

# Didáctica e historia de las matemáticas\*

José L. Carlavilla Fernández y Gabriel Fernández García

Nuestro trabajo en la E.U. de Formación de Maestros de Ciudad Real, nos ha ofrecido la posibilidad de orientarnos hacia un campo muy específico de las Matemáticas como es el de su Didáctica. En los Estudios Universitarios de la Licenciatura de Matemáticas hemos recibido una formación vacía en Didáctica. Ha sido pues el trabajo con nuestros alumnos en el aula, la búsqueda de libros, cursos y compañeros interesados en este tema, los que han posibilitado esta experiencia.

Uno de los aspectos que consideramos insuficientes en las clases de Didáctica que impartimos a nuestros alumnos es el divorcio existente entre Historia de las Matemáticas y Didáctica de las Matemáticas. En nuestros programas de la asignatura Didáctica de las Matemáticas, siempre incluíamos algunos temas relativos a su Historia, pero raramente se le proponía a los alumnos la problemática de los conocimientos históricos en Didáctica. La inclusión de dichos temas tenían unos objetivos más humanistas y culturales que didácticos, aún siendo evidente que la Historia de las Matemáticas puede ofrecer grandes posibilidades de tipo didáctico.

*La Historia de las Matemáticas ofrecen a nuestros maestros distintas ideas para su actividad didáctica, ya sea como historia de cuestiones particulares que se presentan en clase de manera explícita, ya sea como fuente de temas en los que se puede proponer de nuevo, de manera implícita, contextos para la construcción de determinados conceptos y habilidades matemáticas con alumnos de 6 a 13 años.<sup>1</sup>*

En cualquier caso nos parece muy importante la motivación que a través de ella se podría inducir en los alumnos para favorecer el diálogo con ellos y dirigir el proceso de su cultura matemática.

Otro de los aspectos que también nos preocupa de forma especial, se refiere al concepto que generalmente nuestros alumnos, (muchos de ellos por haber cursado el Bachillerato de Letras con escasos conocimientos matemáticos), tienen sobre las Matemáticas. Intentamos crear en ellos una actitud positiva hacia esta materia haciendo una matemática comunicativa que no fuese motivo de marginación considerada sólo asequible para gente rara o de inteligencia superior.

El querer hacer una *Matemática comunicativa* estrechamente vinculada con su Historia, ha sido pues el

principal criterio que hemos seguido en la elaboración del libro Historia de las Matemáticas, del que somos autores. Su título no es muy explícito y, si nos atenemos a él de una forma estrictamente literal, podría ser considerado como un libro más sobre Historia de las Matemáticas. Nos hubiese gustado que en la portada del libro apareciese como título el que nosotros habíamos propuesto en principio *Desde que el hombre empezó a contar: historias, cuentos, problemas y cosas de matemáticas* y que el complejo mecanismo de su publicación, al final lo cambió.

Es un libro de *comic* que hace un recorrido por todas las épocas de la historia, intentando dar a conocer las distintas etapas del desarrollo de las matemáticas, así como, un conocimiento humanista de sus creadores, relacionando todo esto, con los acontecimientos sociales ocurridos, y proponiendo una serie de *cuestiones matemáticas* vinculadas a este devenir histórico y aunque, en algunos casos, esta vinculación no sea muy directa, sí nos sirve de pretexto para proponerlas.

Es difícil explicar en pocas páginas un proceso histórico acontecido, a veces, en miles de años, con lo que se corre el riesgo de dar una imagen deformada de dicho proceso histórico. Asumimos dicho riesgo con la debida precaución aunque el resultado en algunos casos haya podido ser la presentación de procesos históricos muy complejos como fáciles o banales; no obstante, esta ausencia de rigor podría ser justificada con el pretexto de llegar a un sector del público muy amplio que, en algunos casos, posee escasa cultura matemática (estudiantes de 12 a 16 años, profesores de Educación Primaria y Secundaria, estudiantes universitarios de Magisterio...).

No ha sido nuestra intención escribir el libro para que fuese utilizado por personas a un determinado nivel ni tampoco pensamos acotarlo sólo para aquellos que por su quehacer cotidiano estén vinculados de alguna forma con las matemáticas. Es nuestro deseo que personas ajenas a la matemática puedan encontrar en este libro un estímulo para su estudio, o bien que les sirva para rectificar el rechazo que muchas veces se tiene sobre las mismas.

A continuación les presentamos una breve muestra del contenido de este libro comprendiendo quince láminas de las diferentes épocas:

\* N.R. Este trabajo fue presentado por sus autores en Leeds durante el Seminario Internacional sobre Popularización de las Matemáticas

<sup>1</sup> P. BOERO, *Utilización de la Historia de las Matemáticas*, SUMA 2, pp. 27,28, 1989.



EN EL PAPIRO DE RHIND ENCONTRAMOS EVIDENCIAS DE QUE CONOCIAN FRACCIONES DE NUMERADOR 1, PROGRESIONES ARITMETICAS Y GEOMETRICAS, REGLAS DE TRES, CASOS DE PROPORCIONALIDAD, DE REPARTICION PROPORCIONAL Y HASTA ALGUN EJEMPLO DE RAIZ CUADRADA...



LA MULTIPLICACION ERA, EN EFECTO, UNA SERIE DE DUPLICACIONES

$$412 \times 7$$

1	412	}	2884
2	824	}	
4	1648	}	

$412 \times 7 = 2884$

LA DIVISION, OPERACION INVERSA, ES TAMBIEN, LOGICAMENTE, REALIZADA DE ESTA FORMA:

$$32 : 6$$

6	1	}	5
12	2	}	
24	4	}	

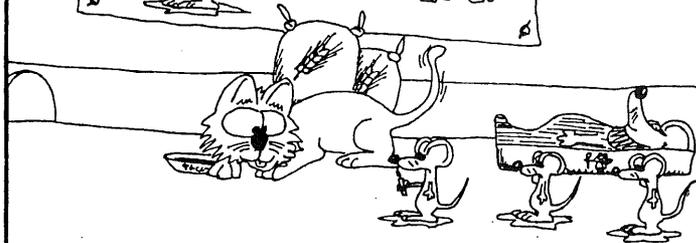
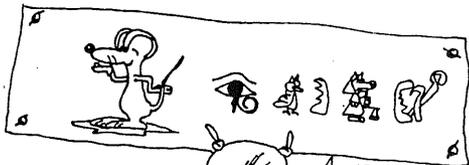
COCIENTE = 5  
 RESTO = 2



Lámina 1: Matemáticas en Egipto.

ESTE EJEMPLO, EL PROBLEMA 79 DEL PAPIRO DEL RHIND, NOS DA UNA IDEA DEL SISTEMA EGIPCIO DE CALCULO:

"HABIA UNA PROPIEDAD COMPUESTA POR 7 CASAS ; CADA CASA TENIA 7 GATOS ; CADA GATO SE COMIA 7 RATONES ; CADA RATON SE COMIA 7 GRANOS DE CEBADA ; CADA GRANO HABRIA PRODUCIDO 7 MEDIDAS... ¿CUANTO SUMABA TODO ESTO?"



... ACTUALMENTE SERIA:

7 CASAS
49 GATOS
343 RATONES
2401 GRANOS
<u>16807 MEDIDAS</u>
19.607

... PERO UN EGIPCIO LO HUBIESE HECHO ASI:

7 CASAS	x	PARA UNA CASA	1 CASA
			7
			49
			343
			<u>2401</u>
			2.801

... Y MULTIPLICANDO:

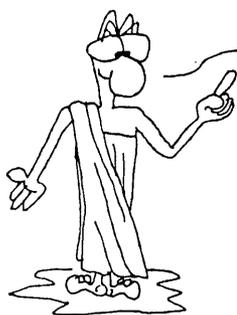
7	1	2801
	2	5602
	4	11204

19.607



EN TOTAL, TODO SUMARIA 19.607

A THALES SE ATRIBUYEN MUCHOS METODOS PRACTICOS PARA CALCULAR DISTANCIAS, LONGITUDES, ALTURAS, ETC...



SI, TIOS, POR EJEMPLO, PARA MEDIR LA ALTURA DE UNA TORRE...



...CLAVANDO VERTICALMENTE UN BASTON ASI...

... POR SEMEJANZA ENTRE LOS TRIANGULOS  $\triangle AB'B$  Y  $\triangle PQQ'$ , TENEMOS:

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{PQ}{PQ'} ; \text{ DONDE}$$

$$AB = AB' \frac{PQ}{PQ'}$$

SIENDO:

- { AB = ALTURA DE LA TORRE
- { AB' = LONGITUD DE SU SOMBRA
- { PQ = ALTURA DEL BASTON
- { PQ' = LONGITUD DE SU SOMBRA



TAMBIEN INVENTO UN INSTRUMENTO PARA MEDIR LAS DISTANCIAS...

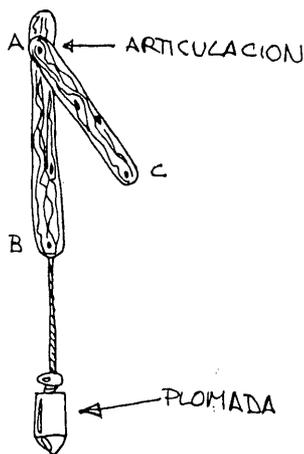
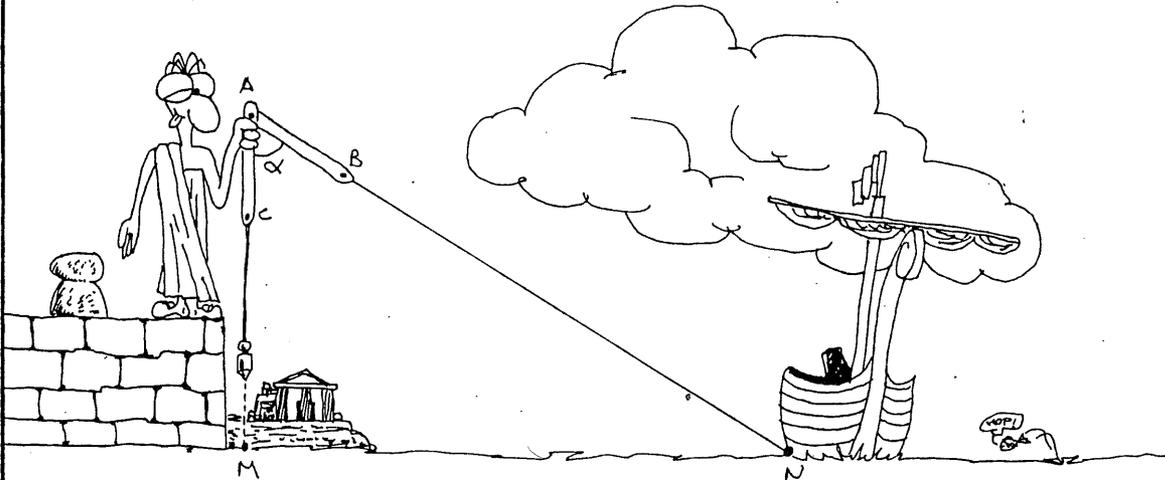


Lámina 3: Tales de Mileto

... EL CACHARRILLO EN CUESTION SE USABA DE ESTA MANERA:

\* PARA CALCULAR LA DISTANCIA DE UN BARCO A LA COSTA:

... SE COGIA DE LA FORMA QUE VEIS, Y SE DIRIGIA HACIA EL BARCO LA VARILLA MOVIL...



... SI  $\alpha$  ES EL ANGULO FORMADO POR LAS VARILLAS, PODEMOS VER QUE LA DISTANCIA A CALCULAR ES EL CATETO  $\overline{MN}$  DEL TRIANGULO RECTANGULO  $\widehat{AMN}$ ...

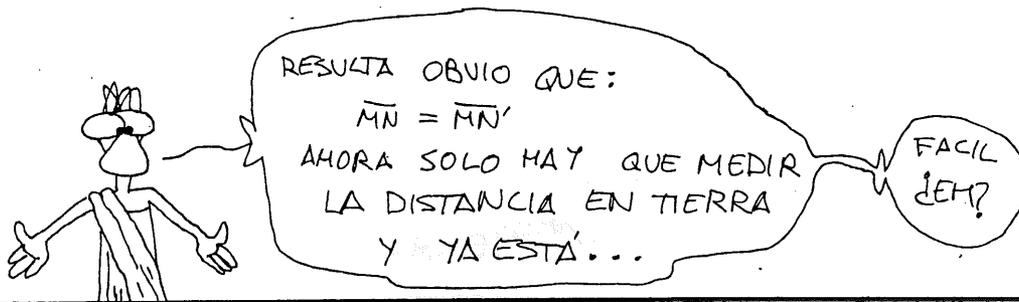
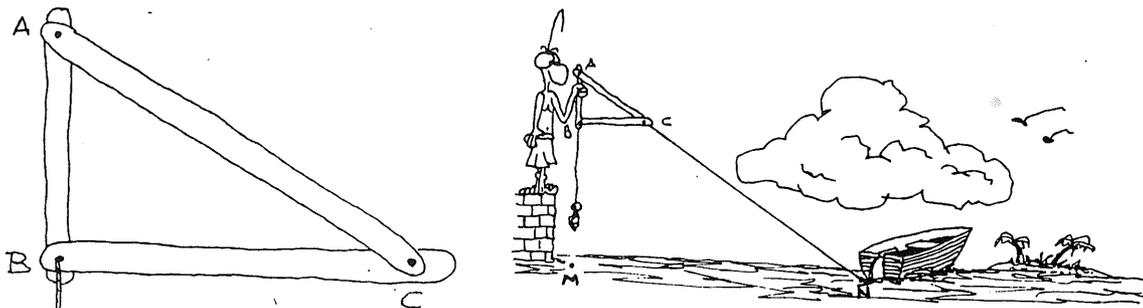


Lámina 4: Tales de Mileto.

... VOSOTROS MISMOS PODERIS REPRODUCIR LAS EXPERIENCIAS DE THALES, CON UN APARATO PARECIDO, MAS FACIL DE USAR...



FIJAOS... SI MIRAMOS CON ÉL UNA BARCA, COMO LOS TRIANGULOS  $\widehat{ABC}$  Y  $\widehat{AMN}$  SON SEMEJANTES TENEMOS:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{MN}} ; \text{ LUEGO } \overline{MN} = \overline{AM} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

Y PODEMOS CALCULARLO DIRECTAMENTE

PODEMOS TAMBIEN CALCULAR, POR EJEMPLO, LA PROFUNDIDAD DE UN POZO:



CON EL APARATO ANTERIOR Y UN PELIN DE MAÑA, PODEMOS VER QUE...

RESULTA INMEDIATO QUE  $\widehat{ABC}$  Y  $\widehat{AB'C'}$  SON SEMEJANTES, LUEGO:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB'}{B'C'} ; AB' = AB + BB' = AB + h$$

$$y \quad B'C' = a$$

POR TANTO:  $\frac{AB}{BC} = \frac{AB+h}{a}$

ENTONCES:

$$a \cdot AB = BC \cdot AB + h \cdot BC$$

$$a \cdot AB - BC \cdot AB = h \cdot BC$$

$$AB(a - BC) = h \cdot BC$$

$$\text{LUEGO: } h = \frac{AB \cdot (a - BC)}{BC}$$

LO SABIO ES UNA COSA : LA RAZON QUE DIRIGE TODAS LAS COSAS A TRAVES DE TODAS LAS COSAS .

∞ HERACLITO ∞

... OTRA COSA MUY PARTICULAR DE CHINA SON LOS CUADRADOS MAGICOS...  
 ... LLAMAMOS CUADRADO MAGICO AL CUADRADO QUE ESTA FORMADO POR VARIOS NUMEROS, Y QUE SUMADOS POR FILAS, COLUMNAS Y DIAGONALES, DA SIEMPRE EL MISMO RESULTADO...



Lámina 6: Figuras Mágicas. Matemáticas en China.

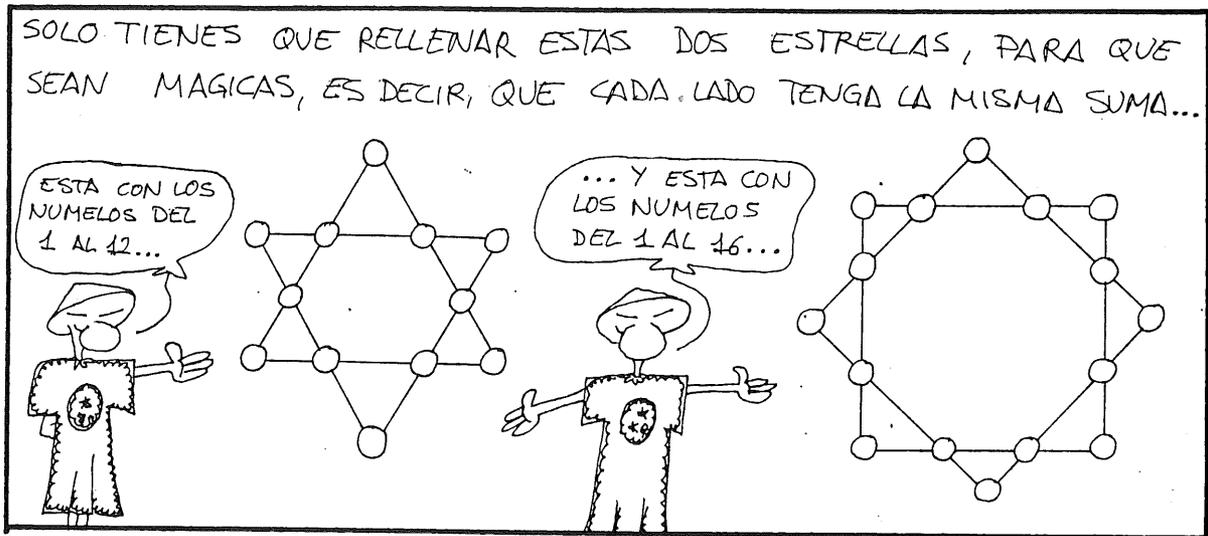


Lámina 7: Figuras Mágicas. Matemáticas en China.

... VEAMOS UNOS CUANTOS PROBLEMAS DEL LILAVATI:

"LA QUINTA PARTE DE UN ENJAMBRE DE ABEJAS SE POSA SOBRE UNA FLOR DE KADAMBA..."

TU, NO EMPUJES

JO, QUE AGOBIO

ESTA FLOR ES DEMASIADO PEQUENA PARA LOS DOS...

ESTO PARECE EL METRO

"... LA TERCERA PARTE EN UNA FLOR DE SICINDA..."

Y TODAVIA TENDRAN ESAS MORRO DE RUEJARSE...

¡AY!, NO ME PISES...

... CUANDO MESAGUES EL ALA DEL OJO...

JO, PUES SI VIESEIS A LAS QUE ESTAN DENTRO DE LA FLOR...

"... EL TRIPLE DE LA DIFERENCIA ENTRE ESTOS DOS NUMEROS VUELA SOBRE UNA FLOR DE KRUTJA..."

¿EN ESTA?

NO, QUE HUELE QUE APESTA...

"... Y UNA VUELA INDECISA DE UNA FLOR DE PANDANUS A UN JAZMIN"

PITO PITO, COLORITO...

... DIME, HERMOSA NIÑA, EL NUMERO DE ABEJAS

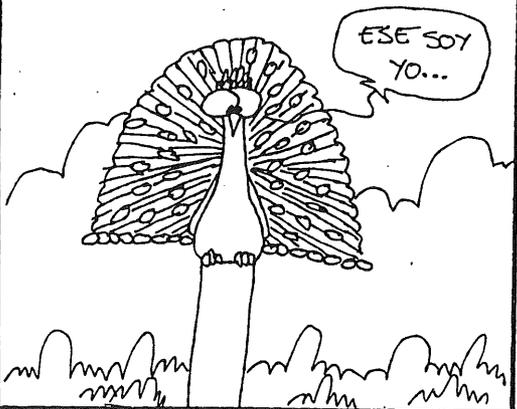
¿CUANTAS HAY? ... NUMERO DE ABEJAS = X

LA QUINTA PARTE	TERCERA PARTE	DIFERENCIA ENTRE ESTOS	EL TRIPLE DE LA DIFERENCIA	UNA INDECISA	EL TOTAL DE ABEJAS, "X", SERIA:
$\frac{x}{5}$	$\frac{x}{3}$	$\frac{x}{3} - \frac{x}{5}$	$3\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{5}\right)$	1	
COMPROBACION:		2 →	* 3 ↓		
3 →	+ 5	→	+ 6	→ + 1	= 15 ABEJAS

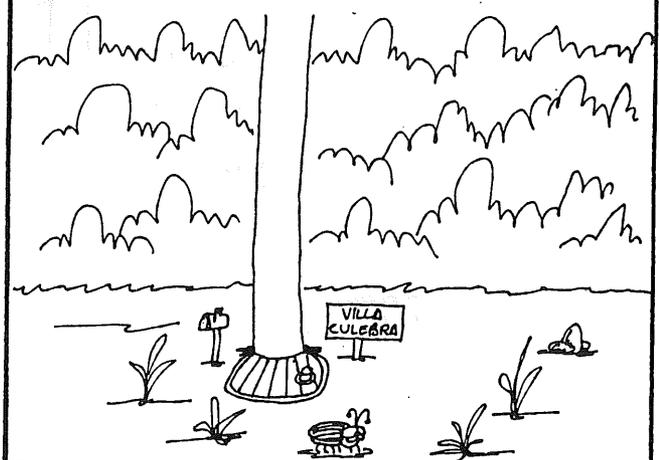
... ESTO ES UN CLARO EJEMPLO DE ALGEBRA INDIA, QUE ERA RETORICA, ES DECIR, SOLO A BASE DE PALABRAS, SIN SIGNOS COMO AHORA...

Lámina 8: Matemática Indú. El Lilavati.

... UN PAVO REAL ESTABA CIERTO DÍA POSADO SOBRE UN POSTE DE 9 Codos DE ALTURA ...



... EN LA BASE DEL POSTE HAY UN AGUJERO DE CULEBRA ...



... EL PAVO SE LANZA A POR LA CULEBRA, QUE ESTA A UNA DISTANCIA DEL POSTE IGUAL A 3 VECES SU ALTURA ...



... CUANDO LA ATRAPA, LOS DOS HAN RECORRIDO LA MISMA DISTANCIA



¿A QUE DISTANCIA DEL POSTE COGIO EL PAVO A LA CULEBRA?

HAY QUE CALCULAR "Y"

SI LA CULEBRA ESTABA DEL POSTE AL TRIPLE DE SU ALTURA, TENEMOS:

$$x + y = 27$$

POR OTRO LADO, SEGUN EL TEOREMA DE PITAGORAS:

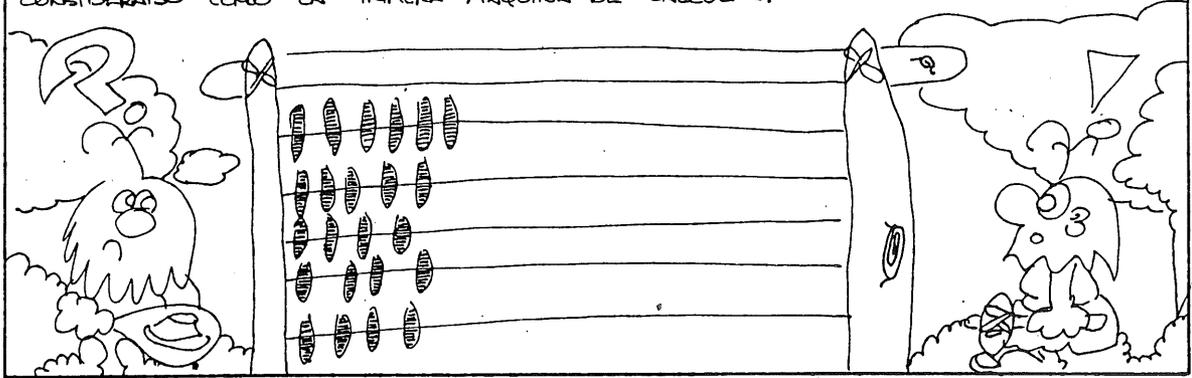
$$y^2 + 81 = x^2$$

SI RESUELVES ESTE SISTEMA TENDRAS LA SOLUCION  $y = 12$

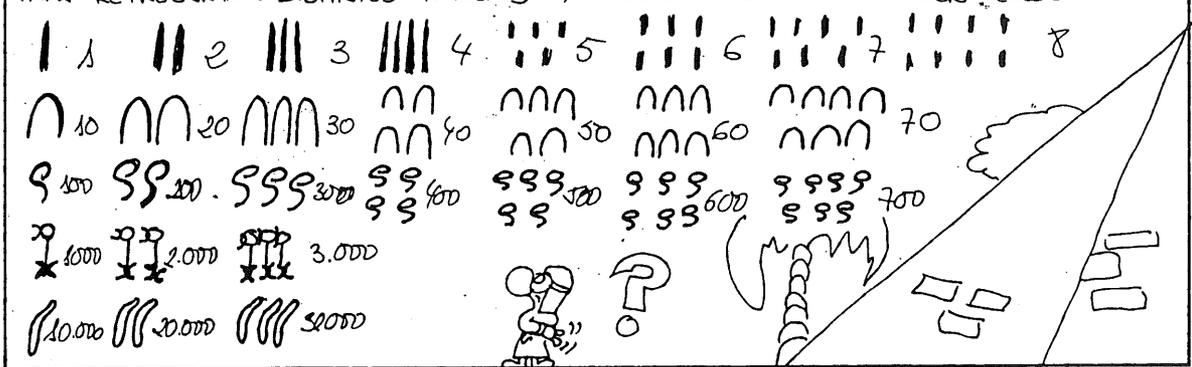
Lámina 9: Matemática Indú. El Lilavati.

DESDE QUE EL HOMBRE EMPEZÓ A CONTAR, HAN SIDO MUCHOS LOS SÍMBOLOS Y ARTILUGIOS CREADOS PARA DICHO FIN.

EN TIEMPOS QUE SE REMONTAN A LA PREHISTORIA NOS ENCONTRAMOS CON MUESCAS, MONTONES DE PIEDRAS, Y EN CIVILIZACIONES ORIENTALES EL ÁBACO CONSIDERADO COMO LA PRIMERA MÁQUINA DE CALCULAR.



LOS SÍMBOLOS SE CONFIGURAN DE FORMAS MUY VARIADAS SEGÚN LA CIVILIZACIÓN DE QUE SE TRATE. EN EGIPTO SU ESCRITURA JERoglíFICA SIRVE TAMBIÉN PARA REPRESENTAR DISTINTOS NÚMEROS Y EFECTUAR OPERACIONES CON ELLOS.



EN MESOPOTAMIA LA ESCRITURA CUNEIFORME, CONFIGURA UN SISTEMA DE NUMERACIÓN SEXAGESIMAL QUE DE ALGUNA MANERA EN NUESTROS DÍAS SE UTILIZA PARA MEDIDA DE TIEMPO Y ÁNGULOS.

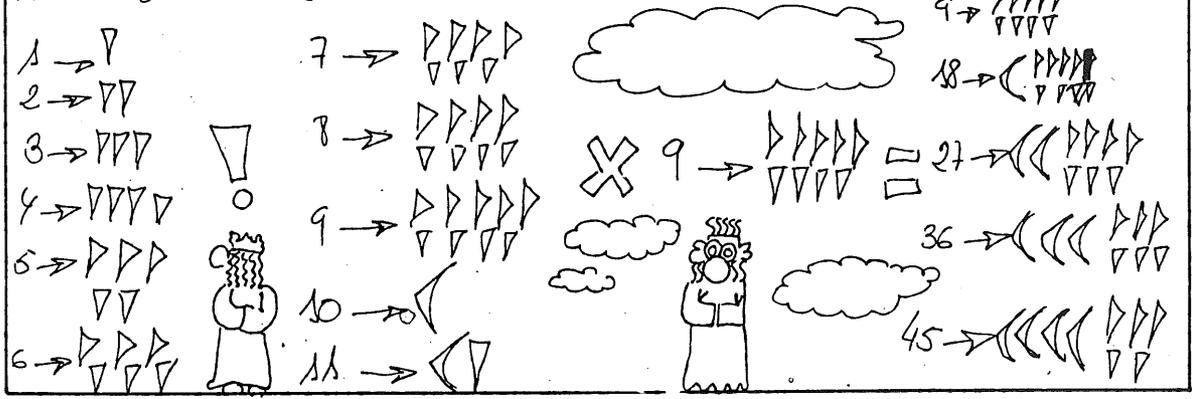
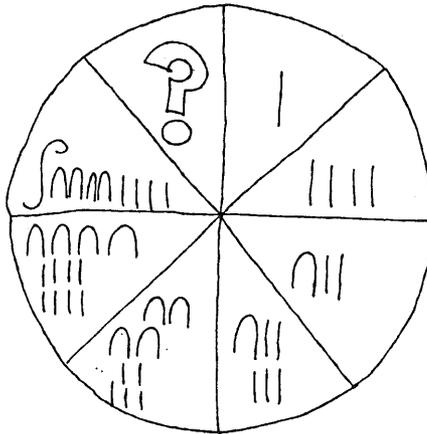


Lámina 10: Sistemas de Numeración.



# SISTEMA DE NUMERACIÓN

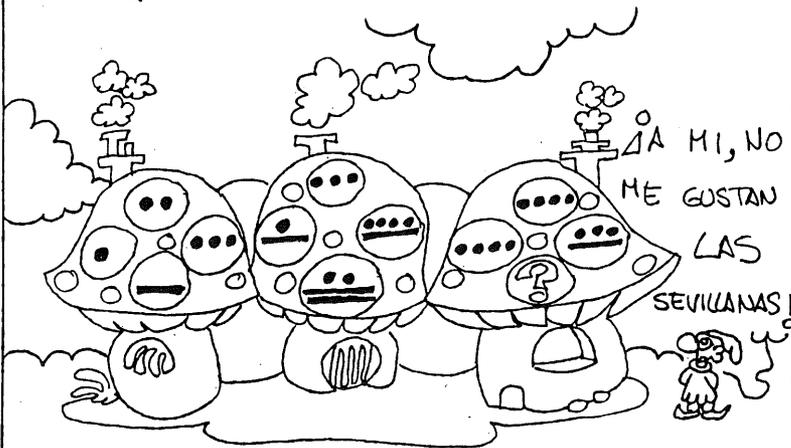
AUNQUE NO LO CREAS, TODO TIENE SU SENTIDO, INCLUSO LA PROGRESIÓN DE LOS NÚMEROS QUE APARECEN EN ESTE CÍRCULO ESCRITO EN NUMERACIÓN EGIPCIA. ¿SERÍAS CAPAZ DE DESCUBRIR LA REGLA?



1	→	1
IIII	→	4
∩ II	→	12
∩ III	→	15
∩∩ IIII	→	45
∩∩ IIII	→	48
S∩∩ IIII	→	144

# A LA TERCERA VA LA VENCIDA

COMO VERÁS, NUESTROS TRES HONGOS ESTÁN ADORNADOS CON CUATRO NÚMEROS MAYAS. BUENO, MÁS EXACTAMENTE LOS DOS PRIMEROS, PORQUE EN EL TERCERO UNO DE LOS HUECOS ESTÁ OCUPADO POR UN SIGNO DE INTERROGACIÓN. PERO SEGURO QUE TÚ, DE UNA SIMPLE OJEADA, ERES CAPAZ DE DESCUBRIR LA CIFRA QUE DEBIERA OCUPAR EL CUARTO LUGAR.



1	→	•	2	→	••
3	→	•••	4	→	••••
5	→	—	6	→	—•
8	→	—••	9	→	—•••
12	→	—•••			

# FERMAT - SIGLO XVII

UN NÚMERO PRIMO MAYOR QUE 4 AL DIVIDIRLO POR 4  
 ¿ QUÉ RESTOS PUEDE DAR ?

“RESTOS” ¿ QUE PALABRA TAN VULGAR !

- 0 ... NO
- 1 ... SI
- 2 ... NO
- 3 ... SI



ARRIBA

RESTO 1 =	5	13	17	29	37	...
RESTO 3 =	7	11	19	23	27	...

ABAJO

$$5 = 1 + 4 = 1^2 + 2^2$$

$$13 = 4 + 9 = 2^2 + 3^2$$

$$37 = 1 + 36 = 1^2 + 6^2$$



¿ SERÁ CIERTO EN GENERAL? ¿ SERÁ CIERTO PARA LOS DE ABAJO?

TEOREMA DE FERMAT:

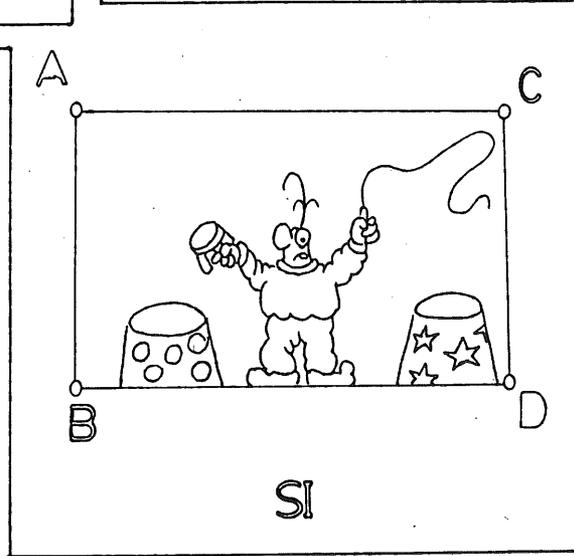
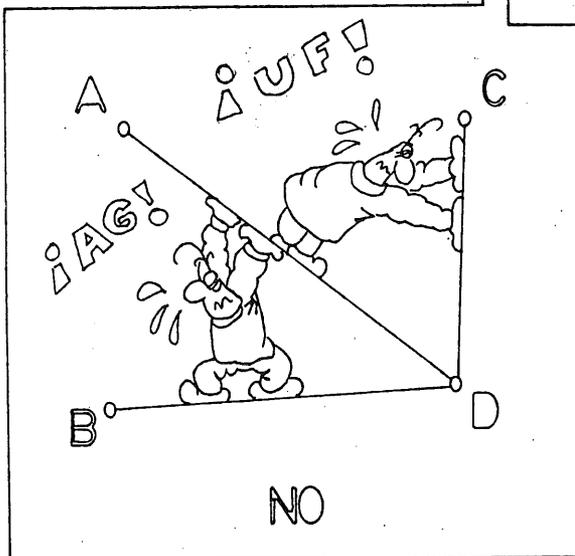
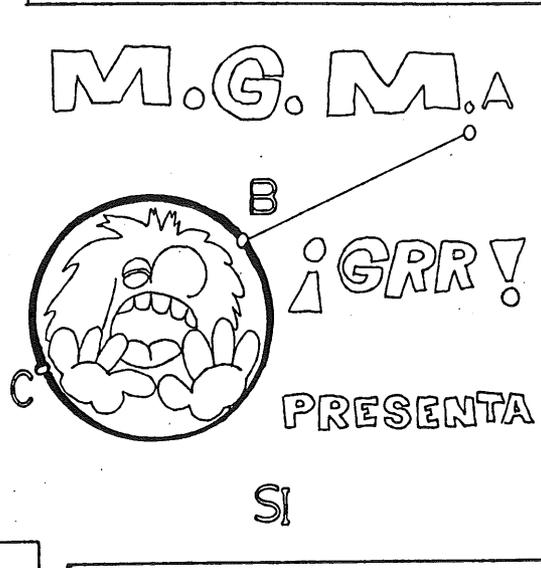
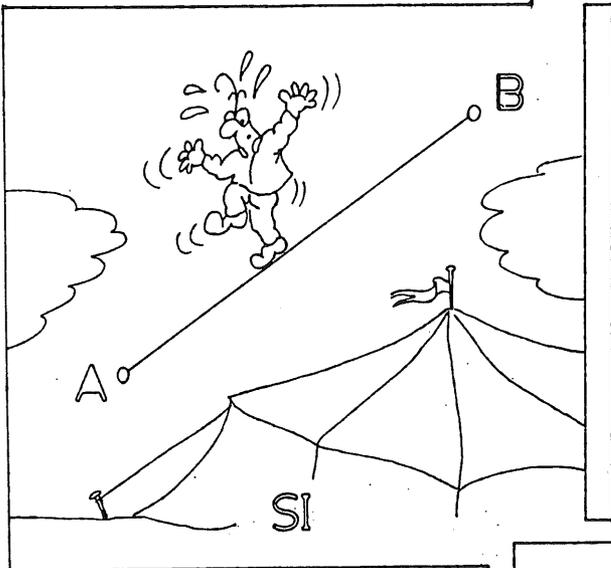
“ TODO NÚMERO PRIMO QUE AL DIVIDIRSE POR 4 DA RESTO 1 SE PUEDE PONER COMO SUMA DE DOS CUADRADOS Y SI DA RESTO 3, NINGUNO SE PUEDE PONER COMO SUMA DE CUADRADOS ”.



Lámina 13: Teoría de números: Fermat.

# EULER - SIGLO XVIII - "SIN LEVANTAR EL LÁPIZ"

¿SABRÍAS REPETIR LAS SIGUIENTES FIGURAS SIN LEVANTAR EL LÁPIZ DEL PAPEL  
Y SIN REPETIR DOS VECES UNA MISMA LINEA ?

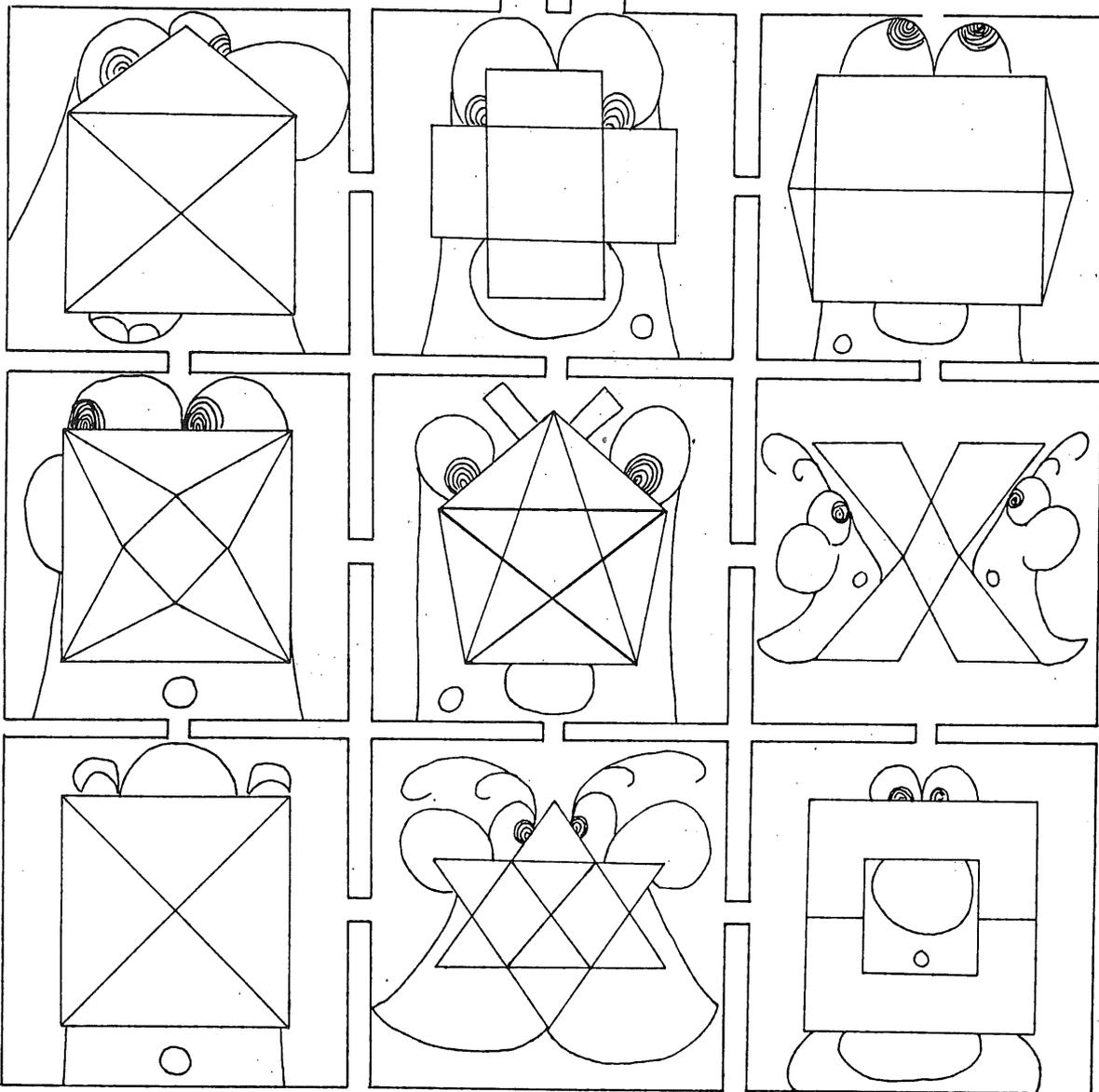


VE APRENDIENDO ESTO:

VÉRTICE  $\begin{cases} \text{PAR} : \text{DE ÉL SALE UN NÚMERO PAR DE CAMINOS.} \\ \text{IMPAR} : \text{DE ÉL SALE UN NÚMERO IMPAR DE CAMINOS.} \end{cases}$

Lámina 14: Euler: "Sin levantar el lápiz".

OBSERVA LOS DIAGRAMAS SIGUIENTES:



EN CADA FIGURA CUENTA LOS VÉRTICES IMPARES

TRATA DE DIBUJARLO SIN LEVANTAR DEL PAPEL EL LÁPIZ Y SIN REPETIR DOS VECES UNA MISMA LINEA.



INTENTA HACERLO



Lámina 15: Euler: "Sin levantar el lápiz".