Funciones y Gráficas

Félix Alayo

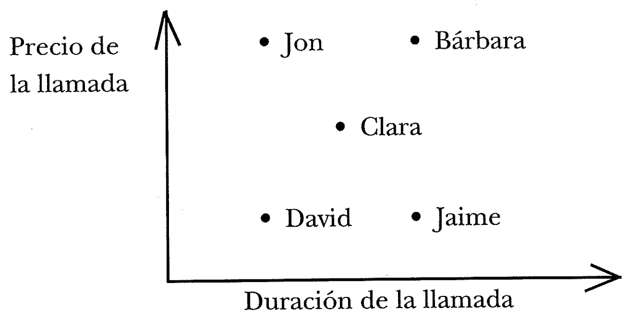
La orientación que tradicionalmente se da a este tema es sumamente abstracta y en la mayoría de los casos carece completamente de sentido para nuestros alumnos. Ciertamente muchos de ellos acabarán haciendo una gráfica más o menos aproximada a partir de la fórmula algebraica que nosotros les demos (en ocasiones camuflada con algún pequeño enunciado), pero esto carecerá de significado alguno para la mayoría. Difícilmente adquirirán una comprensión global sobre los comportamientos y tendencias generales de funciones y gráficas. Cuando se les plantee una situación nueva, volverán a cometer exactamente los mismos errores que antes de iniciar el tema y la utilidad de lo aprendido será casi exclusivamente la de superar con éxito las matemáticas escolares.

Sin embargo también hay otras formas de trabajar. Podemos plantear en clase situaciones realistas, próximas a los alumnos y sobre las que todos puedan opinar, al margen de su nivel de competencia matemática. De esta forma conseguiremos que las ideas previas de los estudiantes salgan a la luz. La discusión sobre estas ideas genera situaciones de conflicto en el alumno que pueden permitirle revisar sus concepciones previas.

A continuación se presentan dos problemas extraídos del módulo "The Language of Functions and Graphs" del Shell Centre de la Universidad de Nottingham [1] y se comenta lo ocurrido en el aula con un curso de 2º de REM cuando se ha trabajado con ellos, primero en pequeños grupos de tres alumnos (intentando llegar a un consenso dentro de cada grupo) y luego en un debate general del conjunto de la clase.

Llamadas telefónicas

Un fin de semana. Cinco personas hicieron llamadas a varias partes del país. Anotaron el precio de sus llamadas y el tiempo que estuvieron en el teléfono en la siguiente gráfica:



—*¿Quién puso una llamada a larga distancia? Explica con cuidado tu razonamiento.*
—*¿Quién realizó una llamada local? Explícalo.*
—*¿Quiénes hicieron llamadas a la misma distancia aproximadamente? Explícalo de nuevo.*
—*Copia la gráfica y marca otros puntos que representen a personas que hicieron llamadas locales de diversa duración.*
—*Si hicieras una llamada local mostrando todas las llamadas telefónicas realizadas desde Bilbao en un fin de semana, ¿cómo sería? Dibuja un esquema e indica claramente las suposiciones que haces.*

Estas fueron algunas de las ideas que surgieron a lo largo de un debate en clase:
—*¿Quién llamó a larga distancia?*

Varios: "Jon y Bárbara, porque son los que más pagan".

Fernando: "Sólo Jon, porque paga mucho y habla poco".

Varios: "Pero los dos pagan lo mismo".

Gran discusión. Alguién dice que "el que habla mucho y paga mucho es el que llama más lejos". Al final parece que se aclara.
—*¿Quién realizó una llamada local?*

Varios: "David y Jaime, porque los dos hablan poco".

Fernando y alguno más: "Sólo Jaime, porque paga poco y es el que más habla".

De nuevo gran discusión. Parece que el debate anterior no ha sido suficiente ya que vuelven a surgir los mismos errores. Insistimos. Al final se acepta el criterio de que por el mismo precio, llama más lejos el que menos habla.

—*¿Quiénes hicieron llamadas a la misma distancia aproximadamente?*

Alguien: "Jon y David, porque los dos hablan el mismo tiempo".

Iratxe: "Jon y David y también Bárbara y Jaime".

Fernando ha sugerido ya que son David, Clara y Bárbara. De momento me limito a apuntarla como una posibilidad más, pero no la discutimos todavía. Abordamos lo expuesto por los demás. Tras un buen rato de discusión se llega a la conclusión de que hay que relacionar las dos variables, y entonces Fernando vuelve a insistir en que "son David, Clara y Bárbara, porque Clara habla el doble que David y paga el doble, y Bárbara habla el doble que Clara y paga el doble".

Surge la idea de la proporcionalidad, aunque no se menciona el término. Iratxe hace un "descubrimiento": "Entonces Jon, Clara y Jaime también llaman a la misma distancia, porque Clara llama el doble y paga el doble y Jaime también".

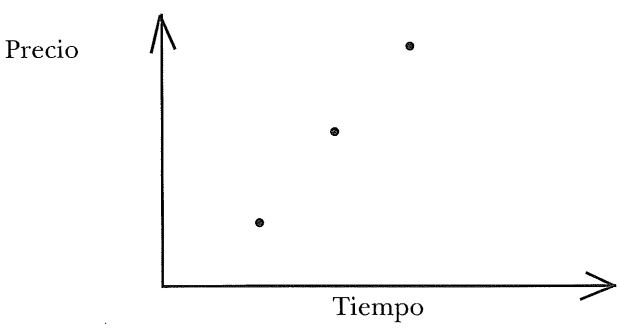
Sabin: "No; Clara paga la mitad".

Recogemos de nuevo la propuesta de Fernando y todos están de acuerdo en que es correcta porque doble-doble... Pregunto: "¿Cómo se llama eso en matemáticas?"

Subin: "Que son proporcionales".

—*Marcar otros puntos que representen a personas realizando llamadas locales.*

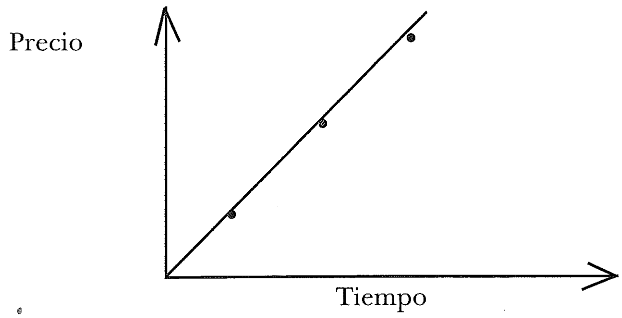
Nadie da ninguna idea. En realidad, al llegar a este punto mientras trabajaban en grupos se habían desmoralizado un poco. Mando salir a Raúl para que haga un gráfica en la pizarra. A pesar de que dice que no sabe, marca tres puntos y explica la relación doble-doble...



"¿Alguien puede decir más puntos?"

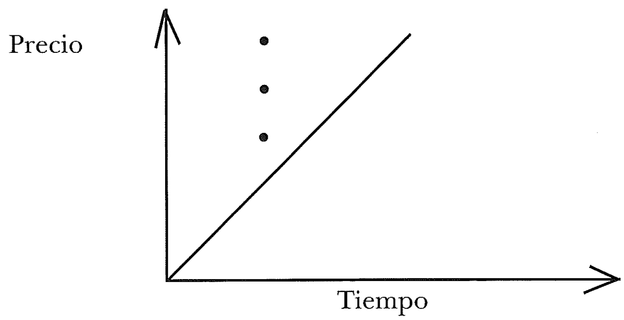
Txentxo: "Sí. Otro más arriba y a la derecha".

Sale a marcarlo y amplía: "Todos los que están sobre esta recta".



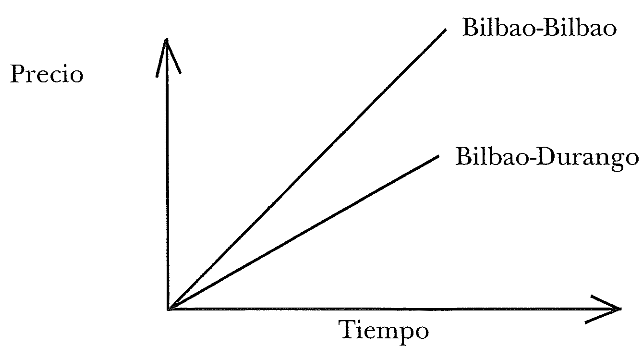
Están de acuerdo. Surge alguna duda cuando pregunto si es realmente una recta o una curva, pero todos están de acuerdo en que tiene que ser una recta y que pasa por el origen ("si no habla, no paga nada"). Me quedan dudas sobre el nivel de comprensión real. Planteo: "Estas son todas las llamadas locales, por ejemplo Bilbao-Bilbao. Vamos a marcar todas las llamadas realizadas de Bilbao a Durango".

Sobre el gráfico anterior, Raúl propone:

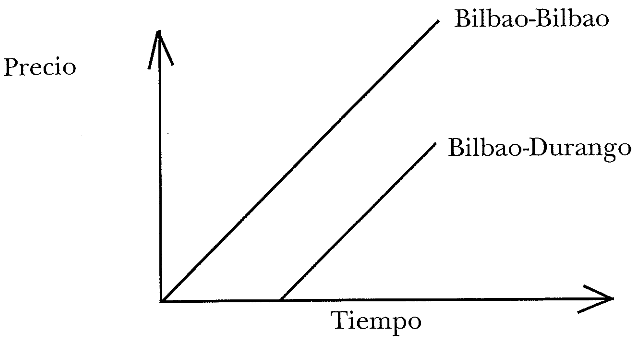


"porque tienen que pagar más".

Se discute y Arturo propone una recta.



Iratxe corrige la recta de Arturo. Propone marcar los ejes y concluye que tiene que ser una recta paralela a la anterior.

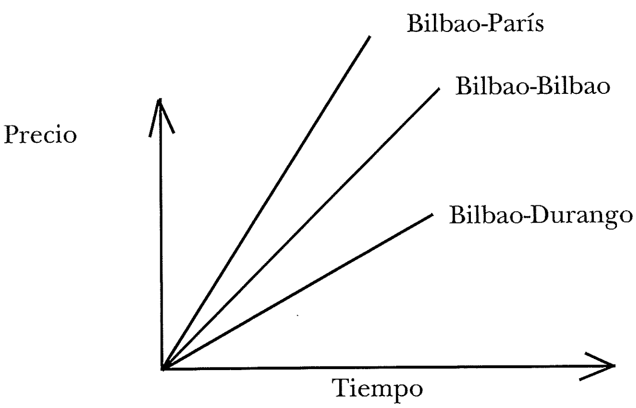


—(Dudas) *¿Tiene que cortar el eje?*
Iratxe: "Sí". Resto, dudas.
—*¿Qué significa ese punto?*
Alguien: "Que habla dos minutos".
—*¿Cuánto paga?*
Varios: "Nada".

Se acuerda que no se puede hablar gratis dos minutos. Volvemos a la propuesta de Arturo.

Raúl: "No puede ser, porque por el mismo precio el de Durango habla más".

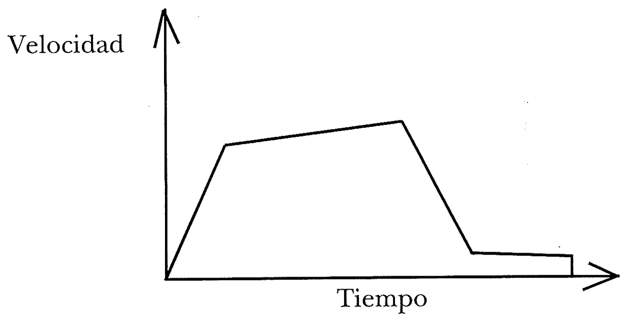
Alguien sugiere que Bilbao-Durango tiene que estar por encima de Bilbao-Bilbao. Para asegurar que esto se ha entendido, propongo representar todas las llamadas de Bilbao a París. Todos están de acuerdo con la recta que dibuja Belén.



Observar que en este caso no se pretendía que saliera la función escalonada, aunque de haber salido se habría tratado.

¿Qué deporte?

¿Qué deporte producirá una gráfica como ésta?



Elige la mejor de las siguientes respuestas y explica claramente por qué se ajusta a la gráfica.

Escribe las razones por las que rechazas las demás.

Pesca.
Salto con pértiga.
100 metros lisos.
Paracaidismo.
Golf.
Tiro con arco.
Lanzamiento de jabalina.
Salto de altura.
Salto de trampolín.
Billar.
Carrera de obstáculos.
Esquí acuático.

Este es un problema muy abierto que da mucho juego. En primer lugar, se observa una tendencia a identificarlo con los saltos o con la carrera de obstáculos por la similitud a la gráfica con la trayectoria de los atletas (aunque la gráfica se refiere a la velocidad). En el fondo de estas interpretaciones, se está considerando la gráfica como un mero dibujo de la situación. Este es un error muy extendido y que lo podremos observar casi siempre que tratemos de gráficas relacionadas con situaciones "reales".

Pero también salen muchos deportes, algunos de los cuales ni siquiera se habían propuesto, que pueden dar lugar a gráficas similares a la propuesta:

—100 metros lisos: "sale el corredor, va cada vez más rápido, luego sigue a la misma velocidad y al cruzar la meta casi se para, pero sigue andando un rato".

—La pesca: Hay dos interpretaciones: una incorrecta, que sencillamente asocia la gráfica con la forma de la caña (estamos en el mismo error que en los saltos), y otra que aporta una explicación razonable: "tiras la caña y luego al caer al agua, se queda casi quieta por allí hasta que se engancha".

—Lanzamiento de jabalina. Nuevamente dos interpretaciones. La primera, incorrecta, describe la trayectoria de la jabalina: "lanzas la jabalina, va por el aire y al caer no se clava, sino que sigue un poco por el suelo" (otra vez la identificación gráfica-dibujo). La segunda describe la velocidad del lanzador: "coge carrerilla, lanza la jabalina y luego se queda casi quieto dando unos saltitos por el impulso".

—Fútbol: "sale el futbolista desde la defensa corriendo cada vez más, luego se cansa...": Ante las dificultades para explicar un cansancio tan repentino, rectifica: "sale desde la defensa, cada vez más rápido, pasa por el centro de campo muy rápido y cuado llega al área contraria se queda casi quieto, regateando, tira, mete gol y se para". Ante esta explicación, otro alumno propone algo similar para el baloncesto.

—Paracaidismo: al lanzarse el paracaidista va cada vez más rápido, hasta que llega un momento en que la resistencia del viento se iguala con la fuerza de la gravedad, al abrir el paracaidas se produce un brusco frenazo y continúa el descenso a velocidad constante hasta llegar al suelo. Hay que suponer que nos referimos a la velocidad vertical. Esta solución (también aportada por algún alumno, aunque sin tanto detalle) podría ser "la solución oficial". pero no está claro que sea más válida que otras de las expuestas anteriormente.

Discutiendo el problema con un grupo de colegas, una profesora apuntaba también la posibilidad de que fuera el esquí acuático practicado por alguien no muy experto: al salir aumenta rápidamente la velocidad, luego se estabiliza y enseguida se cae al agua (lo que supone un frenazo); después nada un rato hasta llegar a la orilla en la que definitivamente se para.

Una nota final: los alumnos siguen discutiendo este problema en el pasillo cuando termina la clase.

[1] MALCON SWAN. *The Language of Functions and Graphs*. Join Matriculation Board. Shell Centre for Mathematical Education. University of Nottingham. 1985.

Apuntes para un tratado de cocotología

Miguel de Unamuno
Edi. Espasa Calpe. Colección Austral nº 141

La afición de Unamuno a las pajaritas y al fastidio que sentía ante aquellas personas "que no se salen nunca de su papel y adoptan siempre un continente severo", le llevan a burlarse de sí mismo a través de D. Fulgencio, pedagogo y hombre de ciencia como el propio Unamuno, y a elevar a la categoría de ciencia el juego manual de las pajaritas de papel.

Apuntes para un tratado de cocotología, es un proyecto de investigación en torno a las pajaritas de papel que nos puede hacer reir por sus desaforadas pretensiones, por las extrapolaciones místicas que contiene y por lo cómico de su objeto, pero que quizás no se encuentre tan alejado de tantos proyectos e investigaciones como hoy se producen capaces de dar al traste con el buen humor de Unamuno, si es que levantase la cabeza.

Pero ésto no es todo, los Apuntes contienen sabrosas observaciones geométricas que posiblemente le sugerirán al lector otras muchas y le incitarán a la búsqueda, pues: "la razón de ser de la pajarita de papel es su perfección geométrica... que consiste en poder inscribirse en su propio óvulo-cuadrado... Claro está que... no hay pajarita alguna que cumpla con toda exactitud rigurosa su ideal, su ideal geométrico".

Este ideal geométrico se manifiesta en su anatomía, ya que "La pajarita es, ante todo, un ser tránguli-rectánguli-isocélico" en donde está presente "la misteriosa relación de inconmensurabilidad", y hasta su fisiología, que consiste en el dinamismo de mantenerse en pie, contiene de nuevo una "¡nueva, maravillosa y sorprendente armonía triangular!".

E incluso, ¿no estará en lo cierto D. Fulgencio al conjeturar que el ancestral Tangram tiene en la pajarita de papel su origen y su razón de ser?

Mª Dolores Iriarte Bustos

N.R.

En el número anterior de "SUMA", en el artículo *Unamuno y las matemáticas*, por error tipográfico, aparecía la frase "Y yo encomendaría un asunto delicado a un puro matemático..." y debería decir "Y yo **no** encomendaría un asunto delicado a un puro matemático...".