

# Juegos y matemáticas\*

Miguel de Guzmán

## Matemática, arte y juego

La matemática es una actividad humana extraordinariamente polifacética. Es, por supuesto, una ciencia, es más, es el paradigma y modelo de la actividad científica. Es un instrumento poderoso para la exploración del universo y para la utilización adecuada de los recursos en él disponibles. Es modelo de pensamiento que sirve como campo privilegiado para el estudio de las capacidades de la mente humana. Pero, además, y muy profundamente, la matemática ha sido y es *arte y juego* y esta componente artística y lúdica es tan consubstancial a la actividad matemática misma que cualquier campo de desarrollo matemático que no alcanza un cierto nivel de satisfacción estética y lúdica permanece inestable, buscando una expresión más acabada que sea capaz de ofrecer una visión unitaria, placentera, divertida, ... como una sinfonía o un poema en gestación busca, en la mente de su autor, la forma de expresión más bella posible. En lo que sigue analizaremos esquemáticamente las relaciones de la matemática con el juego, dejando a un lado el análisis de su componente artística, examen que ha sido realizado por autores tales como Garret Birkhoff, Helmut Hasse, Andreas Speiser, Hermann Weyl,...

## Naturaleza de la actividad lúdica

La actividad lúdica ha sido analizada en profundidad por el sociólogo Johann Huizinga en su obra *Homo ludens*. Él destaca como características del *juego* los siguientes rasgos:

—Es una actividad *libre*, en sentido de la *paideia* de los griegos clásicos, es decir se ejerce por amor de ella misma, no por razón del provecho que de ella se deriva.

—Con una *cierta función* en el desarrollo del hombre. El cachorro humano, como el animal, juega y se prepara con ello para la competición y la vida en general. El adulto juega y se evade, se relaja, se libera.

—El concepto de juego *no coincide con el de broma*. El juego ha de ser tomado en serio. El peor revientajuegos es quien se lo toma en broma.

—El juego, como el arte, produce *placer a través de su contemplación y su ejecución*.

—Es una actividad *separada de la vida ordinaria* en el tiempo y en el espacio.

—Se dan ciertos elementos de *tensión*, cuya liberación y catarsis causa placer.

—Da lugar a *lazos muy especiales* entre los practicantes del mismo juego. Emerge una especie de hermandad muy especial.

—Crea a través del establecimiento de sus reglas, *un nuevo orden, una nueva vida*, llenos de ritmo y armonía.

Un somero análisis de la actividad matemática permite comprobar cómo todas estas características están presentes en muchas de las formas de nuestro quehacer matemático. La matemática, en su misma esencia profunda, es *también* juego, si bien este juego involucra otras facetas, como las apuntadas al comienzo, científica, instrumental, filosófica, que hacen de la matemática uno de los pilares básicos de la cultura humana.

## El ejercicio del juego y de la matemática

Si la matemática y el juego tienen muchos rasgos en común en lo que se refiere a su finalidad y a su naturaleza profunda, no es menos cierto que también participan de la misma estructura esencial en lo que respecta a su

\* N.R. Este trabajo ha sido el eje de la conferencia que el autor desarrolló en Leeds, por invitación de I.C.M.I., durante el Congreso sobre Popularización de las Matemáticas.

mismo ejercicio. Esto es particularmente interesante a la hora de preguntarnos por los métodos más adecuados de transmitir a un público amplio el interés profundo y el entusiasmo que las matemáticas son capaces de suscitar, así como una primera familiarización práctica con sus modos habituales de proceder.

Un juego cualquiera comienza con la introducción de unas cuantas reglas, algunos objetos iniciales, piezas, cuya función queda definida por dichas reglas, exactamente del mismo modo que los objetos de una teoría matemática quedan determinados por definición implícita: "Sean dados tres sistemas de objetos. Los objetos del primer sistema serán llamados puntos,..."

Quien se inicia en la práctica del juego ha de adquirir una cierta familiarización con sus reglas, relacionando unas piezas con otras como el novicio va comparando y haciendo interactuar los primeros elementos de una teoría matemática. Son los ejercicios elementales del juego o de la teoría. El practicante que va avanzando en el dominio del juego es capaz de hacerse con unas cuantas técnicas sencillas que en circunstancias especiales dan buen resultado. Son los lemas y hechos básicos generalmente asequibles en un primer enfrentamiento serio con los problemas del campo en cuestión.

El estudio más profundo de un juego con cierta historia le dará a conocer los resultados y estilos peculiares de proceder que los jugadores más avanzados que le han precedido han transmitido a la posteridad. Son jugadas más complicadas, más profundas, que han requerido una especial inspiración por hallarse más lejos de los elementos básicos iniciales. Esto corresponde en matemáticas al estadio de asimilación por el estudiante de los grandes teoremas y métodos que se han ido gestando a lo largo de los siglos. Son los procesos de pensamiento de los verdaderamente grandes puestos a su disposición para hacer luz en situaciones confusas y delicadas.

Más adelante, en los grandes juegos, donde la presencia de problemas interesantes nunca se agota, el practicante avanzado trata de resolver de modo original situaciones inéditas del juego. Corresponde a la investigación en problemas abiertos en matemáticas.

Finalmente, unos pocos son capaces de crear juegos nuevos, fértiles en ideas y situaciones de interés, que dan lugar a estrategias posibles originales y a procesos lúdicos innovadores. Esto corresponde a la creación de nuevas teorías matemáticas, ricas en ideas y problemas en sí mismas, y posiblemente con aplicaciones para atacar problemas abiertos y para explorar más profundamente niveles de la realidad hasta entonces en penumbra.

## El impacto de los juegos en la matemática

Son muchos los casos en que una pregunta interesante realizada en un plano lúdico o bien una observación ingeniosa sobre una situación aparentemente inocente han dado lugar a nuevos modos de pensar en matemáticas. Como Leibniz escribió en 1715: "Nunca son los hombres más ingeniosos que en la invención de los juegos. El espíritu se encuentra ahí a sus anchas..." Y el mismo Littlewood, en nuestro siglo, escribía: "Un buen chiste matemático es mejor, y mejor matemática, que una docena de artículos mediocres".

Yes que las preguntas y situaciones que son capaces de romper los bloqueos intelectuales y que hacen avanzar el pensamiento matemático surgen muy a menudo cuando somos capaces de colocarnos en una actitud distendida y juguetona, fuera del contexto serio y severo con que se reviste normalmente la ciencia oficial.

En el inicio de la combinatoria se suele colocar el *Libro de los Cambios (I Ching)* con su conocida distribución de símbolos adivinatorios y los cuadrados mágicos con sus significaciones místicas.

Los juegos con piedras de los pitagóricos dieron lugar a interesantes teoremas en teoría de números. Las paradojas de Zenón deben leerse como una especie de burlona denuncia de una forma de pensar prevalente entre los matemáticos contemporáneos. El mismo Euclides, según parece, se sirvió de la falacia en sus *Pseudaria*, un libro desaparecido, para interesar a sus alumnos en los procesos correctos de pensamiento. Arquímedes, con su *Problema bovinum* y su *Contador de arena* se enfrenta claramente a situaciones de sabor lúdico para afilar sus instrumentos matemáticos.

La lista de objetos matemáticos que han venido a la existencia motivados por el espíritu de los juegos sería interminable. Baste señalar algunos de los nombres de matemáticos famosos que se podrían destacar en este contexto: Fibonacci, Fermat, Pascal, Leibniz, Euler, Bernoulli, Gauss, Hamilton, Hilbert; Von Neumann;... Un esquema breve, pero muy enjundioso, de la evolución de las recreaciones matemáticas se puede ver en el artículo de W.L. Schaaf en la *Encyclopaedia Britannica* titulado *Number Games and Mathematical Recreations*.

## Matemáticas en los juegos

La riqueza en temas matemáticos de los juegos que se han ido creando a lo largo de los siglos y de los que se crean en la actualidad es impresionante. La mejor manera de darse cuenta de ello consiste en ojear las obras clásicas

de Lucas, Ball (Ball y Coxeter) así como las compilaciones bibliográficas de W.L. Schaaf sobre la literatura reciente de juegos matemáticos, editada por el National Council of Teachers of Mathematics.

Junto a la aritmética, la geometría, la teoría de números, como fuentes clásicas de las recreaciones, figuran la topología, la geometría combinatoria, la teoría de grafos, la lógica, la teoría de la probabilidad, ... En todos estos campos antiguos y nuevos figuran innumerables problemas abiertos, posiblemente tan difíciles como el último teorema de Fermat, esperando probablemente la creación de nuevos métodos de pensamiento que sean capaces de resolverlos. De muchos de ellos no se podría decidir con precisión si entran en la categoría de matemática seria o de puzzle ocioso. Probablemente se puede afirmar con razón que cualquier juego o puzzle suficientemente profundo puede llegar a tener repercusiones muy importantes en aspectos interesantes de la matemática. En la creación de puzzles o juegos el hombre puede desplegar con más libertad su imaginación sin necesidad de encasillarla en absoluto en las estructuras conceptuales o metodológicas de una teoría tradicional ya constituida.

Entre los muchos ejemplos de juegos en los que se pueden poner de manifiesto los esquemas de pensamiento comunes con la actividad matemática quisiera proponer únicamente el de la *rana saltarina*, un juego para una sola persona que a mi me llama especialmente la atención por la riqueza de niveles distintos a los que se puede afrontar, desde el meramente manipulativo al hondamente matemático, así como por la riqueza de métodos heurísticos que en su exploración se pueden ensayar.

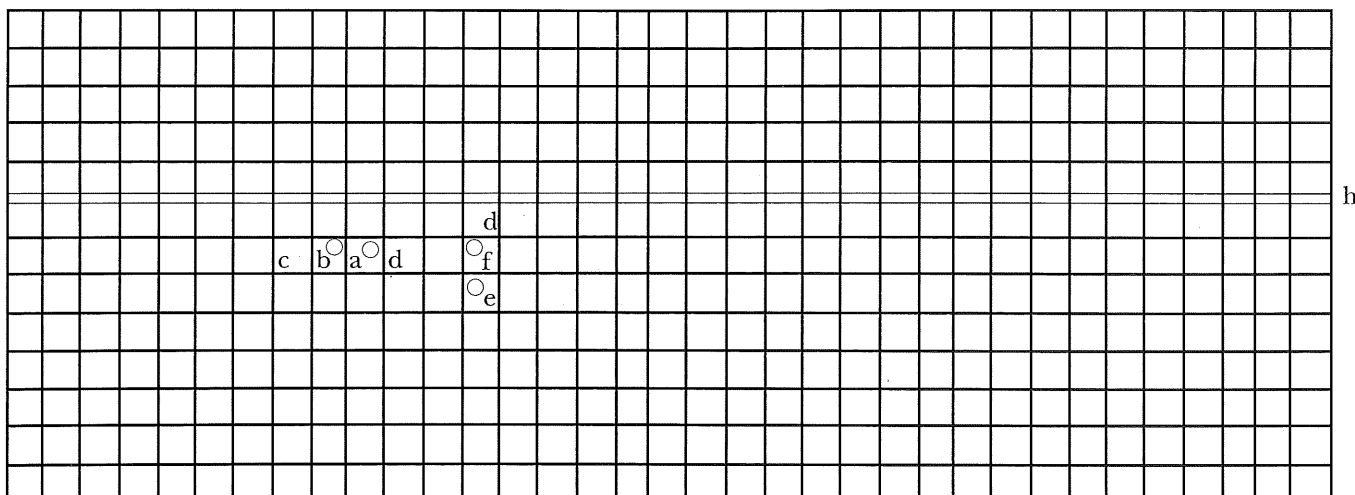
Se considera una cuadrícula infinita con una línea horizontal distinguida  $h$ . Se colocan al principio del juego un número cualquiera de fichas, una en cada uno de los cuadros bajo la línea  $h$ , arbitrariamente distribuidas. Una vez colocadas en el tablero se empiezan a mover. Las reglas del movimiento son las siguientes: Una ficha puede saltar sobre otra situada a su derecha a un cuadro vacío y la ficha sobre la que se ha saltado se retira del tablero. Por ejemplo la ficha del cuadro A en la figura puede saltar al cuadro C y la del cuadro B desaparece entonces del tablero. Análogamente, una ficha puede saltar hacia la izquierda (la de E salta a G sobre la ficha en F que desaparece). El juego consiste en tratar de responder a la siguiente pregunta: ¿Cuántas fichas como mínimo habrá que colocar inicialmente bajo  $h$  y en qué situación se deberán poner para, mediante los movimientos permitidos, lograr colocar una ficha en la fila quinta encima de  $h$ ?

### Juego en la matemática

Hay mucha matemática profunda con sabor a juego. De entre los temas modernos se pueden señalar unos cuantos en los que esto es más patente. Sobre algunos de ellos incluso se pueden idear juegos entretenidos y nada triviales:

—*Teorema de los cuatro colores*. Todo mapa en el plano se puede colorear adecuadamente con cuatro colores.

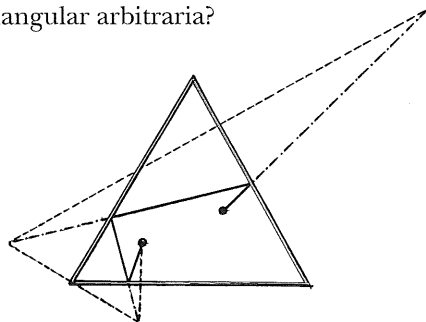
—*Teorema de Ramsey* (versión elemental). Dados seis puntos sobre una circunferencia, si se unen dos a dos y se pintan los segmentos resultantes o bien de rojo o bien de verde, entonces hay necesariamente al menos un triángulo formado por segmentos del mismo color.



—*Teorema de Sperner*. Un triángulo ABC se triangula, es decir se hace una partición de él en triángulos pequeños de modo que cada dos de estos son, o disjuntos, o tienen un sólo vértice en común, o bien sólo tienen todo un lado en común. A los vértices de la triangulación se les da los nombres A,B,C arbitrariamente con la única restricción de que ningún vértice situado sobre el lado AB del triángulo original se llame C, ningún vértice sobre BC se llame A y ningún vértice sobre CA se llame B. Entonces necesariamente hay un triángulo de la partición cuyos vértices se llaman A,B,C.

—*Problema de la aguja (Kakeya)*. Hallar el ínfimo de las áreas de las figuras planas en las que una aguja de longitud unidad puede maniobrar de modo continuo de tal manera que al final ocupe la posición inicial pero en sentido invertido.

—*Problema del billar triangular*. Las trayectorias ideales de una bola de billar puntual en una mesa de billar rectangular son periódicas o bien llenan densamente la mesa, es decir pasan arbitrariamente cerca de cualquier punto. ¿Qué se puede decir de las trayectorias en una mesa triangular arbitraria?



Otros muchos problemas se podrían citar con el mismo sabor a juego: teoremas del punto fijo, teorema de Helly, conjetura de Hadwiger, conjetura de Borsuk,...

### Los juegos como instrumento para la enseñanza y la popularización de la matemática

Martín Gardner ha expresado con cierto la situación: "Con seguridad el mejor modo de despertar a un estudiante consiste en presentarle un juego matemático intrigante, un puzzle, un truco mágico, una paradoja, un modelo o cualquiera otra de entre una veintena de posibilidades que los profesores aburridos tienden a evitar porque parecen frívolas" (Carnaval Matemático, Prólogo).

El investigador matemático experimentado suele comenzar su aproximación a la cuestiones que le atraen en clave de juego, como el niño que se acerca a un

juguete, abierto a la sorpresa, al misterio que espera desvelar poco a poco, con el esfuerzo placentero del descubrimiento. ¿Por qué no fomentar el espíritu lúdico en el acercamiento didáctico a todos los temas matemáticos? El juego matemático bien escogido puede conducir al estudiante de cualquier nivel a la mejor atalaya de observación y aproximación inicial a cualquiera de los temas de estudio con los que se ha de enfrentar. Los beneficios de hacerlo así son innumerables: apertura, desbloqueo, motivación, interés, diversión, entusiasmo,...

Por otra parte, como hemos visto antes, la semejanza de estructura de la matemática y los juegos permite comenzar a ejercitar en estos las mismas herramientas, los mismos procesos de pensamiento que son útiles en los desarrollos matemáticos. Las habilidades heurísticas en matemáticas pueden iniciarse con enorme fruto en la práctica y exploración de juegos muy diversos, como por ejemplo la obra de Averbach y Chein, *Problem Solving Through Mathematical Games*, ha puesto certeramente de manifiesto con una magnífica colección de juegos matemáticos recopilados con este propósito.

Pero sobre todo, el espíritu lúdico de acercamiento a los problemas matemáticos más serios es el aspecto que más puede beneficiar al estudiante, impregnando positivamente toda su personalidad científica para el futuro, como estudiante y como posible investigador.

Desde el punto de vista de la popularización de las matemáticas, el efecto de los juegos matemáticos es tan obvio que no insistiré mucho. En la dedicatoria de la obra maestra de Berlekamp, Conway y Guy, *Winning Ways for your Mathematical Plays*, los autores escriben, con toda justificación, "To Martin Gardner who has brought more mathematics to more millions than anyone else". Matemáticas y juegos, como hemos tenido ocasión de ver, son a menudo indiscernibles en su contenido, pero mucho más aún en el espíritu y los métodos con que se pueden abordar. La matemática es un grande y sofisticado juego que, además, resulta ser una obra de arte intelectual, portadora en innumerables ocasiones de una gran luz para explorar el universo y con repercusiones prácticas de gran alcance. Los intentos de popularización de la matemática a través de la presentación de sus potentes aplicaciones, de aspectos interesantes de su historia, a través de la biografía de algunos de los matemáticos famosos, de sus relaciones con la filosofía u otros aspectos del pensamiento humano pueden servir eficazmente para acercar la matemática a muchas personas. Pero posiblemente ningún otro método acercará a una persona más a lo que constituye el quehacer interno de la matemática como un juego bien escogido.