido negativo.

f) Las Matemáticas deben formar parte de lo que se conoce como bagaje cultural de una persona.

Uno de los modos de popularización es la consideración de las Matemáticas como un proceso cultural. Los desarrollos históricos deben estar presentes en las actividades de clase. No se trata de la consideración de temas históricos como parte de los contenidos de la asignatura, sino que estas consideraciones formen parte de los modos de exposición y del desarrollo de los trabajos en clase.

Ello exige que el profesor disponga de libros de divulgación histórica donde se realicen estos modos de exposición.

g) La utilización de material manipulativo contribuye a la popularización de la asignatura entre los alumnos.

Este material debe ser escogido de modo que sirva para suscitar problemas que signifiquen un reto al pensamiento, y también como paso previo a la captación de conceptos.
La utilización inteligente de la calculadora puede significar la eliminación de determinados aspectos que contribuyen a la impopularidad de las Matemáticas, en tanto que supone la realización de complicadas y tediosas operaciones de un modo simplificado y asequible para todos, a la vez que da mayor fiabilidad de los resultados obtenidos y, sobre todo, mayor credibilidad a lo que en la escuela se hace porque, fuera de ella, todos actuan así.

g) Los distintos temas de estudio pueden contribuir también a la popularización de las Matemáticas.

En la clase se han de analizar, matemáticamente, situaciones y problemas de ámbito extraescolar que sean propuestos o planteados por los propios alumnos, (aunque los contenidos de un programa escolar no deban ser sólo eso). Ello requiere una formación adecuada por parte del profesor para darse cuenta de las implicaciones Matemáticas que puedan tener observaciones de los alumnos. Además, hacer ver aquellos aspectos que, a primera vista no están relacionados con las Matemáticas, sí que lo están, pueden ser un buen recurso para provocar actividades y descubrimientos.

2.- ACCIONES LLEVADAS A CABO SOBRE POPULARIZACION DE LA MATEMATICA.

En los últimos años se han realizado diferentes acciones, tanto dentro como fuera del aula, encaminadas a popularizar las Matemáticas. Del análisis de estas experiencias cabe extraer algunas conclusiones generales que podrían servirnos de orientación para futuras acciones.

La popularización de las Matemáticas puede implicar dos aspectos, en una primera aproximación, respecto a los individuos a los que va dirigida:

Actividades de popularización en las que sólo se supone un grado de participación "pasiva" por parte de los que intervienen: son fundamentalmente actividades de información y divulgación.

Actividades en las que los sujetos a los que van dirigidas tienen una participación activa, fundamentalmente a través de la manipulación o bien mediante la propia actuación resolviendo tareas, jugando, etc. Los que se ven inmersos en ellas no sólo reciben informaciones sobre aspectos de las Matemáticas, sino que de alguna forma hacen Matemáticas ellos mismos.

Los temas son tan variados, que salvo contadas excepciones, no cabe pensar que van a atraer de igual forma y con el mismo grado de participación a todo el mundo. En ocasiones muchas de las actividades planteadas a unos les interesará solamente como información, mientras que otros estarán interesados vivamente en involucrarse en dichas actividades.

Al margen de la profesión, la sociedad genera productos variados que son o que pueden transformarse en elementos popularizadores, esto vale tanto para una película, un juego como para un objeto decorativo. Asimismo diversas instituciones, no directemente relacionadas con el ambito escolar, organizan, en ocasiones, actividades que tienen relación con la popularización o divulgación matemática. Detrás de estas actividades suele haber casi siempre un profesional de las Matemáticas.

Desde la comunidad matemática se vienen realizando diferentes acciones de popularización. Damos una clasificación, entre otras posibles, de estas actividades.[1]

Concursos y torneos:

Las olimpiadas y torneos han sido tradicionalmente un elemento divulgador de las Matemáticas.

Actualmente se están realizando los siguientes:
Olimpiada Nacional de Matemáticas. Estatal. (1)
Olimpiada Matemática "THALES". Andalucía. (2)
Torneo de Matemáticas "I. NEWTON". Canarias. (3)
Olimpiada Matemática. Zaragoza. (4)
Las Matemáticas también divierten. Guadix (Granada). (5)

Cursos y conferencias:

Es tan larga la lista que nos parece oportuno no reseñarla por el temor de no poder explicitar todos y cada uno de los cursos-cursillos y conferencias sobre este tema.

Exposiciones:

Más que exposiciones tradicionales habría que hablar de talleres exposiciones en los que los asistentes no sólo pueden informarse sino que pueden participar directamente de las propuestas, manipulando, construyendo, resolviendo problemas, etc.

Tenemos conocimiento de las siguientes:

"Pesos y Medidas". Museo de la Ciencia de Barcelona. 1981. (6)

"Breve viaje al mundo de las Matemáticas". Museo de la Ciencia de Barcelona. (7)

"Tiempo y relojes". Museo de la Ciencia de Barcelona. 1985. (8)

Grupo de profesores que asistieron al Grupo de Trabajo de Sierra Nevada

"Fascinante simetría". Museo de la Ciencia de Barcelona. 1988. (9)

"Arquitecturas y espacios de la Geometría". CEPs de Burjasot, Torrent y Valencia. 1986. (10)

"Utiles en matemáticas". Castellón de la Plana. 1987-88-89. (11)

"Ciencia recreativa". Cangas de Morrazo (Pontevedra). 1989. (12)

"Horizontes Matemáticos". Itinerante por España. 1989. (13)

"Objetos y formas matemáticos". Salamanca. (14)

"Matemáticas y fotografía". Granada. 1988-89. (15)

Medios audiovisuales:

La radio y la televisión son dos medios modernos de difusión de gran influencia,por lo que las actividades desarrolladas en ellos han de cuidarse especialmente ya que su efecto multiplicador puede potenciar también lo negativo.

Apariciones esporádicas de profesionales o de temas matemáticos en programas no específicamente matemáticos puede ser una via. Otra más directa es la producción de programas exclusivos para divulgación matemática.

La gran fuerza de la imagen debe aprovecharse también utilizando las diapositivas, videos, posters, murales,... como recurso.

Así podemos señalar las siguientes experiencias:

Programas de radio: (16-17)

"Ingenia-telas con THALES" de RCE en Huelva.
"La bisagra" de RN1.
"Un mundo feliz" de RN3
"Hoy es mañana" de RN4
"Las mañanas de J. Cuní" en Catalunya-radio

Vídeos:

"Utilización de materiales didácticos". Salamanca. 1989.(18)
"Del plano al espacio". Valencia. 1987. (19)
"17 Sinfonías para una loseta. Visiones Matemáticas de la Alhambra". Granada 1988. (20)

Programas de T.V.:

"Vídeos de la Open University". TV3. Cataluña. 1988. (21)

Posters:

"Una lección de matemática corporal". Barcelona. (22)

Publicaciones:

Tradicionalmente, el elemento divulgador por excelencia ha sido o el libro de texto o la publicación científica especializada. En pocas ocasiones se ha utilizado como vehiculo de divulgación la prensa. Aprovechar las oportunidades que ofrecen los medios de difusión escritos periódicos y revistas- puede ser un buen elemento divulgador. En ocasiones se utilizan de forma esporádica pero otras veces pueden realizarse colaboraciones Matemáticas con una cierta continuidad. También ocurre a veces que se crean publicaciones de caracter periódico con la finalidad exclusiva de ser un elemento de popularización.

Las experiencias de las que tenemos conocimiento son:

Publicaciones periódicas:

"Números y figuras". Canarias. 1989. (23)
"Matemáticas en el Heraldo de Aragón". Zaragoza. Desde 1988. (24)
"Talino el avispado". Diario de Cádiz y Diario de Jerez. Desde 1986. (25)

Publicaciones esporádicas:

"Las Matemáticas que no aprendimos". Zaragoza. 1988. (26)
Colaboraciones en: "Muy Interesante"; "La Vanguardia"; "El Pais"; "Avui"; "El Periódico". (27)
Monografía sobre la Alhambra. Granada. 1987. (28)
El método proporcional P.R.I. de reparto electoral puede corregir los defectos de la ley D'Hont. "IDEAL", Marzo de 1985. Granada.
Elecciones en Galicia: comparación de fórmulas electorales y análisis de los resultados. "IDEAL", Diciembre de 1985. Granada.

Otras:

Proyecto "O'THALES" (fascículos). Sevilla. (30)
"Las Matemáticas y ...". Revistas EPSILON y SUMA. Granada. Desde 1984. (31)
"Thalescopio". Separata de revista. Cádiz. Desde 1987. (32)
"Viaje gráfico por el mundo de las Matemáticas". Dos volúmenes. ICE de la U. de Zaragoza. 1984. (33)
"Butlleti". Castellón de la Plana. (34)

Actividades en el marco escolar:

De las actividades recogidas unas se han limitado al aula mientras que otras han aprovechado cualquier circunstancia del entorno escolar implicando en ellas a profesores de otras materias y padres de alumnos.

Las que se han recogido relativas a este apartado son:

"Club de Matemáticas". Canarias. (35)
"Club informático". Canarias. (36)
"Juegos para la clase de Matemáticas". Zaragoza. (37)
"Matemáticas en Torrebonica". Cataluña. (38)
"Buenos días Geometría". Cataluña. 1983-84. (39)
"Medidas y Matemáticas". Cataluña. 1989. (40)
"Carnaval matemático". Dúrcal (Granada). 1986. (41)
"Concurso semanal de problemas". Málaga. (42)
"Algo de Matemáticas en la Mezquita de Córdoba". Córdoba. (43)
"Curriculum". Castellón de la Plana. (44)

Por último la propia actividad de la que este documento es el fruto, constituye en sí misma una "actividad de popularización". (45)

Del análisis del conjunto de estas actividades pueden entresacarse algunas características generales que son, en esencia, las que las hacen especialmente aptas para popularizar las Matemáticas tanto individual como colectivamente.

Se observa que a la mayoría de las personas, les gusta resolver problemas, puzzles, acertijos, adivinanzas, juegos, etc. que representen un reto a su capacidad mental y a su pensamiento.

En general, casi todos los objetos o actividades que terminan haciendóse populares tienen en común que:

Exigen algún tipo de manipulación: recortables, cubo de Rubik, Cartas, Puzzles....
Producen sorpresa y extrañeza desencadenado curiosidad: exposiciones, figuras imposibles, paradojas, magia,..
Atraen por su belleza y son estéticamente agradables: mosaicos, estructuras geométricas, diseños, películas...
Responden a desafios "blandos" o incitan a la competición: resolver problemas, encontrar estrategias ganadoras, optimizar soluciones.
Conectan con ciertas modas o las utilizan como soporte de difusión: posters, pegatinas, chapas, objetos decorativos...

Juegan un papel importante en los efectos de popularización que las actividades incorporen además:

Una presentación atractiva.
Ser fácilmente accesibles al publico en general.
No tener dificultades Matemáticas iniciales aparentes.

Con estas condiciones, pueden desarrollarse habilidades Matemáticas no sospechadas a priori o desencadenar procesos mentales que suscitan interés para posteriores "aventuras Matemáticas".

3. PROPUESTAS PARA EL FUTURO

En los apartados anteriores se ha puesto de manifiesto que la mayoría de las acciones de popularización de las Matemáticas se han llevado a cabo en el marco escolar. Si queremos popularizar las Matemáticas debemos estar presentes en otros ámbitos y poner de manifiesto que éstas forman parte de la vida cultural y social.

La propia Naturaleza, con los cantos de los pájaros y el silbido del viento, ha sido la primera productora de notas musicales que en un principio, el hombre debió calificar de sonidos armoniosos. Sabemos que fueron los pitagóricos quienes se dieron cuenta de la estrecha relación existente entre música y Matemáticas. En días más cercanos a los actuales, Igor Stravinsky dijo que una forma musical está más cerca de las Matemáticas que de la literatura; no quizás de las propias Matemáticas sino del pensamiento matemático. Sin embargo, ¿por qué se considera culto a alguien que conoce a Bach o Falla y no pasa por inculto quien no conoce a Ramanujan o Puig Adam?

¿No será porque sostenemos, inconscientemente, el célebre aforismo que dice que *cuando la Ciencia entra por la puerta, el encanto sale por la ventana*? Puede que algo haya de cierto en ello, aunque creemos que es, de nuevo, nuestra propia desidia en poner de manifiesto la gran puerta que las Matemáticas abren para comprender y acceder mejor a aquello que en general decimos que nos produce un gozo estético. La pregunta que urge ahora respuesta es ¿cómo ponerlo de manifiesto sin necesidad de aburrir a nadie con teorías propias de matemáticos? Recuérdese que los profesores de una gran orquesta sólo ofrecen el concierto a los espectadores y se abstienen de darles explicaciones de cada movimiento, escalas utilizadas, armonías, etc.

Creemos que en estos momentos hay varios campos de actuación prioritarios :

a) La radio y la televisión, como campo de popularización pasiva.
b) Las exposiciones y museos, como popularización activa.
c) La prensa escríta.
d) Otros.

Cualquiera de ellos atrae, fuera del ámbito escolar o académico, a la mayoría de la población. El primero, y es de todos conocido, eleva a categoría de lo real y admitido, sin el menor reparo o crítica, cualquier cosa que muestre en la pequeña pantalla de millones de hogares.

a) La radio y la televisión como medios para popularizar las Matemáticas.

La radio, como medio de comunicación, presenta la ventaja de permitir un contacto simultáneo entre escuela y sociedad. Es preciso contar con programas periódicos, con una finalidad definida y un guión previo, planteando resolución de problemas y curiosidades, y explotar las intervenciones en directo de los oyentes. Creemos conveniente seguir las líneas marcadas ya en las actividades realizadas en este medio y que se han descrito en el epígrafe anterior.

Para hacer propuestas sobre el uso de la televisión, hay que tener en cuenta las condiciones en que la gente ve habitualmente la televisión y las propias del medio televisivo que sugieren utilizarlo más como un medio informativo, lúdico, para sorprender y maravillar que para aprender.

Cabría pensar en varios frentes de actuación:

(I) Crear la consciencia entre quienes hacen progamas de TV para que se introduzcan aspectos matemáticos en concursos, programas infantiles, revistas de TV, etc. Un ejemplo para cada caso de los mencionados:

Para un concurso: Un concursante debe llevar una tarta a su pareja, situada a 20 metros de él. La tarta debe elegirla entre las que hay alineadas sobre un larga mesa que tienen delante. ¿Qué tarta elegirá para recorrer el menor número de metros posible?

Para programas infantiles: Hay una amplia gama de juegos y puzzles de estructura matemática con los que cualquier persona puede disfrutar y divertirse largo rato: desde los ingenuos "pares o nones", los "chinos" o el "nim" hasta el complicado cubo de "Rubic" hay una amplia gama para entretener unos minutos durante muchísimas horas.

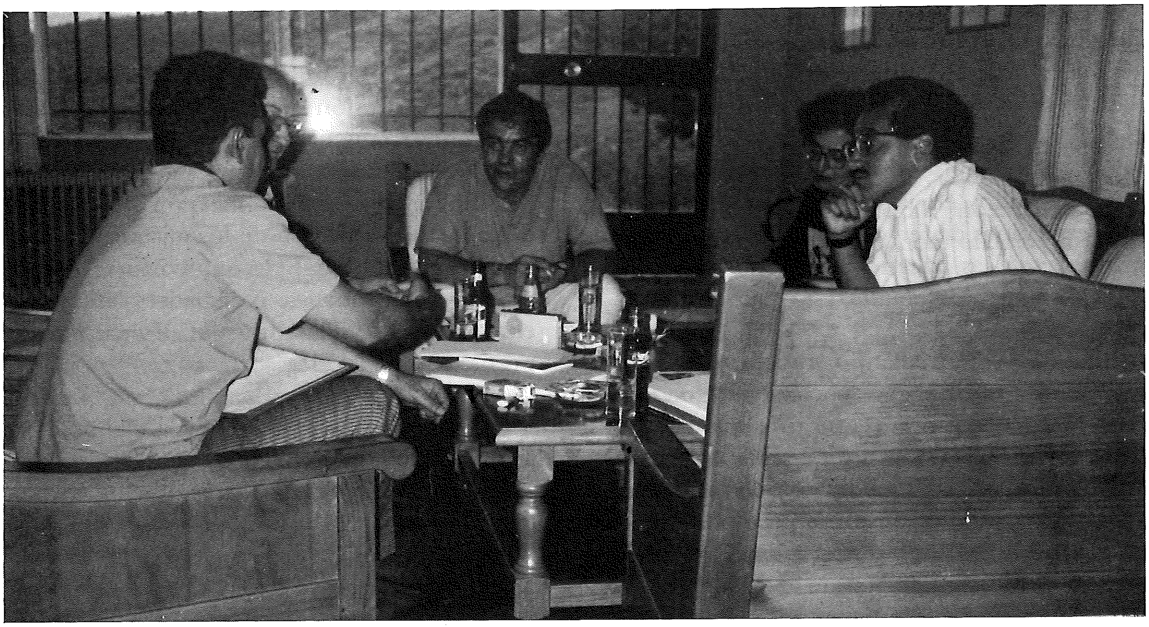
Para una revista de TV: creemos que puede interesar dar a conocer a la sociedad cómo se optimiza la recogida de muestras de sangre de enfermos por grandes hospitales y se les dan los resultados a dichos enfermos en el menor tiempo posible, o la inauguración de exposiciones en Museos de la Ciencia con ánimo de popularizar, o descubrir que matemáticos árabes de la España musulmana intuyeron descubrimientos de los matemáticos del siglo XX y determinaron parte de la prehistoria de la teoría de grupos, o la aparición de una historia de las Matemáticas en comics, ...

(II) Las llamadas "cortinillas" que anuncian los cambios entre programas vienen presentando cuadros de conocidos pintores que se muestran acompañados de buena música. ¿Por qué no podrían aparecer objetos, curiosidades o figuras Matemáticas igualmente agradables? Por ejemplo, el mundo de las "figuras imposibles" ofrece imágenes súmamente atrayentes y espectaculares. Es más, siguiendo en la línea pictórico-musical actual, es posible mostrar la geometría y la aritmética que dichas composiciones presentan. Su belleza no es fruto de la casualidad ni del "genio creador". El desaparecido Salvador Dalí comentaba a preguntas de un periodista acerca de su famoso método para pintar que él mismo llamó "paranóico-crítico": ... no se trata de ensoñación sino de **topología** trascendental. Bien podría mostrarse el cuadro a Gala, titulado Leda atómica, perdiéndose hasta llegar a poner de manifiesto el pentágono regular sobre el que está basado. Le acompañaría la obra de Béla Bartók, Música para cuerda, percusión y celesta, en su primer movimiento que hace uso de la sucesión de Fibonacci en el número de compases. ¿Qué hay de común entre el cuadro citado, el pentágono regular y la música elegida? El número de oro. ¿Conviene divulgar estos temas o, por el contrario, alimentar el mito del genio?

(III) Elaboración de series televisivas similares a los programas de Biologia de Belamy , o el Cuerpo Humano , o la serie Erase una vez .... abordando aspectos tanto históricos como de Matemáticas con interés social de actualidad; o mostrando paradojas y temas científicos atrayentes: un concierto de música geométrica, geometrías no euclídeas y el relativismo, objetos imposibles, el infinito y el cero, enigmas y paradojas, literatura y Matemáticas, arquitectura y Matemáticas, Matemáticas y el amor, Matemáticas y el interés colectivo, los test, las Matemáticas y el fín del mundo, etc.

b) El interés de las exposiciones y museos.

Cada día son más las ciudades que cuentan con Museos de la Ciencia, sin embargo es raro encontrar en



Prof. José Mª Gairín, M. Domínguez, A. Salar, I. García, F. Padilla (de izda. a dcha.)

ellos salas dedicadas a la divulgación de temas matemáticos. Podemos decir que en dichos museos, los visitantes hacen el recorrido indicado sin tener que aportar más que la curiosidad que les ha llevado hasta allí ya que con esto les sobra para enriquecer su bagaje cultural con los descubrimientos que allí se exhiben. Las Matemáticas deben estar presentes en dichos lugares públicos. Su inmensa e interesante historia cuenta con temas del suficiente atractivo e interés para solicitar un lugar de privilegio. Por ejemplo, ¿cómo han utilizado los polígonos diferentes culturas que se desarrollaron en la Península Ibérica? Desde el uso de cuadrados en cuevas como la del Castillo, en Cantabria, en los inicios del arte figurativo durante el Paleolítico, para representar aspectos femeninos, hasta la adopción justificada de esta forma geométrica para la fabricación española de "chips" -que como reza en la publicidad de alguna casa automovilística: se trata de la cuadratura del círculo- pasando por los dos grandes homenajes que en España existen al cuadrado, la Alhambra de Granada y el Escorial en Madrid -uno de corte musulmán y el otro cristiano. Si a esto se le añaden aspectos relacionados con problemas famosos a su alrededor -la cuadratura del círculo, la construcción del polígono de 17 lados por Gauss, hasta la anécdota de la construcción del polígono de 65537 lados "a pesar de que el matemático granadino J.A. Molina Cano (1598) afirmase, en su libro Descubrimientos geométricos, que *la curva comienza a convertirse en recta cuando se divide una circunferencia en cien partes iguales,* hay datos con suficiente interés y atractivo como para ser tenidos en cuenta a la hora de instalar un Museo de la Ciencia.

Pero hay museos dedicados a divulgar otros aspectos culturales en los que las Matemáticas deberían estar presentes, con la consiguiente sorpresa para el visitante. Por ejemplo, en los llamados Museos Arqueológicos tendrían las Matemáticas un lugar destacado (véase el libro publicado en Alianza, Matemáticas y Arqueología). Incluso en los llamados Históricos hay cabida: qué tal si junto a la explicación de la defensa de Gerona ante las tropas napoleónicas se exhibiera el árbol probabilístico que muestra lo acertado de la decisión del general Alvarez de Castro tal y como P. Voltés lo recoge en su Historia insólita de España.

Así podríamos continuar enunciando situaciones, una tras otra. Entonces, si los hechos anteriores son tan obvios, ¿por qué no están las Matemáticas presentes en los museos? Una posible respuesta, de la que se deriva la consiguiente acción de popularización, es que a los matemáticos ni a los profesores de Matemáticas se nos ha ocurrido "pedir sitio" en ellos. De cara al futuro, debemos estar presentes en cuantas estructuras administrativas nos sea posible y esto no puede conseguirse si no es a través de artículos científicos que nosotros hagamos sobre estos temas. A partir de ahí, ocuparemos lugares que hasta el momento no se concibe, socialmente hablando, sean destinados a los matemáticos.

Las exposiciones itinerantes, con su carácter cambiante (unas veces de contenido monográfico, otras, con un contenido motivado por de actualidad de un tema), añaden a la ventaja de su movilidad. La posibilidad de llegar a lugares alejados de las grandes ciudades y, como consecuencia, de los museos y permitir su presentación en locales integrados en la vida ciudadana (grandes almacenes, estaciones de ferrocarril, salas de exposiciones, colegios, etc.) las hacen un vehículo ideal de la popularización de las Matemáticas.

Actualmente está circulando, prácticamente, por todo el territorio español, la exposición "Horizontes Matemáticos", diseñada por un equipo de investigadores y profesores franceses y cuya versión definitiva pertenece desde 1984 al Museo de las Ciencias y de la Técnica de La Villete de París. La valoración de su paso por nuestras tierras es tan positiva que la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas ha acordado construir una exposición, propia, en la que se muestren los aspectos de la cultura matemática española. Dicha exposición contará con diversas copias para que pueda actuar simultáneamente en diferentes lugares de nuestra geografía, siendo uno de sus objetivos el de que se incremente con aportaciones locales en dichos lugares.

Tanto en los museos como en cualquier otro tipo de exposición se debe insistir en que la participación de los visitantes sea interactiva con lo expuesto, que los carteles explicativos sean breves y atractivos, que no sea necesario demasiado tiempo para recorrerla, ... En suma, que no nos empeñemos en contarlo "todo".

c) Uso de la prensa escrita

Un aspecto de la popularización de cualquier ciencia es la divulgación de qué es lo que se está haciendo en la comunidad de matemáticos y de educadores matemáticos. Las experencias ya realizadas en este medio permiten sugerir algunos caminos nuevos :

(I) Distribuir regularmente a las agencias de prensa efemérides, noticias conmemorativas, artículos de divulgación que faciliten la aparición de temas matemáticos entre la información cultural y social.

(II) Intervenir en secciones fijas , no específicas de educación, con pasatiempos , problemas de ingenio, juegos, puzzles, ... debiendo existir una correspondencia abierta entre los autores y el público en general.

(III) Participar en los boletines escolares ó crear boletines especificos en los que se incluyan informaciones y concursos. Debe procurarse una distribución gratuita y una difusión lo más amplia posible. Por ejemplo, sugerimos los siguientes temas de interés:

Elaboracion de boletines con estadísticas puntuales del entorno y difusión de los mismos en los centros de enseñanza (tablones de anuncios, revista del centro, memorias informativas para padres , etc) y en el barrio o ciudad bien sea por difusión directa o a través de la prensa y radio locales.

Promover y participar en la elaboración de guias locales de interés popular con información matemática (estadisticas, dimensiones de edificios de interés, distribuciones de espacios, unidades e instrumentos de medida tradicionales...).

Incorporación de aspectos matemáticos en guías turísticas (visitas a monumentos, museos, excursiones a la naturaleza, fábricas de material didáctico para la clase de Matemáticas -si las hubiere-, etc.).

d) Otras acciones de interés general.

(I) Promoción de olimpíadas Matemáticas

Son frecuentes las actividades de este tipo en muchos países; quizás por ello nos parecen convenientes algunas puntualizaciones.

Debería fomentarse con ellas un sano espíritu de participación, evitando conocimientos formales y entrenamientos de élite. La convocatoria conjunta con actividades de tipo artístico (fotografías, diseño de carteles) puede permitir que accedan a estos concursos alumnos de diferentes capacidades.

Dentro de esta linea, la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas ha acordado promover una Olimpiada Nacional de Matemáticas para lumnos del último curso de Primaria, habiendose creado ya un equipo organizador de las mismas que se ha propuesto como objetivos:

la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas,

la propuesta de pruebas en las que prime la intuición, el ingenio, la creatividad y la deducción razonada sobre las capacidades memorísticas y mecánicas, la divulgación de las pruebas que se propongan con la finalidad de orientar y ofrecer material de ayuda al profesorado de Matemáticas y, por último,

tratar de evitar los aspectos negativos que presentan los concursos en los que la meta exclusiva es la consecución de un premio.

(II) Promover,al menos a nivel local,concursos alrededor de:

Fotografía matemática en el entorno.

Guiones matemáticos para obras de teatro o videos.

Recuperación de matemáticos y Matemáticas locales:vida y obra.

Exposiciones de modelos e instrumentos matemáticos propios de la zona.

(III) Actuaciones en materia de libros.

Si bien en el mercado se cuenta con algunas colecciones de Matemáticas recreativas, pensamos que hay escasez de libros matemáticos para "leer" sin ánimo de estar estudiando. Los comics, cuentos, libros de juegos, paradojas, enigmas y adivinanzas, colecciones de monografías divulgativas de ciertos temas bien elegidos (por ejemplo: números que no pueden escribirse con números, cuadrados mágicos, problemas famosos, etc.) ... se echan en falta. Es cierto que, en el momento actual, hay algunas editoriales que están haciendo un esfuerzo enorme con las traducciones de obras claves en este sentido (por ejemplo, la obra de Martin Gadner o recopilación de temas del Scientific American), pero debemos llegar a obtener producción propia. Ya tenemos ejemplos con la suficiente calidad como para saber que la aventura puede ser una excursión organizada, habrá que incidir sobre las editoriales, demandando este tipo de lectura donde se planteen temas matemáticos asequibles y amenos aunque eso conlleve cierta pérdida del rigor. Pero no nos engañemos, las editoriales han de ver rentabilidad en sus inversiones. Debemos procurar que estos libros tengan salida en el mercado, no basta con que los tengamos unos cuantos, hay que procurar que formen parte de los fondos de todo tipo de bibliotecas, escolares o no. Para culminar las acciones en este sentido, cabría presionar a los organismos competentes para que en las bibliotecas públicas aumente la proporción de este tipo de libros de Matemáticas.

(IV) Equipos de investigación interdisciplinares.

En los niveles universitarios, los científicos experimentales utilizan una parte muy reducida del potencial matemático. Hay que invitarles al conocimiento de nuevos resultados que potencien su labor en la seguridad de su aceptación. La formación de equipos interdisciplinares aportaría un benefício mútuo y, sin lugar a dudas, popularizaría las Matemáticas dentro de estos sectores.

Prácticamente se comenzaba este documento poniendo de manifiesto que la primera medida de popularización de las Matemáticas consiste en que dejen de ser impopulares. Por esta razón, y creemos que es una buena forma de concluir, queremos poner especial énfasis en los libros de texto. Si hemos hablado de que la prensa, escrita o hablada, entra en todos los hogares y que, por tanto, es un medio excelente de popularización, no olvidemos que los libros de texto entran todos los años en casi todas las familias y que son el primer contacto con las Matemáticas de cualquier ciudadano. Piénsese que, antes de saber quién será el/la profesor/a, durante unos días los alumnos están observando su nuevo texto y presentándose mil interrogantes acerca de su futuro con él. No estaría nada mal si se incluyese en ellos, de modo generalizado y sistemático, esos comics, esos materiales manipulativos de los que hemos hablado (juegos de tablero, dianas, peonzas, dados, barajas de cartas, troqueles, recortables, etc.), esos recortes de prensa sobre los que se trabajen problemas reales ... venciendo, si es necesario, las trabas administrativas existentes. En suma, que sean más atractivos que los demás y, sobre todo, que el alumno pueda experimentar durante esos días a los que antes aludíamos que él sólo puede comenzar una bella e interesante excursión por el mundo de las Matemáticas.

Una reflexión final. Colaboremos con distintos organismos para que todo lo aquí expuesto sea, realmente, para todos. Hay ciudadanos ciegos, sordos, con problemas de adaptación a esta sociedad, ... Creemos que la popularización de las Matemáticas debe llegar también a ellos.

4. ANEXO

Estas páginas están dedicadas a la exposición, de modo unificado, de diferetes acciones de popularización llevadas a cabo en España. Presentamos el modelo general de ficha sobre el que se han redactado las fichas numeradas que siguen. La numeración secorresponde con la indicada en el epígrafe 2 del documento.

Modelo de ficha

1. TITULO DE LA EXPERIENCIA:
2. AUTOR(ES) RESPONSABLE(S):
3. LUGAR Y FECHA(S) DE CELEBRACION:
4. SECTORES A LOS QUE IDO (VA) DIRIGIDA:
5. OBJETIVOS A ALCANZAR:
6. DESCRIPCION SUCINTA DE LA ACTIVIDAD Y METODOLOGÍA EMPLEADA:
7. MEDIOS Y RECURSOS UTILIZADOS:
8. ANÁLISIS Y VALORACIÓN:
9. OTROS ASPECTOS A DESTACAR:
10. VIABILIDAD RAZONADA, DE REPETICIÓN EN AÑOS SUCESIVOS:

Ficha nº 1

1.- Olimpiada de Matemáticas

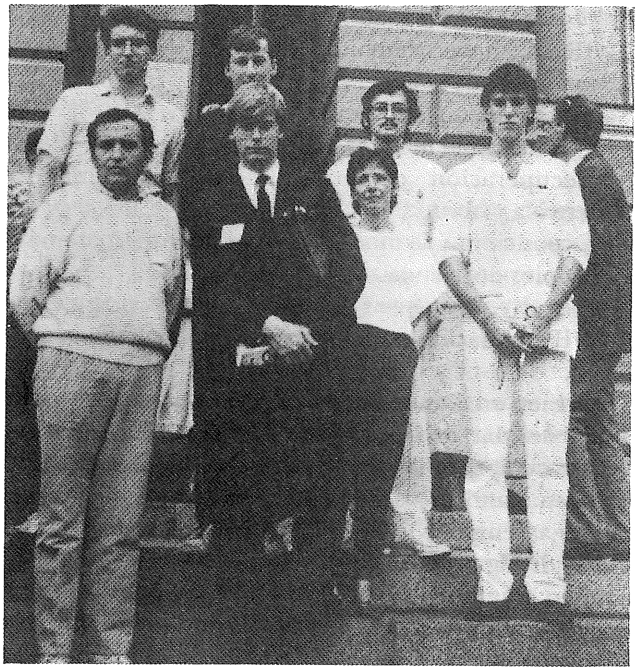
2.- Real Sociedad Matemática Española (RSME).

3.- Su celebración es anual, con dos fases. La primera se realiza en las Capitales de Distrito Universitario durante el primer trimestre del curso. La segunda fase se realiza en Madrid durante el segundo trimestre del curso académico.

4.- Alumnos del Curso de Orientación Universitaria (COU).

Suele ponerse un especial énfasis con los alumnos de COU que piensan seguir estudios de la Licenciatura de Ciencias Matemáticas.

5.- En su creación tuvieron como objetivo el premiar a los alumnos de COU (antes fue a los de Preuniversitario) especialmente dotados para las Matemáticas, a fin de promover las vocaciones de estudios matemáticos. Actualmente se utilizan como medio para seleccionar a los componentes del equipo español que posteriormente ha de participar en las Olimpiadas Matemáticas Internacionales (OMI) y en las Olimpiadas Iberoamericanas de Matemáticas (OIM). Ambas competiciones internacionales se celebran anualmente.



IMO 85. Joutsa. De izquierda a derecha y de arriba abajo: Ricardo Pérez, Pablo Ledien, Ignacio Garrijo, Juan Aguarón (Componentes del Equipo Español), Ceferino Ruiz (Jefe Delegación Española), Jukka Piirto (Guía Delegacio Española), María Gaspar (Jefa Adjunta).

6.- Estas competiciones se crearon en diciembre de 1963, realizándose la "I Olimpiada Matemática" en España, en julio de 1964. Desde entonces continúan celebrándose con la misma estructura. Constan de una primera fase a nivel de Distrito Universitario (esta distribución territorial quedará previsiblemente modificada como consecuencia de una reciente modificación de la estructura orgánica de la RSME), la cual consiste en la resolución de unos ocho problemas; su organización está encomendada al Vicepresidente de la RSME de dicho Distrito quien, con un jurado que él mismo designa, puede proponer problemas independientemente de los otros Distritos, o bien, puede proponer los mismos que en el Distrito de Madrid, teniendo que coincidir, este último caso, las fechas de celebración. La participación en esta primera fase es abierta, sin otra restricción para los participantes que la de ser alumno del COU. En ella se seleccionan tres estudiantes que, como premio, ya han obtenido una Beca (poco cuantiosa en la actualidad) para estudiar Matemáticas, aparte de la posibilidad de participar en la segunda fase.

La segunda fase, que se celebra en Madrid, a nivel estatal, es juzgada por un tribunal designado por la RSME y consiste en la resolución de ocho problemas; la participación está limitada a los tres alumnos de COU mejor clasificados en cada Distrito Universitario. Los tres alumnos mejor clasificados reciben un pequeño premio en metálico, y ellos junto con los siguientes constituyen la fuente o "cantera" para la formación del equipo de en nombre de España participará en las siguientes OMI y OIM.

Las dos olimpiadas internacionales citadas, en las que participa España desde 1983, tienen una estructura similar entre si. Consisten en la resolución individual de problemas en dos sesiones de unas cuatro horas y media; los problemas o ejercicios son propuestos por los países participantes y seleccionados por los Jefes de las delegaciones de dichos países, los cuales constituyen el Jurado Internacional de la competición. La corrección de los ejercicios la realizan entre el jefe de la propia delegación del concursante y un adjunto del mismo país. La calificación es asignada por acuerdo entre el jefe de la delegación y un equipo de coordinación del problema calificado, el cual tiene como misión el velar escrupulosamente por la corrección de las calificaciones otorgadas. Este mecanismo de corrección y calificación algo complejo, sobrevive a diversas propuestas de modificación que han surgido en los últimos años con el aumento de los países participantes.

La OMI goza de la protección del ICMI, mientras que la OIM está patrocinada por la OEI.

7.- Los medios utilizados son los que las Universidades, en la primera fase, y el CSIC, en la segunda, ponen a disposición de los tribunales correspondientes (aulas, anuncios, papel, etc.). Los recursos, esencialmente para los premios, provienen del Ministerio de Educación y Ciencia (MEC), a través de la Dirección General que, en cada momento, se ocupa u ocupó de administrar las becas de régimen general.

8.- En primer lugar hay que resaltar la poca difusión que tienen estas olimpiadas, aún dentro del propio sistema educativo. De una parte habría que incentivar la realización de competiciones matemáticas a nivel de centro, localidad, provincia o comunidad autónoma, como ya se viene haciendo en algunos de ellos de manera exitosa; por otra parte habría que desterrar la innecesaria tradición de que sólo concurran alumnos de COU y la nefasta idea de que sólo interesa a los futuros estudiantes de Matemáticas, pues la experiencia demuestra que los mejor clasificados en las OMI o en las OIM no siempre siguen estos estudios ni están en el curso que antecede a la Universidad.

Sería muy beneficioso difundir entre la sociedad este tipo de acontecimientos, comenzando con implicar y comprometer al propio Profesorado de Matemáticas, con el que habría que contar para la preparación y seguimiento de los alumnos participantes.

La participación en esta competición suele ser muy positiva para los alumnos, los cuales tienen pocas posibilidades de contrastar sus propias cualidades para el quehacer matemático.

9.- Es necesario destacar dos aspectos de futuro. El primero consiste en que nuestro país, a través del MEC, ha de decidir si se desea continuar o no participando en las Olimpiadas de carácter internacional; en caso afirmativo, ha de poner a disposición de los organizadores los medios y recursos necesarios para que se puedan programar actividades de preparación (entrenamiento) adecuadas a los participantes en tales eventos, de modo que su actuación sea, cuando menos, digna.

En segundo lugar, sería conveniente organizar la Olimpiada Matemática, a nivel del Estado Español, en colaboración con la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, ya que ésta, por su estructura y composición, se halla próxima y sintoniza con los Profesores de Matemáticas de los niveles no universitarios, contando, además, con una organización federativa acorde con el organigrama educativo que, tiene el Estado de las Autonomías. Quizás esta estructura autonómica debería trasladarse también a la propia competición.

10.- El propio MEC, a través de las disposiciones publicadas sobre la participación de España en las Olimpiadas de carácter internacional, garantiza la repetición de esta Olimpiada en años sucesivos.

Ficha nº 2

1.- Olimpiada Matemática "Thales".

2.- Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales".

Finalistas, acompañados por sus profesores y organizadores de las Olimpiadas "Thales", en El Rocío (Huelva). Curso 1987-1988

3.- En toda la Comunidad Autónoma Andaluza. Cuenta con dos fases, la provincial y la final. Es una actividad cuya duración es, prácticamente, la del curso escolar.

4.- Alumnos de 8º de Enseñanza General Básica.

5.- El objetivo prioritario consiste en fomentar el gusto por la resolución de problemas de contenido matemático dentro de una actividad placentera para los alumnos.

6.- Es un certamen en el que se proponen 8 problemas. Se establecen dos fases, una provincial y otra final en la que participan los 5 primeros clasificados en cada provincia.

El inicio de la actividad se realiza enviando publicidad a la prensa y a los centros de enseñanza de Andalucía. La realización va acompañada de diferentes actividades paralelas: visitas a monumentos y lugares de interés, degustaciones de productos típicos, teatro, conciertos, etc.

Las fases finales reunen a los seleccionados durante una semana, junto con sus profesores, en lugares como "El Rocio", en Huelva, o como Sierra Nevada, en Granada, en la que los alumnos tuvieron la oportunidad de intentar el aprendizaje del sky con los monitores de la estación invernal. La próxima se celebrará en Carboneras, en Almería.

7.- La actividad se realiza por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales" con la colaboración de entidades públicas y privadas.

8.- Hasta la fecha actual se han celebrado 4 Olimpiadas. La media de participación es de 4000 alumnos.

Cabe destacar la aceptación plena del profesorado andaluz de matemáticas.

La fase final alcanza situaciones muy ricas de contacto humano entre los participantes.

9.- Se observa la necesidad de que la Administración Educativa reconozca a efectos laborales la dedicación de unas horas semanales de los coordinadores provinciales de la Olimpíada a su organización.

10.- Queda demostrada su viavilidad con los años que lleva de realización.

Ficha nº 3

1.- Torneo de Matemáticas

2.- Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "Isaac Newton"

3.- Se celebra en las diferentes islas del Archipiélago Canario durante el curso escolar.

4.- Alumnos de 8º de Enseñanza General Básica

5.- Crear un clima grato en el los escolares y que vivan las Matemáticas durante todo el curso.

Orientar a los profesores acerca de la resolución de problemas.

Estimular a profesores y alumnos para que, con su participación, mejoren su práctica diaria.

6.- A finales de Enero se envían las bases de la actividad a todos los centros de E.G.B. de la Comunidad Canaria. Cada colegio inscribe en el torneo un determinado número de alumnos de 8º según el total de matriculados en ese nivel. Se hace una primera fase que permite elegir entre los tres ejercicios más completos a los que pasarán a realizar la fase final. En cada una de las dos fases, el alumno debe resolver los problemas que se proponen.

7.- El medio insular en que se desarrolla la actividad exige la amplia disposición de medios de todo tipo. Se cuenta con la colaboración de la Caja de Ahorros de Canarias y con la Consejería de Educación del Gobierno Autónomo.

8.- La actividad ha logrado calar en los centros. Se ha constatado un aumento progresivo en la participación cada año.

9.- Actualmente, la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas se está cuestionando el complementar los ejercicios, realizados hasta ahora de modo individual, con otras actividades de grupo o, inclusive, individuales.

10.- El hecho de haber realizado ya cinco torneos de este tipo hace pensar que su futuro está consolidado.

Ficha nº 4

1.- I Olimpiada matemática en E.G.B. Zaragoza.

2.- Hay una Comisión Organizadora compuesta por las siguientes personas: José L. Viviente, Emilio Palacián, M. Pilar Alfaro, Jesús Antolín, Manuel Armengold, Julio Sancho, Fernando Corbalán y José M. Gairín.

3.- Zaragoza. Mayo de 1989.

4.- Alumnos de 8º curso de E.G.B. de colegios públicos o privados de la provincia de Zaragoza.

5.- Estimular el trabajo en Matemáticas. Fomentar el desarrollo del ingenio.

6.- Se envía información a los centros escolares que son los que hacen la selección e inscripción de los alumnos. Se celebra una prueba semifinal simultánea en Zaragoza capital y en 5 cabeceras de comarca. Posteriormente se celebra una fase final en Zaragoza capital.

Todos los alumnos participantes reciben un obsequio, y hay 10 premios iguales para los trabajos más interesantes realizados en la fase final.

Los jurados intervinientes son profesores de 8º curso de E.G.B.

7.- Los medios humanos empleados se conforman con los miembros de la Comisión Organizadora, nombrados anteriormente, y la generosa colaboración de los profesores de E.G.B. que forman parte del jurado y participan en tareas logísticas. Todos los medios materiales los proporciona el Banco Zaragozano.

8.- Teniendo en cuenta que era una actividad novedosa en esta provincia y a pesar de la precipitación de la convocatoria, han sido casi 800 los alumnos inscritos. Tanto la participación, como la organización y la filosofía de la Olimpiada han sido muy bien acogidos por los alumnos y gran parte del profesorado.

9.- Se ha tratado de paliar todo lo posible los aspectos competitivos que suelen llevar implícitos este tipo de actividad.

El tipo de pruebas que se han propuesto han ido más en busca del ingenio que de los conocimientos adquiridos a través del sistema educativo.

10.- Para años sucesivos tanto la Comisión Organizadora como el Banco Zaragozano están dispuestos a que la Olimpiada se organice para los alumnos de toda la región aragonesa.

Ficha nº 5

1.- Las matemáticas también divierten.

2.- Isabel Casas Aznar, Antonio López López, Ignacio Requena Ramos, Pilar Sandoval Sierra (miembros del Seminario de Matemáticas del I.B. "Pedro Antonio de Alarcón" de Guadix (Granada) en el curso 1984-85).

3.- Esta actividad se inició en el I.B. "Pedro Antonio de Alarcón" de Guadix (Granada) durante el cuso 1984-85. En ese curso fue convocada dos veces, una antes de Navidad y la otra antes de Semana Santa. Posteriormente se ha convocado, hasta el curso 1987-88, una vez al año, a la vez que se ha ampliado su convocatoria para pasar a ser una actividad de tipo comarcal.

4.– Inicialmente estaba pensada como una actividad a realizar por los alumnos del I.B. "Pedro Antonio de Alarcón" y, en consecuencia, a alumnos de bachillerato y C.O.U. Posteriormente, utilizando un Seminario Permanente Internivel quedó abierta la participación a todos los estudiantes de la comarca de Guadix (Granada), que cuenta con centros de E.G.B., F.P., B.U.P. y C.O.U.

5.- Se trata de un concurso que, en cada convocatoria, consistió en retar a los alumnos a que resolvieran seis cuestiones de ingenio, premiando las soluciones correctas y más ingeniosas dadas a cada cuestión. Los premios otorgados consistieron en libros de Matemática Recreativa, Ciencia Ficción, u otros, así como en juegos y artilugios ingeniosos.

Las reglas de juego en las dos primeras convocatorias fueron:

1) Pueden participar en el juego todos los alumnos del Centro.

2) El Seminario de Matemáticas entregará un premio a la respuesta más correcta. Puede ser desde subir un punto en la evaluación, hasta regalar un libro ameno.

3) Hay dos niveles de premios: Para 1º y 2º BUP será suficiente que resuelvan las 4 primeras cuestiones. Para 3º y COU tendrán que resolver todas las cuestiones.

4) Como habrá más descubridores que premios disponibles, se sortearán los premios disponibles entre los descubridores. Habrá un premio especial a las soluciones más originales.

5) Los "Profes" también pueden participar, pero sin derecho a premio.

6) Otra forma de participar es que entreguéis cuestiones imaginadas por vosotros, que puedan utilizarse en las próximas ediciones de "Las Matemáticas también divierten". Cada cuestión aceptada y publicada será recompensada con un premio; para ello deberán ser, en la medida de lo posible, originales y desconocidas.

7) Las soluciones deberán ser personales. No serán válidas las soluciones no obtenidas por uno mismo.

Al extender el concurso a nivel comarcal se modificaron las bases para dar cabida a estudiantes de F.P. y E.G.B., aunque manteniendo el espíritu lúdico de este juego.

7.- En las primeras fases del concurso se utilizó la infraestructura de Centro y los recursos propios del Seminario de Matemáticas. Con la ampliación a nivel comarcal se utilizó la estructura del CEP y la colaboración de una emisora de radio, que incluía determinadas cuñas radiofónicas, la cual cubre toda la comarca.

8.- La actividad ha sido muy beneficiosa para los participantes, cuyo número ha ido en aumento sucesivamente. Pero lo más beneficioso de este concurso es que ha modificado la árida imagen que las Matemáticas tenían, entre Profesores y Alumnos, en el Centro, realizando así una función popularizadora y divulgadora.

9.- Es de destacar el impacto social que ha tenido la difusión de esta actividad, rompiendo, un poco, con la imagen y esquemas tradicionales de unas matemáticas como un ente árido, hermético, obsoleto, aburrido, etc.

Quién desee conocer cómo fueron las cuestiones propuestas en las 2 primeras convocatorias puede encontrarlas en la revista Epsilon, núm. 6/7, págs. 113-116.

10.- Dado que esta actividad está sustentada por el "voluntarismo" de un grupo de Profesores de Matemáticas, las modificaciones surgidas últimamente en la composición de dicho grupo, como sonsecuencia de traslados, comisiones de servicio, liberaciones, etc., no está garantizada la continuidad en años sucesivos.

Ficha nº 6

1.- "Pesos y Medidas".

2.- C. Alsina y L. Marquet.

3.- Museo de la Ciencia, Barcelona, 1981-83.

4.- Público general y visitas escolares.

5.- Divulgación de los sistemas metrológicos antiguos, tradicionales y modernos con especial atención a la cultura catalana.

6.- Cuarenta módulos con elementos audiovisuales y manipulativos.

7.- Medios del Museo de la Ciencia y circuito de itineración de la Caja de Pensiones.

8.- La exposición intineró durante 2 años por más de treinta poblaciones y estuvo el primer año en el Museo. Tuvo gran acogida popular y escolar. Se desarrollaron veinte conferencias de presentación.

9.- "Pesos y Medidas" y guía para visitas.

10.- El tema es susceptible de general muchas exposiciones con énfasis en la metrología tradicional de la zona. La actual propuesta de "Medidas Españolas Tradicionales" elaborada por C. Alsina para el M.E.C. va en esta línea.

Ficha nº 7

1.- "Breve viaje al mundo de las Matemáticas"

2.- C. Azcárate, C. Perelló, J. Roura y otros.

3.- Museo de la Ciencia de Barcelona.
En la Casa de la Ciencia de La Coruña está en la actualidad parte de la exposición.

4.- Al público en general y, de modo particular, a alumnos y profesores de Matemáticas.

5.- Popularización de las Matemáticas

6.- Se trata de una exposición itinerante generada en el Museo de la Ciencia de Barcelona sobre una idea de S. Sadovsky. Existía un libro de la exposición, una guía didáctica y se ofrecían 40 módulos manipulativos en diversos temas (numeración, geometría, grafos, combinatoria, probabilidad, funciones, etc.).
Se acomapañaba la exposición de un ciclo de conferencias que impartieron C. Alsina, A. Dou, C. Perelló, C. Sañó y E. Trillas.

Ficha nº 8

1.- "Tiempo y relojes".

2.- J. Farré. Texto módulos: C. Alsina.

3.- Museo de la Ciencia (Barcelona), 1985.

4.- Público general y visitas escolares.

5.- Viaje por el mundo de la medida del tiempo.

6.- Cuarenta módulos con especial relieve a los relojes.

7.- Medios del Museo de la Ciencia y circuito de itineración de la Caja de Pensiones.

8.- La exposición itineró durante 2 años por más de treinta poblaciones y estuvo el primer año en el Museo. Tuvo gran acogida popular y escolar. Se desarrollaron veinte conferencias de presentación.

9.- Existe el libro "Tiempo y relojes" y guía para visitas.

10.- La exposición sería repetible.

Ficha nº 9

1.- "Fascinante Simetría".

2.- C. Alsina y J. Mª Fortuny.

3.- Museo de la Ciencia (Barcelona), 1988.

4.- Público general y visitas escolares.

5.- Visión interdisciplinaria del mundo de la simetría en sus aspectos geométricos, ciencias naturales, física, química, cristalografía, artes, etc.

6.- Veinte módulos manipulativos.

7.- Medios del Museo de la Ciencia y circuito de itineración de la Caja de Pensiones.

8.- Después de un año en el Museo la exposición itinera, celebrando, en algunos casos, conferencias de presentación.

9.- Existe el libro "Fascinante Simetría" y guía para visitas.

10.- La exposición puede itinerar. Podrían darse versiones con énfasis local en los aspectos artísticos.

Ficha nº 10

1.- Exposición "Arqüitecturas y espacio de la Geometría"

2.- Grupo Cero de Valencia

3.- Itinerante por diferentes colegios de la Comunidad Autónoma Valenciana. Curso 86-87

4.- Está dirigida a profesores y alumnos.

5.- Provocar la realización de actividades en los centros a raiz de su paso por ellos.

6.- Se trata de una exposición-taller de carácter manipulativo y activo. La organizaron los Centros de Profesores de Burjasot, Torrent y Valencia. Parte de los módulos que se exponían eran independientes y constituían bloque monográficos: mosaicos, figuras imposibles, etc. que servían como exposiciones particulaes que se prestaban a los colegios que lo solicitaban.

8.- Participaron en ella alrededor de unos 10000 alumnos y 500 profesores.

Ficha nº 11

1.- Jornadas organizadas por la Sociedad Castellonença de Matemàtiques, (4 ediciones).

4.- Participaron los sociosde la S.C.M., aunque se desea interesar al público en general.

5.- Recuperar a los matemáticos y matemáticas locales Estimular la actividad matemática. Recontextualizar ciertos problemas y aprovechar el contexto para otros. Jugar, divertirse, aprender, informarse.

6.- Conferencias sobre personajes: (Euler, Taylor, Fausto Vallés i Vega). Conferencias sobre distintas épocas: (Revolución Científica). Conferencias sobre acontecimientos: (Determinación del Meridiano de Greenwich).

Aparatos utilizados a lo largo de la Historia para observar el cielo, medir distancias astronómicas y el tiempo. Materiales didácticos clásicos. Materiales de uso común.

Cursillos solicitados por los socios.

7.- Conferencias. Cursillos. Talleres-Exposición: Aparatos antiguos, materiales didácticos tradicionales, materiales didácticos en fase de experimentación, materiales de uso común...

8.- En las conferencias la participación es escasa. En los cursillos la asistencia es regular (sobre todo profesores). En las exposiciones-taller la asisencia es masiva.

La construcción de modelos y materiales didácticos presenta problemas económicos y temporales.

Ficha nº 12

1.- Ciencia Recreativa

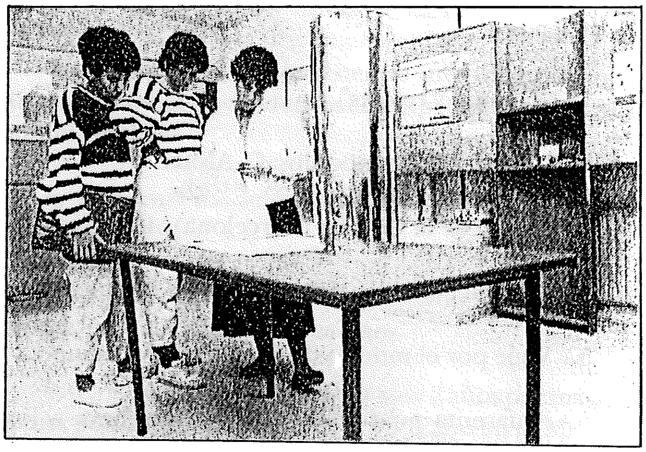
2.- Francisco Javier Paredes Rivadalla. Profesor de Formación Profesional. Carlos del Valle Suárez. Profesor de Dibujo. Luis Carlos Cachafeiro Chamosa. Profesor de Matemáticas

3.- Exposición itinerante.

4.- La exposición va dirigida al público en general, aunque los alumnos de E.G.B., F.P. y, en particular, B.U.P. son los que más provecho pueden sacar de ella. Los profesores con sus alumnos pueden aprovechar algo más que el resto de los visitantes.

5.- Ver una posibilidad de atraer a alumnos voluntáriamente a la Ciencia. Trabajar en grupo creando materiales, con alumnos y profesores, de forma interdisciplinar. Exponer al resto de la sociedad las actividades realizadas. Pasarlo bien.

6.- Con un grupo de alumnos y profesores del Instituto "María Saliño" de Cangas de Morrazo, Pontevedra, se realizaron diversas experiencias como actividades extraescolares. Giraron en torno a la **Percepción**. El enfoque fue interdisciplinar. De estos trabajos salió una exposición itinerante.



EL ESPEJO CILINDRICO. ¿Son rectas las rectas? Nuestros guías en la visita a la exposición nos indican que, puesto que la retina es bidimensiotal y curva, en el ojo no hay rectas. Son determinados mecanismos perceptivos los que permiten transformar esa bidimensionalidad en las imágenes tridimensionales, y ciertas curvas en rectas. Para ilustrar esto nos proponen la experiencia del espejo cilíndrico. Frente a él, una regla de madera y dos cartulinas. En una de éstas hay dibujado un cubo; en la otra, una figura irregular como la que se puede observar en la foto. Pues bien, la regla reflejada en el cubo tomará la forma de un arco; el cubo se reflejará como una figura irregular, mientras la figura irregular de la otra cartulina nos proporcionará la imagen reflejada de un cubo.

7.- Se utilizaron materiales de laboratorio, bibliografía sobre el tema, materiales de ferretería y una estructura para exponer realizada por el grupo.

8.- Hay unas características muy positivas y prácticamente ignoradas por el profesorado: Actuación y temática interdisciplinar y novedosa (los profesores aprendieron durante su trabajo junto con sus alumnos). La existencia de un grupo con intereses y puntos de partida diversos potención mucho el trabajo y el interés de los individuos. Mostrar al público, en general, las actividades realizadas.

9.- Crítica: Se llevó "poco" al aula. Menos de lo que se podía, aunque más de lo que en un principio se creía.

10.- La exposición es, actualmente, una realidad. Creemos que puede ser ampliada.

Ficha nº 13

1.- Exposición Itinerante "Horizontes Matemáticos"

2.- La autoría es francesa (La Villette, París). Los responsables a su paso por España son las Sociedades de Profesores de Matemáticas y los Formadores de Formadores y Responsables de Area en las organizaciones locales. La gestión global de la exposición corresponde a la Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas.

3.- Pamplona, Tudela, Zaragoza, Villarrobledo, Albacete, Madrid, Jaén, Córdoba, Sevilla, Cádiz, Málaga, Granada, Huelva, Almería, Salamanca y Calahora (Rioja) durante el curso 88-89.

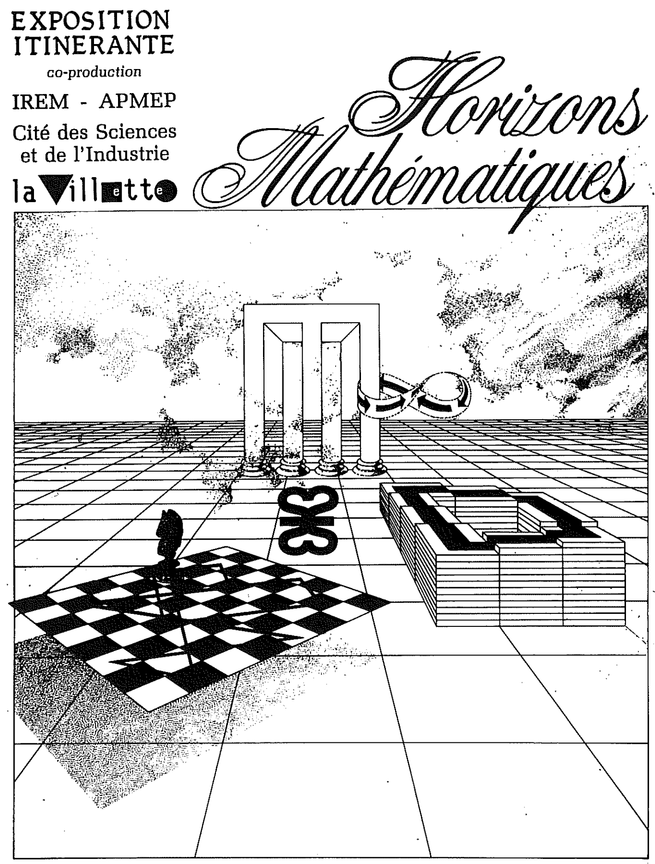
Canarias, Baleares, Burgos, Valladolid, Murcia, Ciudad Real, Coruña, Santiago, Avilés, Castellón, Huesca, San Sebastián y Bilbao durante los cursos 89-90 y 90-91.

4.- Alumnos a partir de 7º de EGB, profesores de matemáticas y público en general.

5.- Pedagógicos: Difusión de un material para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.

Institucionales: Provocar euniones y discusiones entre productores de materiales, profesores y demás personas relacionadas con el mundo de la educación.

Publicitarias: Dar una imagen difernte de las Matemáticas.



Culturales: Situar al público en posición interactiva con la Ciencia.

6.- Se trata de 10 kioscos que tocon diferentes temas de las Matemáticas. En cada uno de ellos hay una presentación de un problema y se cuenta con materiales manipulativos que provocan la reflexión sobre el mismo.

7.- La exposición circula por España una vez que ha sido alquilada a sus propietarios. En cada lugar en donde se expone hay un grupo encargado de gestionarla (normalmente son Sociedades de Profesores o Centros de Profesores).

8.- Hasta el momento, han visitado la exposición una media de 3000 alumnos y 1500 no escolares en cada ciudad del recorrido.

El público se ha interesado "vívamente" por una exposición de "matemáticas" y ha entrado de lleno en el juego de las actividades que se proponen. La valoración es muy positiva.

Fichas nº 14

1.- Exposición sobre "Objetos y formas matemáticas".

2.- Los componentes del Grupo Gauss: Luis F. Andrés, Antonio Berhæoe, Mariano J. Domeinguez, Mª Teresa García, Nicolás Hernández, Bonifacio Pedraz, José del Río y Concepción Vázquez de Aldana.

3.- La exposición se monta principalmente a lo largo del curso 87-88 aunque ha ido enriqueciéndose a lo largo del curso 88-89.

Se ha presentado por tres veces diferentes en Salamanca capital y también en los EEPs de Bejar, Ciudad Rodrigo, Vitigudino, Murcia, Benavente, Arenas de San Pedro y Medina del Campo. Igualmente se ha trabajado con ella en diversos colegios.

4. Para los alumnos a partir del Ciclo Medio de EGB y para el Profesorado.

5.- Sugerir ideas para el aula y aproximar las formas geométricas al mundo de la enseñanza.

6.- Se trata de una exposicion con materiales muy simples, fundamentalmente cartulina, plástico y madera.

7.- Los medios del CEP de Salamanca. Todo está realizado por el profesorado del Grupo GAUSS.

8.- Puede qudar valorada por los numerosos lugares que ha visitado. En la mayor parte de ellos se ha trabajado con profesores y alumnos.

9.- Puede seguir utilizándose en el futuro tanto en los CEPs, como en los centros.

Ficha nº 15

1.- Concurso.– "Matemáticas y Fotografía".

2.- Evaristo González González.

3.- Granada: C.P. "Sierra Nevada", año 1987, 1988.
Granada: Nivel Provincial, curso 1988-89.
Granada: Nivel Regional, curso 1988-89.

4.- Los concursos celebrados hasta el momento han ido dirigidos a alumnos de E.G.B. del ciclo superior y quinto nivel.

5.- Poner al alumno en contacto con una actividad interdisciplinar en la que se relacionan la expresión artística, las matemáticas, lo social, el arte y la literatura.

Fomentar en el alumno la capacidad de observación y abstracción.

Identificar conceptos matemáticos en la realidad.

El que los alumnos hagan un estudio global de los pueblos de su Provincia o Región desde el punto de vista de sus monumentos artísticos, arquitectura popular, aspecos socioculturales, costumbres...

Relacionar la matemática con la realidad.

6.- La actividad consiste en un concurso de fotografía. Los alumnos deben presentar fotografías en las que aparezcan conceptos o nociones matemáticas. Estos deben quedar reflejados en el LEMA de pié de foto.

La actividad la hemos llevado a cabo de dos formas diferentes:

1ª De forma presencial, con alumnos de un colegio.

2ª De forma no presencial, con alumnos de los centros de la Provincia.

En la modalidad primera se convoca el concurso para uno o varios colegios; la edad de participación es de diez a catorce años.

Se les dan las bases del concurso en las que se contempla: el pueblo a visitar, día de la visita, coste de la actividad, material que se entrega a cada uno de los alumnos, (este material consiste en: plano del pueblo, carrete, revelado de dicho carrete, copias 10x15 de cada uno de los negativos, tres o más ampliaciones elegidas por ellos una vez vistas las fotos, desplazamiento al pueblo donde se realiza la actividad) así como los apartados normales para cualquier concurso.

Con los alumnos que deciden presentarse al concurso realizamos unas reuniones previas al día de la actividad, en ellas se les enseña el manejo de la cámara a aquellos que no la dominan, así como algunas técnicas elementales sobre fotografía: encuadre, luminosidad, etc. También se hace una relación del tipo de carrete que utilizan con el fin de disponer de material suficiente el día del concurso.

El día que celebramos el concurso recogemos a los alumnos en el colegio, esa mañana se le entrega el carrete con el que debe participar. Una vez que llegamos al pueblo los dejamos en distintos lugares. Cada grupo tiene autonomía para desplazarse por él durante todo el día. Sólo tienen una o dos citas en un lugar, y hora, determinado del pueblo a las que deben acudir. Por la tarde se regresa al lugar de salida y se les recogen los carretes impresionados. Se llevan al laboratorio donde los revelan y sacan las copias. Se les entregan a los alumnos que seleccionan las que desean presentar al concurso. Las fotos seleccionadas y sus negativos se vuelven a enviar al laboratorio para la obtención de las ampliaciones. Con ellas se monta la exposición en el lugar elegido.

En la segunda modalidad los alumnos hacen las fotos por su cuenta y a nosotros nos mandan las fotos pequeñas y los negativos correspondientes, a éstos les hacemos una ampliación que es la que se presenta al concurso.

En este concurso puede participar cualquier alumno de la provincia de segunda etapa de E.G.B. La cuota de inscripción es gratuita.

7.- Los medios empleados para la realización de la actividad ya están descritos. Los recursos utilizados para poder llevar a cabo la actividad provienen de los propios niños así como de instituciones privadas y públicas que colaboran aportando material y subvenciones.

8.- La actividad ha sido un éxito en cuanto a la cantidad y calidad del material producido, hay que tener en cuenta que se trata de alumnos de diez a catorce años y que la mayoría de ellos es la primera vez que se ponen en contacto con una nueva técnica de expresión como es la fotografía.

El número de alumnos que han participado en la actividad ronda los trescientos, con una producción de aproximadamente quinientas fotografías con sus "lemas" respectivos.

Los lemas de pie de foto recogen la mayoría de los contenidos geométricos y muchos aritméticos propios de su edad. También es de destacar la calidad literaria que aparece en muchos de los lemas que los alumnos ponen a cada fotografía.

9.- La justificación de la posible viabilidad de repetición de esta actividad está en que ya son tres años los que nosotros la hemos repetido con colectivos diferentes.

El problema que se puede presentar es el económico, es interesante que algún organismo público o privado así como el propio colegio ayuden económicamente a la realización de la actividad, esta ayuda nunca debe ser total pues el alumno debe aportar parte del coste con el objeto de que ponga el máximo interés en la realización de la actividad.

Otras posibles formas de llevar a cabo la actividad pueden ser:

a) INTERNIVEL.– Se elige un pueblo concreto y, en días diferentes, realizan la actividad alumnos de E.G.B., B.U.P., F.P. Se monta una exposición conjunta y se analizan los resultados obtenidos por los diferentes colectivos de alumnos, desde el punto de vista matemático y artístico.

b) ALUMNOS DEL PUEBLO-ALUMNOS VISITANTES.– Además del análisis anterior se tiene en cuenta los lugares y motivos más interesantes para cada uno de los grupos.

Ficha nº 16

1.- "Ingenia-telas" con Thales

2.- Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales" en Huelva.

Coordinan: Sixto Romero y José Romero.

3.- Se celebra en Huelva. Emisora de Radio Cadena Española. Todos los viernes del curso.

4.- A los alumnos de 8º de E.G.B. A profesores y público en general.

5.- Respecto de los alumnos: popularizar las matemáticas haciéndolas atractivas y amenas.

Respecto de los profesores: sugerirles medios y métodos de actuación en clase.

Respecto de la sociedad: acercar el "hecho matemático" a la sociedad de forma lúdica.

6.- Se trata de un programa radiofónico emitido por Radio Cadena Española en Huelva. Tiene lugar todos los viernes, durante 1h., desde Noviembre de 1986.

Una unidad móvil se situa en una clase de un colegio (cada semana se cambia) y en la emisora hay otro grupo de alumnos. Se proponen problemas a los alumnos que son resueltos en grupos. Los portavoces de cada grupo son los encargados de transmitir sus soluciones. Mientras llegan a resultados, desde la emisora se cuentan curiosidades, noticias, hechos, etc. de contennido matemático. El público interviene telefónicamente, en directo, ayudando a los escolares cuando no encuentran la solución a los problemas.

7.- La radio.

8.- La valoración de la actividad es altamente positiva. Tiene una gran audiencia y despierta un enorme interés tanto entre los centros escolares como entrew el público en general.

Ficha nº 17

1.- Programas de radio sobre Matemáticas.

2.- C. Alsina.

3.- "La bisagra" (RN1), "Un mundo feliz" (RN3), "Hoy es mañana" (RN4), "Las mañanas de J. Cunit" (Catalunya Radio) en diversas ocasiones desde 1986.

4.- Público en general.

5.- Divulgación de temas tales como "los números", "el azar", "el estudio de las matemáticas", "la poética de la matemática", "anécdotas matemáticas", "matemática y patentes", "las matemáticas y la inteligencia artificial", etc.

6.- Entrevistas y llamadas del público.

7.- Medios radiofónicos.

8.- Es interesante usar un lenguaje divertido y que capte la atención del oyente.

9.- Existe un interés creciente por los aspectos científicos.

10.- Es conveniente que este tipo de intervenciones proliferen.

Ficha nº 18

1.- Dos vídeos titulados: El Geoplano, El Cubo Soma.

2.- Los miembros del Grupo Gauss.

3.- Están a punto de finalizarse en estos momentos.

4.- A los CEPs y al Profesorado en general.

5.- Hacer ver cómo puede servirse el Profesor de determinados materiales, para desde situaciones de juego llegar al aprendizaje con sus alumnos.

6.- Dos vídeos en VHS de 12 a 15' de duración.

7.- Los propios del CEP y una aportación de La Junta de Castilla y León.

Ficha nº 19

1.- Vídeo "Del plano al Espacio".

2.- Javier Carvajal, Francisco Hernán y Angel Salar

3.- Centro de Profesores de Valencia, 1987

4.- Centros de Profesores y Profesores de Matemáticas.

5.- Introducción de algunos aspectos de Geometría, a través del vídeo, en tareas de apoya en la Formación de Profesores.

6.- El video tiene una duración de 23 minutos distribuidos entre los temas: módulos planos, calidoscopios piramidales y retículas espaciales.

7.- El vídeo lo produce la Subdirección General de Formación del Profesorado del Ministerio de Educación y Ciencia.

Ficha nº 20

1.- "17 Sinfonías para una loseta". Visiones matemáticas de la Alhambra.

2.- Rafael Pérez Gómez. Colaboran las personas y centros citados en los puntos 6 y 7.

3.- Granada, 1988.

4.- Mundo de la enseñanza

5.- Poner de manifiesto los diferentes recorridos matemáticos que tiene un monumento, declarado Patrimonio de la Humanidad por la UNESCO, como la Alhambra de Granada.

6.- Se trata de un video en el que:
Se presentan los elementos decorativos de la Alhambra -mosaicos, epigrafía y cúpulas- por la Directora del Museo Nacional de Arte Hispanomusulmán, Prof. Dra. Pura Marinetto.
Se pone de manifiesto que el cuadrado es la base de la Alhambra en la intervención del Prof. Francisco Hernán del Grupo Cero de Valencia.
El Prof. M. Coriat muestra cómo pueden generarse mosaicos por ordenador.
Se exhiben los 17 grupos de Fedorov representados geométricamente en la Alhambra y descubiertos por el autor del video.

7.- Se han utilizado los recursos técnicos del Centro de Recursos del Centro de Profesores de Granada y las instalaciones dde unos estudios de grabación profesionales, Estudios DENA, en Navarra.

8.- La acogida es muy satisfactoria por todos los que lo han visto. Provoca un deseo de investigar aspectos parecidos en el entornos de cada cual.

Ficha nº 21

1.- Difusión de los vídeos "Open University"

2.- Claudi Alsina

3.- Cataluña

4.- Público en general

5.- Popularización de las Matemáticas

6.- Los vídeos de la "Open University" han sido traducidos al catalán y emitidos, reiterádamente, por T.V.3.
La presentación la hizo Claudi Alsina.

7.- Televisión Autonómica

8.- Exito enorme como indican las cifras de audiencia.

Ficha nº 22

1.- "Una lección de matemática corporal".

2.- C. Alsina.

3.- Centro de Torrebonica, Caja de Pensiones, 1987.

4.- Escolares de 6º, 7º y 8º de E.G.B.

5.- Trabajo a través de 20 fichas sobre la geometría y las medidas del cuerpo humano y su interés en diferentes oficios.

6.- El poster y las fichas permiten realizar un taller sobre el tema.

7.- Publicaciones Caja de Pensiones.

8.- La experiencia previa al poster fue realizada por C. Alsina con 13 grupos de 2ª etapa de E.G.B., involucrando a más de 300 escolares. Se valora positivamente incorporar la figura humana al estudio matemático.

9.- El tema puede sugerir trabajos interdisciplinarios.

10.- El poster fichas es utilizable en cualquier clase de 2ª etapa.

Ficha nº 23

1.- "Números y Figuras"

2.- Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "I. Newton"

3.- Comunidad Autónoma Canaria, curso 89-90.

4.- Alumnos, profesores y público general.

5.- Convertir las Matemáticas en un tema de conversación. Dar orientaciones a padres, alumnos y profesores sobre peculiaridades de las Matemáticas. Contribuir a que las Matemáticas sean aceptadas como parte de nuestra cultura. Crear un ambiente positivo alrededor de las Matemáticas.

6.- Se publica en la prensa de la Comunidad Canaria una página quincenalmente, bajo el nombre de "Números y Figuras". Dos columnas van enfocadas para estudiantes (concursos, problemas, curiosidades, orientaciones para el estudio de las Matemáticas, etc.), mientras que el resto, pensado para profesores y lectores, en general, contendrá problemas más complejos, información histórica, puzzles geométricos, instrucciones sobre materiales didácticos, sugerencias para apreciar situaciones relacionadas con las Matemáticas en la vida diaria y "entrevistas" a matemáticos famosos (Pitágoras, Euclides, Newton, ...)

7.- Se hace uso de los suplementos periodísticos.

Ficha nº 24

1.- Publicación de una sección semanal en el suplemento semanal HERALDO ESCOLAR del periódico aragonés Heraldo de Aragón.

ESCOLAR

para resolver

La pequeña historia

Fernando Corbalán
José M. Gairín

Hoy vamos a hablar de la llamada Banda de Moebius. Un concepto matemático que han utilizado los ilusionistas para alguno de sus números, que ha tenido aplicaciones en la industria y que ha inspirado a artistas plásticos.

Para construir la llamada cinta o banda de Moebius tienes que coger una tira de papel y sujetar cada extremo con una mano. Gira una de las manos y sin que se pierda esta posición pega los extremos. Así tendrás una especie de tira retorcida como la de la figura 1.

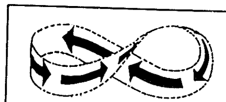


Figura 1

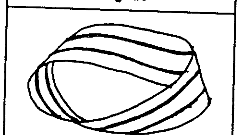


Figura 2

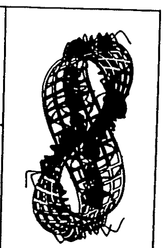


Figura 3

• Desde el punto de vista de las matemáticas, Augustus F. Moebius (1790-1868) observó que tenía la propiedad de ser una superficie que tiene una sola cara y un solo borde. ¿Qué significa esto? Significa que si tú tienes una superficie cualquier, como por ejemplo un folio, y dibujas un punto en cada cara y quieres ir de uno hasta el otro, necesariamente tendrás que atravesar el borde. Sin embargo, en la Banda de Moebius puedes pintar dos puntos cualesquiera y pasar de uno hasta el otro sin atravesar el borde.

• Hay ilusionistas que utilizan otra característica de esta banda en alguno de sus trucos. Al cortar una tira de papel estamos acostumbrados a ver que se obtienen dos mitades separadas. Corta una banda de Moebius por la mitad y verás qué ocurre y por qué la utilizan los ilusionistas. Y si quieres obtener un efecto diferente corta la banda por la tercera parte, por las líneas marcadas en la figura 2.

• En la industria también se utiliza este concepto como por ejemplo para cintas magnetoscópicas, ya que de esta manera se hace la grabación por las dos caras. O en las cintas que transportan materiales, como ocurre en construcción o en la minería, que si se doblan como la Banda de Moebius el resultado será que la cinta transportadora se desgastará igualmente por las dos caras.

• Los artistas han encontrado un buen motivo en la Banda de Moebius, como puedes ver en el grabado en madera del boj de M. Escher (figura 3).

Problemas, problemas, problemas

3.—Iñaki ha visto un juego de ordenador que es una maravilla. Está dispuesto a comprarlo como sea, hasta tal punto que decide vender toda su colección de juegos. Se lo comunica a su amigos, que pronto acuden a buscar juegos a precio de ganga.

Y los juegos que tanto le habían costado coleccionar a Iñaki se distribuyeron de esta forma:

A su amigo Oscar le vende la mitad de sus juegos, más medio juego.

Más tarde aparece Héctor y le vende la tercera parte de los juegos que le quedan, más la tarde parte de un juego.

Yolanda acude a casa de Iñaki y le compra la cuarta parte de los juegos que le quedan más un cuarto de juego.

Después le toca el turno a Rubén, que compra la quinta parte de los juegos que le quedan más la quinta parte de un juego.

David, que no se enteró a tiempo, tan sólo puede llevarse los últimos 11 juegos que le quedaban a Iñaki.

Es claro que los juegos no se pueden partir, ni por la mitad, ni por la tercera, cuarta o quinta parte. Así que para enterarnos de los juegos que se lleva cada uno de sus amigos, hay que resolver la cuestión ¿cuántos juegos tenía Iñaki?

4.—A lo largo de la historia han sido muchos los problemas que se han planteado acerca de la manera de cruzar un río en determinadas condiciones.

• Un pastor lleva un lobo, una cabra y unas coles. Al regresar a su casa encuentra un río caudaloso que tiene que atravesar. No existe ningún puente, pero descubre en la orilla una barca pequeña, tan pequeña que en ella sólo cabe el pastor y el lobo, o el pastor y la cabra, o el pastor y las coles.

Cuando intenta atravesar el río se da cuenta de que no puede hacerlo como quiera, pues si se queda solo el lobo se comerá la cabra. Y si no está el pastor la cabra se comerá las coles.

Estamos seguros de que si tú fueses el pastor sabrían como organizar los viajes en la barca.

Juego de reordenar

Muchas veces has utilizado el papel y el lápiz para jugar en alguno de tus ratos de ocio. Habrás jugado a barcos, el ahorcado, etcétera. Hoy te proponemos un juego para el que es suficiente utilizar papel y lápiz. La mecánica del juego es la siguiente.

1.—Puede participar cualquier número de jugadores.

2.—Se escriben de forma aleatoria, al azar, todos los dígitos de 1 a 9, con lo que se forma un número de nueve cifras.

3.—El objetivo del juego es reordenar de menor a mayor todos los dígitos, es decir, que aparezca el número 123456789.

4.—Solamente se admite un tipo de movimiento: se pueden tomar los dígitos que se quieran empezando por el situado más a la izquierda y colocarlos en orden inverso, quedando los restantes en la misma posición.

Por ejemplo, supongamos que al inicio del juego se ha escrito el número 236748915.

Un posible movimiento es modificar los 4 números de la izquierda (2367)48915. Ahora se colocan en orden inverso 7632 y se mantienen en la misma posición los restantes, de esta manera aparece el número (7632)48915.

Si ahora se modifican los 6 números de la izquierda, (763248)915, se obtiene (842367)915. Y así sucesivamente.

5.—Gana el jugador que consiga llegar al número 123456789 en el menor número de pasos.

Practica el juego con tus compañeros, procurando que se cumplan correctamente las normas que hemos dado, verás cómo resulta entretenido.

Pero para que puedas ganar a tus colegas es necesario que busques el procedimiento para que esto ocurra siempre, es lo que se llama buscar una estrategia ganadora.

Y por si te va la marcha mira a ver si encuentras otras reglas para que el juego resulte más complicado.

Publicación semanal en un suplemento de *El Heraldo de Aragón*

2.- J. M. Gairín Sallán y F. Corbalán Yuste

3.- Zaragoza, Curso escolar 1988-89.

4.- Alumnos de todos los colegios de la región aragonesa, fundamentalmente de edades comprendidas entre 12 y 16 años.

5.- Proponer a los alumnos actividades en torno a los matemáticas, básicamente de tres tipos: problemas de los que se suelen encuadrar como matemática recreativa, investigaciones en torno a temas relacionados con sus conocimientos matemáticos y busqueda de estrategias ganadoras para juegos de reglas. Además, se incluyen anécdotas o aspectos históricos de las matemáticas.

6.- El periódico Heraldo de aragón incluye un suplemento los miércoles dedicado a la enseñanza. Este día se reparten, de forma gratuíta, varios ejemplares a cada uno de los centros escolares de la región aragonesa, los gastos son financiados por una Caja de Ahorros. Por tanto, todos los profesores tienen a su disposición las actividades que se han propuesto para esa semana. Los alumnos pueden enviar las soluciones a la redacción del periódico y reciben algún pequeño obsequio por su trabajo. Las soluciones se publican tres semanas despueés de haberlas propuesto.

7.- Todas las tareas de confección y distribución de ejemplares corre a cargo del periódico.

8.- A pesar de que son cosntantes e intensos los esfuerzos por llevar la prensa a las aulas todavía son pocos los profesores que la utilizan. No obstante sí que se han recibido bastantes trabajos de alumnos en la redacción del periódico y sí que se han recibido sugerencias de varios profesores acerca de las actividades propuestas.

9.- Algunos profesores han indicado que el periódico también les ha proporcionado materiales para alumnos destacados o para hacer propuestas de trabajo fuera del aula.

10.- La experiencia es repetible, de hecho ya está en marcha el diseño de actividades para el curso escolar 89-90.

Ficha nº 25

1.- "Talino el avispado"

2.- Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales" en Cádiz

3.- Cádiz, desde Marzo de 1986

4.- Fundamentalmente está dirigida la actividad a jóvenes, aunque es seguida por el público en general.

5.- Respecto del alumno: ofrecerle unas Matemáticas dinámicas, divertidas y creativas, cuidando la comunicación.

Respecto de la sociedad: acercar el "hecho matemático" a la sociedad y estimular su participación en la educación matemática como parte integrante de la cultura.

6.- Se publica una página en la prensa escrita. "Talino" es un alumno de 8º de EGB, no "empollón, que le divierte "comerse el coco". Se dirige en primera persona a cada lector planteando problemas en la mayoría de los casos propuestos por los propios lectores y que ellos resuelven. Se produce un intercambio de correspondencia abundante y rico entre lectores y redactores.

7.- Diario de Cádiz y Diario de Jerez en los suplementos semanales, que salen los sábados, de T.V.

8.- Experiencia muy positiva. Se recibe una abundantísima correspondencia que se contesta meticulosamente. Se detectan lectores de todas las edades que aportan su visión sobre planteamiento y sdolución de problemas, formas de pensar extremadamente curiosas, preguntas sobre cuestiones de matemáticas, dibujos, etc.

9.- Hay un gran seguimento del público no escolar y una preciosa intercomunicación entre profesores de Matemáticas y Sociedad en general.

10.- Actividad consolidada.

Ficha nº 26

1.- Las matemáticas que no aprendimos.

2.- José M. Gairin y Fernando Corbalán.

3.- Zaragoza. Febrero de 1988.

4.- Lectores del periódico regional aragonés "El Día".

5.- Presentar al público aspectos históricos y anecdóticos de las Matemáticas, acercar al lector a resultados matemáticos y proponer algunas situaciones problemáticas para que participen (o disfruten) haciendo matemáticas.

6.- El periódico "El Día" entregaba los domingos un suplemento, encuadernado en tamaño cuartilla, sobre diferentes temas: economía, historia, medio ambiente, costumbres populares, medicina, poesía, etc.

Las Matemáticas que no aprendimos

Durante dos domingos consecutivos del mes de Febrero de 1988 dichos suplementos se dedicaron a temas de Matemáticas.

El primero tiene tres capítulos: uno da una versión histórica de los sistemas de numeración; otro se dedica a contar algunas curiosidades de la teoría elemental de números y el tercero hace referencia a la resolución de problemas y a proponer algunos ejercicios.

El segundo está dedicado a presentar algunos aspectos de la geometría del plano y del espacio, buscando siempre elementos que puedan ser de interés para todos los posibles lectores del periódico.

7.- Los autores propuesieron a la redacción del periódico que también se mostrase a los lectores aspectos divulgativos de las Matemáticas (y de las ciencias en general). La idea fue bien acogida y los aspectos técnicos de confeccion de los suplementos corrió a cargo del personal del periódico, quedando para los autores la redacción de los originales.

8.- Tan sólo disponemos de la información que nos proporcionó la dirección del periódico, quién señaló que habían sido más los ejemplares vendidos y más las peticiones que recibieron en comparación con anteriores domingos. En ningún momento nos han facilitado cifras de estas apreciaciones.

9.- Hicimos la sugerencia a la dirección del periódico de que los ejemplares sobrantes se distribuyesen de manera gratuita entre colegios que lo solicitasen, y así lo hicieron mientras tuvieron existencias.

10.- Es una situación que escapa de nuestro control, puesto que la política del periódico es variable y los suplementos dominicales han ido sufriendo muchas modificacioens, de contenido y de formato, a lo largo de los últimos meses. Pero sí que es posible repetir alguna experiencia similar, puesto que tanto la dirección como los autores están en disposición de hacerlo.

Ficha nº 27

1.- Colaboraciones periodísticas.

2.- C. Alsina.

3.- "La Vanguardia", "El País", "Avui", "El Periódico", "Muy Interesante",... desde 1985.

4.- Público en general.

5.- Divulgación de temas, biografías o eventos matemáticos.

6.- Artículos breves.

7.- Estilo periodístico.

8.- Interés en temas de actualidad.

9.- Existe auténtica necesidad de que se amplien estas colaboraciones.

10.- Es preciso hacer mucho más en este campo.

Ficha nº 28

1.- Monografía sobre la Alhambra. Revista "EPSILON"

2.- Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales" en Granada. Responsables: Rafael Pérez Gómez y Manuel Vela Torres.

3.- Granada, 1987

4.- Profesores de Matemáticas

5.- Recoger los diferentes trabajos que se venían haciendo sobre las Matemáticas que la decoración de la Alhambra exhibe de modo claro.

Poner de manifiesto que en la Alhambra existen representaciones geométricas de todos y cada uno de los grupos cristalográficos planos descubiertos por Fedorov. Es el mejor ejemplo de la "prehistoria" de la teoría de grupos.

6.- Petición de trabajos a las personas que se conocían por haber mostrado su interés sobre el tema.

7.- La Consejería de Cultura de la Junta de Andalucía, responsable directa del monumento, financió completamente la edición.

8.- Se han recibido múltiples felicitaciones sobre la publicación. Cabe destacar la buena acogida internacional como lo muestran las cartas recibidas en la Dirección desde Europa hasta América.

Se han constituido grupos de trabajo de profesores para estudiar aspectos parecidos a los de la publicación en su entorno próximo.

Hay constancia de que se está introduciendo en el aula el estudio de los mosaicos a partir de las sugerencias allí reseñadas.

Ficha nº 29

1.- Método electoral P.R.I.

2.- Victoriano Ramírez González

3.- Granada, 1985

4.- Lectores del periódico IDEAL de Granada

5.- Dar a conocer, mediante la prensa diaria, un método de reparto de escaños en las elecciones que respeta la proporcionalidad en la asignación de escaños más que el sistema D'Hont.

6.- El autor publicó en la Revista "Epsilon", nos. 6-7, un artículo titulado: Matemáticas Aplicadas a la distribución de escaños. El método electoral P.R.I.

En el trabajo se pone de manifiesto la no proporcionalidad, en sentido estricto, del método D'Hont mientras que el P.R.I. es más, en el sentido de que el P.R.I. tiene un desvio de proporcionalidad menor que el D'Hont. Concretamente los resultados de P.R.I. con intermedios entre D'Honty el método electoral puro; es decir P.R.I. prima a los partidos más votados pero en menor cuantía que D'Hont.

Los conocimientos matemáticos utilizados son los correspondientes a un alumno de B.U.P.

7.- Publicación de un artículo de opinión en el periódico IDEAL de Granada. Documentación obtenida de la Biblioteca del Depto. Derecho Político de la Universidad de Granada.

8.- Muchas personas se han interesado por el conocimiento del método.

10.- Publicar análisis comparativos de aplicar las distintas fórmulas electorales a los resultados obtenidos en cualquier consulta electoral

Ficha nº 30

1.- Proyecto "O'Thales"

2.- Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales" en Sevilla

Responsables: J.A. Suárez Vázquez y J. Núñez Valdés

3.- Sevilla, a lo largo del curso escolar

4.- Alumnos de Enseñanza General Básica, de 2ª etapa, en los colegios de Sevilla, capital y provincia. Se implica al profesorado de dichos centros.

5.- Acercar las Matemáticas a los alumnos de forma amena y lúdica a través del personaje O'Thales.

Facilitar la labor del profesorado suministrándoles información.

6.- Se trata de la publicación de cuatro fascículos bimensuales durante el año escolar. Son elaborados por los coordinadores de la actividad que cubren diferentes secciones: introducción, problemas propuestos, problemas resueltos, ganadores del concurso, historia de las matemáticas, investigación matemática, informática y curiosidades.

8.- La experiencia es totalmente positiva. De cada fascículo se envian 6 ejemplares a 570 colegios. De este modo, el personaje O'Thales llega a unos 100000 alumnos. Se reciben entre 600 y 800 cartas por número publicado.

Se espera la reunión de los profesores de estos colegios para evaluar globalmente la experiencia.

10.- Es una actividad totalmente consolidada.

Ficha nº 31

1.- Publicaciones periódicas de personas ajenas al mundo de las Matemáticas.

2.- Revistas "EPSILON" y "SUMA"

3.- En las revistas citadas, desde 1983.

4.- Profesores de Matemáticas

5.- Poner de manifiesto cómo pueden ser las Matemáticas una herramienta útil en procesos creativos.

Aumentar los recursos culturales, fuera de las Matemáticas, para su uso en las clases de Matemáticas.

Acercar a las Matemáticas a otros profesionales al invitarles a reflexionar sobre ellas en contextos propios de su especialidad.

6.- Se invita a Profesores de Literatura, Latín, Italiano, Filología Románica, Bellas Artes, etc. especialistas en temas como Salvador Dalí, Jorge L. Borges, Educación, Enigmística, Estructura en la Novela, etc. a escribir sobre su especialidad haciendo la lectura matemática.

7.- Invitación del Director de las Revistas

8.- Se han recibido en múltiples felicitaciones por lo interesante de estos trabajos.

9.- Se ha editado un número monográfico de la Revista "EPSILON" sobre la Alhambra de Granada que, por su gran acogida, referenciamos en ficha aparte.

10.- Es evidente con lo dicho anteriormente.

Ficha nº 32

1.- "THALESCOPIO"

2.- Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales" de Cádiz

Responsable: J. Pérez Fernández

3.- Cádiz.

4.- Al sector escolar

5.- Respecto del alumno: ofrecerle una matemática más amena y creativa

Respecto del profesor: ofrecerle un recurso didáctico y extender una forma "menos ortodoxa" de entender su enseñanza.

N.º 3

THALESCOPIO

SEPARATA DE DIVULGACION MATEMATICA DE LA SOCIEDAD ANDALUZA DE PROFESORES DE MATEMATICAS «THALES»

En el primer número de THALESCOPIO indicábamos que esta separata de divulgación matemática tendría dos partes: una primera dedicada a aspectos históricos, metodológicos y didácticos de las Matemáticas; y otra a los llamados «problemas de ingenio».

Los posibles lectores (profesores de EGB y Medias, y alumnos de EGB y Medias) cubrís un abanico muy amplio de inquietudes e intereses. Procuraremos, no obstante, atender las expectativas de todos, ofreciendo para cada uno de los colectivos al menos una pequeña parcela que pueda resultarle útil e interesante.

Hoy vamos a hablar algo sobre las progresiones y los logaritmos. Os proporcionaremos algunas notas históricas que esperamos os resulten atractivas.

EL PRINCIPIO DE LOS LOGARITMOS

El estudio de determinadas sucesiones de potencias enteras de un número dado se remonta a Arquímides de Siracusa (s. III a.C.). La reflexión sobre éstas inició el camino de los logaritmos, por intrincados caminos, que comentaremos.

En la «ARITMETICA INTEGRA» publicada en 1544 por el matemático alemán Miguel Stifel encontramos la comparación entre dos tipos peculiares de sucesiones: las progresiones geométricas y las aritméticas.

Fijémonos en la siguiente sucesión de las potencias enteras del número 2.

$$\ldots \frac{1}{128}, \frac{1}{64}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$$

que como fácilmente observarás se puede también escribir así:

$$\ldots \frac{1}{2^7}, \frac{1}{2^6}, \frac{1}{2^5}, \frac{1}{2^4}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^1}, 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4 \ldots$$

o también:

$\ldots 2^{-7}, 2^{-6}, 2^{-5}, 2^{-4}, 2^{-3}, 2^{-2}, 2^{-1}, 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6 \ldots$

Como sin duda sabrás, si está en 2º de BUP o en FP2, se trata de una progresión geométrica de razón 2.

Consideramos ahora la sucesión formada por los exponentes de la anterior:

... -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,...

que como verás se trata de una progresión aritmética de razón 1.

Construyamos ahora la siguiente tabla:

x	...	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...	11...
a		$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	...	2048...

donde x es el exponente de 2 y a el resultado de la potencia ($2^x = a$).

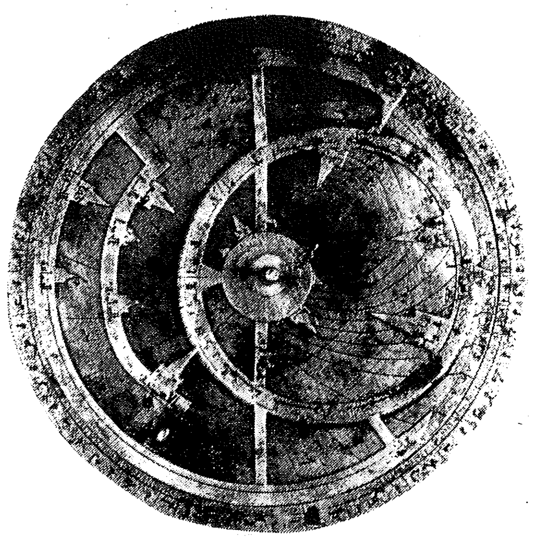
Si quisiéramos efectuar el siguiente producto: 64 . 32, bastaría tener en cuenta que: $64 = 2^6$ y $32 = 2^5$ $\quad 64 . 32 = 2^6 . 2^5 = 2^{11} = 2.048$.

Por tanto Stifel había conseguido una tabla que facilitaba los cálculos. Bastaba buscar los factores en la fila a: 64 y 32 y encontrar el correspondiente valor de x: 6 y 5, sumarlos: 6 + 5 = 11, y mirando nuevamente en la fila a el número correspondiente a x = 11 obtenemos el producto deseado: 2.048.

Stifel era consciente que de esta forma se había conseguido rebajar en un grado las operaciones aritméticas. Había observado que: el producto, la división, la potenciación y la radicación en la sucesión geométrica; se correspondían, respectivamente con: la suma, la diferencia, la multiplicación y la división de la aritmética.

Desde luego, si queremos efectuar 0'03125 . 0'25 . 2 . 512 es más fácil ir a la tabla y efectuar: (-5) + (-2) + 1 + 9 = 3, y leer el resultado del producto que es 8.

Os preguntaréis: ¿qué interés tiene esta sorprendente propiedad? Tanto la Astronomía, como la Navegación, como la Trigonometría, como la complejidad alcanzada ya en el S. XVI por la contabilidad necesaria para el comercio, requerían de enormes y engorrosos cálculos. Se atisbaba, por tanto, un método de abreviarlos y simplificarlos.



6.- Es la publicación de una separata de cuatro páginas, dentro de la Revista de Educación de la Delegación Provincial de Educación en Cádiz, de contenido matemático. Consta de dos partes:

Una dedicada a aspectos metodológicos, históricos y didácticos dirigida al profesor.

Otra sobre problemas de ingenio dirigida especialmente al alumno.

La Revista es bimensual y se reparten, gratuítamente unos 15 ejemplares en cada centro escolar de la provincia.

7.- Se utiliza la existencia de la Revista de Educación antes citada.

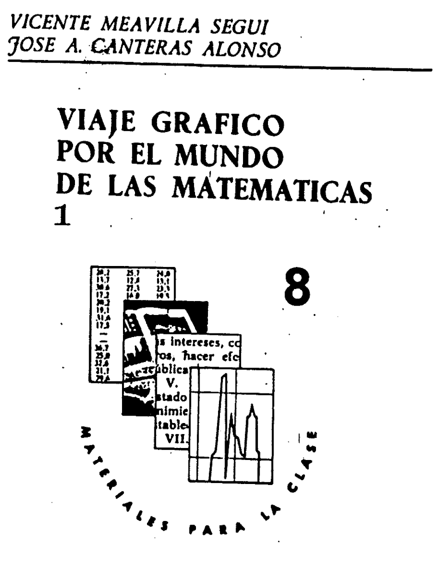
8.- La valoración es positiva por cuanto despierta interés.

9.- Como crítica, cabe dedcir que la larga separación entre cada publicación es negativa porque impide una comunicación fluida entre redactores y lectores.

10.- Hasta el momento no plantea problema su realización.

Ficha nº 33

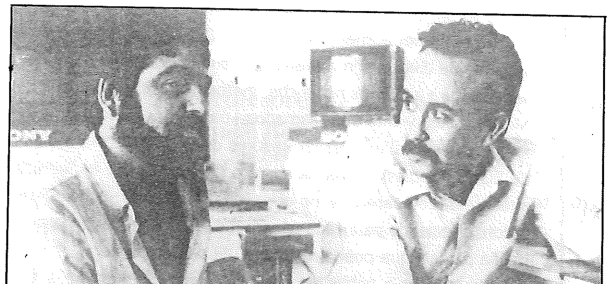
1.- "Viaje gráfico por el mundo de Las Matemáticas" (vols. 1 y 2).



El almeriense, la ilustra y el menorquín la escribe

Canteras y Meavilla siguen con la historia de las matemáticas

Ya son conocidos en el mundo de la educación. El empeño de José Antonio Canteras y Vicente Meavilla por aportar algo nuevo a la enseñanza con la historia de las matemáticas está teniendo sus frutos. Cada día más niños utilizan estos textos que uno escribe y el otro ilustra, para complementar su educación. Uno es de Cuevas del Almanzora y el otro de Menorca. Se conocieron en Teruel y allí nació esta obra.



Canteras y Meavilla

José Antonio Canteras y Vicente Meavilla se han propuesto hacer quince tomos de la historia de las matemáticas.

Hasta el momento ya han realizado los dos primeros y el tercero que estará para salir a finales de este curso que ahora comienza. Ambos son profesores de Enseñanza Media. Canteras, natural de Cuevas del Almanzora da clases en Roquetas de Mar de dibujo. Meavilla nacido en Menorca lo hace en Teruel. Allí fue precisamente donde se conocieron y tras una serie de casualidades comenzaron a trabajar en el proyecto de hacer la primera historia de las matemáticas de una forma comprensible para los niños.

Los dos están convencidos de que la historia la van a acabar.

Su objetivo, según explican ellos mismos es «hacer llegar a los alumnos de BUP y EGB la historia de las matemáticas de una forma más amena. Que no sea con el corte clásico que hasta ahora se ha hecho».

No tienen conocimiento de que se haya realizado una experiencia similar en ningún otro lugar de España «no, en ningún otro sitio de España se ha hecho una experiencia similar para los niños. Con respecto al extranjero no lo sabemos. Sólo podemos decir que el profesor Ubiratan D'Ambrosio se quedó muy impresionado con este trabajo».

Editoriales

Los dos tomos que han salido hasta la fecha han sido subvencionados por el ICE de la Universidad de Zaragoza y por la Diputación de Teruel. Con respecto a si alguna editorial se ha interesado por la publicación de la historia de las matemáticas, dicen que «ha habido algunos contactos con editoriales pero quieren todos los tomos completos y esto es muy difícil».

Los libros que Canteras y Meavilla llevan publicados ya han sido utilizados en algunos centros de EGB y BUP como textos adicionales a los normales del curso. Los resultados, según sus dos artífices han podido saber, «han sido bastante buenos. Donde los han utilizado dicen que a los niños les han interesado y también tenemos noticias de que hay más centros que quieren tenerlos para poder utilizarlos».

El tercer tomo se está preparando de igual forma que el primero y el segundo. Meavilla desde Teruel manda el texto a Canteras en Almería. Este intenta ilustrar los conceptos matemáticos y a su vez devuelve ambos trabajos a Meavilla para que este gestione su publicación. Un trabajo en tres etapas y que según los autores continuarán hasta que puedan «porque una vez que lo ves confeccionado, merece la pena el esfuerzo que se realiza».

La Voz de Almería

2.- Vicente Meavilla Seguí, José Antonio Canteras Alonso.

3.- En esta obra de divulgación matemática prima la imagen sobre el texto.

A grandes rasgos se ofrece una excursión por La Matemática Babilónica, Egipcia y Griega, centrada en las figuras siguientes: Thales, Pitágoras, Zenón, Anaxágoras, Hipócrates, Demócrito e Hipias.

4.- Alumnos de enseñanzas medias.
Profesores de Matemáticas de enseñanzas medias.
Público en general.

5.- En esta obra se pretende acercar a los lectores a la historia de La Matemática (vía "comic").

6.- Edición de la obra. (ICE de la Universidad de Zaragoza. Colección "materiales para la clase", núms. 8 y 10. 1984-85).

7.- Editar un libro de Matemáticas en España es un problema de dificilísima solución. No hay subvenciones. A las editoriales no les resulta rentable.

Ficha nº 34

1.- Butlleti (números del 0 al 5).

2.- Societat Castellonença de Profesores de Matemáticas: a) Personaje (matemáticos y matemáticas universales y locales).
b) Els nostres centres (experiencias en centros docentes).
c) Jocs i càbales (Matemática recreativa).
d) Col. laboracions (sección libre).
e) Correo obert (órgano de información interna de la S.C.M.).
En colaboración de todas las personas interesadas en comunicar su quehacer matemático.

3.- Socios y socias de la S.C.M. y centros de enseñanza provinciales.

4.- Profesores y alumnos.

5.- Dar a conocer, recuperar, a los matemáticos y matemáticas universales y locales. Dar a conocer las Matemáticas locales. Comunicar las experiencias didácticas realizadas en los centros de enseñanza de la provincia. Popularizar pasatiempos matemáticos.

6.- Se trata de la publicación de un boletín.

Ficha nº 35

1.- Club de Matemáticas

2.- Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "I. Newton"

3.- Centro de Profesores de La Laguna. Todos los sábados por la mañana.

4.- Profesores de Matemáticas

5.- Dar a conocer materiales que puedan ser utilizados en las aulas.
Analizar, e incluso crear, juegos desde el punto de vista de su "explotación " en la clase de Matemáticas.

6.- Es un club al que acuden los profesores para informarse o exponer sus avances en cuestiones relacionadas, principalmente, con materiales para la clase de Matemáticas.
Dos profesores se comprometen a estar los sábados en el Centro de Profesores de 10 a 12 de la mañana. La primera hora se dedica a la presentación de un material, y la segunda se atienden consultas.

7.- Se usan materiales y juegos comprados o elaborados por la Sociedad Canaria.

Ficha nº 36

1.- Clubes informáticos

2.- Patrocinados por la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "I. Newton".

3.- Centros escolares, durante el curso.

4.- Alumnos

5.- Orientación de alumnos.
Ampliar sus conocimientos.
Poner en sus manos revistas y bibliografía especializada.

6.- Se efectúa una convocatoria en los centros de enseñanza elegidos para todos aquellos alumnos que "sepan" algo de informática. Con ellos se crea un club en el que se intercambian materiales y se planifican cursos a los compañeros que aún no saben nada sobre informática.
Se fija una reunión semanal de una hora de duración. Se elige a un responsable en cada centro para que durante los recreos se haga cargo de la atención que los compañeros soliciten (discos, revistas, etc.)

7.- Los de los centros elegidos y los de la Sociedad Canaria.

Ficha nº 37

1.- Utilización sistemática de juegos en la clase de Matemáticas.

2.- Zaragoza —capital y pueblos próximos—. Curso escolar 1988-89.

3.- Zaragoza —capital y pueblos próximos—. Curso escolar 1988-89.

4.- A 90 profesores de todos los ciclos de E.G.B., que estuviesen impartiendo matemáticas en el curso 88-89 y a los casi 4.000 alumnos de esos profesores.

5.- Introducir el juego como recurso para la enseñanza de la matemática, buscando un doble objetivo:

—Dar información y formación al profesorado sobre los aspectos didácticos de los juegos educativos, sobre análisis de juegos existentes en el mercado y sobre la construcción y/o modificación de juegos educativos.

—Experimentar con los alumnos la viabilidad y eficacia de los juegos como un recurso didáctico más a emplear en la enseñanza de la matemática.

6.- Se celebran reuniones, por ciclos, con profesores en las que se presenta y se estudia algún juego que puede ser utilizado en las clases de los días siguientes. En la siguiente reunión se debate sobre los resultados que se han observado en el aula: motivación para el alumno, idoneidad del material, análisis de las reglas, dificultades del juego, comprensión de los conocimientos que se quieren presentar o reforzar,... También se intercambian opiniones acerca de otras posibles formas de utilizar el juego y sobre otros contenidos en los que resultaría de utilidad dicho juego. Con estos datos se reconstruye el juego y se intenta aplicar en años sucesivos.

7.- A través del Centro de Profesores, número 1, de Zaragoza se constituyó un fondo de juegos comercializados, que los profesores se llevaban a sus aulas y devolvían después de haberlo usado. También se dispuso de servicio de reprografía y plastificado para la confección de tableros para juegos no comercializados.

8.- Disponemos de datos del profesorado que nos muestra su disposición, en un 90%, a mantener a lo largo del curso 89-90 una actividad similar, con cambios en algunos aspectos de la metodología que hemos seguido.

Utilización sistemática de juegos en clase de Matemáticas

De los alumnos tenemos las informaciones que nos han proporcionado sus profesores, que en general han sido muy positivas, pero no hay datos cuantificables.

9.- El profesorado que ha participado en la experiencia está interesado en que se realicen reuniones de información y debate acerca de aspectos curriculares de la asignatura de Matemáticas, que les permitan complementar su formación y, consecuentemente, desarrollar mejor su tarea profesional.

10.- Para el curso 89-90 está en marcha la continuación de la experiencia, con las matizaciones que se han señalado anteriormente. Es más, se quiere extender a profesores adscritos al otro Centro de Profesores existente en la ciudad.

Ficha nº 38

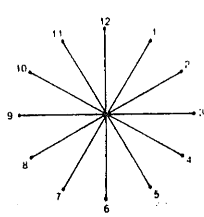
1.- "Matemática en Torrebonica".

LA CIUTAT MATEMÀTICA

Aci a Torrebonica aixecarem una nova ciutat. Serà una ciutat que farem entre tots, un lloc per construir figures i fer·hi observacions i descobriments... una ciutat per viure la Geometria.

LLOC
L'espai situat davant de l'església de Torrebonica.

PLÀNOL



1. Tetràedre.
2. Cub.
3. Piràmide.
4. Icosàedre.
5. Dodecàedre.
6. Bandera.
7. Cúpula.
8. Prisma i antiprisma.
9. Cilindre girador.
10. Con.
11. Esfera.
12. Bandera.

2.- C. Alsina (coordinador), D. Barba, I. Batlle, C. Burgués, J. Mª Fortuny, J. Fronch, J. Giménez, J. Partegás.

3.- Torrebonica (Terrassa) desde 1985, cada semana del curso académico.

4.- Grupos-clase de 2ª etapa de EGB.

5.- Estancias de una semana trabajando talleres, actividades de campo, teatro matemático, etc. todo en torno de las Matemáticas con el objetivo esencial de vivir las Matemáticas en sus diversos apartados y aplicaciones.

6.- Dos monitores y el maestro del grupo conducen la experiencia que es totalmente activa.

7.- Medios del centro de Torrebonica. Existe libro de actividades y mucho material.

8.- La experiencia, después de haber observado a más de 2.000 escolares, ha resultado positiva y se ha ido perfeccionado y ampliando.

9.- Se han diseñado visitas para ciclo inicial y medio.

10.- La experiencia podría darse en otros centros, adaptándola.

Ficha nº 39

1.- "Buenos días, Geometría".

2.- C. Alsina, C. Burgués y J. Mª Fortuny.

3.- S. Feliu de Pallerols (1984), Anglés (1985).

4.- Alumnos de 3º de BUP, COU y FP.

5.- Vivir activamente veinte experiencias de Geometría espacial y ver sus aplicaciones interdisciplinarias (arquitectura, ingeniería, dibujo, teatro, filosofía, diseño,...).

6.- Talleres con material y conferencias-coloquio.

7.- Encuentros con la Ciencia de la C.I.R.I.T. (Generalitat de Catalunya).

8.- Especial interés en el aspecto manipulativo y el trabajo de investigación.

9.- Existió libro-guía de los talleres.

10.- La experiencia es repetible en talleres tanto para alumnos como para profesores.

Ficha nº 40

1.- "Matemática y Medida".

2.- C. Alsina, C. Burgués y J. Mª Fortuny.

3.- S. Feliu de Pallerols (1989).

4.- Alumnos de 3º de BUP, COU y FP.

5.- Veinte experiencias de medidas a través de talleres con énfasis en los aparatos de medir, las diferentes escalas y los métodos indirectos. Conferencias interdisciplinarias.

6.- Talleres con material y conferencias-coloquio.

7.- Encuentros con la ciencia de la C.I.R.IT. (Generalitat de Catalunya).

8.- Especial interés en el aspecto manipulativo y el trabajo de investigación.

9.- Existió libro-guía de los talleres.

Ficha nº 41

1.- "Carnaval matemático"

2.- Rafael Pérez Gómez, Manuel Vela Torres, Ana Mª Lara Porras y Luis Wulf Alonso.

3.- Se celebró en el Instituto de Bachillerato "Alonso Cano", Dúrcal (Granada), en la semana de carnaval de 1985.

4.- Personas relacionadas con el Instituto: alumnos, profesores y padres.

5.- Hacer de una fiesta popular una versión escolar para popularizar las Matemáticas.

Aprender matemáticas jugando, decorando el Instituto e inventando canciones.

6.- Durante la semana de carnaval, el pueblo se disfraza, hace cancioncillas y las interpreta en grupos ironizando y criticando aspectos que le son familiares. El Seminario de Matemáticas organizó un Carnaval Matemático:

Los alumnos se disfrazaron de números, poliedros, raices cuadradas, etc.

En la zona hay una gran afición a las bandas de música, por lo que es frecuente contar en clase con alumnos que toquen algún instrumento. Con ellos se formaron diferente "murgas". Las letras de las canciones eran de contenido matemático.

Se organizó una feria en la que había:

Charlatanes que ofrecían juegos con ventaja de contenido matemático, tómbola de problemas de tres niveles de dificultad, decoración de clases y pasillos con posters realizados por los alumnos.

Todo el trabajo fue valorado con incidencia en las calificaciones de la evaluación de ese trimestre.

7.- Se sufragaron los gastos de la actividad con el presupuesto del Instituto.

8.- Los asistentes se divirtieron "haciendo matemáticas". La participación fue masiva ya que participaron de modo directo y activo alrededor de 300 alumnos.

10.- Se cuenta con el material necesario para repetir la experiencia en cualquier momento. Viavilidad inmediata.

Ficha nº 42

1.- Concurso de resolución de problemas

2.- Profesores de Matemáticas del Instituto de Bachillerato "Huelin" de Málaga. Responsable: Concepción García del Monte.

3.- Instituto de Bachillerato "Huelin", durante el curso escolar 87-88.

4.- Directamente está dirigida a los alumnos, indirectamente a todos los integrantes del centro.

5.- Popularizar las Matemáticas evitando su carácter de "coco" entre las asignaturas.

Buscar placer haciendo matemáticas.

6.- Se trata de la realización de un concurso quincenal de resolución de problemas entre los alumnos del Instituto.

Los profesores de cada grupo son los encargados de animar y mantener el concurso entre sus alumnos.

Cada semana se proponen cuatro problemas de ingenio. En la quincena siguiente se da publicidad a las mejores soluciones. Al final del curso se premiaron a los alumnos con mejor puntuación.

7.- Se utilizan las colecciones de problemas al uso.

8.- El interés mostrado por los alumnos es enorme, incluso entre los de escaso rendimiento académico.

9.- Debe ser alentado por los profesores de una forma voluntaria y sin "contaminación" con las notas.

Ficha nº 43

1.- "Algo de Matemáticas en La Mezquita de Córdoba".

2.- Miguel de la Fuente Martos (Profesor de Matemáticas).

3.- I.B. "Profesor Tierno Galván" de la Rambla (Córdoba). Noviembre a Febrero del curso 85-86.

4.- A todos los alumnos y profesores de dicho Instituto (unas 250 personas).

5.- Estudio "in situ" de los mosaicos periódicos que aparecen en las distintas decoraciones de dicho monumento árabe.

Exposición de la experiencia y resultados en forma de Actividad Cultural dentro de un programa de actos con motivo del "Día de Andalucía", buscando en las raíces históricas del entorno algún aspecto matemático.

6.- Siete alumnos del Centro (de 3º y COU) de forma voluntaria y en horario no lectivo quisieron participar en un seminario de trabajo que se constituyó para preparar la actividad.

En las reuniones del grupo se estudiaron y manipularon las ideas matemáticas necesarias para abordar el estudio de un mosaico periódico. Asimismo se preparó cuidadosamente la única visita que se iba a hacer a La Mezquita.

Se visitó el monumento en Febrero aprovechando un viaje que el Seminario de Historia tenía programado, y se tomaron el mayor número de datos y diapositivas posibles.

El acto cultural que se celebró a finales de febrero consistió en:

"Exposición en murales, distribuidos en los pasillos del Centro, de las ideas básicas sobre el tema con muchos ejemplos gráficos y algunas anotaciones históricas. (Estos murales fueron preparados por los alumnos participantes).

Montaje audiovisual con exposición de diapositivas de La Mezquita y de gran parte de la obra de M.C. Escher.

Presentación resumida de la experiencia y de los resultados a todos los asistentes.

7.- Humanos (8 personas).

Materiales (autobus, cartulinas, diapositivas, litografías de M.C. Escher, reproducciones a fotocopia de objetos simétricos y decoraciones periódicas, cámara fotográfica, equipo de sonido para el montaje audiovisual y bibliografía.

8.- La valoración es positiva si se tiene en cuenta:

Que conforme avanzaba el trabajo los alumnos participantes se sentían más interesados.

Que la exposición estuvo a su cargo, con lo que se sentían protagonistas y de algún modo investigadores.

La extrañeza y admiración de los asistentes (casi todos los alumnos y profesores del Centro).

Contactos posteriores con alumnos participantes que aún recuerdan con agrado la experiencia.

9.- DIFICULTADES: Esfuerzos complementaros en horas no lectivas, debido en gran parte a que estos temas no se encuentran incorporados en los programas oficiales.

Imposibilidad de hacer más de una visita al monumento por falta de medios económicos.

10.- El responsable de la experiencia no ya no se encuentra destiando en el Centro donde se realizó.

La repetición está condijcionada sobre todo por los medios humanos y el plan de actividades del Centro. Si se cuenta con esto el handicap del autobús (si es que se necesitase) podría eludirse, pues podrían estudiarse edificios y decoraciones de la ciudad donde se encontrase el Centro.

Ficha nº 44

1.- "Currículum"

2.- Utilización de la historia de las Matemáticas, como recurso didáctico en los programas de BUP.

3.- (Col. lectiu Obert Mart), de profesores de Matemáticas y de otras disciplinas y alumnos de BUP y COU.

4.- Equilibrar la actividad heurística y la actividad formalista.

—Recontextualizar.
—Re-crear problemas.

5.- Utilización de los cuadernos de "Una historia lúdica de las Matemáticas".

Elaboración de modelos por parte de los alumnos (relojes solares, cuádricas, caleidoscopios, mosaicos, modelos cristalográficos...).

Elaboración de un "libro de texto personal".

Elaboración de un "diccionario de Matemáticas personal".

6.- Los alumnos que participaron en esta experiencia consiguieron un aprendizaje más significativo en las áreas trabajadas que los alumnos que siguieron el método tradicional. Adquirieron una técnica de trabajo más autónoma, constatada incluso en otras materias.

7.- Las propias construcciones de los alumnos.

Los juegos.

Los cuentos.

Las anécdotas apoyadas por ilustraciones tipo cómic, a todo color.

Todo ello sugerido en los cuadernos de "Una historia lúdica de las Matemáticas".

Estos cuadernos tienen una forma de utilización flexible que permite considerar a todo tipo de público como posible usuario.

Ficha nº 45

1.- Grupo de Trabajo sobre Popularización de las Matemáticas.

2.- Revista "SUMA"

3.- Sierra Nevada (Granada), 19,20 y 21 de Junio de 1989.

4.- Profesores de Matemáticas con experiencia en este campo de trabajo

5.- Elaboración de un documento que registrase las experiencias españolas en la popularización de las Matemáticas y las acciones futuras.

6.- Se citó desde la Revista "SUMA" a medio centenar de Profesores con experiencia en popularización de las Matemáticas. Los que acudieron a la convocatoria estuvieron trabajando durante tres días, a tiempo total, en el alojamiento que se les suministró en un hotel de la estación invernal de Sierra Nevada.

Se formaron grupos que discutían un aspecto del tema. Al finalizar la jornada se hacía una puesta en común que posibilitaba la continuación del trabajo.

7.- El medio para realizar la convocatoria y difundir las conclusiones de todo el proceso ha sido la Revista "SUMA".

La Subdirección General de Perfeccionamiento del Profesorado del Ministerio de Educación y Ciencia ha aportado los recursos materiales necesarios para la realización de la actividad.

8.- La formación de Grupos de Trabajo es un excelente método para crear un buen ambiente alrededor de un buen tema. En este caso, aunque los resultados no sean muy espectaculares de inmediato, la valoración es muy positiva por lo que supone la aparición de proyectos de cara al futuro, asumidos por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas en esta actividad, y la difusión amplia de las actividades que son conocidas en ambientes muy reducidos.

9.- La propia actividad, para analizar temas relativos a la popularización, sirvió para popularizar ya que se ocuparon de ella diferentes medios de comunicación social.

10.- En la reunión se acordó que, en lo sucesivo, la Federación Española de Soc. de Prof. de Matemáticas seguirá convocando Grupos de Trabajo para temas de su interés. Así, ya se ha hablado de uno sobre Diseños Curriculares Base y de otro sobre Evaluación que finalizará en un I.C.M.I. Study.

Recomendaciones

Las siguientes indicaciones tienen por objeto conseguir una paulatina normalización en el estilo de presentación de los textos. No deben ser consideradas como obstáculo o dificultades añadidas a las generalmente ya de por sí precarias condiciones en que se realizan los trabajos sino como metas a las que debemos ir tendiendo.

La propias indicaciones son susceptibles de alteración en función de los medios tecnológicos de impresión de que la redacción pueda ir disponiendo.

1. Indicaciones de carácter general

Todo texto presentado deber ser (física o conceptualmente) legible, coherente (en contenido y en notación) y manipulable —para propósitos de imprenta— por personas no versadas en el tema de que el texto trate.

Se aconseja explícitamente, a quienes envíen artículos, piensen que el lector medio no sabe tanto del tema como ellos mismos. Se puede tener consideración hacia el lector de muy diversas maneras; por ejemplo, cabe

a) redactar una introducción (no necesariamente limitada al primer párrafo) que sitúe informalmente el contenido del artículo en un contexto generalmente más conocido;

b) plantearse si el esquema «definición-teorema-demostración» no podría ser sustituido por otro más «amigable»;

c) atender al hecho incuestionable de que muchos lectores preferirán enfrentarse a textos claros y concisos antes que a ristras de fórmulas;

d) estructurar el artículo de modo que el hilo conductor no quede ahogado por divagaciones...

2. Indicaciones específicas

2.1. *Escritos*

Los escritos deberían presentarse por duplicado, en papel DIN-A4, escritos a máquina por una sola cara.

El título debe ser descriptivo y corto.

En hoja aparte, figurará un breve resumen en castellano y la traducción de éste al inglés (independientemente de la lengua utilizada en el artículo).

Es deseable que la longitud de los artículos no sobrepase las 15 páginas; sin embargo, este número jamás será un requisito de aceptación o de rechazo. (La redacción se reserva la posibilidad, en artículos más largos, de publicarlos en dos entregas de la revista si los autores muestran su acuerdo.) Se invita a los autores a ser escuetos, pero sin abusar de sobreentendidos.

Tanto la página del resumen como la primera página del artículo deben contener el nombre y apellidos y centro de trabajo de quienes lo han realizado.

Siempre deberá figurar una dirección completa a la que deba remitirse la correspondencia y, en su caso, pruebas de imprenta.

2.2. *Símbolos y unidades*

Todos los artículos deben ser coherentes en lo relativo a símbolos y a unidades. Si no son de uso común, deben aparecer adecuadamente definidos.

Los símbolos matemáticos pueden ser escritos a mano o a máquina y no deben surgir ambigüedades. Los símbolos poco usuales y las letras de un alfabeto como el griego deben ir anotadas al margen. Distíngase muy bien la letra O del número 0, la letra *l* del número 1 y de la prima, la letra *k* de la letra *kappa,* etc. Empléese una notación coherente para vectores (por ejemplo: negrita o indicación de esto con un subrayado sinuoso) o para numerar expresiones matemáticas (por ejemplo: números entre paréntesis a la derecha de la expresión).

2.3. *Referencias bibliográficas*

Toda referencia a obras previamente publicadas debe ir numerada entre corchetes ([ ]) a lo largo del texto. Al final de éste aparecerá la lista completa de citas en el mismo orden numérico.

Los artículos de revistas se citarán con la siguiente pauta:
Autor/a/es: Nombre (inicial/es) y apellido(s).
Título: (el que corresponda).
Revista: Nombre o abreviatura comúnmente utilizada para referirse a ella.
Número: (el que corresponda, subrayado).
Páginas: (número de la página inicial)-(número de la página final) ocupada(s) por el artículo.
Año: (cuatro cifras).

Los libros se citarán con la siguiente pauta:
Autor: ...
Título: ...
Editorial: ...
Lugar de edición: ...
Año de edición: ...

2.4. *Notas a pie de página*

Deben ir correlativamente numeradas con superíndices a lo largo del artículo.

2.5. *Listados de ordenador (programas, tablas, etc.)*

Se enviarán listados originales (evítense rigurosamente las fotocopias) que se reprografiarán para evitar errores. También se aceptarán negativos en blanco y negro de listados originales.

2.6. *Ilustraciones*

Aunque las ilustraciones interrumpirán el texto publicado, deben remitirse en hojas separadas del manuscrito con indicación de la colocación óptima. Los autores deben asegurar la calidad de los trazos, de los símbolos empleados y, en general, de todos los elementos de las ilustraciones teniendo en cuenta que éstas se someterán a reprografía directa en escala próxima a 1:2.

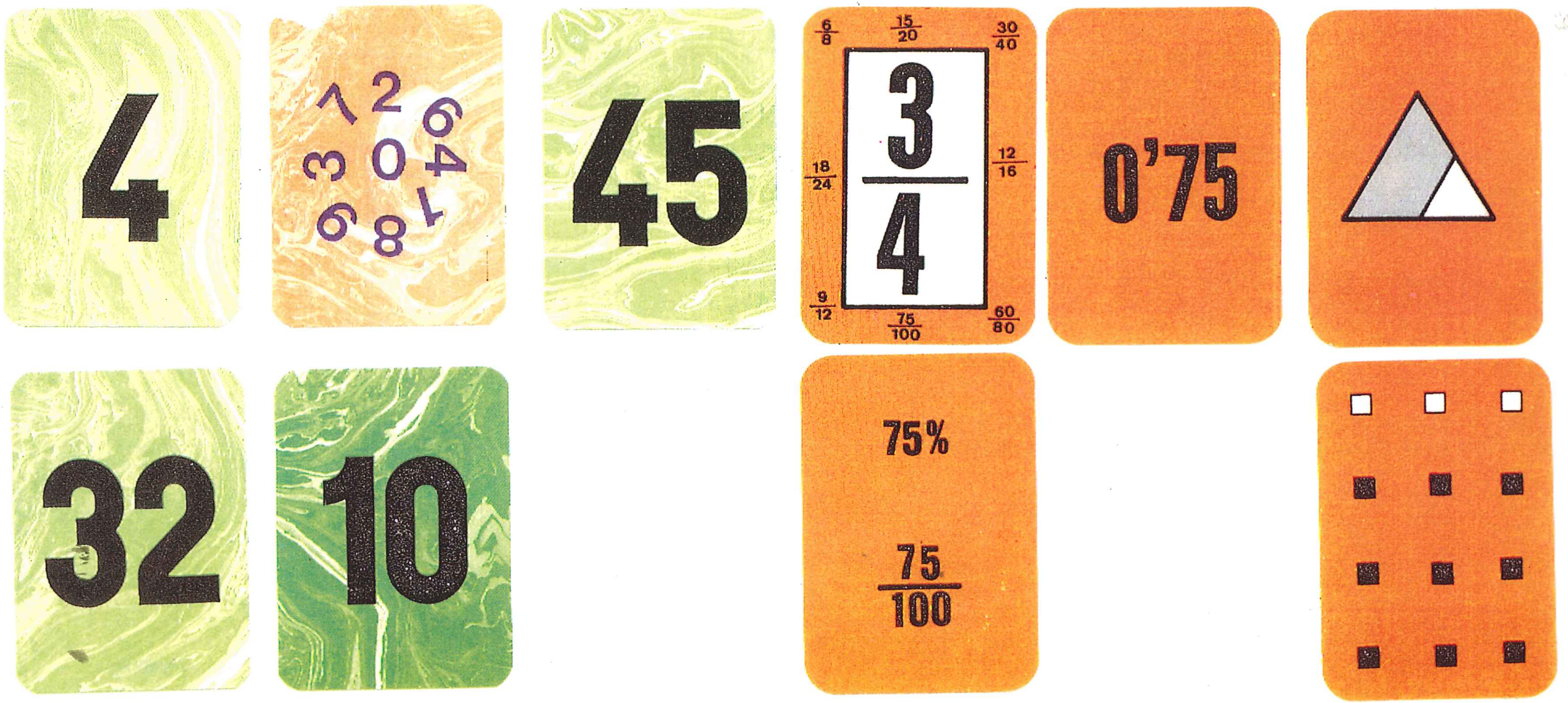
El número de ilustraciones no está limitado; se ruega eviten redundancias en el material gráfico.

2.7. *Fotografía en blanco y negro*

Sólo podrán publicarse fotografías remitidas con negativos. Si las fotografías requieren algún comentario, leyenda o símbolo especial, se numerarán y en folio aparte se indicará el contenido de tales adiciones.

2.8. Enviar a cualquiera de las personas que figuran en el Panel de Colaboradores o a

Revista *SUMA*
Apdo. 1017
18080 Granada.
ESPAÑA



Barajas matemáticas (Diversos modelos)
Distribuidor o fabricante: MAT
Dirección: Apartado de Correos 2170; 50080 Zaragoza

SUMA 4
enseñanza y aprendizaje de las matemáticas Otoño 1989

Las barajas al igual que los dominós, como se ha señalado en otra de las fichas, suministran un potencial de primer orden para la elaboración y planificación de actividades matemáticas y pueden ser unos instrumentos didácticos extraordinarios. Las barajas clásicas tienen un atractivo especial para la mayoría de los niños y es difícil encontrar quien a partir de los 6 ó 7 años no sepa jugar a alguna modalidad de juego de cartas. En los juegos de naipes los niños aprenden a contar, a agrupar según unas reglas, a clasificar, etc. y algo muy importante desde el punto de vista matemático: asociar valores arbitrarios a determinadas cartas y contar ágilmente en función de estos valores (el as vale tanto, el rey tanto otro, etc.)

A diferencia de los dominós, en que las reglas del juego admiten unas pocas modificaciones, la variedad de juegos de naipes es mucho más rica, así como el número de cartas que puede emplearse. Las reglas de los juegos más comunes son ampliamente conocidas, esto facilita la utilización didáctica de las barajas adaptando, sin más complicaciones, las mismas reglas de los juegos a situaciones matemáticas. Se facilita así una etapa importante de cualquier actividad didáctica con juegos: el período que deben emplear los estudiantes en familiarizarse previamente con las reglas.

La oferta de material de matemáticas que utilice como soporte los naipes es muy escasa, incluso en materiales importados de otros países. Que sepamos, hasta la aparición comercial de estas barajas no había ningún material específico para emplear en las clases de matemáticas. Existen unos naipes blancos, sobre los que puede escribirse y posteriormente borrarse lo escrito, de procedencia inglesa, que distribuye y comercializa DISTESA. Suelen ser difíciles de conseguir y su precio es alto aunque tienen muchas posibilidades e interés didáctico porque el material permite que cada profesor pueda inventarse sus propios juegos o actividades según los propósitos de enseñanza que se tengan en cada momento.

En este sentido nos parece muy atractiva la idea de MAT-MAT de aprovechar los juegos de naipes como material para el aprendizaje de las matemáticas. Si a ello se añade que el precio de las barajas es bastante asequible, resulta barato disponer de material suficiente para trabajar con una clase completa. Desde este punto de vista, las barajas son, un material altamente interesante y recomendable.

MAT-MAT es una empresa española, de Zaragoza, que fabrica y produce material didáctico para las matemáticas, y dispone en la actualidad de una oferta muy amplia, principalmente de juegos de tablero y barajas. En las barajas han adaptado a actividades con contenido matemático, diferentes juegos tradicionales de cartas, en unos casos se mantienen las reglas de estos juegos, y en otros han creado un buen número de juegos con reglas propias nuevas.

Los naipes son de cartulina resistente satinada, muy parecidas en el tamaño a las cartas de los juegos para niños y de la baraja clásica. El diseño de los naipes ha mejorado notablemente de los primeros modelos de barajas a los más recientes.

Cada baraja se acompaña con unos comentarios generales para el profesor sobre la utilización didáctica del juego, las reglas de cada juego y los objetivos específicos que se pretenden alcanzar con los diferentes modos de juego que pueden desarrollarse con dicha baraja. En todas las barajas hay por tanto varias modalidades alternativas de juego y distintas formas de jugar, normalmente son tres o más posibilidades las que se ofrecen.

1. Nombre de la baraja: Las pandillas

Nivel: Ciclo medio y ciclo superior y EE.MM.

Tema: Fracciones.

Es un juego de 55 cartas. Cada naipe lleva la representación de un número fraccionario. Hay 5 formas distintas en total de representar cada número: gráfica, porcentaje, decimal, subconjunto de un conjunto y fracción. La idea del juego consiste en agrupar los números según sus diferentes representaciones en pandillas. Hay otras variantes posibles y el profesor puede inventar otras reglas.

2. Nombre de la baraja: La escalada

Nivel: Ciclo inicial y ciclo medio.

Tema: Números naturales operaciones y cálculo mental.

Es una baraja compuesta por 64 naipes. Los naipes son números naturales; signos de operaciones; más, menos, por, división y elevar a una potencia; y también unas cartas con paréntesis. Por la composición de las cartas es evidente que aún sin reglas, un profesor podría diseñar por sí mismo actividades con estas cartas o bien sus propios juegos para facilitar la comprensión del significado de las operacines aritméticas elementales. En las instrucciones que acompañan a la baraja se dan las reglas para jugar hasta 3 juegos.

3. Nombre de la baraja: buscagono

Nivel: Ciclo medio y ciclo superior.

Tema: Números naturales operaciones y cálculo mental.

Baraja de 45 cartas con diferentes figuras geométricas planas en cada carta. La descripción más detallada de esta baraja puede verse en el Nº 3 de la Revista "Suma".

4. Nombre de la baraja: múltiplos y divisores

Nivel: Ciclo medio y ciclo superior.

Tema: Números naturales operaciones y cálculo mental.

La baraja consta de 48 cartas cada una con un número del 1 al 48 y tres "comodines" con diversos números.

Bibliografía

FERNANDO CORBALÁN YUSTE/JOSÉ Mª GAIRÍN SALLÁN. *Juegos en clase de matemáticas.* Revista *Cuadernos de Pedagogía,* Nº 160 (Julio de 1988)

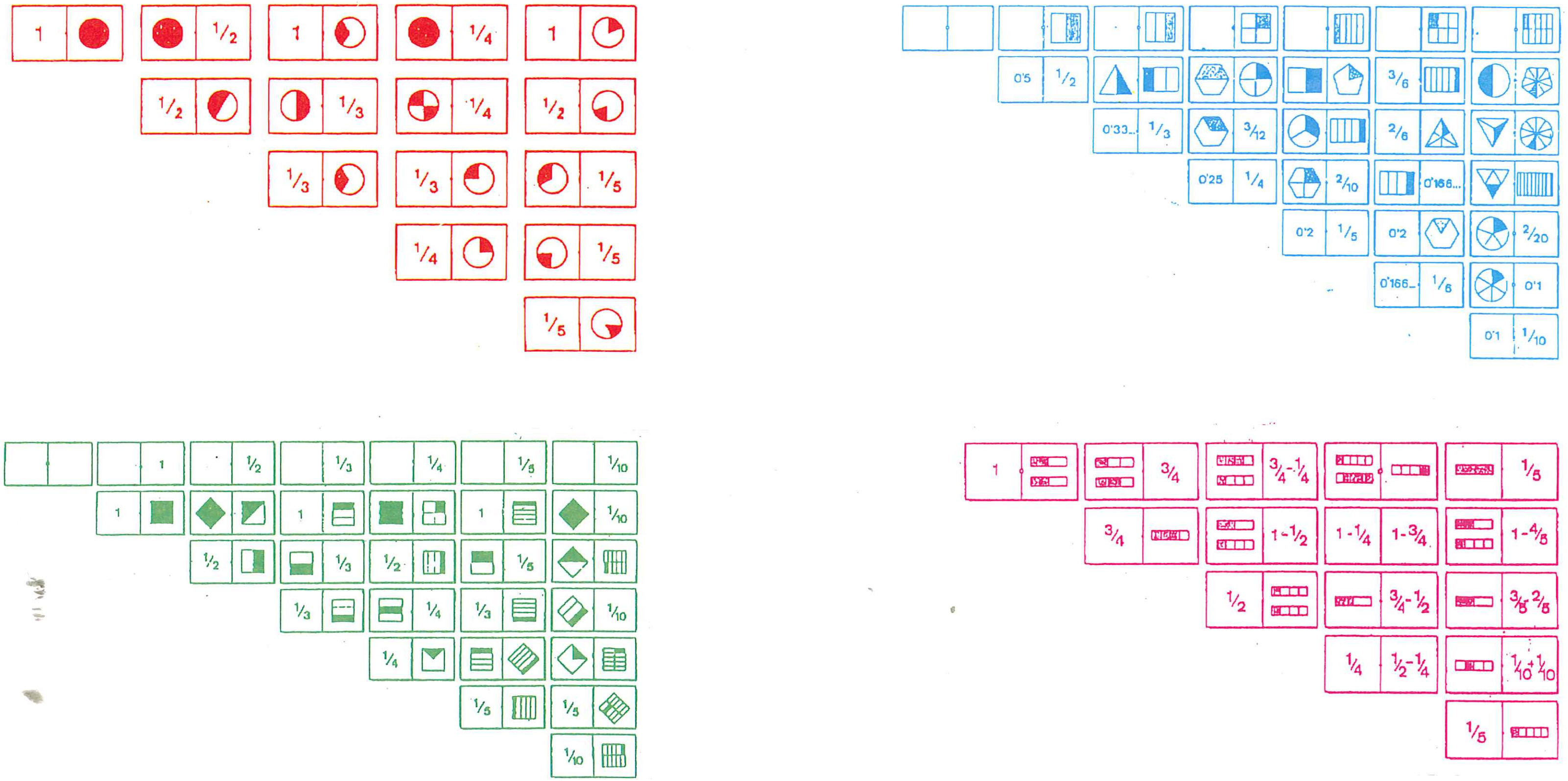
FERNANDO CORBALÁN YUSTE/JOSÉ Mª GAIRÍN SALLÁN. *Problemas a mí Nº 3 (Juegos).* Editorial EDINUMEN.

J. ANTOLÍN/FERNANDO CORBALÁN YUSTE/JOSÉ Mª GAIRÍN SALLÁN. *Buscágono.* Revista "Suma", Nº 3 (Primavera 1989).

Juegos. Enciclopedia práctica (2 Tomos). Ediciones Nueva Lente.

Angel Salar Gálvez

Asesor del CEP de Torrent



SUMA 4

enseñanza y aprendizaje de las matemáticas Otoño 1989

Dominó de fracciones (diferentes modelos)
Distribuidor y fabricante: Didasval
Dirección: Reina Dª María, 9 – 46006 Valencia
Teléfono: 76-3739848

Los juegos tradicionales, en particular las barajas, los juegos de tablero con dados y el dominó, son una fuente inagotable de actividades matemáticas. Una amplia mayoría de niños aprenden y practican estos juegos desde bien pequeños en su propia familia o en un contexto de juegos entre compañeros.

El conocimiento de las reglas y la familiaridad con los elementos del juego es un factor importante que facilita la introducción en clase de los dominós como un elemento didáctico. Existe, de hecho, una gran varidad de juegos de dominós para los niños pequeños, cada uno con diferente propósito didáctico o lúdico pero todos ellos utilizan las reglas de juego del dominó clásico.

El aprendizaje del juego del dominó tradicional y sus reglas ya es una buena actividad matemática puesto que desarrolla diversas capacidades mentales que pueden transferirse con éxito a otras situaciones matemáticas de nivel diferente: llevar la cuenta de los puntos, ordenar, clasificar, asociar visualmente números a símbolos, elaborar estrategias de juego, etc. Los dominós convencionales pueden utilizarse además como una fuente de problemas y actividades matemáticos que van del simple hecho de aprender a contar, en el caso de los niños más pequeños, a otro tipo de problemas de mayor dificultad, en [1] hay una buena colección de tales problemas y las posibilidades de aprovechamiento didáctico de los dominós.

Hace ya tiempo que se utilizan las ideas y reglas de juego del dominó tradicional con muy diferentes propósitos didácticos. Su origen se remonta a las teorías pedagógicas y materiales didácticos elaborados por Decroly y Montessori. Su uso está bastante generalizado en las clases de niños pequeños porque existe un mercado muy amplio de tales materiales y se comercializan diferentes modelos con figuras de colores muy atractivos y un tamaño apropiado a la edad de estos niños.

Para otros niveles de enseñanza, a partir del ciclo medio, la oferta específica de dominós se limitaba, hasta ahora, principalmente a material producido en otros países. Estos materiales presentan algunos inconvenientes: su precio es bastante elevado y la presentación en cajas de cartón es muy poco adecuada a una buena conservación. Por último su tamaño no coincide con el de los dominós normales, se ha copiado el tamaño de las fichas de los dominós que se utilizan con los niños pequeños, lo que les da una apariencia externa más infantil y a mi entender les resta atractivo para ser utilizados con los estudiantes mayores.

Los dominós que comercializa DIDASVAL que aquí presentamos (los dominós de fracciones) reunen algunas características que queremos destacar y que los hacen especialmente interesantes. En primer lugar es el primer material español comercializado con estas características. Son el resultado final de un trabajo de experimentación con materiales para las matemáticas en diferentes escuelas, a través del cual se ha ido transformando hasta presentar la forma final con la que se comercializa en la actualidad. Por otra parte el tamaño de sus fichas coincide con las de los dominós convencionales. Las fichas de estos dominós son de madera serigrafiada en colores de una calidad muy aceptable y vienen en cajas de madera. De los 5 modelos que hay comercializados hasta ahora (hay otros en fase de producción con otros fines didácticos diferentes al tema de fracciones, que presentaremos en otras fichas más adelante) unos tienen 28 fichas como en el juego convencional y otros un número menor de fichas.

El contenido matemático en torno al que giran estos dominós son las fracciones, los decimales y porcentajes. Una de las muchas dificultades, tanto desde el punto de vista conceptual como didáctico, del estudio de las fracciones, los decimales y los porcentajes está en la comprensión de las relaciones que hay entre ellos y los múltiples significados y formas gráficas con que se presentan. El objetivo de estos dominós es servir de ayuda para introducir y consolidar algunos de estos significados: diferentes modelos de representación gráfica de las partes de un todo, operaciones entre fracciones, relación entre fracciones y decimales y gráficos, etc.

Cada modelo de dominó viene acompañado con una hoja de explicación del juego y objetivos didácticos, nivel a que va dirigido, etc. Asímismo se ha publicado recientemente una guía más general de utilización de los dominós, tanto de los dominós de fracciones como de otros dominós concebidos con diferentes objetivos y contenidos matemáticos [2].

DIFERENTES MODELOS DE DOMINOS

1. **Modelo de dominó: F-3**
   Nivel: De 8 años en adelante.
   Tema: Fracciones simples y representación gráfica sobre círculos.
2. **Modelo de dominó: F-5**
   Nivel: De 9 ó 10 años en adelante.
   Tema: Fracciones simples y representación gráfica sobre un cuadrado.
3. **Modelo de dominó: F-6**
   Nivel: De 9 ó 10 años en adelante.
   Tema: Suma y resta de fracciones simples y representación gráfica sobre tiras.
4. **Modelo de dominó: F-9**
   Nivel: De 12 años en adelante.
   Tema: Fracciones de uso cotidiano y operaciones elementales. Representación gráfica sobre cuadrados.
5. **Modelo de dominó: D-2**
   Nivel: De 12 años en adelante.
   Tema: Fracciones de uso habitual, expresión decimal de las mismas y diferentes modelos de representación gráfica: Círculos, rectángulos, polígonos, etc.

Bibliografía

[1] MARISA CARRILLO/FRANCISCO HERNÁN. *Recursos en el aula de matemáticas.* Editorial Síntesis. Madrid (1988).

[2] MARISA CARRILLO/FRANCISCO HERNÁN. *Dominós.*

Edita: Grupo 0, con la colaboración de los Centros de Profesores de Burjasot, Torrent y Valencia (1989). Colección: Programa de Formación de Profesores de Matemáticas de la Conselleria de Cultura, Educación y Ciencia de la Generalitat Valenciana.

Angel Salar Gálvez
Asesor del CEP de Torrent