Generación y resolución de problemas: dos ejemplos

Eliseo Borrás Veses; Magda Morata Cubells

¿Bajo que condiciones una situación matemática es un problema para una persona? Tiene que interesarle y representar un reto, de forma que se sumerja en ella para intentar su resolución. Pero además, se detectan otras características en el proceso de generación y resolución de problemas:

—Requiere un tiempo muy variable, imposible de predecir de antemano.

—Lo que se busca suele ser bastante impreciso; las preguntas que perfilan un problema van surgiendo sincronizadas con las conjeturas y los resultados parciales o aproximados que se van encontrando.

—Un problema puede abordarse con diferentes niveles de rigor y precisión.

—La analogía es un recurso valioso, que puede guiar la búsqueda de soluciones.

—Los medios disponibles (como una calculadora o un ordenador) abren nuevas vías de resolución y análisis que, de otro modo, estarían vedadas.

Dos problemas en los que interviene el azar

Lo que sigue es el relato del proceso de desarrollo y resolución de dos problemas de azar. Los presentamos aquí porque lo hemos pasado bien al intentar resolverlos y porque creemos que muestran claramente algunas de las características anteriores.

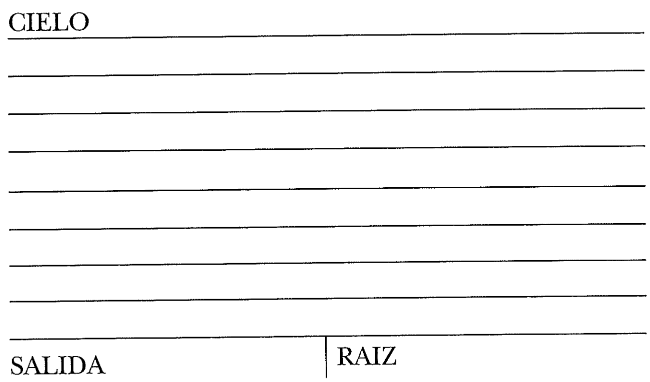
Hace ya bastante tiempo que leímos el siguiente juego [1]; nos pareció divertido e interesante para la clase de matemáticas. A diferencia de otros juegos que habíamos estudiado y propuesto, en éste veíamos solamente sus posibilidades como instrumento para aumentar la comprensión sobre el comportamiento del azar, pero no como modelo de ningún proceso físico, biológico…

Llegar al cielo

Es un juego para dos jugadores.

El jugador A trata de hacer crecer su árbol hasta el "cielo", mientras que el jugador B trata de impedírselo.

Se juega sobre un tablero como el siguiente:



El jugador A lanza una moneda. Si el resultado es cara, el árbol se alarga una rama. Si es cruz, el árbol se alarga dos ramas.

El jugador B lanza la moneda una vez por cada rama que haya dibujado su contrario. Si sale cara, detiene el crecimiento de esa rama colocando una ficha en su extremo. Si sale cruz, la rama queda viva y puede seguir reproduciéndose.

El jugador A lanza de nuevo la moneda una vez por cada rama viva, para decidir sobre su forma de crecer.

Y así sucesivamente.

El jugador A gana si consigue llegar al cielo. En caso contrario, el ganador es el jugador B.

Al jugar repetidas veces descubrimos que el juego es ventajoso para el jugador B. Los intentos de calcular teóricamente la probabilidad de ganar de cada uno de los dos jugadores, para el caso de n capas, resultaron infructuosos: al utilizar un diagrama en árbol, aparecen demasiadas ramas y el cálculo de las probabilidades de que gane A o B es demasiado complejo; lo mismo ocurre si se intenta tratar como una cadena de Markov y se dibuja su grafo.

Decidimos proponer este juego a nuestros alumnos que, utilizando diversos procedimientos, llegaron a conclusiones parecidas a las nuestras.

Los alumnos, a medida que iban jugando y aumentaba su conocimiento del problema, fueron haciéndose preguntas a las que intentaron responder. Estas son algunas de ellas:

—"¿Tiene ventaja alguno de los dos jugadores?"

—"¿Cuánto más tendría que apostar el jugador B, que tiene más posibilidades de ganar?"

–"¿Cuánto tarda el jugador A (medido en ramas del árbol), por término medio, en llegar al cielo?"

—"¿Cuánto tarda el jugador B, por término medio, en ganar al A y en qué escalera del cielo?"

Jugando y anotando el resultado y el desarrollo de cada partida, dieron respuesta aproximada a estas cuestiones. Estos son algunos de los resultados y conclusiones que obtuvieron (tabla 1).

"El juego es ventajoso para el jugador B; pero si A logra pasar las primeras capas, aumentan sus posibilidades de ganar".

"A ganará aproximadamente un 9% de las partidas y B un 91%. De cada 1000 ptas., A deberá apostar 90 y B 910, para que el juego sea más justo".

Y el problema pasó al limbo

Varios meses después, el estudio de *Procesos de nacimiento y muerte* [2] y la preparación de un taller de azar nos llevó a plantearnos el siguiente problema, cuya simulación nos pareció sencilla.

Tabla 1

Grupo	Ganador A	Ganador B	Total Partidas
1	1	19	20
2	2	22	24
3	9	41	50
4	1	19	20
5	2	38	40
6	3	47	50
7	8	42	50
8	2	44	46
9	3	47	50
totales	31	319	350

Desaparición de un apellido

Un hombre y todos sus descendientes varones tiene exactamente 2 hijos. Aproximadamente la mitad de los hijos son varones. Teniendo en cuenta que el apellido sólo se transmite a través de los hijos varones, ¿es muy fácil que su apellido desaparezca en su familia? ¿Y si el número de hijos es igual a 3?

Inicialmente se piensa que en un 50% de casos se perpetuaría el apellido, pero algunas simulaciones no avalan esta idea. ¿Cómo seguir? ¿A qué preguntas es interesante y posible responder? Estas son algunas de las que surgieron:

—*¿Cuál es la probabilidad de que el apellido desaparezca?*

Habría que simular la transmisión del apellido varias veces y comprobar en cuántos casos desaparece y en cuántos no. Pero surge inmediatamente un problema: ¿hasta qué generación debemos ensayar la transmisión? No es lo mismo observar lo que ocurre durante tres generaciones que durante 300. Así pues,

—*¿Cuál es la probabilidad de que desaparezca, como muy tarde, en la enésima generación?*

Asociada a la cuestión anterior surge ésta otra:

—*¿Cuál es la duración media (en generaciones) de un apellido?*

Si cada hombre tiene dos hijos, los datos obtenidos en 100 simulaciones repetidas, para varias generaciones, van perfilando conjeturas más precisas:

Tabla 2

Generación	Se pierde	No se pierde
1	23	77
2	31	69
3	47	53
4	52	48
5	60	40
6	64	36
7	74	26
8	69	31
9	63	37
10	77	23

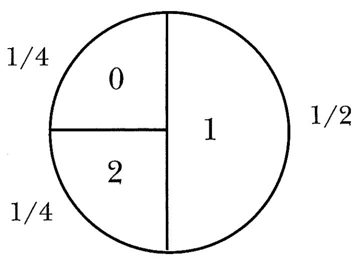
Generación	Se pierde	No se pierde
11	74	26
12	80	20
13	79	21
14	74	26
15	81	19
16	82	18
17	83	17
18	85	15
19	81	19
20	80	20

La probabilidad de que desaparezca un apellido aumenta con el número de generaciones y, a partir de la 5ª, ya es mayor del 50%.

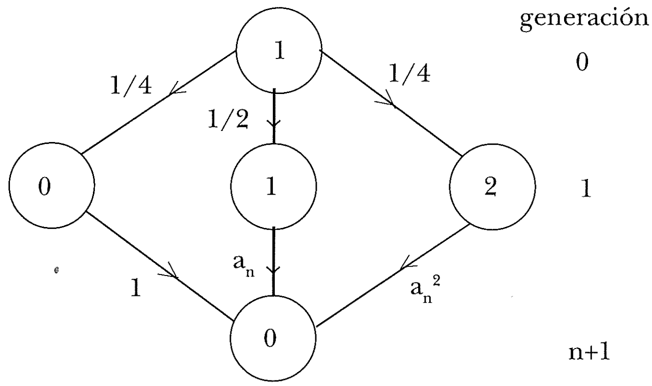
Intentamos también la resolución teórica de este problema utilizando diagramas en árbol y cadenas de Markov. Ambas herramientas, a pesar de su potencia, se revelaron de nuevo inoperantes.

Y, ¡por fin!, una solución teórica. Como tantas otras veces, encontramos en la obra *Probabilidad y Estadística* de A. Engel [2] la ayuda que necesitábamos.

La ruleta adjunta permite efectuar el sorteo para determinar los descendientes inmediatos de cada hombre.



Sea a_n la probabilidad de que el apellido desaparezca, como máximo, en la n-sima generación. El grafo que sigue (en el que dentro de cada círculo se ha representado el número de varones) [2]:



permite deducir una relación recursiva para a_n:

$$a_{n+1} = 1/4 + 1/2\, a_n + 1/4\, a_n^2;; \qquad a_1 = 1/4;$$

que da lugar a la tabla 3:

Generación	a_n
1	0.250
2	0.391
3	0.483
4	0.550
5	0.601
6	0.641
7	0.673
8	0.700
9	0.722
10	0.741
11	0.758
12	0.773
13	0.786
14	0.797
15	0.807
16	0.817
17	0.825
18	0.833
19	0.840
20	0.846
21	0.852
22	0.858
23	0.863
24	0.867
25	0.872

Generación	a_n
26	0.876
27	0.880
28	0.883
29	0.887
30	0.890
31	0.893
32	0.896
33	0.899
34	0.901
35	0.904
36	0.906
37	0.908
38	0.910
39	0.912
40	0.914
41	0.916
42	0.918
43	0.919
44	0.921
45	0.923
46	0.924
47	0.926
48	0.927
49	0.928
50	0.930

la cual confirma los resultados obtenidos por simulación.

Para estudiar la evolución del apellido a largo plazo, como la sucesión anterior es creciente y está acotada superiormente, se puede calcular

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} a_{n+1}$$

en la relación recursiva anterior:

$$a = 1/4 + 1/2\, a + 1/4\, a^2,$$

de donde a = 1. Es decir, a largo plazo, el apellido siempre acabará por desaparecer.

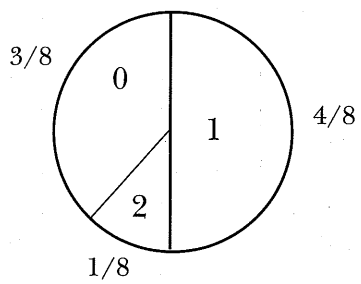
De manera análoga, se trabaja en el caso de tres hijos posibles en cada reproducción.

Primera vuelta atrás

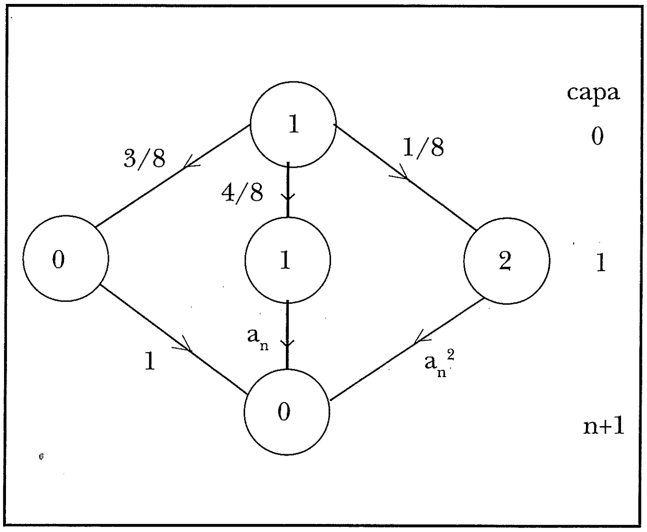
En el calor del trabajo surgió una pregunta: ¿No será este problema análogo a *Llegar al cielo,* que había quedado tiempo atrás sin resolver teóricamente?

En este último caso hay un doble sorteo (jugador A y B) compuesto cada uno por un número de lanzamientos de una moneda igual al de ramas vivas.

La siguiente ruleta servirá para realizar un sorteo equivalente.



Al construir el grafo recursivo análogo al de la *Desaparición de un apellido* (en el que cada nodo representa el número de ramas del árbol) resulta:



de donde se obtiene, para la probabilidad a_{n+1} de que B gane como máximo en la capa n+1:

$$a_{n+1} = \frac{3}{8} + \frac{4}{8} a_n + \frac{1}{8} a_n^2$$

siendo $a_1 = 3/8$

¿Cuál es la probabilidad de que gane B, si no se limita el número de capas?

Esta probabilidad será $a = \lim a_n$. De la expresión anterior se obtiene:

$$a = \frac{3}{8} + \frac{4}{8} a + \frac{1}{8} a^2$$

de donde a = 1. Luego con un número ilimitado de capas ganaría siempre B.

¿Cuál es la probabilidad de que B gane como máximo al cabo de n capas?

La relación recursiva anterior permite calcular esta probabilidad para 1, 2, 3... capas. Ver tabla 4.

La ventaja de B, para 7 capas es abrumadora. La simulación del juego un elevado número de veces, utilizando de nuevo el ordenador confirmó la bondad de la solución. Estos son los resultados obtenidos para un total de 10.000 simulaciones. Ver tabla 5

Tabla 4

Capa	a_n	Capa	a_n
1	0.375000	26	0.999674
2	0.580078	27	0.999755
3	0.707100	28	0.999816
4	0.791049	29	0.999862
5	0.848744	30	0.999897
6	0.889418	31	0.999923
7	0.918592	32	0.999942
8	0.939772	33	0.999956
9	0.955283	34	0.999967
10	0.966712	35	0.999975
11	0.975173	36	0.999982
12	0.981456	37	0.999986
13	0.986135	38	0.999990
14	0.989626	39	0.999992
15	0.992233	40	0.999994
16	0.994182	41	0.999996
17	0.995641	42	0.999997
18	0.996733	43	0.999998
19	0.997551	44	0.999998
20	0.998164	45	0.999999
21	0.998623	46	0.999999
22	0.998968	47	0.999999
23	0.999226	48	0.999999
24	0.999420	49	1.000000
25	0.999565	50	1.000000

Tabla 5

Generación	Jugador A	Jugador B	Generación	Jugador A	Jugador B
1	6261	3739	14	98	9902
2	4257	5743	15	72	9928
3	2905	7095	16	49	9951
4	2030	7970	17	43	9957
5	1489	8511	18	31	9969
6	1114	8886	19	25	9975
7	776	9224	20	16	9984
8	586	9414	21	12	9988
9	453	9547	22	10	9990
10	294	9706	23	3	9997
11	164	9754	24	7	9993
12	128	9836	25	1	9999
13	98	9872			

Hay un ajuste casi perfecto entre los resultados experimentales y los teóricos. *El juego es, en efecto, considerablemente más ventajoso para B que para A.*

¿Cómo modificar el juego para que sea más equitativo?

Una posibilidad sería la introducción de un sistema de apuestas que equilibrasen la enorme ventaja de B. En este caso, las apuestas deberían estar aproximadamente en la proporción 1:11.

Pero parece mucho más interesante modificar las reglas del juego. Por ejemplo, se podría hacer que al lanzar la moneda el jugador A, la rama se alargara en otras 3 si sale cara y sólo en una si sale cruz. Estos son los resultados obtenidos para diferentes posibilidades de crecimiento:

Tabla 6

Ramas posibles: 1 y 3

Nº de capa	Prob. de B
1	0.313
2	0.469
3	0.566
4	0.631
5	0.679
6	0.716
7	0.745
8	0.768
9	0.787
10	0.804

Ramas posibles: 1 y 4

Nº de capa	Prob. de B
1	0.281
2	0.405
3	0.473
4	0.515
5	0.544
6	0.563
7	0.577
8	0.588
9	0.596
10	0.601

Ramas posibles: 2 y 3

Nº de capa	Prob. de B
1	0.188
2	0.281
3	0.336
4	0.372
5	0.397
6	0.414
7	0.427
8	0.436
9	0.443
10	0.448

Ramas posibles: 2 y 4

Nº de capa	Prob. de B
1	0.156
2	0.223
3	0.257
4	0.275
5	0.286
6	0.292
7	0.296
8	0.298
9	0.299
10	0.300

A medida que aumenta la tasa de crecimiento del árbol, aumentan las posibilidades de que gane A. El juego es casi equitativo para 2 y 3 ramas.

Si se estudia este caso con más detalle.

Tabla 6

Capa	a_n	Capa	a_n
1	0.18750	26	0.46387
2	0.28093	27	0.46393
3	0.33646	28	0.46397
4	0.37246	29	0.46400
5	0.39703	30	0.46402
6	0.41437	31	0.46404
7	0.42689	32	0.46405
8	0.43608	33	0.46407
9	0.44289	34	0.46407
10	0.44799	35	0.46408
11	0.45183	36	0.46409
12	0.45474	37	0.46409
13	0.45695	38	0.46409
14	0.45863	39	0.46409
15	0.45991	40	0.46410
16	0.46089	41	0.46410
17	0.46164	42	0.46410
18	0.46221	43	0.46410
19	0.46265	44	0.46410
20	0.46299	45	0.46410
21	0.46325	46	0.99999
22	0.46345	47	0.99999
23	0.46360	48	0.99999
24	0.46372	49	1.00000
25	0.46381	50	1.00000

se comprueba que la probabilidad de que gane B se estabiliza (con 5 decimales) a partir de la capa número 40. A largo plazo se produciría un equilibrio entre A y B, ligeramente favorable al jugador A.

Segunda vuelta atrás

La explosión de posibilidades que se ha producido al abordar de nuevo *Llegar al cielo* sugiere otras alternativas para *Desaparición de un apellido:*

—¿Qué ocurrirá si el número de hijos que cada varón tiene se elige, al azar, por ejemplo entre 0, 1, 2 y 3? ¿Y si se asignan diferente probabilidades a los números anteriores?

—¿Qué tipo de reproducción daría lugar a un equilibrio entre la probabilidad de que se pierda el apellido y la de que permanezca?

Una reflexión

Para terminar, merece la pena poner el acento en algo que solemos practicar poco en nuestras clases: la fructífera relación modelo-experimentación-teoría. La experimentación con modelos, la simulación y el juego en este caso, genera problemas, perfila conjeturas y, además, es una poderosa guía para buscar soluciones teóricas, confirmándolas o rechazándolas. La práctica cotidiana de la experimentación permite poner a punto técnicas de gran utilidad, sugiere conceptos y sitúa las matemáticas al alcance de la mayoría de los alumnos.

Referencias

[1] Engel, Varga, Walser (1976), *Hasard ou strategie?,* OCDL, París.

[2] Engel A. (1988), *Probabilidad y Estadística, vol. II,* Mestral, Valencia.