Teorema de Thales. Aplicaciones

Miguel A. Pueyo Losa

Introducción

En el presente trabajo se expone una experiencia llevada a cabo con alumnos del segundo y tercer año del Ciclo Superior de la E.G.B. referente al estudio de los triángulos.

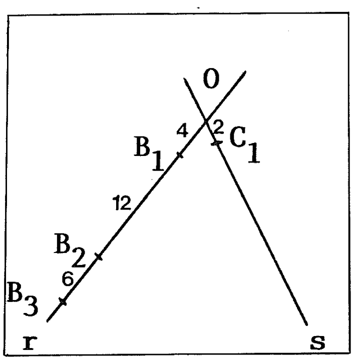
El énfasis inicial se pone en el estudio del TEOREMA DE THALES, teorema que el alumno descubre a través de mediciones que realiza, por el recortado y la manipulación de los triángulos que obtiene.

Como aplicación de este teorema descubre las relaciones métricas en los triángulos rectángulos, obteniendo "triángulos en posición de Thales" cuando aquellos se cortan por la altura relativa a la hipotenusa.

Se aborda finalmente la resolución de triángulos rectángulos y como aplicación de este estudio a la informática se introducen los diagramas de flujo y su traducción al lenguaje de programación Basic.

1. Introducción. Práctica

Dibuja en una cartulina dos recetas secantes r y s. Señala sobre la recta r tres puntos B_1, B_2 y B_3 que disten de O 4, 16 y 22 centímetros respectivamente.
Señala sobre la recta s un punto C_1 que diste 2 centímetros de O.

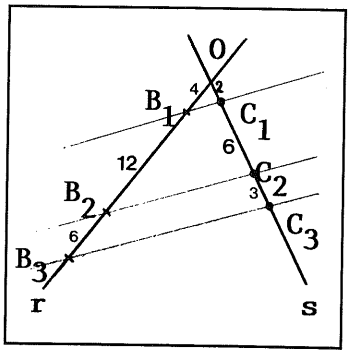


$$\left.\begin{array}{l} OB_1 = 4\text{ cm} \\ OB_2 = 16\text{ cm} \\ OB_3 = 22\text{ cm} \end{array}\right\} \begin{array}{l} B_1B_2 = 12\text{ cm} \\ B_2B_3 = 6\text{ cm} \end{array}$$

$$OC_1 = 2\text{ cm}$$

Traza la recta que pasa por B_1 y C_1 y paralelas a ésta, empleando la escuadra y el cartabón, que pasen por los puntos B_2 y B_3. A los puntos de intersección de dichas paralelas con la recta s llámales C_2 y C_3.

Comprueba que los sementos OC_2 y OC_3 miden 8 y 11 centímetros respectivamente



Resulta entonces:

$$\frac{OB_1}{OC_1} = \frac{4}{2} = 2 \ ; \qquad \frac{OB_2}{OC_2} = \frac{4+12}{2+6} = 2; \qquad \frac{OB_3}{OC_3} = \frac{4+12+6}{2+6+3} = 2$$

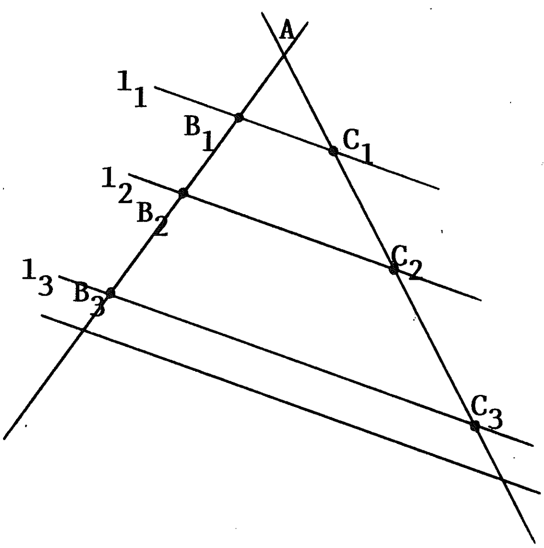
$$\frac{B_1B_2}{C_1C_2} = \frac{12}{} = 2; \qquad \frac{B_1B_3}{C_1C_3} = \frac{12+6}{6+2} = 2; \qquad \frac{B_2B_3}{C_2C_3} = \frac{6}{3} = 2$$

De donde se deduce:

FIG. 4

$$\boxed{\frac{OB_1}{OC_1} = \frac{OB_2}{OC_2} = \frac{OB_3}{OC_3} = \frac{B_1B_2}{C_1C_2} = \frac{B_1B_3}{C_1C_3} = \frac{B_2B_3}{C_2C_3} = 2} \rightarrow \text{constante de proporcionalidad}$$

2. Teorema de Thales



Las rectas l_1, l_2 y l_3 son paralelas.
Al igual que antes obtendremos:

(1) (2)

$$\boxed{\frac{AB_1}{AC_1}} = \boxed{\frac{AB_2}{AC_2}} = \boxed{\frac{AB_3}{AC_3}} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{AB_n}{AC_n}$$

(si fuesen n rectas)

Por las propiedades de las proporciones (si se cambian los medios se obtiene una proporción equivalente a la primera)

$$\underset{(1)}{\boxed{\frac{AB_1}{AB_2} = \frac{AC_1}{AC_2}}} \ ; \ \underset{(2)}{\boxed{\frac{AB_1}{AB_3} = \frac{AC_1}{AC_3}}} \ ; \ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si un haz de rectas paralelas se corta por dos rectas secantes, los segmentos determinados sobre una de las secantes son proporcionales a los determinados sobre la otra.

TEOREMA DE THALES

PROFESOR

El alumno debe comprobar experimentalmente este teorema realizando diversas prácticas y mediciones hasta que lo interiorice. Unas prácticas deben ser libres y otras propuestas, dirigidas hacia:

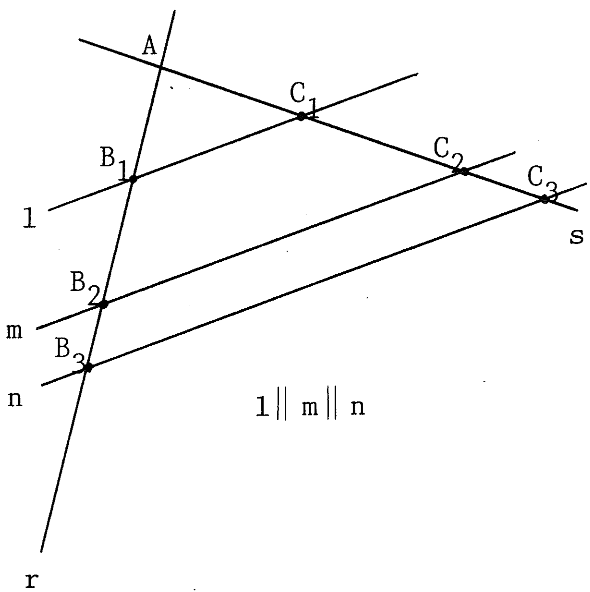
- *—Dividir un segmento en partes iguales.*
- *—Obtener el segmento* ***cuarto proporcional*** *a tres dados.*
- *—Obtener el segmento* ***tercero proporcional*** *a dos dados.*
- *—Dividir un segmento en partes proporcionales a otros dados.*

Hemos comprobado la relación existente entre los segmentos correspondientes determinados sobre las rectas secantes.

Pero *¿qué relación existirá entre los segmentos determinados sobre las rectas paralelas?*

3. Triángulos en posición de Thales

Cuando un haz de rectas paralelas es cortado por dos rectas secantes, se obtienen triángulos con un vértice común que se dicen en *posición de Thales.*



$$\left.\begin{array}{l}\widehat{B_1AC_1}\\ \widehat{B_2AC_2}\\ \widehat{B_3AC_3}\end{array}\right\}\ \text{triángulos en posición de Thales}$$

Los triángulos en posición de Thales son *semejantes,* es decir tienen sus ángulos iguales y los lados homólogos son proporcionales.

$\widehat{A}$ es común a los tres triángulos

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{B_1} = \widehat{B_2} = \widehat{B_3}\\ \widehat{C_1} = \widehat{C_2} = \widehat{C_3}\end{array}\right\}\ \text{por correspondintes}$$

AB_1, AB_2 y AB_3 se oponen a ángulos iguales y se dice que son lados *homólogos*

También son homólogos AC_1, AC_2 y AC_3

Práctica 2

Sigue los pasos que a continuación describimos:

Paso1. Coge tres cartulinas de colores diferentes (p.e. rojo, azul y verde). Puedes elegir también tres hojas de papel charol.

Paso 2. Coloca una sobre otra como se indica en la figura 1.

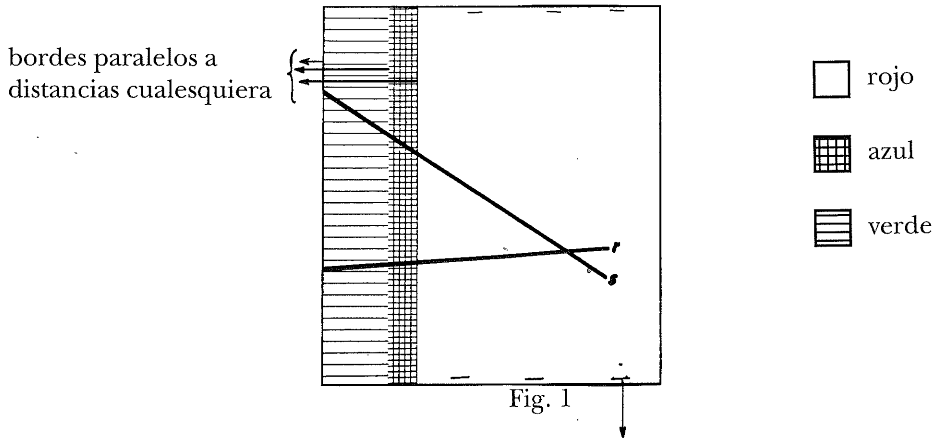
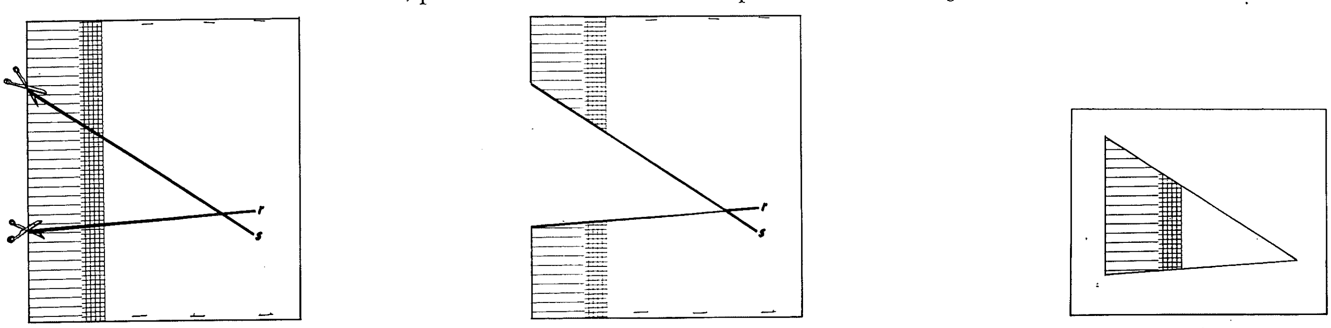


Fig. 1

Paso 3. Para que no se muevan las cartulinas puedes graparlas por los extremos superior e inferior.
Traza dos rectas secantes que pasen por las tres cartulinas y se corten sobre la primera (fig. 2).

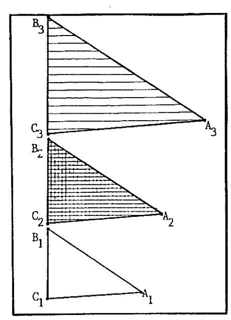
Paso 4. Corta las tres cartulinas, procurando no se muevan, por las líneas dibujadas.



a) b) c)

Fig. 2
Hemos obtenido tres triángulos en posición de Thales.

Paso 5. Separa los 3 triángulos y ponles nombres a los vértices.



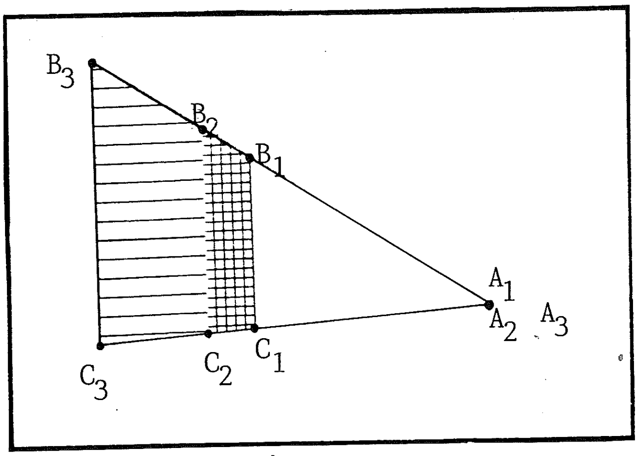
Ya sabemos que: $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \widehat{A_3}$

$$\widehat{B_1} = \widehat{B_2} = \widehat{B_3}$$

$$\widehat{C_1} = \widehat{C_2} = \widehat{C_3}$$

Pero vamos a comprobarlo

Paso 6. Cuando cortamos las cartulinas, los ángulos $\widehat{A_1}$, $\widehat{A_2}$ y $\widehat{A_3}$ estaban superpuestos.



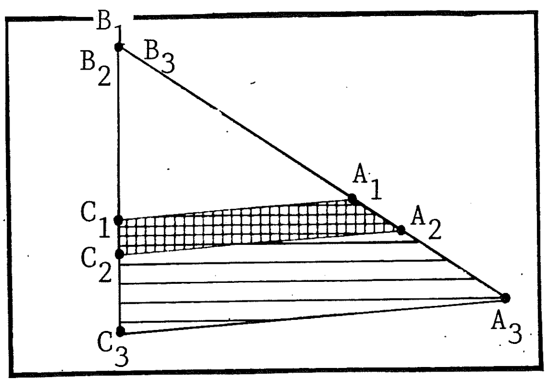
Por el teorema de Thales se tiene que:

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2} \quad \textbf{(1)}$$

$$\frac{A_1B_1}{A_3B_3} = \frac{A_1C_1}{A_3C_3} \quad \textbf{(2)}$$

$$\frac{A_2B_2}{A_3B_3} = \frac{A_2C_2}{A_3C_3} \quad \textbf{(3)}$$

Paso 7. Superpón ahora los ángulos $\widehat{B_1}$, $\widehat{B_2}$ y $\widehat{B_3}$ y comprueba que coinciden.



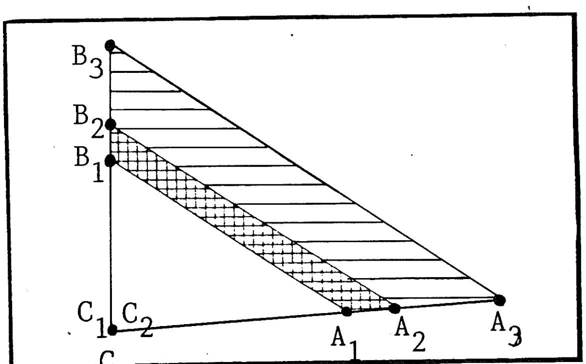
Aplicando el teorema de Thales obtenemos:

$$\frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{B_1A_1}{B_2A_2} \Longleftrightarrow \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2} \quad \textbf{(1)}$$

$$\frac{B_1C_1}{B_3C_3} = \frac{B_1A_1}{B_3A_3} \Longleftrightarrow \frac{B_1C_1}{B_3C_3} = \frac{A_1B_1}{A_3B_3} \quad \textbf{(2)}$$

$$\frac{B_2C_2}{B_3C_3} = \frac{B_2A_2}{B_3A_3} \Longleftrightarrow \frac{B_2C_2}{B_3C_3} = \frac{A_2B_2}{A_3B_3} \quad \textbf{(3)}$$

Paso 8. Por último superpón los ángulos $\widehat{C_1}$, $\widehat{C_2}$ y $\widehat{C_3}$ y comprueba que también coinciden.



Aplicando el teorema de Thales obtenemos:

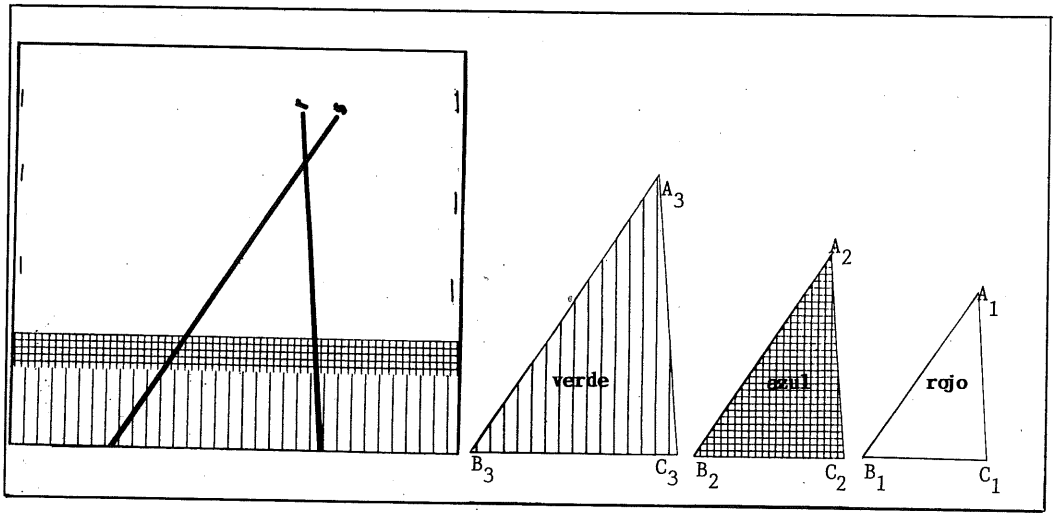
$$\frac{C_1B_1}{C_2B_2} = \frac{C_1A_1}{C_2A_2} \Longleftrightarrow \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2}$$

$$\frac{C_1B_1}{C_3B_3} = \frac{C_1A_1}{C_3A_3} \Longleftrightarrow \frac{B_1C_1}{B_3C_3} = \frac{A_1C_1}{A_3C_3}$$

$$\frac{C_2B_2}{C_3B_3} = \frac{C_2A_2}{C_3A_3} \Longleftrightarrow \frac{B_2C_2}{B_3C_3} = \frac{A_2C_2}{A_3C_3}$$

Conclusión

—Al cortar las cartulinas por las líneas dibujadas obtuvimos tres triángulos en posición de Thales.
—Comprobamos que los tres tienen sus ángulos iguales.



De las proporciones obtenidas al aplicar el teorema de Thales resulta:

Por (1) $$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} \Longrightarrow \overset{\triangle}{A_1B_1C_1} \sim \overset{\triangle}{A_2B_2C_2}$$

Por (2) $$\frac{A_1B_1}{A_3B_3} = \frac{A_1C_1}{A_3C_3} = \frac{B_1C_1}{B_3C_3} \Longrightarrow \overset{\triangle}{A_1B_1C_1} \sim \overset{\triangle}{A_3B_3C_3}$$

Por (3) $$\frac{A_2B_2}{A_3B_3} = \frac{A_2C_2}{A_3C_3} = \frac{B_2C_2}{B_3C_3} \Longrightarrow \overset{\triangle}{A_2B_2C_2} \sim \overset{\triangle}{A_3B_3C_3}$$

~ signo de semejanza

—La relación de semejanza entre triángulos es de *equivalencia*: En el paso 8 hemos comprobado la propiedad *transitiva* de esta relación.

Dos o más triángulos son semejantes si tienen sus ángulos iguales
y entonces sus lados homólogos son proporcionales.
Los triángulos en posición de Thales son triángulos semejantes.

PROFESOR:

—Con prácticas como la descrita se pretende que el ritmo acelerado de aprendizaje que en casos imponemos, se relentice adecuándolo a las necesidades de cada alumno, y realizando éste cuantas prácticas, mediciones y comprobaciones estime necesarias, interiorice los "conceptos importantes".

—En el esquema que sigue, aparecen secuenciados los conceptos y apartados que pensamos debían tratarse a continuación, todos ellos íntimamente relacionados con el *teorema de Thales*, al objeto de reforzarlo mostrando al alumno algunos de los múltiples resultados de interés que de él se derivan.

- Razón de semejanza.

↓

- Casos de semejanza de triángulos.

↓

- Razón de los perímetros en dos triángulos semejantes.

↓

- Razón de las áreas en dos triángulos semejantes.

↓

- Polígonos semejantes. Construcción de polígonos semejantes.

↓

- La escala como razón de semejanza. Planos y mapas.

↓

- Proyección de un punto y un segmento sobre una recta.

↓

- RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

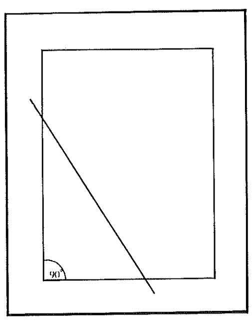
↓

1

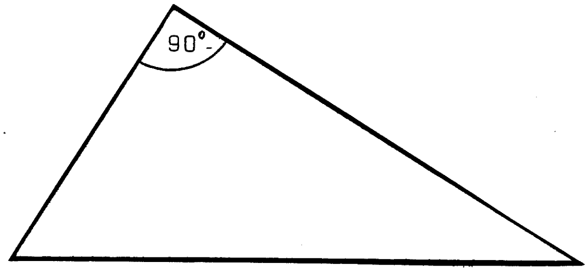
4. Relaciones métricas en los triángulos rectángulos

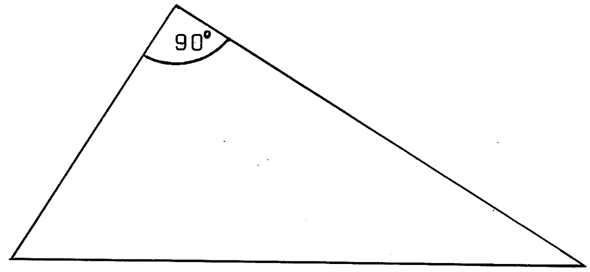
Práctica 3

—Coge dos cartulinas o dos hojas de papel charol de diferentes colores, superpónlas y traza una recta que corte a dos bordes perpendiculares, como se indica en la figura.
—Corta por la línea dibujada.

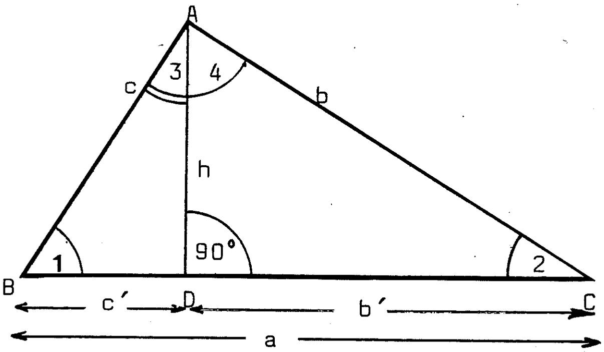


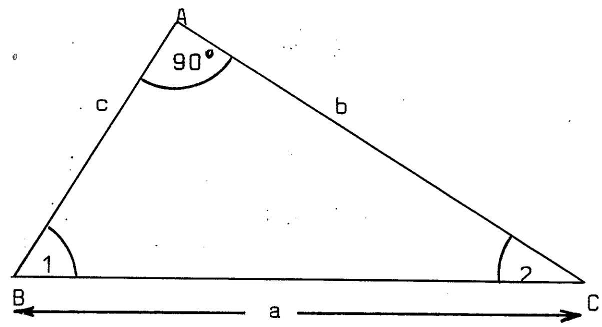
Se obtienen dos triángulos rectángulos *iguales.*





—Designa con letras a los elementos de cada triángulo y traza en uno de ellos, utilizando la escuadra o el cartabón, la altura relativa a la hipotenusa.





Elementos:

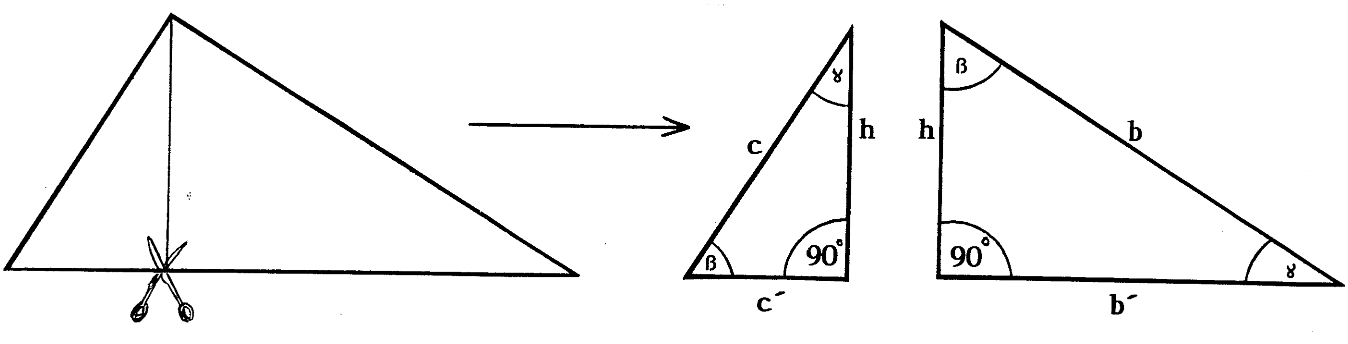
a hipotenusa; b, c catetos; h altura relativa a la hipotenusa;
b', c' proyecciones de los catetos b y c sobre la hipotenusa.

Fíjate en la relación existente entre los ángulos $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$ *y* $\hat{4}$.

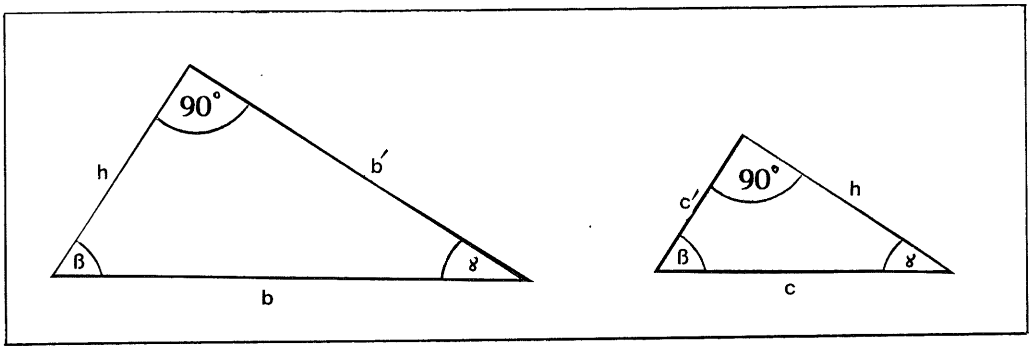
$$\left.\begin{array}{l}\hat{1}+\hat{3}=90^\circ\\ \hat{4}+\hat{3}=90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{1}=\hat{4}=\hat{\beta}$$

$$\hat{\gamma}=\hat{3}=\hat{2} \Leftarrow \left\{\begin{array}{l}\hat{4}+\hat{3}=90^\circ\\ \hat{4}+\hat{2}=90^\circ\end{array}\right.$$

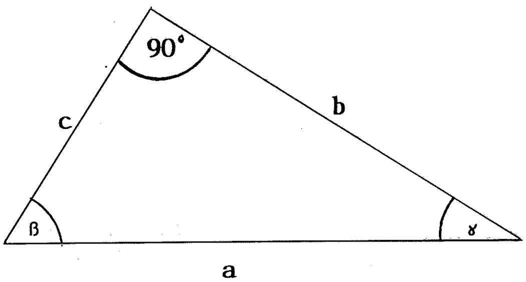
—Corta por la altura uno de los triángulos.



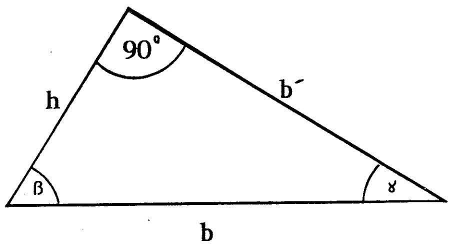
—Dales la vuelta, como se indica en la figura, a los dos triángulos resultantes.



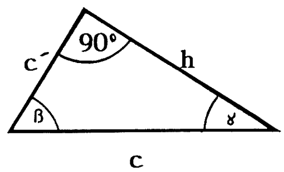
—Tenemos ahora tres triángulos rectángulos semejantes. Tienen los tres ángulos iguales.



Triángulo grande

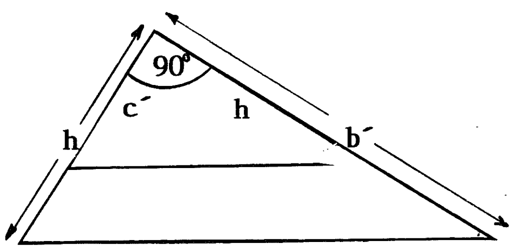


Triángulo mediano



Triángulo pequeño

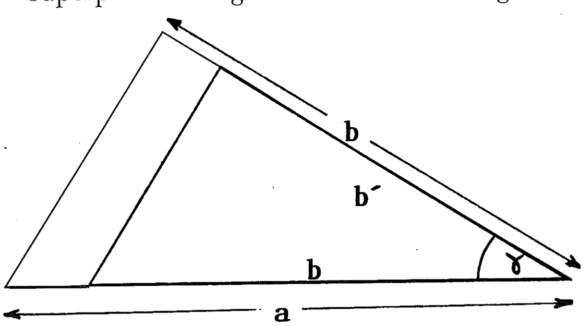
—Superpón el triángulo pequeño sobre el mediano haciendo coincidir los ángulos rectos.



Resultan 2 triángulos en posición de Thales.
Aplicando el Teorema de Thales se obtiene:

$$\frac{c'}{h} = \frac{h}{b'} \Longrightarrow h^2 = b' \cdot c'$$

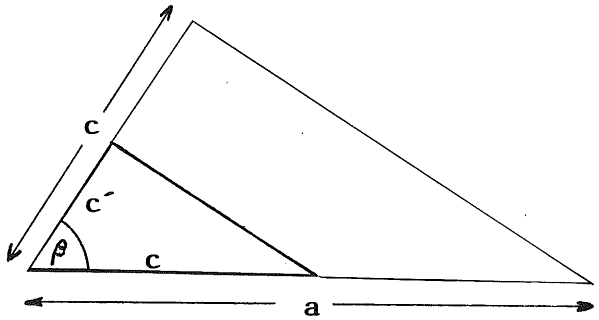
—Superpón el triángulo mediano sobre el grande de modo que coincidan los dos ángulos $\hat{\gamma}$



Resultan 2 triángulos en posición de Thales.
Aplicando el Teorema de Thales se obtiene:

$$\frac{b'}{b} = \frac{b}{a} \Longrightarrow b^2 = a \cdot b'$$

—Por último, superpón el triángulo pequeño sobre el grande haciendo coincidir los ángulos $\widehat{\beta}$.

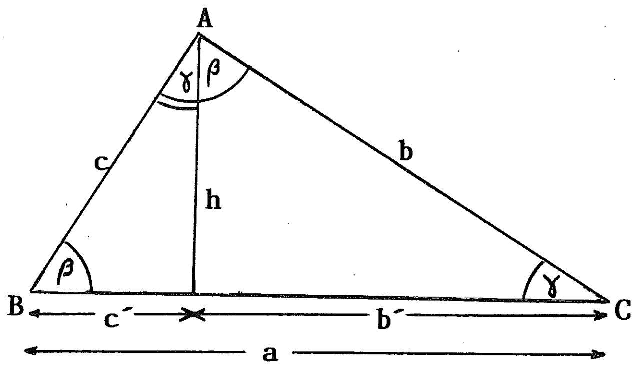


Resultan 2 triángulos en posición de Thales. Aplicando el Teorema de Thales resulta:

$$\frac{c'}{c} = \frac{c}{a} \Longrightarrow c^2 = a \cdot c'$$

Conclusión

Fíjate en las relaciones que hemos obtenido entre los elementos de un triángulo rectángulo



$$\boxed{a = b' + c'} \quad (1)$$

$$\frac{c'}{h} = \frac{h}{b'} \longleftrightarrow h^2 = b' \cdot c'$$

En un triángulo rectángulo, la altura es media proporcional entre los dos segmentos en que divide a la hipotenusa.
(TEOREMA DE LA ALTURA)

$$\frac{b'}{b} = \frac{b}{a} \longleftrightarrow b^2 = a \cdot b'$$

$$\frac{c'}{c} = \frac{c}{a} \longleftrightarrow c^2 = a \cdot c'$$

En un triángulo rectángulo, cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.
(TEOREMA DEL CATETO)

Si sumamos miembro a miembro las dos últimas igualdades (Teorema del Cateto), resulta:

$$\begin{array}{rrcl} & b^2 & = & a \cdot b' \\ + & c^2 & = & a \cdot c' \\ \hline & b^2 + c^2 & = & a \cdot b' + a \cdot c' = a \cdot \overbrace{(b' + c')}^{(1)} = a \cdot a = a^2 \end{array}$$

$a^2 = b^2 + c^2$ En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos (TEOREMA DE PITÁGORAS)

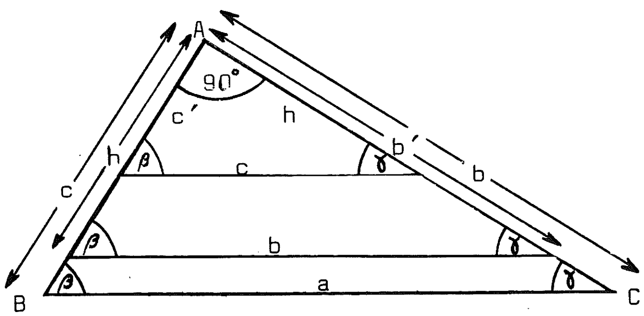
$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2} \longrightarrow \begin{array}{|l|}\hline a = \sqrt{b^2 + c^2} \\ \hline b = \sqrt{a^2 - c^2} \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} \\ \hline \end{array}$$

para calcular la hipotenusa

para calcular los catetos

PROFESOR

Al alumno se le debe proponer que obtenga todas las relaciones posibles que se dan entre los elementos de un triángulo rectángulo.



pequeño - mediano $\dfrac{h}{b'} = \dfrac{c'}{h} = \dfrac{c}{b}$

pequeño - grande $\dfrac{c}{a} = \dfrac{c'}{c} = \dfrac{h}{b}$

mediano - grande $\dfrac{b}{a} = \dfrac{b'}{b} = \dfrac{h}{c}$

y compruebe que de las 9 proporciones obtenidas, tres son *continuas* y dan lugar a los *teoremas del cateto y de la altura.*

Como refuerzo de todos los teoremas estudiados, trataríamos a continuación:

—Cálculo de la altura de un triángulo equilátero.
—Cálculo de la diagonal de un cuadrado y de un rectángulo.
—Cálculo de la apotema de un polígono regular.
Los 3 apartados como aplicación del Teorema de Pitágoras)
—Construcción de un cuadrado de igual superficie que la de un rectángulo dado (Teorema del cateto)
—Media proporcional de 2 segmentos (Teorema de la altura o Teorema del cateto).
—Tercera proporcional de 2 segmentos (Teorema de la altura o Teorema de Thales).
—Construcción de un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia dada. (Teorema de Thales).

Todo lo hasta aquí tratado bajo el título "TEOREMA DE THALES. APLICACIONES", se propone para su estudio en el primer año de la Secundaria Obligatoria (12-16), dejando para el segundo la "RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS".