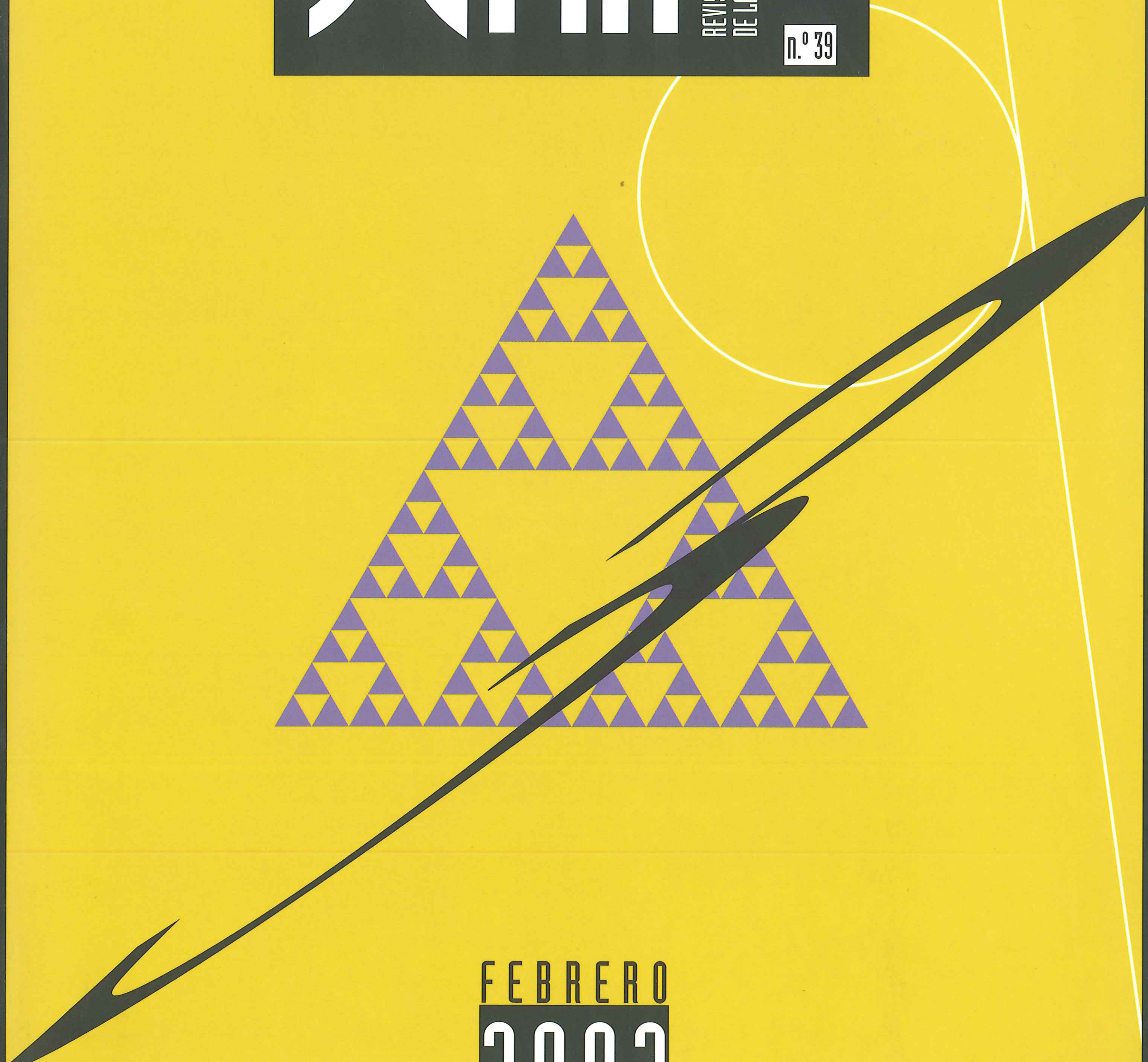
SUMA

REVISTA SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

n.º 39



FEBRERO

2002

SUMA 39

febrero 2002

Índice

Edita
Federación Española de Sociedades
de Profesores de Matemáticas

Diseño portada
Pablo Cano
Diseño interior
Concha Relancio y M.ª José Lisa
Maquetación
E. Palacián, J. Sancho, D. Sierra

Revista SUMA
ICE Universidad de Zaragoza
C. Pedro Cerbuna,12
50009-ZARAGOZA

Tirada: 6.800 ejemplares
Depósito Legal: Gr. 752-1988
ISSN: 1130-488X
Impresión: INO Reproducciones. Zaragoza

Las ilustraciones de este número proceden de manuales de texto de Preescolar y EGB de diversas editoriales.

SUMA 39

febrero 2002

La historia se repite

EDITORIAL

HACE ALGO MÁS DE UN AÑO, concretamente en el número 35 de SUMA, de noviembre de 2000, utilizaba esta tribuna para hacer una valoración del proceso previo a la promulgación del decreto de reforma del currículo de la Educación Secundaria, que en aquellos momentos se empezaba a conocer. Denunciaba entonces la forma en que nos llegaban las noticias, a través de la prensa, la ausencia total de debate y la nula participación de nuestra Federación en un proceso tan importante como aquél. También resaltaba la legitimidad de la Federación para exigir que se la oyera, justificándolo fundamentalmente por el elevado número de profesores y profesoras que representa (más de 5.000) y su amplio conocimiento de un tema que ya había sido tratado en profundidad en diversos seminarios y jornadas.

Parece que ahora la historia se repite: estamos en vísperas de la promulgación de una ley que previsiblemente modificará de forma sustancial los tres pilares básicos de la actual educación no universitaria, LODE, LOGSE y LOPEG y nuevamente nos vamos enterando de ello a través de la prensa, que refleja declaraciones de la propia ministra y de otros altos cargos del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MECD). Incluso, a la vista de lo que se vislumbra, da la sensación de que son declaraciones interesadas, que ponen especial cuidado en destacar solamente aquellos aspectos sobre los que se quiere desviar la atención. Así, a raíz de estas primeras noticias van suscitándose debates y opiniones diversas, que a menudo se centran en cuestiones que, casi con toda seguridad, no van a ser lo más relevante de la futura Ley de Calidad, como es el caso de la tan traída y llevada reválida. Las consecuencias que puede tener el establecimiento de los itinerarios, tanto para la educación de los futuros ciudadanos como para la *configuración de la red pública de enseñanza parece que quedan en un segundo plano en estos momentos.*

Desconocemos el contenido de esta ley y lo mismo se puede decir sobre los estudios o informes en los que se fundamenta. Los responsables ministeriales hacen alusión reiteradamente al elevado nivel del fracaso escolar en España o a los pobres resultados que se obtienen en pruebas internacionales, pero las argumentaciones que se hacen son, cuanto menos, bien poco precisas. En ocasiones estos resultados se presentan de un modo demasiado alarmante y catastrofista, como es el caso del último informe de la OCDE, cuando a partir de los mismos cabe hacer otras interpretaciones que en nada justificarían las medidas que se anuncian. No se aportan datos rigurosos, en definitiva, que justifiquen que la Reforma deba ir en la dirección que se ha elegido.

Pero seguramente lo más urgente ahora es que se abra un debate amplio sobre la Ley de Calidad y que se nos dé la oportunidad de participar en el mismo. Es preciso recordar que a propósito de esta ley nuestra Federación fue convocada por el MECD en febrero de 2001. Se nos ofreció entonces la posibilidad de realizar cuantas sugerencias nos pareciera oportuno en relación con las tres leyes anteriormente citadas a las que se trataba de reformar. Pocos días después remitimos al Ministerio un documento en el que se recogían un buen número de propuestas y recomendaciones, provenientes todas ellas de los diversos seminarios que hemos celebrado en los últimos años. También hemos enviado este documento a sindicatos, grupos parlamentarios, asociaciones de padres y Consejo Escolar del Estado.

Hace unos días nos hemos dirigido a la Ministra de Educación, Cultura y Deporte pidiendo información sobre el Proyecto de Ley que han elaborando, así como una valoración o una respuesta a las propuestas y recomendaciones que en su momento les hemos remitido. Esperamos poder contar pronto con un borrador de la Ley de Calidad que inmediatamente difundiremos a todas las sociedades. Será el momento entonces de abrir nuestro propio debate, pues aunque no es una ley que afecte en exclusiva a la enseñanza de las Matemáticas, creo que será necesario que nos posicionemos sobre la misma. En la próxima reunión de la Junta de Gobierno concretaremos la forma en que se llevará a cabo este debate.

José Luis Álvarez García

Secretario General de la FESPM

SUMA 39
febrero 2002, pp. 5-11

Sobre la enseñanza de las matemáticas en la Educación Secundaria española

Tomás Recio

ARTÍCULOS

Este artículo recoge el contenido de la intervención de su autor el 21 de febrero de 2002 ante la Ponencia sobre «La Situación de las Enseñanzas Científicas en la Educación Secundaria» creada en la primavera de 2001 en la Comisión de Educación, Cultura y Deporte del Senado español, y en la que colaboran las Reales Sociedades de Matemáticas, Física y Química.

INTRODUCCIÓN

El pasado abril de 2001 se puso en marcha, dentro de la Comisión de Educación, Cultura y Deporte del Senado español, una Ponencia específica, en la que colaboran las tres Reales Sociedades de Matemáticas (a través de su vicepresidente y portavoz, Prof. Manuel de León), Física y Química, para estudiar la situación de las enseñanzas científicas en la educación secundaria.

Como es habitual, el trabajo de la Ponencia incluye la comparecencia, en distintas sesiones, de diferentes personas que son llamadas al Senado para expresar su opinión ante los miembros de la Ponencia. En este momento ya ha habido tres sesiones (septiembre y octubre de 2001, febrero de 2002) y están previstas varias más en esta primavera. Muchos detalles (incluyendo enlaces al Diario de Sesiones, textos completos de las intervenciones, etc.) aparecen en la página de la Comisión de Educación de la RSME:

http://www.rsme.es/comis/educ/inicio.html

Lo que sigue es el texto íntegro de mi comparecencia, tal como fue entregado[1] a los Senadores al término de la sesión del 21 de febrero pasado. Debe entender el lector, por tanto, que es un texto para ser presentado oralmente, lo que posibilita aclaraciones y matizaciones complementarias.

Antecedentes

Sus Señorías llevan ya una andadura de cierta longitud en esta Ponencia sobre la Enseñanza de las Ciencias. Han

1 Con pequeñas correcciones que se introdujeron verbalmente en la exposición del texto.

escuchado una descripción general de la situación y también algunas soluciones, como las que planteó nítidamente el prof. Manuel de León en su primera intervención, hace meses, y que me gustaría resumir a mi modo:

- matizar la obligatoriedad hasta los 16 años;
- limitar la comprensividad;
- adecuar la formación inicial/continua de los profesores (de secundaria y de primaria) a las necesidades de la escuela de hoy;
- promover el esfuerzo como elemento de progreso en el sistema escolar;
- reforzar la figura del profesor en el ejercicio de sus funciones;
- establecer en la sociedad la percepción de un vínculo entre educación y profesión, entre el éxito en el estudio y el éxito en la vida profesional;

Estas propuestas tienen, en mi opinión, la virtud de recoger, sintéticamente y con claridad, la opinión de sectores bastante amplios del profesorado. Quisiera añadir que, en el ámbito más particular de la enseñanza de las Matemáticas (o, más generalmente, de las Ciencias) algunos profesores mencionan, como soluciones urgentes para paliar la situación actual:

- la segregación de los alumnos que no hayan superado determinados objetivos y no hayan alcanzado determinados niveles;
- el incremento en el número de horas docentes de sus materias, a costa de otras de menor enjundia científica;
- el retorno a unas directrices metodológicas en las que predomine:
  - lo cuantitativo sobre lo descriptivo o cualitativo,
  - lo intenso sobre lo superficial,
  - lo formal sobre lo divulgativo,
  - lo determinado sobre lo abierto,
  - lo básico sobre lo transversal o lateral,
  - la argumentación lógica sobre la prueba intuitiva o la visualización,
  - el conocimiento sobre la actitud,
  - el estudio personal sobre la actividad grupal
- la obligatoriedad de cursar determinadas asignaturas de Matemáticas en el Bachillerato, para optar a una carrera científico-tecnológica;
- la implantación de una materia optativa, en ese nivel de Bachillerato, de profundización matemática, para evitar el alto índice de fracaso en los primeros años de universidad.

…dicho anuncio está contribuyendo a la polarización (ya de por sí muy elevada) del debate en torno a la búsqueda de soluciones efectivas a los problemas del sistema educativo. Y en el calor del debate se olvidan algunas cosas bastante obvias, de pura lógica…

El reciente anuncio de la preparación, por parte de las autoridades ministeriales, de una ley que contemplaría ciertas medidas coincidentes (en parte) con las arriba expuestas, no hace sino corroborar la amplitud de esta corriente de opinión.

Algo de lógica

Inevitablemente, dicho anuncio está contribuyendo a la polarización (ya de por sí muy elevada) del debate en torno a la búsqueda de soluciones efectivas a los problemas del sistema educativo. Y en el calor del debate se olvidan algunas cosas bastante obvias, de pura lógica, que he creído conveniente recordar aquí.

1. Aunque tratemos aquí de la enseñanza de las Matemáticas no cabe olvidar que hay una componente ideológica (política, epistemológica, etc.) importante (y legítima) en las distintas opciones que se plantean como remedio para los males del sistema. Esto es natural y así debería ser asumido. Creo que esconder u obviar este hecho, planteando la evidente superioridad de unas propuestas concretas por ser, pretendidamente, el resultado de un análisis aséptico de la realidad y del sentido común, es incorrecto.
2. También creo que una parte importante de la comunidad educativa estima que el actual sistema educativo tiene determinados defectos y que estos requieren una urgente solución. El consenso en la denuncia de los problemas no debe, empero, utilizarse como argumento en favor de determinadas soluciones, ni la oposición a determinadas soluciones debe ser esgrimida como una negativa al reconocimiento del problema. De «no podemos continuar así» no se concluye lógicamente que «por tanto debemos hacer esto o aquello».
3. Aunque sea una forma legítima de razonamiento el incluir la tesis

entre las hipótesis de un argumento (estableciendo, por tanto, una tautología), no me parece que sean de interés las proposiciones que así se obtengan. Es tal vez necesario recordar esta obviedad, para evitar propuestas del tipo «para que los alumnos se esfuercen en aprender más matemáticas es necesario que se esfuercen en aprender más matemáticas», variantes de las cuales se han oído estos días.

4. Tampoco parece razonable, en buena lógica, que se incremente el éxito de un sistema educativo no incluyendo, en la tasa de fracasos del sistema, a los que fracasan. Ni que mejore la convivencia en la escuela o instituto excluyendo de la misma a los que la perturban. Muchos profesores pueden pensar que medidas de esta índole significarán, para ellos, la posibilidad de una docencia más fructífera y más dedicada a los contenidos de su disciplina. Pero el argumento –tan utilizado hoy– de que son muchos los alumnos que deben seguir otros itinerarios (en un sentido amplio), significa también que serán muchos los profesores que deberán encargarse de ellos en otro lugar del sistema educativo.

5. Con frecuencia se invoca, como argumento supremo para explicar la necesidad de determinados cambios en el sistema educativo preuniversitario, el hecho de que «la universidad» exige esto o aquello. Como profesor universitario no dejo de sorprenderme del valor absoluto que se le otorga a las decisiones de los órganos académicos universitarios, su posición de inmunidad frente a los problemas del sistema.

   A nadie se le ocurre, al parecer, reclamar legítimamente el que la universidad adapte sus enseñanzas a las condiciones de los alumnos que ingresan en ella. En el caso de las Matemáticas (para matemáticos o para no matemáticos) es obvio, para mí, que el nivel de exigencia de las enseñanzas universitarias de primer y segundo ciclo es, injustificadamente, uno de los más altos del mundo occidental. Más de una década de intercambios Erasmus/Sócrates no nos han dejado lugar a dudas. No es para estar orgullosos: dicho nivel suele ser inversamente proporcional al de las enseñanzas de tercer ciclo (y, por tanto, al peso científico internacional de un país).

A nadie se le ocurre, al parecer, reclamar legítimamente el que la universidad adapte sus enseñanzas a las condiciones de los alumnos que ingresan en ella.

Como conclusión de estas observaciones triviales, me permito señalar que sería preciso buscar soluciones

- relativizando el valor de las mismas y sin descalificar como incoherentes o sesgadas otras posibles alternativas;
- evitando la confusión entre fines y métodos;
- proponiendo medidas adecuadas para los alumnos con problemas (y no sólo para los que no los tendrán o los tendrán en menor medida);
- incluyendo al sistema universitario en la consideración global del sistema educativo.

Algunas opiniones personales

Quisiera comentar aquí alguna de las opiniones de mi respetado colega, amigo y compañero de la Comisión de Educación de la RSME, con cuyo recuerdo he iniciado esta comparecencia. En todos los casos no se trata de manifestar mi discordancia con la intención declarada de sus propuestas (la mejora de la sistema educativo), sino argumentar mi escepticismo sobre su efectividad o poner de manifiesto ciertos aspectos de tales propuestas que tal vez no hayan sido tenidos en cuenta.

Frente a la «matización» de la escolarización obligatoria, creo que es difícil, en una sociedad europea de hoy, reducir *de facto* la escolarización obligatoria hasta los 16 años. Un eufemismo de moda, la «inserción laboral temprana», simplemente traslada el problema formativo del Ministerio de Educación al de Trabajo, si no al de Interior o al de Asuntos Sociales…

Frente a la limitación de la comprensividad, pienso que el establecimiento de itinerarios educativos (en el sentido segregador que hoy lleva implícita esta expresión) diferenciados pudiera tener, en la práctica, un efecto de «rebote», por el que amplias capas de la población traten de que sus hijos sigan el itinerario más prestigioso, aunque no estén capacitados para ello, lo que acabaría incrementando el fracaso escolar que se trataría de reducir (piénsese en la situación de la Formación Profesional años atrás), por la vía expeditiva de trasladarlo a otro ámbito.

La confianza en la deseable actuación sobre la formación inicial/continua del profesorado tendrá, en mi opinión, limitados efectos en el sistema educativo actual, como se deduce de la consideración de distintos parámetros estadísticos (edad media del profesorado actual, descenso del número de vocaciones, reducción acusada de la natalidad en la última década), junto con otras consideraciones, como la escasa virtualidad de la denominada carrera docente. Si apenas ingresarán nuevos profesores en un futuro inmediato y no se incentiva el esfuerzo de los que ya existen, la mejora de la formación inicial y continua puede tener una escasa repercusión en el sistema educativo.

La mejora de la valoración social del esfuerzo es, desde un punto de vista sociológico, un tema demasiado complejo como para pensar que se puede actuar sobre él con éxito, simplemente desde el sistema escolar. Como ocurriría si planteáramos en el mismo sistema, por ejemplo, una educación en el valor de la abstinencia sexual para evitar los altos índices de embarazos en adolescentes, o el valor de la fidelidad y del sacrificio conyugal, para evitar el creciente número de fracasos matrimoniales. Nadie confiaría en que la vía del consejo y la advertencia resolvería estos problemas. Seguiría siendo necesario poner en marcha otras medidas (profilácticas, de asistencia social, etc.) que traten ambos problemas de manera más global. Análogamente, aún siendo positiva la introducción en el mundo educativo de mecanismos de valoración del esfuerzo (tales como utilizar el mérito como criterio en determinadas situaciones escolares), resulta necesario concebir el desarrollo de las enseñanzas en el contexto actual de los niños y jóvenes, desde la escala de valores socialmente en vigor.

Otro tanto cabe decir del refuerzo de la figura del profesor (o del policía, o del padre, etc.), un deseo que compartimos, pero que difícilmente puede plantearse como solución genérica (aún reconociendo, por ejemplo, la conveniencia de incentivar a los profesores) para los problemas concretos de la escuela, en el seno de una sociedad que, como todas las occidentales, es cada vez más permisiva.

Por otra parte me parece curioso que se reclame, precisamente por los defensores de un modelo de sociedad cada vez más liberal en materia económica, el apoyo institucional al estrechamiento de los vínculos entre el éxito en los estudios y los logros profesionales (es decir, el que los alumnos perciban que no se puede triunfar en la vida sin alcanzar una formación adecuada). Por coherencia con ese modelo de sociedad, éste vínculo debería confiarse a las fuerzas del mercado; desde la posición dominante hoy día, parece que sería más bien la escuela la que debería adaptarse a la valoración que el mercado tiene del producto de las enseñanzas impartidas.

…creo que no es posible resolver los problemas urgentes de un sistema educativo basándonos en la hipótesis voluntarista de que éste modifique, por decreto, los valores, usos y costumbres imperantes en la sociedad actual.

En resumen, creo que no es posible resolver los problemas urgentes de un sistema educativo basándonos en la hipótesis voluntarista de que éste modifique, por decreto, los valores, usos y costumbres imperantes en la sociedad actual. Antes bien, es preciso proporcionar soluciones realistas, adaptadas a la sociedad de hoy, en la que un simple programa de televisión tiene más influencia entre los jóvenes que muchos cientos de horas de adoctrinamiento escolar. Son otros los mecanismos que tienen las autoridades para influir en los valores predominantes en nuestra sociedad: mejora decidida de las condiciones laborales de los padres y madres de familia, en tanto que tales padres o madres, desarrollo de alternativas sociales de ocio juvenil que potencien la tolerancia, la convivencia y el esfuerzo personal, etc.

Y, sobre todo, son precisos los diagnósticos finos, identificando el perfil de ese alumno desmotivado o provocador, torpe o vago, y describir las condiciones socioeconómicas de su entorno… No vaya a ser que las matizaciones a la escolarización obligatoria, la limitación de la comprensividad, la exigencia de un mayor esfuerzo y de un mayor nivel académico recaiga, justamente, sobre las capas más desfavorecidas de la población. Si así fuera, parece que la solución al problema sería, precisamente, la mejora de las condiciones escolares de tales alumnos, mediante una política de refuerzo positivo, y no su segregación del sistema educativo, en una sociedad que debe ofrecer oportunidades para todos.

El currículo de matemáticas en la ESO

Parece claro que la educación primaria y secundaria obligatoria deberían proporcionar a todos los ciudadanos una alfabetización numérica, simbólica y geométrica que les permitiera manejarse en el mundo de hoy, cualquiera que fuese su profesión en el futuro. Pero,

¿qué significa «alfabetización»? La adquisición de cierta destreza en las rutinas del cálculo y en la resolución de problemas estandarizados fue uno de los pilares de la enseñanza de las matemáticas en la escuela «moderna» surgida a finales del siglo XIX, pero este hecho está unido a la Revolución Industrial, que requirió que grandes capas de la población tuviesen unos conocimientos básicos de aritmética y medida.

El planteamiento, hoy día, ha de ser, por fuerza, diferente. La economía actual tiene otros requerimientos matemáticos básicos, relacionados con la capacidad de estimación, con el análisis y el tratamiento de la información, con la habilidad para modelar situaciones abiertas y para resolver problemas no tipificados en un contexto real.

Teniendo en cuenta este marco, yo creo que sería conveniente abordar el análisis del currículo de la ESO, diferenciando los tres primeros cursos del cuarto y último (aún a sabiendas de la ruptura de la estructura de ciclos que esto comporta). En general, tenemos un currículo de mínimos en los tres primeros cursos de la ESO con unos objetivos (que son comunes a los dos ciclos) y unos criterios de evaluación (de primer ciclo y de tercer curso) que me parecen razonables y que están en la línea de esa alfabetización numérica, simbólica y geométrica a la que he hecho referencia. Así aparecen objetivos del siguiente tenor:

> Utilizar las formas de pensamiento lógico en los distintos ámbitos de la actividad humana.
>
> Aplicar con soltura y adecuadamente las herramientas matemáticas adquiridas a situaciones de la vida diaria.
>
> Utilizar con soltura y sentido crítico los distintos recursos tecnológicos (calculadoras, programas informáticos) de forma que supongan una ayuda en el aprendizaje y en las aplicaciones instrumentales de las Matemáticas.
>
> Aplicar los conocimientos geométricos para comprender y analizar el mundo físico que nos rodea.
>
> Emplear los métodos y procedimientos estadísticos y probabilísticos para obtener conclusiones a partir de datos recogidos en el mundo de la información.

La economía actual tiene otros requerimientos matemáticos básicos, relacionados con la capacidad de estimación, con el análisis y el tratamiento de la información, con la habilidad para modelar situaciones abiertas y para resolver problemas no tipificados en un contexto real.

Y criterios de evaluación del siguiente tipo:

> Utilizar de forma adecuada los números enteros, las fracciones y los decimales para recibir y producir información en actividades relacionadas con la vida cotidiana.
>
> Utilizar las unidades angulares, temporales, monetarias y del sistema métrico decimal para estimar y efectuar medidas, directas o indirectas, en actividades relacionadas con la vida cotidiana o en la resolución de problemas y valorar convenientemente el grado de precisión.
>
> Interpretar las dimensiones reales de figuras representadas en mapas o planos, haciendo un uso adecuado de las escalas, numéricas o gráficas.
>
> Obtener información práctica de gráficas sencillas en un contexto de resolución de problemas relacionados con fenómenos naturales y la vida cotidiana.
>
> Identificar y utilizar los distintos tipos de números racionales para recibir y producir información en situaciones reales de la vida cotidiana y elegir, al resolver un determinado problema, el tipo de cálculo adecuado (mental, manual, con calculadora), dando significado a las operaciones, procedimientos y resultados obtenidos, de acuerdo con el enunciado.
>
> Aplicar traslaciones, giros y simetrías a figuras planas sencillas utilizando los instrumentos de dibujo habituales, reconocer el tipo de movimiento que liga dos figuras iguales del plano que ocupan posiciones diferentes y determinar los elementos invariantes y los centros y ejes de simetría en formas y configuraciones geométricas sencillas.

En mi opinión, estos y otros ítems del decreto de enseñanzas mínimas, hasta el tercer curso de la ESO, reflejan, esencialmente, lo que puede hoy entenderse como alfabetización numérica (simbólica y geométrica). Falta, tal vez, una referencia a la nueva matemática que precisa el uso generalizado de los ordenadores (es decir, a la matemática para el ordenador, en vez de la referencia al auxilio del ordenador y de la calculadora para las matemáticas clásicas). Pero el problema fundamental no son los objetivos ni los criterios de evaluación, sino la interpretación y orientación que se dé a los mismos, tanto a través de la descripción de contenidos como mediante la metodología –y los medios– empleada para su enseñanza.

Por ejemplo, uno de los contenidos de Segundo Curso habla de las «raíces cuadradas aproximadas». Este tema se puede considerar como un recurso para la práctica de estrategias de estimación y redondeo, o se puede concebir de modo algorítmico (la regla para extraer raíces cuadradas). Las operaciones con fracciones admiten un tratamiento en el que se prime la adquisición de la destreza en la operatoria y simplificación de las fracciones (1/3+1/6=?), pero también pueden ser una ocasión para «producir información en actividades relacionadas con la vida diaria» (como se indica en los criterios de evaluación).

En estos dos ejemplos, una de las alternativas es más académica y la otra es más alfabetizadora… Creo que el problema fundamental de nuestra ESO, en matemáticas, es reconocer *de facto* (ya lo está *de jure*) el predominio de la alfabetización matemática en contextos, frente a la «disciplina» matemática. Y también la confusión (generosamente extendida entre los distintos agentes del mundo educativo) entre lo que se enseña y lo que se aprende. Tenemos unos programas razonables, pero ¿qué parte de los mismos es asimilada de modo fehaciente por los alumnos? Tal vez sería necesario enseñar menos contenidos, para aprender más. Porque,

- ¿Cuántos conciudadanos tienen, tras la enseñanza obligatoria, instrumentos matemáticos personales para estimar, aún groseramente, las cuotas mensuales de amortización de una hipoteca de 100.000 euros, a 15 años y con un interés fijo del 5%?
- ¿Cuántos entienden que si los impuestos suponen una retención del 15% del salario, para ganar 6000 euros líquidos no basta con solicitar un salario bruto de 6000 + 15% de 6000?
- Y, ¿cómo entenderán la calificación obtenida en un concurso en el que hay dos ejercicios, valorados en una escala 1-10, pero en el que uno de ellos pesa el 40% y el otro el 60% en la nota final?
- ¿Cuántos pueden hacer un cálculo mental para decidir que se han equivocado un orden de magnitud al hacer la declaración de la renta? ¿O para anticipar cuál sería –aproximadamente- el resultado final de la misma si incluyeran tal ingreso de rentas del trabajo, que se les había casualmente «olvidado» al realizar el primer borrador de la declaración?
- ¿Qué número de aficionados al deporte rey se haría una idea del número de viviendas que se pueden construir (100 metros cuadrados por vivienda, cuatro por planta, seis plantas, 15% del solar para jardín) si derriban el viejo estadio municipal?
- ¿Qué ecologista de pro pondría sobre la mesa, en una discusión con los amigos, el volumen de escombros que acarrearía la construcción de tal túnel del nuevo trazado de un ferrocarril, o las dimensiones pertinentes que habría de tener el lugar que se considera idóneo para ubicarlos?
- ¿Quién se hace una idea de si es fácil o difícil deducir quién ganó una carrera, ante una gráfica (por ejemplo, lineal) que muestre la velocidad a la que circulan los vehículos a lo largo de diversos puntos de un circuito?

Pero, sobre todo, ¿cuántos acudirán de modo «natural» a las matemáticas que aprendieron para abordar estos problemas sin depender del empleado del banco, sin usar el programa de ordenador que entrega Hacienda…? Hace falta, en resumen, que el momento de la extensión de la enseñanza obligatoria sea el momento, también, de la Educación Matemática para todos.

…¿cuántos acudirán de modo «natural» a las matemáticas que aprendieron para abordar estos problemas sin depender del empleado del banco, sin usar el programa de ordenador que entrega Hacienda…?

El currículo de matemáticas en el Bachillerato

Si anteriormente asumía como razonable buena parte del currículo de los tres primeros años de la ESO, me resultan más discutibles los contenidos de algunos criterios de evaluación de cuarto curso, tales como

> Simplificar expresiones numéricas irracionales sencillas (que contengan una o dos raíces cuadradas).
>
> Determinar e interpretar el espacio muestral y los sucesos asociados a un experimento aleatorio, simple o compuesto sencillo, y utilizar la Ley de Laplace, los diagramas en árbol, las tablas de contingencia u otras técnicas combinatorias para calcular probabilidades simples o compuestas…

Creo que sus Señorías convendrán conmigo que no es fácil asumir que todos los ciudadanos deberían superar criterios de evaluación de esta índole para obtener el título terminal de su educación obligatoria: me pregunto cuántas personas adultas de extraordinaria cultura (humanística y científica) estarían en condiciones de saber de qué tratan dichos ítems.

Sin embargo muchos profesores de secundaria nos dirían que, en la práctica escolar, el problema señalado no es tal, dado que estos y otros criterios son interpretados de modo muy superficial, con un nivel de dificultad muy bajo. ¿Merece entonces la pena introducirlos? O que se hace distinción entre unas Matemáticas A y unas Matemáticas B en cuarto curso… También podrían decirnos que, sencillamente, no se imparten los contenidos correspondientes, por falta de tiempo.

El problema del tiempo es universal en todas las materias; aumentar la carga horaria de aquellas de mayor dificultad y abstracción frente a las más asequibles y próximas al alumno no hace sino disminuir, en el nivel obligatorio, las oportunidades de los alumnos mas desfavorecidos.

Yo creo que no sería disparatado pensar en la traslación a Bachillerato de buena parte de los contenidos del último curso de la ESO, aligerando así los contenidos de ésta y derivando los contenidos del último año de Bachillerato (según las modalidades del mismo) a la Universidad (álgebra lineal; límites, derivación e integración; geometría analítica tridimensional; inferencia estadística); algo que, de todas formas, ya se está asumiendo la Universidad de manera no reglada. Tal vez sería posible desarrollar esa materia optativa que se reclama desde algunos sectores como un anticipo de lo que se va a impartir de modo más sistemático en la Universidad… O considerar un Bachillerato de tres años, a costa de reducir un año el carácter unitario de la ESO, pero formulando adecuadamente una vía de escolarización obligatoria para los alumnos que no vayan a proseguir sus estudios.

Por otra parte tengo que señalar que estoy totalmente de acuerdo con la propuesta de modificación, ya señalada por otros colegas, para que el acceso a las carreras científicas y técnicas tenga, como requisito, el cursar durante los dos años de Bachillerato las correspondientes materias de matemáticas.

El tan traído tema de la necesidad de revalidar, mediante un examen general y obligatorio, de carácter externo y esencialmente único, los conocimientos de los Bachilleres me parece menos relevante que la resolución de los problemas acuciantes a los que todos hemos hecho referencia.

Conclusiones

Creo que podría sintetizar mi intervención en unas pocas conclusiones:

Debemos buscar soluciones: Relativizando el valor de nuestras propuestas y sin descalificar como incoherentes o sesgadas otras posibles alternativas.

Tomás Recio
Catedrático de la Universidad de Cantabria.
Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria.
Presidente de la Comisión de Educación de la Real Sociedad Matemática Española.

1) Debemos buscar soluciones:

- Relativizando el valor de nuestras propuestas y sin descalificar como incoherentes o sesgadas otras posibles alternativas. La búsqueda de la calidad es un asunto demasiado técnico y sutil para pensar que existan medidas milagrosas.
- Evitando la confusión entre fines, deseos y modos de conseguirlos.
- Proponiendo medidas adecuadas para los alumnos con problemas (y no sólo para los que no los tendrán o los tendrán en menor medida).
- Incluyendo al sistema universitario en la consideración global del sistema educativo.
- Cuidando de que el esfuerzo en pos de una mayor calidad del sistema educativo no perjudique, justamente, a las capas más desfavorecidas de la población.
- Mejorando las condiciones escolares de esos alumnos, mediante una política de refuerzo positivo, y no mediante el fácil recurso de su segregación del sistema educativo, en una sociedad que debe ofrecer oportunidades para todos.

2) Debemos potenciar el carácter predominantemente alfabetizador de la educación matemática en la ESO, tal como aparece en el currículo de mínimos:

- Acomodando el estilo docente a ese carácter.
- Enfatizando lo que realmente pueden aprender y aprenden los alumnos frente a la ilusión de enseñar lo que está reglamentado.
- Disminuyendo los contenidos matemáticos de la ESO (cuarto curso).
- Modificando, en consecuencia, los contenidos del Bachillerato y remitiendo parte de los mismos al nivel universitario.
- Analizando cuidadosamente las necesidades matemáticas básicas de la sociedad de la información e introduciendo, en su caso, las adaptaciones de contenido correspondientes (y no sólo, como ocurre ahora, usando las nuevas tecnologías como herramienta para la docencia de contenidos tradicionales).

3) A tal fin, se debe.

- Apoyar decisivamente una modificación substantiva en la formación inicial del profesorado, para que éste tenga los conocimientos y recursos necesarios para las peculiaridades de su docencia.
- Establecer un incentivo real para la formación continua del profesorado en ejercicio (carrera docente).
- Poner en marcha auténticos planes generales de formación continua.

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Comisión Ejecutiva

Presidente (en funciones): Serapio García
Secretario General: José Luis Álvarez García
Vicepresidente: Serapio García
Tesorera: Claudia Lázaro

Secretariados:
Prensa: Antonio Pérez Sanz
Revista SUMA: Emilio Palacián/Julio Sancho
Relaciones internacionales: Carmen Azcárate/Luis Balbuena
Actividades: Xavier Vilella Miró
Publicaciones: Ricardo Luengo González

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidente: Marta Berini López-Lara
Apartado de Correos 1306. 43200-REUS (Tarragona)

Organización Española para la Coeducación Matemática «Ada Byron»
Presidenta: Xaro Nomdedeu Moreno
Almagro, 28. 28010-MADRID

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»
Presidente: Salvador Guerrero Hidalgo
Apartado 1160. 41080-SEVILLA

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo»
Presidente: Florencio Villarroya Bullido
ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12.
50009-ZARAGOZA

Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»
Presidente: José Joaquín Arrieta Gallastegui
Apartado de Correos 830. 33400- AVILÉS (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»
Presidenta: Dolores de la Coba
Apartado de Correos 329. 38201-LA LAGUNA (Tenerife)

Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas
Presidente: Santiago Pascual
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Villalar, s/n.
09006-BURGOS

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García
Avda. España, 14, 5ª planta. 02006-ALBACETE

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidenta: Remedios Peña Quintana
IES Francisco de Goya. C./ Caravaca, s/n.
30500-MOLINA DE SEGURA (Murcia)

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Ricardo Padrón
Apartado de Correos 103.
SANTIAGO DE COMPOSTELA

Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»
Presidente: Ricardo Luengo González
Apartado 590. 06080-BADAJOZ

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»
Presidenta: Carmen da Veiga
C/ Limonero, 28
28020-MADRID

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: Begoña Martínez Barreda
CPR de Santander. C./ Peña Herbosa, 29.
39003-SANTANDER

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidenta: Luis Serrano Romero
Facultad de Educación y HUmanidades
Ctra. Alfonso XIII, s/n. 52005-MELILLA

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea Tornamira
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.
Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra.
31006-PAMPLONA

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Despacho 305. Facultad de Educación.
Universidad Complutense. 28040-MADRID

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas
Presidente: Javier Galarreta Espinosa
C.P.R. Avda. de la Paz, 9. 26004-LOGROÑO

Sociedade Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)
Presidente: Manuel Díaz Regueiro
Apartado 4188. 15080-A CORUÑA

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departament de Didàctica de la Matemàtica.
Apartado 22045. 46071-VALENCIA

SUMA 39
febrero 2002, pp. 13-25

Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados?*

Josep Gascón

ARTÍCULOS

En este trabajo pretendemos mostrar que la presunta alternativa entre geometría *sintética* y geometría *analítica* es, en realidad, una falsa alternativa fruto de un análisis epistemológico superficial. Proponemos una forma de conectar, en la enseñanza de la geometría en Secundaria, las *técnicas sintéticas* con las *analíticas* a fin de poner de manifiesto su complementariedad.

LA INTRODUCCIÓN de la *geometría analítica* por Descartes y Fermat proporcionó *nuevas técnicas* que permitían no sólo abordar muchos de los problemas geométricos no resueltos hasta ese momento, sino también plantear problemas geométricos más profundos. A principios del siglo XIX, después de más de 100 años de dominio de los métodos analíticos, se empezó a replantear cuál debía ser el papel de los diversos métodos en la construcción de la geometría e, indirectamente, en la educación matemática. En esa época, varios matemáticos importantes (Poncelet, Chasles y Monge, entre otros), reivindicaron la importancia de los *métodos sintéticos* de la *geometría pura*, que proporcionan pruebas simples e intuitivas, frente a los potentes *métodos analíticos*, que no revelan el sentido de lo que se consigue.

Empezaremos recordando la discusión, que utilizando argumentos extraídos de esa vieja controversia, fue reiniciada por prestigiosos matemáticos (Choquet, Dieudonné, Artin, Godement, Freudenthal y Santaló, entre otros) en la década de los sesenta (Piaget y otros, 1978). Dicha discusión, aunque está actualmente bastante olvidada, ha tenido una influencia directa en la comunidad escolar y se refiere al tipo de geometría que debía formar parte de la Enseñanza Secundaria. Aunque en estos momentos se ha alcanzado un cierto consenso –al menos aparentemente– confinando la geometría sintética en la enseñanza obligatoria y la geometría analítica en la post-obligatoria, es previsible que la citada controversia vuelva a aparecer, puesto que no ha sido cerrada con argumentos sólidos y, lo que es más evidente, no se ha dado ninguna respuesta a

* Algunas de las ideas que figuran en este trabajo fueron presentadas por primera vez en el marco del Seminario de Didáctica de las Matemáticas y, más en concreto, en la asignatura *Reformulació de problemes clàssics dins el marc de l'enfoc antropològic*, incluida en el Programa de Doctorado de Matemáticas de la Universitat Autònoma de Barcelona, correspondiente al curso académico 1997/1998.

la flagrante *discontinuidad* entre la *geometría sintética de la ESO* y la *geometría analítica del Bachillerato.*

Uno de los aspectos centrales de la controversia, tal como se planteaba en los años sesenta, hacía referencia al tipo de geometría que debería estar presente en la formación matemática básica de todo ciudadano. Simplificando abusivamente la cuestión, podría decirse que la discusión se polarizó entre los partidarios de una *geometría sintética*, propia del modelo «euclidiano», basada en una axiomática más o menos explícita, y los partidarios de una *geometría analítica*, propia del modelo «cartesiano», cuya práctica se sustenta en las técnicas del álgebra lineal y cuya axiomática suele quedar más implícita.

Se trata de una controversia «curricular» que se sitúa habitualmente en el ámbito del eslogan y que sólo raramente hace intervenir argumentos didáctico-matemáticos. El objetivo principal de este trabajo consiste precisamente en plantear el *problema didáctico-matemático* subyacente a esta controversia. Pretendemos poner de manifiesto, partiendo de este caso particular, que únicamente la reformulación didáctica de un *problema docente* proporciona la información y los medios necesarios para que la sociedad pueda decidir democráticamente sobre la estructura y los contenidos del currículo obligatorio de matemáticas[1].

La cuestión es análoga a la que se presenta con otros *problemas docentes* que, como el que trataremos aquí, suelen plantearse como controversias curriculares, pero raramente han sido abordadas por la didáctica de las matemáticas. Curiosamente suelen presentarse como cuestiones zanjadas o resueltas mediante *principios pedagógicos*[2] presuntamente incuestionables y cuya mayor o menor pertinencia no queremos prejuzgar a priori. Entre dichos principios (o ideas dominantes) podemos citar los siguientes[3]:

- La enseñanza de las matemáticas debe centrarse en (o girar en torno a) la actividad de *resolución de problemas*.
- El *juego* es un medio natural y eficaz para enseñar y aprender matemáticas.
- La *motivación* de los alumnos y su *actitud* hacia las matemáticas es uno de los principales factores para explicar el éxito o el fracaso del aprendizaje.
- Debe aumentarse la relación entre las matemáticas escolares y la *vida cotidiana* como uno de los medios para *motivar* a los alumnos y mejorar su *actitud* hacia las matemáticas.
- La *interdisciplinariedad* es preferible a la enseñanza de las matemáticas aisladas.
- Las *herramientas informáticas* son eficaces para enseñar matemáticas porque potencian la *visualización* y ahorran los *cálculos pesados y rutinarios* al estudiante.
- La educación matemática debe ser cada vez más *individualizada y personalizada* (idea dominante ligada a la exigencia de *atención a la diversidad*).
- Es preferible *innovar* que seguir con la *enseñanza tradicional* de las matemáticas.

Queremos subrayar la necesidad de llevar a cabo investigaciones didáctico-matemáticas sistemáticas para dilucidar el alcance de cada uno de los citados principios. Pero, sobre todo, queremos llamar la atención sobre la obligación ineludible de clarificar la *problemática matemática* subyacente en cada uno de esos problemas docentes presuntamente zanjados. De no hacerlo así corremos el riesgo de contribuir a trivializar la problemática de la enseñanza de las matemáticas y, por tanto, de seguir posponiendo indefinidamente el problema.

En este trabajo mostraremos que la presunta controversia entre *geometría sintética* y *geometría analítica* (que no ha sido resuelta todavía como lo demuestra el que aparezcan absolutamente separadas en la Enseñanza Secundaria[4]) es, en última instancia, una falsa controversia fruto de un análisis epistemológico superficial. Postulamos que, análogamente, cada uno de los principios (o ideas dominantes) citados pretende zanjar un problema docente que, si bien responde a una verdadera y legítima inquietud de los profesores, es fruto de un planteamiento equívoco.

Planteamiento de la discusión: ¿geometría sintética o geometría analítica?

Artin (1963) plantea muy claramente la controversia inicial hablando de un «conjunto convexo» de opiniones determinado por tres opiniones extremas. Se trata, en realidad, de una especie de «triángulo de opiniones» dentro del cual pueden situarse la mayor parte de los puntos de vista de la «noosfera» (Chevallard, 1985):

1 Para un análisis de las relaciones entre los problemas *docentes genéricos*, los problemas *docentes específicos* y los problemas *didácticos*, ver Gascón (1999*b*).

2 Denominamos «pedagógicos» a aquellos principios que pueden formularse independientemente de la disciplina de estudio concreta de la que se trate. En los que siguen, la disciplina «matemáticas» es intercambiable por otra cualquiera sin que el contenido del eslogan cambie sustancialmente.

3 La lista de «principios incuestionables» o «ideas dominantes» en la cultura escolar que citamos aquí no es, ni podría ser, exhaustiva. Creemos, sin embargo, que en conjunto representa bastante bien la *ideología dominante* respecto a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Dicha ideología está envuelta por la etiqueta del «constructivismo» que suele interpretarse como una amalgama de elementos extraídos de las teorías de Piaget, Vigotski, Ausubel y el procesamiento de la información, sin tener en cuenta que dichas teorías parten de presupuestos distintos y, además, pretenden explicar cosas diferentes (Delval, 1997).

4 No parece casual que esta separación contribuya a reforzar el carácter «prealgebraico» de las organizaciones matemáticas que se estudian en la E.S.O. (Gascón, 1999*a*).

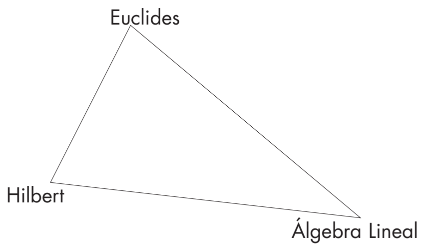


Figura 1

Choquet (1964) considera que las axiomáticas de Euclides-Hilbert ocultan la estructura vectorial del espacio porque se basan en las nociones de *longitud*, *ángulo* y *triángulo*. En estas axiomáticas se veía el triángulo, pero se estaba ciego para el *paralelogramo* que hubiese llevado a la noción de *vector*.

Por cuestiones estrictamente «matemáticas», Choquet es partidario de enseñar la geometría elemental partiendo del álgebra lineal. En esto coincide esencialmente con el punto de vista de Artin y con el de Godement (1963).

Por su parte Dieudonné (1964) también coincide con Choquet en lo que respecta al avance y simplificación que representa el álgebra lineal si se compara con los axiomas de Euclides-Hilbert. Dieudonné llega a equiparar el avance de Grassmann y Cayley respecto a la geometría clásica con el que representa el Cálculo Infinitesimal respecto a los complicados y limitados métodos de Eudoxio y Arquímedes. En este punto Dieudonné se pregunta con cierta ironía: ¿Por qué nadie ha reivindicado el valor «formativo» y «motivador» así como la «belleza» de los métodos de Arquímedes? ¿Cuáles son las causas de que hayan sido aceptados universalmente –también en la enseñanza secundaria– los métodos del cálculo diferencial moderno?

Como argumentos para respaldar su opinión extrema a favor de la enseñanza del álgebra lineal, Dieudonné expone: la *continuidad de la enseñanza*, esto es, la ventaja de *enseñar un tipo de geometría que no precisará de ningún rompimiento para pasar posteriormente a la matemática superior;*[5] *el aprendizaje precoz de los métodos «modernos»* que, de por sí, no son más difíciles que los tradicionales; y la *unificación de las disciplinas enseñadas* (trigonometría, geometría proyectiva, geometría no euclídea, números complejos, geometría pura…), en lugar de tratarlas independientemente, como si se tratase de universos no relacionados entre sí. Dieudonné critica que la «geometría euclídea tradicional» ponga en un mismo saco las propiedades *afines* y las propiedades *métricas* siendo como es tan fácil de distinguir entre unas y las otras desde el punto de vista del álgebra lineal. Es interesante observar que aunque Dieudonné en su libro *Álgebra Lineal y Geometría Elemental* se restringe a los espacios de dimensión 2 y 3 y al cuerpo $\mathbb{R}$ de escalares (para respetar la línea de demarcación trazada por la «intuición» que nos ha dado la naturaleza), no introduce en el texto ninguna figura con la intención inequívoca de mostrar que no son necesarias. De hecho, propone explícitamente liberar al alumno de la «camisa de fuerza de las figuras» así como del mayor fastidio de la enseñanza clásica: la limitación de los instrumentos de dibujo a la regla y el compás.

Dieudonné (1964) también coincide con Choquet en lo que respecta al avance y simplificación que representa el álgebra lineal si se compara con los axiomas de Euclides-Hilbert.

Hans Freudenthal (1967) en su crítica a Dieudonné subraya que éste utiliza el modelo epistemológico «euclidiano» en el desarrollo del texto *Álgebra Lineal y Geometría Elemental*, especialmente paradójico máxime cuando el autor (Dieudonné) es el mismo que lanzó el célebre «¡Abajo Euclides!». Aunque Freudenthal no lo acaba de expresar con demasiada claridad, parece que lo que critica del punto de vista de Dieudonné es el hecho de que éste esconda los problemas que hay detrás de las conjeturas, las razones de la elección de unos axiomas en lugar de otros y, en definitiva, la ocultación de la problemática que da origen a la geometría como organización matemática.

Entre los matemáticos españoles que participaron, aunque algo tardíamente, en la controversia y que han sido críticos con el punto de vista de Dieudonné (dominante durante la revolución de la llamada «matemática moderna») citaremos al catalán Luis Antonio Santaló[6]. Este autor cree que, por lo que respecta a la enseñanza de la geometría, se ha caído repetidamente en el error de pensar que los fundamentos de una ciencia, por el hecho de partir de cero, son la parte más fácil y simple de la misma y que, por tanto, deben ser el punto de partida para su estudio. Este error hizo que se intentaran utilizar los *Elementos* de Euclides (obra dirigida a especialistas que eran los únicos que podían entender la genialidad de su sistema axiomático) como texto para aprender geometría. Este mismo error se repitió veintitrés siglos más tarde con los *Fundamentos* de Hilbert. También, en este caso, se quiso adaptar la obra a la enseñanza secundaria y aparecieron textos con «postulados a lo Hilbert» formando mescolanzas pesadas e indigestas sin utilidad y sin rigor. El resultado fue, según Santaló, una geometría en cuya

5 Este argumento de Dieudonné presupone que entre la geometría sintética y la geometría analítica debe haber forzosamente un «rompimiento». En este trabajo pretendemos mostrar precisamente lo contrario, esto es, que la separación o discontinuidad que se da, de hecho, entre la geometría sintética y la geometría analítica (y que es especialmente visible en el currículo actual de la Enseñanza Secundaria entre la geometría de la ESO y la del Bachillerato) no obedece a razones intrínsecas –ni epistemológicas ni didácticas– sino a causas circunstanciales que pueden ser modificadas.

6 Resumiremos aquí el punto de vista de Santaló expresado en un artículo que publicó en la desaparecida *Revista de Bachillerato* (Santaló,1980).

pseudofundamentación se perdía el tiempo y se confundía a los alumnos[7].

Según Santaló el mismo fenómeno se repitió con la eclosión alrededor de 1960 de la matemática moderna. Se intentó (por parte de Dieudonné, entre otros) el objetivo imposible de una construcción impecable y rigurosa de la geometría sin salirse del nivel elemental y sin rebasar la capacidad de aprendizaje de los alumnos y –siempre según Santaló– como esto resultaba imposible se optó por suprimir la geometría o trasladarla al álgebra lineal, con la consiguiente pérdida total de sus características de belleza y armonía que la habían adornado desde la antigüedad.

En particular, Santaló critica el *tour de force* que realizan tanto Choquet como Dieudonné en sus respectivas introducciones a la geometría elemental. Cita explícitamente a Dieudonné que se congratula de poder introducir toda la geometría euclidiana del plano independientemente de toda medida de ángulos con números reales. Para Santaló las dificultades de la enseñanza de la geometría en Secundaria, que motivaron la supresión casi total de la misma (en 1980), provenían precisamente del prurito de que la enseñanza tuviera una estructura lineal y estuviera rigurosamente fundamentada. Superada esta pseudo-necesidad, la geometría en el sentido clásico tiene mucho que ofrecer como gimnasia razonadora y como depósito de ejemplos que ayuden a comprender el mundo, la matemática y las ciencias naturales.

El cuestionamiento epistemológico de la «geometría»

Hasta aquí no hemos salido del planteamiento inicial de la controversia, esto es, nos hemos mantenido dentro del triángulo de opiniones citado por Artin. Éste podría ser caracterizado globalmente diciendo que está formado por opiniones que no cuestionan, en absoluto, el *modelo epistemológico ingenuo* (Brousseau, 1987) de las matemáticas en general y de la geometría en particular.

En efecto, en las diversas posturas descritas por Artin (1963) aparecen argumentos matemáticos «técnicos» relativos a la potencia, simplicidad y unificación de las técnicas matemáticas, aderezados con algunos principios del «sentido común» y con ideas preconcebidas respecto a la «belleza» y «utilidad» de la geometría así como a su presunta «capacidad formadora para el razonamiento». Pero la totalidad de las opiniones que pueden incluirse en el triángulo de opiniones de Artin, coinciden en un punto esencial; en todas ellas *la naturaleza de la geometría se da por sentada, es transparente y, por tanto, no se cuestiona*.

André Revuz (1971) introduce en la controversia elementos que no pueden ser reducidos de ninguna manera al citado triángulo de opiniones. Siguiendo con la metáfora del «conjunto convexo de opiniones» habría que decir que la postura de Revuz debe situarse no sólo fuera del triángulo de Artin, sino incluso fuera del plano que contiene dicho triángulo puesto que, como veremos, introduce una nueva *dimensión* en la controversia, la *dimensión epistemológica*.

La primera pregunta que se plantea Revuz tiene ya un carácter claramente epistemológico: «¿existe, hoy día, la geometría como una parte relativamente independiente de las matemáticas?»

La primera pregunta que se plantea Revuz tiene ya un carácter claramente epistemológico: «¿existe, hoy día, la geometría como una parte relativamente independiente de las matemáticas?» Veremos que su respuesta a esta primera pregunta es negativa. Curiosamente a su segunda pregunta: «¿debe enseñarse geometría en las escuelas?», responde con un rotundo «sí, sin la menor duda».

A fin de explicar esta aparente contradicción André Revuz siente la necesidad de explicitar su punto de vista respecto a lo que él denomina «contexto en el que nacen y se desenvuelven las matemáticas» y a la forma cómo puede aplicarse dicho punto de vista al caso de la geometría. Desde el marco de la didáctica de las matemáticas podría decirse (aunque Revuz no lo exprese en estos términos) que el autor siente la necesidad de explicitar su modelo epistemológico general del conocimiento matemático a fin de poder utilizar un modelo específico de la geometría que le permita construir las nociones de «geometría» y «enseñar geometría», entre otras[8].

El modelo epistemológico de las matemáticas que Revuz propone consta de tres componentes básicos: *situaciones*, *modelos* y *teorías*.

(A) Llama *situación* a una parte de la realidad (se refiere a la realidad física) que queremos considerar en sí misma, relativamente independiente del resto del universo.

(B) Un *modelo matemático de una situación* es una esquematización de ésta por medio de sus características «esenciales» las cuales deben ser descritas en términos matemáticos a fin de poder trabajar dentro del modelo. Las cualidades que debe poseer un modelo son:

7 En este punto Javier de Lorenzo pone el dedo en la llaga al señalar que, en realidad, «... no es a Euclides a quien se quiere volver, sino a una Geometría mezcla de un atisbo de deductivismo y constructivismo concretos con regla y compás y con pretendidas ventajas de visiones espaciales» (de Lorenzo, 1980: 34).

8 Desde el ámbito de la didáctica de las matemáticas podría decirse que Revuz tiene la necesidad de tratar la problemática de la enseñanza de la geometría tomando el cuestionamiento epistemológico (de la geometría) como puerta de entrada a dicha problemática. Este será, en cierta forma, el punto de partida de un nuevo Programa de Investigación en didáctica de las matemáticas: El Programa Epistemológico (Gascón, 1998, 1999*b*).

(i) *Facilidad de utilización* como tal modelo. Por ejemplo, los espacios vectoriales son más fáciles de utilizar como modelos de una situación que las teorías euclídea y hilbertiana.

(ii) *Multivalencia:* el modelo debe poder dar cuenta (modelizar matemáticamente) de muchas situaciones distintas. Por ejemplo, los espacios vectoriales constituyen un modelo multivalente.

(iii) *Adecuación del modelo a la situación* que pretende modelizar. Se trata de un carácter no matemático.

(C) Revuz llama *teoría* a un modelo matemático cuando se le considera independientemente de las posibles situaciones modelizadas por él. Esto es, cuando se toma en cuenta únicamente la estructura misma del modelo.

La geometría no debe enseñarse separadamente de los demás aspectos de las matemáticas (aritmética, álgebra, combinatoria, probabilidad...).

Utilizando esta representación de los objetos que aparecen en la actividad matemática, nuestro autor deduce una consecuencia muy importante para la enseñanza de las matemáticas: según Revuz es fundamental que en la enseñanza de las matemáticas se pase tanto de *situaciones* a *modelos* y de *modelos* a *teorías* como, en la dirección contraria, de *teorías* a *modelos* y de *modelos* a *situaciones* (figura 2) y alerta de los dos peligros siguientes que, según él, son muy comunes en la enseñanza de las matemáticas:

Situaciones ⟷ Modelos ⟷ Teorías

Figura 2

- *Peligro 1:* aislar totalmente la situación del *modelo*, lo que comporta o bien quedarse del lado del modelo descontextualizado (lo que suele acabar enseñando puramente *teorías*); o bien quedarse del lado de la *situación*, estudiándola directamente sin utilizar ningún modelo matemático, lo que comporta realizar una actividad no matemática.

La enseñanza de la geometría debe comenzar en el jardín de infancia.

- *Peligro 2:* confundir *situaciones* y *modelos*. Este peligro incapacita para alcanzar el nivel de las teorías, puesto que no permite liberarse de la situación modelizada.

¿Cómo aplicar este bosquejo de modelo epistemológico general de las matemáticas, propuesto por Revuz, al caso de la geometría? ¿Cuáles son las *situaciones*, los *modelos* y las *teorías* en geometría? Lo más difícil para Revuz es identificar las *situaciones geométricas* debido, en nuestra opinión, a su noción tan restringida y absoluta de *situación*. Implícitamente *identifica situación geométrica* con *situación relativa al espacio real*. Por otra parte, es fácil ver que existen teorías matemáticas (álgebra Lineal, Espacios de Hilbert, Topología, Teoría de la Medida, Teoría de Retículos, Geometría Diferencial, etc.) a las que se les puede considerar, pero sólo muy parcialmente, como *teorías geométricas*: con la misma razón cabría llamarlas «aritméticas», «algebraicas», «analíticas», «topológicas», etc.

Por lo que se refiere a los modelos, identifica los *modelos geométricos* con los que se utilizan en las diversas geometrías elementales (afín, euclidiana, proyectiva, topología…) en un sentido amplio.

Del anterior intento de caracterización de las situaciones, los modelos y las teorías «geométricas», Revuz deduce tres consecuencias importantes:

(I) El adjetivo «geométrico», en la matemática actual, no puede ser aplicado estrictamente para caracterizar *teorías*; sólo puede aplicarse propiamente a *situaciones* y a *modelos*. Así, según Revuz, podemos hablar de situaciones geométricas y de *modelos geométricos* pero no tiene sentido hoy día hablar de *teorías geométricas*.

(II) En consecuencia no podemos considerar la geometría como una parte independiente de las matemáticas ni, por tanto, plantearnos la enseñanza de la geometría de esa forma.

(III) El problema fundamental de la enseñanza de la geometría lo plantea Revuz de la siguiente forma: «¿cuál es la forma de pasar, en la enseñanza de la geometría, de situaciones geométricas a modelos geométricos que permitan posteriormente conectar con ciertas teorías?».

Revuz responde con algunas recetas que, en su opinión, ayudarían a mejorar la enseñanza de la geometría en este sentido:

- *Receta 1:* la geometría no debe enseñarse separadamente de los demás aspectos de las matemáticas (aritmética, álgebra, combinatoria, probabilidad...).
- *Receta 2:* En la modelización (geométrica) de las situaciones geométricas (esto es, las relativas al «espacio real») deben utilizarse todo tipo de modelos «geométricos» (topológicos, métricos, afines, proyectivos...).
- *Receta 3:* La enseñanza de la geometría debe comenzar en el jardín de infancia.

- *Receta 4:* Es imposible e indeseable una enseñanza de la geometría totalmente deductiva (antes de los 15-16 años).
- *Receta 5:* Tanto en la «creación matemática» como en el aprendizaje de las matemáticas son muy importantes las «imágenes geométricas». Éstas no provienen únicamente del espacio real ni tampoco del espacio matemático de la geometría euclídea.

Generalización y flexibilización de la noción de «modelización matemática»

El punto de vista de Revuz podría sintetizarse diciendo que la geometría que debe enseñarse en las escuelas consiste en la modelización «geométrica» (esto es, topológica, proyectiva, afín o euclídeana) de situaciones relativas al espacio «real».

Se trata de una posición interesante que no deja de presentar fuertes dificultades y limitaciones debidas a la rigidez y, en cierta forma, al carácter relativamente «simplista» de su modelo epistemológico general. Estas limitaciones se ponen de manifiesto en la noción excesivamente estrecha de *modelización geométrica* que se desprende de su forma de interpretar y describir el conocimiento matemático en general.

Si utilizamos la noción más amplia de *modelización matemática* tal como aparece en Chevallard (1989), entonces será posible flexibilizar y enriquecer la noción de *modelización geométrica*. Para ello debemos empezar generalizando las tres nociones principales que usa Revuz en su modelo:

(A') *Sistema modelizable matemáticamente:* cualquier ámbito de la realidad, sin ningún tipo de restricciones, siempre que pueda ser aislado del resto –aunque sea hipotéticamente–, será considerado como un *sistema* potencialmente *modelizable matemáticamente*. En esta noción de «sistema» se incluyen muy especialmente los *sistemas matemáticos* (como, por ejemplo, los números primos, los poliedros, las cónicas, las funciones holomorfas, las variedades algebraicas o un cierto tipo de algoritmos, entre otros muchos), por lo que hemos ampliado significativamente el dominio de la noción de «situación» de Revuz que sólo era aplicable a ámbitos extramatemáticos.

(B') *Modelo matemático:* en lugar de interpretar, como hace Revuz, un modelo matemático como una esquematización más o menos *representacionista* (de un sistema) obtenida mediante la selección de sus características esenciales, diremos simplemente que un *modelo matemático*[9] es el resultado de un proceso de modelización matemática de un sistema matemático o extramatemático que consta esencialmente de cuatro etapas:

Tanto en la «creación matemática» como en el aprendizaje de las matemáticas son muy importantes las «imágenes geométricas». Éstas no provienen únicamente del espacio real ni tampoco del espacio matemático de la geometría euclídea.

9 La metáfora adecuada para los modelos matemáticos es la de «máquina» o «instrumento» útil para producir conocimientos relativos al sistema modelizado. La pertinencia de un modelo matemático se mide entonces por su mayor o menos capacidad para aumentar los conocimientos sobre el sistema y nunca por su capacidad de «representar» a dicho sistema de una manera más o menos «fidedigna» o «fotográfica».

- 1.ª etapa: *elección de ciertos aspectos del sistema* (sin presuponer que se trate de las características *esenciales*) que se operativizan mediante variables *x*, *y*, *z*, *a*, *b*, *c*,... Se trata de una elección relativamente arbitraria y necesariamente sesgada (no exhaustiva) que está guiada por lo que el investigador considera como aspectos «relevantes» respecto al estudio que se quiere hacer del sistema y al tipo de fenómenos que se quieren describir. Las variables citadas pueden tomar valores en un conjunto de objetos matemáticos cualesquiera (no es necesario que estos valores sean numéricos). En esta etapa pueden empezar a formularse, con poca precisión, preguntas y cuestiones relativas al sistema.
- 2.ª etapa: establecimiento de un cierto número de *relaciones matemáticas entre dichas variables*. Este conjunto de relaciones suele considerarse el *modelo matemático* propiamente dicho. El disponer del lenguaje y de las técnicas propias del modelo matemático, permitirá formular con más precisión los problemas enunciados provisionalmente en el estadio anterior.
- 3.ª etapa: esta etapa incluye, además del *trabajo técnico* dentro del modelo, la interpretación de este trabajo y de sus resultados *dentro del sistema modelizado*. El citado trabajo técnico dentro del modelo tiene por objetivo obtener conocimientos relativos al sistema modelizado. En esta etapa se decide si el modelo es interesante, fecundo, y pertinente, en la medida que permite generar conocimientos relativos al sistema que no eran fácilmente obtenibles sin la utilización del modelo.
- 4.ª etapa: en esta última etapa de la actividad de modelización matemática se pueden *enunciar problemas nuevos* cuya naturaleza puede ser completamente imprevisible desde la lógica del sistema de partida. Esto significa que los problemas

que se estudian en la tercera etapa pueden desarrollarse hasta llegar a independizarse completamente del sistema inicial y generar *nuevos tipos de problemas.*

(C') *Teoría matemática:* en lo que se refiere a las teorías, seguiremos también la nomenclatura de Chevallard (1989) que denomina *teoría* o *modelo regional* simplemente a un modelo cuyo alcance es tal que engloba ciertos *modelos locales*. Esto significa que las nociones de

modelo (local) / *teoría*
(= modelo regional)

son relativas. Además, se asigna a la modelización matemática un carácter reversible (el sistema matemático puede, a su vez, ser considerado como modelo de su modelo) por lo que las nociones: *sistema* / *modelo* y sus respectivas funciones dentro del proceso de modelización matemática, también son relativas. En total tenemos que puedan considerarse *series recurrentes* y, en parte, *reversibles* del tipo:

sistema / modelo / teoría

Actividad «geométrica» como modelización «geométrica»

Si identificamos la *actividad matemática* con la actividad de modelización, entonces nos veremos abocados a identificar «aprender matemáticas» con el proceso de construcción de conocimientos matemáticos, relativos a un sistema matemático o extramatemático, que se lleva a cabo mediante la utilización de un modelo matemático de dicho sistema. Este es el punto de vista sustentado por el «modelizacionismo» que, como modelo docente, supera las limitaciones más burdas de los modelos docentes clásicos (*teoricismo* y *tecnicismo*) y del *modernismo*, aunque sigue presentando insuficiencias relativas a las funciones del desarrollo de las técnicas matemáticas y que citaremos más adelante (Gascón, 1994 y 2001).

Si identificamos la actividad matemática con la actividad de modelización, entonces nos veremos abocados a identificar «aprender matemáticas» con el proceso de construcción de conocimientos matemáticos…

Desde el punto de vista del modelizacionismo resultará que «aprender geometría» deberá relacionarse con la modelización geométrica, esto es, con un tipo de *modelización matemática* en el que o bien el sistema o bien el modelo (o ambos) puedan considerarse «geométricos». Tenemos, por tanto, dos formas alternativas (y no excesivamente precisas[10]) de interpretar la modelización geométrica:

Proceso de construcción de conocimientos matemáticos llevado a cabo mediante la utilización de un modelo «geométrico»

Ejemplo 1

Supongamos que tenemos dos recipientes iguales con la misma cantidad de líquido. Los líquidos son diferentes pero perfectamente miscibles. Se extrae una pequeña cantidad de líquido del primer recipiente y se vierte en el segundo; a continuación se mezclan bien los líquidos del segundo recipiente y se extrae de éste la misma pequeña cantidad de líquido para verterla en el primer recipiente en el que también se mezcla perfectamente. Al final del proceso, ¿en cuál de los dos recipientes es mayor la concentración de líquido «extraño»?

En este caso es posible utilizar un *modelo,* considerado genuinamente «geométrico», que permite responder a las cuestiones planteadas. Se trata de un modelo elaborado con rectángulos que representan como va evolucionando la cantidad de líquido de cada recipiente a medida que se van haciendo los trasvases de líquido. El color gris claro representa el líquido que contiene inicialmente el primer recipiente y el gris oscuro el líquido contenido inicialmente en el segundo recipiente (figura 3).

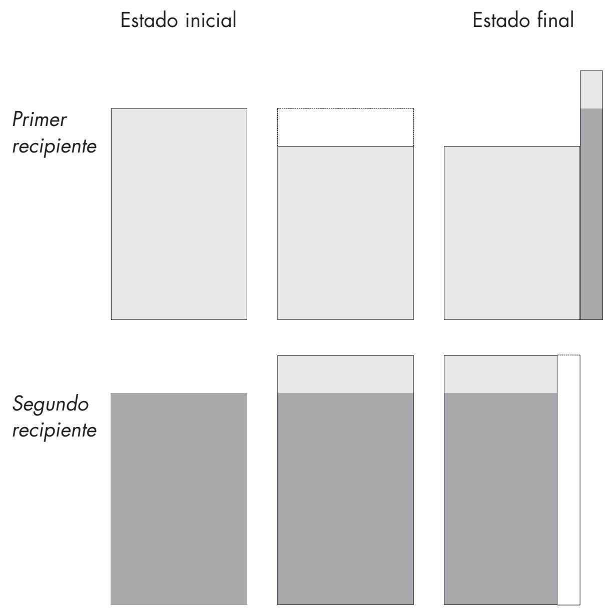


Figura 3

10 La ambigüedad proviene de la falta de precisión –en términos de un modelo epistemológico de las matemáticas– del adjetivo «geométrico» (y del sustantivo «geometría»). Esta ambigüedad no es específica de la geometría sino que es compartida por todas las demás disciplinas en que tradicionalmente se ha dividido la «matemática» («aritmética», «álgebra», «cálculo», etc.). En otro lugar hemos caracterizado las «modelizaciones algebraicas» así como los indicadores del «grado de algebrización» de una organización matemática cualquiera (Bolea, Bosch y Gascón, 1998*a*, 1998*b* y 2001), pero este trabajo no ha sido realizado todavía en el caso de la «geometría».

El trabajo dentro de este modelo requiere únicamente utilizar la aditividad del área para mostrar que, en el estado final, los dos recipientes tienen la misma concentración de líquido «extraño» y que, por tanto, el resultado final es independiente de cuál sea el recipiente del que extraemos líquido la primera vez.

Proceso de construcción de conocimientos matemáticos llevado a cabo mediante la modelización matemática de un sistema geométrico

Ejemplo 2

Partimos de la situación problemática constituida por una familia de triángulos isósceles inscritos en una circunferencia de diámetro *d*. Designamos por *s* la longitud de cada uno de los lados iguales y por *b* el (potencialmente) desigual. Inicialmente pueden plantearse, entre otras, las siguientes cuestiones (Polya, 1962-65):

(a) ¿Qué relación hay entre *b* y *s*?

(b) ¿Cómo debe ser b para que el triángulo isósceles sea rectángulo?

(c) ¿En qué casos el triángulo es equilátero?

(d) Fijada una de las variables, ¿Cuáles son los límites de variación de las dos restantes?

En este caso el *sistema* (familia de triángulos isósceles inscritos en una circunferencia) es considerado genuinamente «geométrico» por la comunidad escolar (figura 4). Podemos utilizar un modelo «algebraico» para responder a las cuestiones planteadas.

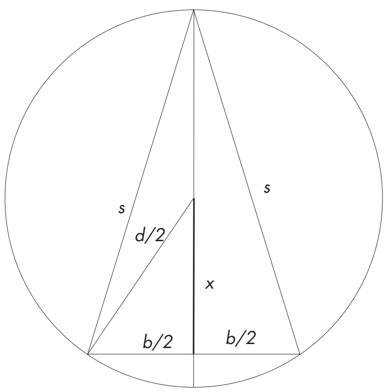


Figura 4

El modelo algebraico viene dado por dos relaciones fundamentales que se obtienen, ambas, aplicando el teorema de Pitágoras:

$$\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = s^2$$

$$x^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

Eliminando la incógnita auxiliar *x* (que representa la distancia del centro de la circunferencia al lado «desigual» del triángulo) se obtiene el modelo algebraico:

$$4s^4 - 4s^2d^2 + d^2b^2 = 0$$

que permite expresar cada una de las variables como función de las otras dos:

$$b^2 = 4s^2 - \frac{4s^2}{d^2}$$

$$d^2 = \frac{4s^4}{4s^2 - b^2}$$

$$s^2 = \frac{1}{2}\left(d^2 \pm d\sqrt{d^2 - b^2}\right)$$

El estudio elemental de estas funciones permite contestar todas las preguntas planteadas en el problema así como plantear y resolver nuevas cuestiones como, por ejemplo: ¿Cuánto mide el lado *b* si $s = d/2$ = radio de la circunferencia? Utilizando cualquiera de las tres funciones, se obtiene el resultado:

$$s = \frac{d}{2} \Rightarrow b = \frac{d}{2}\sqrt{3}$$

Las técnicas «analíticas» como desarrollo de las técnicas «sintéticas»

El modelizacionismo[11] presenta todavía importantes limitaciones relacionadas con el *olvido del momento del trabajo de la técnica* y, en consecuencia, con el olvido del papel *del desarrollo de las técnicas matemáticas* en el proceso de estudio (Bosch y Gascón, 1994). En los últimos desarrollos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)[12] se está haciendo un esfuerzo por completar el modelizacionismo (que relaciona dos dimensiones o momentos de la actividad matemática: el momento *tecnológico teórico* y el momento exploratorio[13]) con las principales aportaciones

11 Llamamos *modelizacionismo* al modelo docente que interpreta «aprender matemáticas» como un proceso de construcción de conocimientos matemáticos relativos a un sistema matemático o extramatemático que se lleva a cabo mediante la utilización de un modelo matemático de dicho sistema (Gascón, 2001).

12 La TAD se sitúa dentro del que denominamos Programa Epistemológico de Investigación en didáctica de las matemáticas (Gascón, 1998). Una introducción a dicha teoría se encuentra en Chevallard, Bosch y Gascón (1997). La primera propuesta sistemática se encuentra en Chevallard (1992) y los últimos desarrollos pueden verse en Chevallard (1997 y 1999).

13 En el momento *exploratorio*, que consideramos como una de las dimensiones de la actividad matemática, juega un papel importante lo que Polya llamó *razonamiento plausible* o *conjetural*, que se manifiesta en la formulación de hipótesis, conjeturas y contraejemplos, en la contrastación de su validez, en la reformulación de éstas, en el ensayo de técnicas, en la modificación de definiciones ya establecidas y, en definitiva, en el trabajo con lo «probable o verosímil» (Polya, 1954).

del procedimentalismo (que relaciona el momento *exploratorio* y el momento del *trabajo de la técnica*) para integrar de manera funcional las tres dimensiones citadas de la actividad matemática.

Este punto es crucial en el caso que nos ocupa dado que la tesis principal que defenderemos aquí que denominaremos «tesis de la continuidad entre las geometrías sintética y analítica», requiere, por una parte, interpretar la actividad matemática como una actividad de modelización y, por otra, tomar en consideración el papel del desarrollo de las técnicas matemáticas en el proceso de estudio. La citada tesis puede formularse como sigue:

Tesis de la continuidad entre las geometrías sintética y analítica

Si partimos de un campo de problemas considerados por la comunidad matemática como representantes genuinos de la *geometría sintética* (o «pura») –como son, por ejemplo, los *problemas de construcción geométrica con regla y compás*– y utilizamos las *técnicas sintéticas clásicas* de estudio de este campo, puede mostrarse que el desarrollo de estas técnicas (paralelo a la ampliación progresiva del campo de problemas) provoca rápidamente la aparición de las *técnicas analíticas* características de la *geometría cartesiana*.

Lo anterior significa que, cuando se empieza a explorar un campo de problemas de la geometría sintética aparece la necesidad (como en cualquier proceso de estudio de un campo de problemas) de introducir pequeñas variaciones en los problemas de dicho campo y, muy rápidamente, nos encontramos con problemas para los cuales la técnica inicial presenta determinadas limitaciones. Se produce entonces la necesidad epistemológica y didáctica de variar la técnica inicial y esta variación suele desembocar en la producción de técnicas denominadas «analíticas» «cartesianas» o «algebraicas» porque su justificación e interpretación natural se da dentro del álgebra[14].

Naturalmente que esta tesis merece ser (de)mostrada además de enunciada.

…cuando se empieza a explorar un campo de problemas de la geometría sintética aparece la necesidad (como en cualquier proceso de estudio de un campo de problemas) de introducir pequeñas variaciones en los problemas de dicho campo y, muy rápidamente, nos encontramos con problemas para los cuales la técnica inicial presenta determinadas limitaciones.

Aquí nos limitaremos a presentar algunos indicios de su verosimilitud en el caso de un tipo particular de problemas. Tomaremos, para ello, un problema de construcción geométrica con regla y compás y mostraremos que mediante pequeñas variaciones del enunciado se amplía el campo de problemas de tal forma que la técnica inicial (formalizada mediante el *Patrón de Análisis/Síntesis*) muestra limitaciones que provocan la aparición del Patrón Reformulado el cual incluye la técnica ecuacional. Es fácil ver que el siguiente problema es resoluble mediante la especificación del *Patrón de Análisis/Síntesis* clásico al caso particular de los problemas de construcción de dos lugares geométricos (Polya, 1962-1965; Gascón, 1989, 1993 y 1993-1994).

Ejemplo 3

Construir con regla y compás un triángulo ABC dados la longitud de un lado $AB = c$, y las longitudes de la altura h_c y la mediana m_c relativas a dicho lado c.

Basta reducir el problema a la construcción del tercer vértice C del triángulo. Este punto se obtiene como intersección de dos lugares geométricos construibles con regla y compás a partir de los datos: la circunferencia de centro el punto medio M_{AB} de AB y radio m_c y las rectas paralelas a AB a distancia h_c (figura 5).

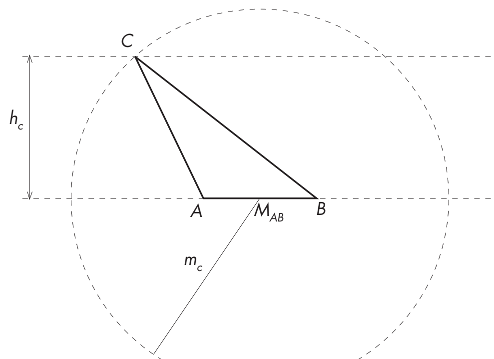


Figura 5

Mediante pequeñas variaciones del problema anterior podemos enunciar otros problemas del mismo tipo, es decir, problemas que siguen siendo resolubles mediante la misma técnica sintética clásica de dos lugares geométricos:

14 Es interesante recordar que clásicamente el álgebra era considerada por el propio Descartes como el «arte analítico»; de ahí que se utilice el adjetivo «analítico» casi como un sinónimo de «algebraico» (Lakatos, 1977: 121).

Ejemplo 4

Construir con regla y compás un triángulo *ABC* dados la longitud de un lado: $AB = c$, la altura h_c relativa al lado *c* y la mediana m_a relativa al lado *a*.

En este caso el problema se reduce a la construcción del punto medio M_{BC} del lado *BC* el cual se obtiene como intersección de dos lugares geométricos construibles con regla y compás a partir de los datos: la circunferencia de centro *A* y radio m_a y las rectas paralelas a *AB* a distancia $h_c/2$ (figura 6).

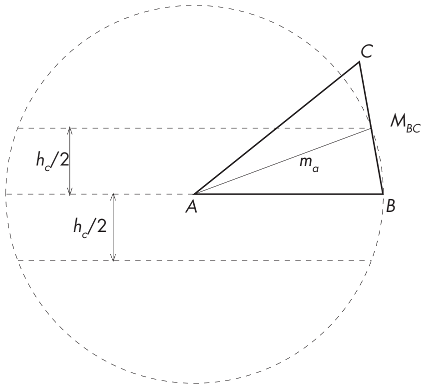


Figura 6

Ejemplo 5

Construir con regla y compás un triángulo *ABC* dados la longitud de un lado: $AB = c$, y las longitudes m_a y m_c de las medianas relativas respectivamente a los lado *a* y *c*.

En este caso el problema se reduce a la construcción del baricentro *G* del triángulo y éste se obtiene, de nuevo, como intersección de dos lugares geométricos construibles con regla y compás a partir de los datos: la circunferencia de centro el punto medio M_{AB} del lado *AB* y radio $m_c/3$ y la circunferencia de centro *A* y radio $2m_a/3$ (figura 7).

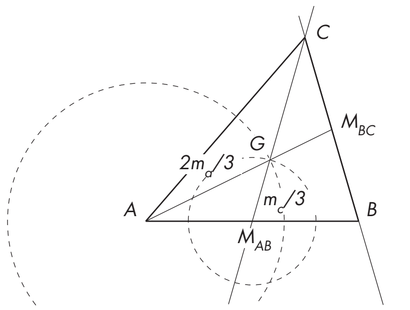


Figura 7

Ejemplo 6

Construir con regla y compás un triángulo *ABC* dadas las longitudes de las tres medianas: m_a, m_b y m_c.

Al intentar resolver este problema mediante el *Patrón de Análisis/Síntesis* clásico, en su modalidad de los *dos lugares geométricos*, aparecen dificultades debido a que una vez situado el punto *G* y los extremos de una de las medianas (sean, por ejemplo, M_{AB} y *C*), no es evidente a priori que podamos conseguir construir ninguno de los puntos (*A*, *B*, M_{BC} y M_{AC}) que resolvería el problema como intersección de dos lugares geométricos construibles con regla y compás[15] (figura 8).

Figura 8

¿Cuál es la diferencia esencial entre este último problema y los anteriores? ¿Cómo podemos explicar que mediante una pequeña variación del enunciado salgamos del dominio de aplicabilidad de la *técnica sintética* clásica (con regla y compás) *de los dos lugares geométricos*?

Podemos dar una respuesta en el ámbito de la geometría analítica. Para ello compararemos las características de la simbolización global de las condiciones de ambos problemas. Si en el ejemplo 5 tomamos el baricentro $G(x, y)$ como incógnita, la recta *AB* como eje de abscisas y el punto $M_{AB}(0, 0)$ como origen de coordenadas, tenemos:

$$d(A,G) = \frac{2m_a}{3} \Leftrightarrow \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{4m_a^2}{9}$$

$$d(M_{AB},G) = \frac{m_c}{3} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{m_c^2}{9}$$

Dado que *c*, m_a y m_c son datos del problema, las dos ecuaciones anteriores constituyen lugares geométricos construibles con regla y compás a partir de los datos y, como ambos contienen al

¿Cómo podemos explicar que mediante una pequeña variación del enunciado salgamos del dominio de aplicabilidad de la técnica sintética clásica (con regla y compás) de los dos lugares geométricos?

15 Lo que no significa que el problema en cuestión no sea resoluble mediante otras técnicas sintéticas e incluso como intersección de dos lugares geométricos no «evidentes» a priori. De hecho, puede demostrarse que la construcción de un triángulo del que se conocen sus tres medianas m_a, m_b y m_c puede reducirse, mediante técnicas sintéticas, a la construcción de un triángulo de lados $2m_a$, $2m_b$ y $2m_c$ (Puig Adam, 1973: 209).

baricentro G, éste se obtiene como la intersección de dichos lugares (figura 9).

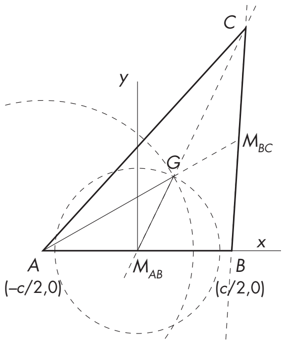


Figura 9

Análogamente, en el ejemplo 6 podemos tomar el baricentro $G(0, 0)$ como origen de coordenadas y como eje de abscisas la recta que contiene a la mediatriz m_c. Aquí los datos del problema son m_a, m_b y m_c (lo que permite suponer, por ejemplo, que los puntos C y M_{AB} tienen coordenadas conocidas) y podemos tomar como incógnita uno cualquiera de los puntos A, B, M_{BC} o M_{AC}. Dado que en nuestro sistema de referencia $C(2m_c/3, 0)$ y $M_{AB}(-m_c/3, 0)$, podemos tomar $A(x, y)$ como punto incógnita y entonces se tiene:

$$B = \left(\frac{2m_c}{3} - x, -y\right)$$

$$M_{BC} = \left(\frac{x}{2}, -\frac{y}{2}\right)$$

$$M_{AC} = \left(\frac{x}{2} + \frac{m_c}{3}, \frac{y}{2}\right)$$

A partir de las condiciones que cumplen los puntos A, B, M_{BC} y M_{AC}, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$d(G, A) = \frac{2m_a}{3} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{4m_a^2}{9} \quad [1]$$

$$d(G, B) = \frac{2m_b}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{2m_c}{3} + x\right)^2 + y^2 = \frac{4m_b^2}{9} \quad [2]$$

Y al imponer las condiciones que han de cumplir M_{BC} y M_{AC} se obtienen las ecuaciones:

$$d(G, M_{BC}) = \frac{m_a}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{m_a^2}{9} \quad [3]$$

$$d(G, M_{AC}) = \frac{m_b}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2} + \frac{m_c}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{m_b^2}{9} \quad [4]$$

que son equivalentes, respectivamente, a [1] y [2].

Se trata de dos lugares geométricos construibles con regla y compás a partir de los datos. El punto incógnita $A(x, y)$ puede construirse como intersección de la circunferencia [1], que tiene centro en el punto $G(0, 0)$ y radio $(2/3)m_a$, y la circunferencia [2] que tiene centro en el punto $(-(2/3)m_c, 0)$ y radio $(2/3)m_b$ (figura 10).

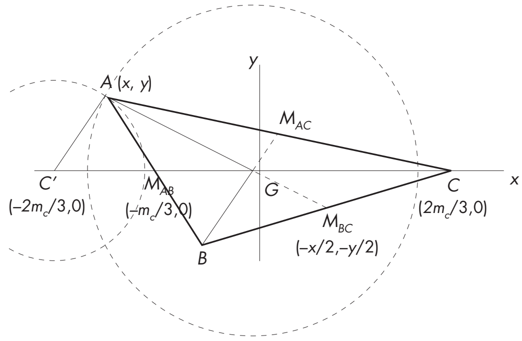


Figura 10

La diferencia fundamental entre los ejemplos 5 y 6, desde el punto de vista de la *técnica sintética de dos lugares geométricos*, radica en que mientras en el primero aparecen dos lugares geométricos (circunferencias) a los que pertenece el punto incógnita que son construibles e *interpretables directamente* a partir de los datos del problema, en el segundo el lugar geométrico [2] presenta unas características un poco diferentes. En efecto, si consideramos únicamente los datos del problema y las propiedades que se deducen inmediatamente de la definición de *mediana*, no es «directamente evidente»[16] que el punto incógnita $A(x, y)$ diste del punto C' (simétrico de C respecto de G) una distancia igual a $BG = (2/3)m_b$. Aparece así una limitación de dicha técnica que deberá ser modificada y ampliada para poder abordar el problema en cuestión.

Ya hemos dicho que existen ampliaciones «puramente sintéticas» de la técnica de dos lugares geométricos que permiten resolver el problema de las tres medianas[17], pero una ampliación natural de dicha técnica consiste precisamente en utilizar las técnicas analíticas tal como hemos mostrado,

16 La «evidencia matemática» hace siglos que no se reduce a la «evidencia sintética». Desde el nacimiento del instrumento algebraico los matemáticos han descubierto y utilizado el enorme alcance de la «evidencia analítica» que, en cierta manera, es una evidencia a posteriori. Pero de ninguna manera se trata de evidencias contrapuestas. Tal como hemos mostrado en el ejemplo anterior el instrumento algebraico puede servir para convertir un «problema por resolver», del que se desconoce completamente el objeto incógnita, en un «problema por demostrar», del que se conoce el resultado y únicamente se trata de probarlo (Polya, 1957).

17 El profesor Josep Vaquer, maestro de muchas generaciones de matemáticos catalanes, explicaba en una entrevista publicada en el número 11 del *SCM/Notícies* (del Institut d'Estudis Catalans, de julio de 1999) que el reto que supuso para él, a los 14 años de edad, la resolución del problema de las tres medianas fue un acicate importante en su futura vocación de matemático. [Agradezco al profesor Agustí Reventós esta comunicación, así como la lectura y crítica de una versión preliminar de este trabajo].

construir con regla y compás las dos circunferencias citadas y, a posteriori, si se prefieren los argumentos «puramente geométricos» o «sintéticos», justificar el resultado sin utilizar coordenadas. En nuestro ejemplo, una vez obtenida mediante los métodos analíticos, la igualdad

$$AC' = BG = (2/3)m_b$$

puede justificarse sin más que observar que los triángulos $M_{AB}GB$ y $M_{AB}C'A$ son iguales puesto que M_{AB} es el punto medio de los segmentos AB y $C'G$, y los dos ángulos que tienen vértice M_{AB} son iguales porque son opuestos por el vértice (figura 11).

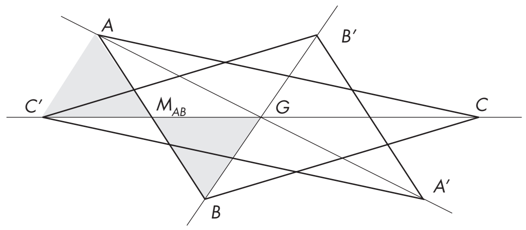


Figura 11

Tenemos, en resumen, que la presunta alternativa entre *geometría sintética* y *geometría analítica* es una falsa alternativa, dada la continuidad y hasta complementariedad que existe entre ambas. Queremos acabar reivindicando la necesidad imperiosa de seguir investigando cómo deberían conectarse, en la geometría de Secundaria, las técnicas sintéticas con las analíticas. Dado que son precisamente las limitaciones de las *técnicas sintéticas* las que dan sentido (son las razones de ser) a las *técnicas analíticas* no tiene ningún tipo de justificación hacer aparecer éstas en el Bachillerato, como por arte de magia, sin ningún tipo de continuidad con la problemática de la geometría sintética estudiada en la ESO.

En lugar de «dejar morir» la problemática que se estudia en la ESO, y crear una pseudoproblemática geométrica con ejercicios bastante formales para intentar justificar la utilización de las incipientes técnicas analíticas introducidas bastante artificialmente como objetos de enseñanza, deberían retomarse en el Bachillerato algunos tipos de problemas geométricos que se abordaron en la ESO. Se podría empezar mostrando, en el Bachillerato, determinadas limitaciones de las técnicas sintéticas clásicas[18] que pueden solventarse mediante el uso de técnicas analíticas. Para que esta práctica docente fuese eficaz sería preciso que se estableciese un nuevo dispositivo didáctico cuya función principal fuese la de retomar aquellos problemas matemáticos que, habiéndose propuesto en la ESO, hubiesen quedado sin resolver por limitaciones de las técnicas matemáticas disponibles. Sólo así podría mostrarse la continuidad de la problemática geométrica y la complementariedad entre los diferentes tipos de técnicas geométricas.

Se podría empezar mostrando, en el Bachillerato, determinadas limitaciones de las técnicas sintéticas clásicas que pueden solventarse mediante el uso de técnicas analíticas.

18 Recíprocamente, sería también muy útil proponer en el Bachillerato problemas geométricos cuya resolución fuese mucho más sencilla y «natural» con técnicas sintéticas que con técnicas analíticas. También sería necesario proponer problemas geométricos que si bien requieren la utilización de técnicas analíticas para ser resueltos con toda generalidad, necesitan de manera casi imprescindible la utilización previa de técnicas sintéticas a fin de diseñar la estrategia que se llevará a cabo posteriormente con las técnicas analíticas. Se pondría así de manifiesto otro aspecto importante de la complementariedad entre ambos tipos de técnicas.

Referencias bibliográficas

ARTIN, E. (1963): «Puntos de vista extremados sobre la enseñanza de la geometría», en J. PIAGET y otros: *La enseñanza de las matemáticas modernas*, Alianza Editorial, Madrid, 260-263.

BOLEA, P., M. BOSCH y J. GASCÓN (1998a): «Le caractère problématique du processus d'algébrisation. Proportionnalité et grandeurs dans l'enseignement obligatoire», *Actes de la IXème école d'été de didactique des mathématiques*, ARDM, 153-159.

BOLEA, P., M. BOSCH y J. GASCÓN (1998b): «The role of algebraization in the study of a mathematical organization», *CERME-1*, Osnabrueck, Germany.

BOLEA, P., M. BOSCH y J. GASCÓN (2001): «El proceso de algebrización de las matemáticas escolares», *Recherches en Didactique des Mathématiques* (pendiente de publicación).

BOSCH, M. y J. GASCÓN (1994): «La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas», *Enseñanza de las Ciencias*, n.° 12 (3), 314-332.

BROUSSEAU, G. (1987): «Représentation et didactique du sens de la division», en G. VERGNAUD, G. BROUSSEAU y M. HULIN (ed.): *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, Actes du colloque du Sèvres*, La pensée sauvage, Grenoble, 47-64.

CHEVALLARD, Y. (1985): *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir eneigné*, La pensée Sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD, Y. (1989): «Arithmétique, Algèbre, Modélisation. Étapes d'une recherche». *Publications n.° 16 de l'IREM,* Aix-Marseille.

CHEVALLARD, Y. (1992): «Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées pau une approche anthropologique», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n.° 12/1: 73-112.

CHEVALLARD, Y. (1997): «Familière et problématique, la figure du professeur», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n.° 17/3, 17-54.

CHEVALLARD, Y. (1999): «L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n.° 19/2, 221-266.

CHEVALLARD, Y., M. BOSCH y J. GASCÓN (1997): *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*, ICE-Horsori, Barcelona.

CHOQUET, G. (1964): «Introducción al libro La enseñanza de la geometría», en J. Piaget y otros, *La enseñanza de las matemáticas modernas,* Alianza Editorial: Madrid (1978), 264-269.

DELVAL, J. (1997): «Hoy todos son constructivistas», *Cuadernos de Pedagogía*, n.° 257, 78-84.

DE LORENZO, J. (1980): «La muerte de la Geometría», *Revista de Bachillerato*, suplemento del n.° 13, 31-34.

DIEUDONNÉ, J. (1964): «Prólogo del libro Álgebra lineal y geometría elemental», en J. PIAGET y otros: *La enseñanza de las matemáticas modernas*, Alianza Editorial, Madrid, 270-284.

FREUDENTHAL, H. (1967): «Recensión de Álgebra lineal y geometría elemental de Jean Dieudonné», en J. Piaget y otros: *La enseñanza de las matemáticas modernas*, Alianza Editorial, Madrid, 285-290.

GASCÓN, J. (1989): *El aprendizaje de métodos de resolución de problemas de matemáticas*, Tesis doctoral, Departamento de Matemáticas, Universitat Autònoma de Barcelona.

GASCÓN, J. (1993): «Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón de análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n.° 13/3, 295-332.

GASCÓN, J. (1993-1994): «Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'"arithmétique généralisée"», *Petit x*, n.° 37, 43-63.

GASCÓN, J. (1994): «El papel de la Resolución de Problemas en la Enseñanza de las Matemáticas», *Educación Matemática*, n.° 6/3, 37-51.

GASCÓN, J. (1997): «Cambios en el contrato didáctico. El paso de estudiar matemáticas en secundaria a estudiar matemáticas en la universidad», *Suma*, n.° 26, 11-21.

GASCÓN, J. (1998): «Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n.° 18/1, 7-34.

GASCÓN, J. (1999a): «La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar», *Educación Matemática*, n.° 11/1, 77-88.

GASCÓN, J. (1999b): «Fenómenos y problemas en didáctica de las matemáticas», en T. Ortega (ed.): *Actas del III Simposio de la SEIEM*, Valladolid, 129-150.

GASCÓN, J. (2001): «Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes», *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, (pendiente de publicación).

GODEMENT, R. (1963): «Prólogo del libro Curso de álgebra», en J. PIAGET y otros: *La enseñanza de las matemáticas modernas*, Alianza Editorial, Madrid, 255-259.

LAKATOS, I. (1977): *Mathematics, Science and Epistemology: Philosophical Papers, vol. 2*, University Press, Cambridge. [Citado por la traducción castellana (1981): *Matemáticas, ciencia y epistemología*, Alianza, Madrid.]

PIAGET, J. y otros (1978): *La enseñanza de las matemáticas modernas*, Alianza Editorial, Madrid.

POLYA, G. (1957): *How to solve it*, Doubleday, Princeton (2.ª ed.).

POLYA, G. (1954): *Mathematics and Plausible Reasoning*, 2 volúmenes, Princeton University Press, Princeton.

POLYA, G. (1967): *La découverte des mathématiques,* 2 volúmenes, Dunod, Paris.

PUIG ADAM, P. (1959): «Un punt de vista cibernètic sobre el problema dels problemes», *Ennseñanza*, n.° 33/36, 38-40.

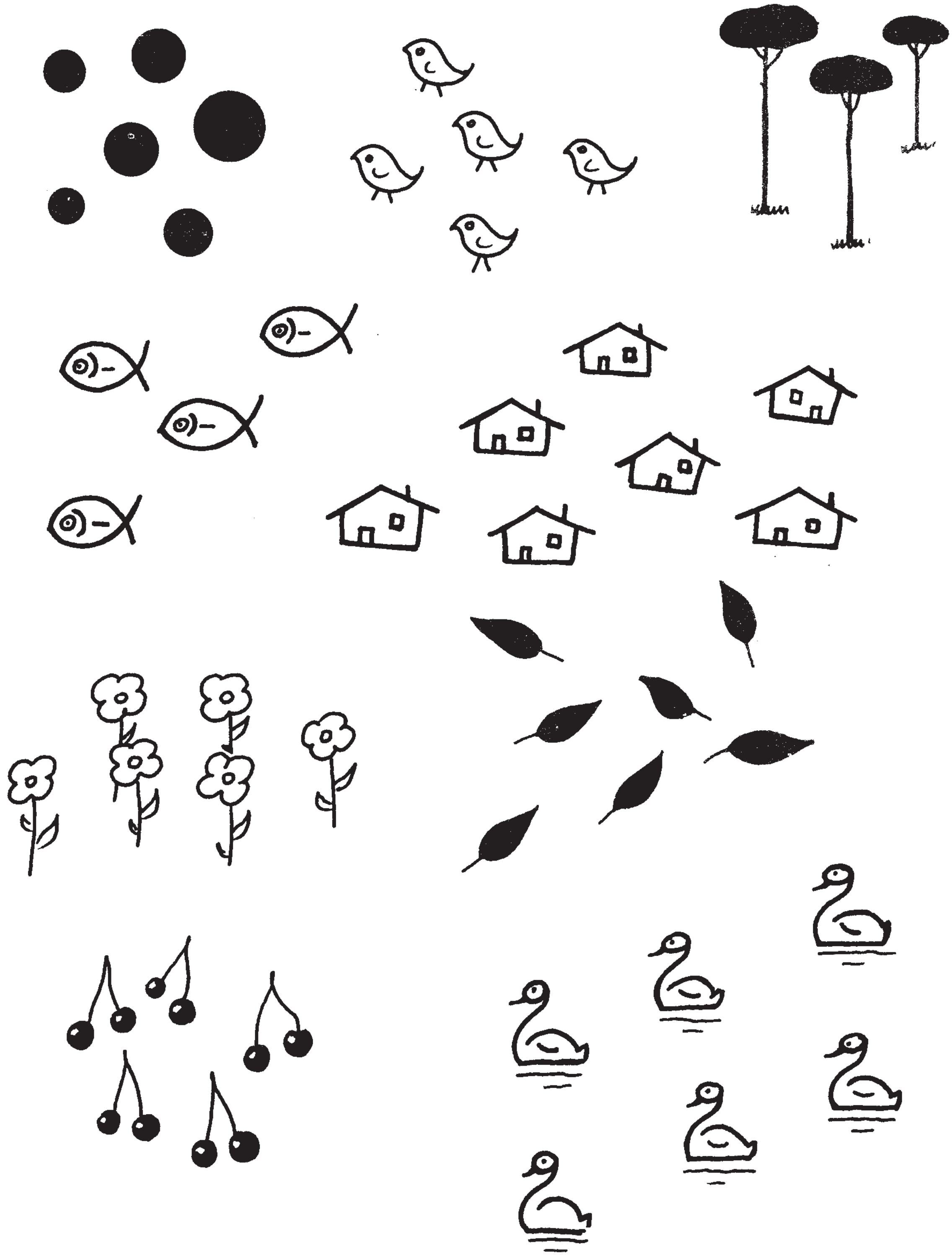
PUIG ADAM, P. (1973): *Curso de Geometría Métrica (tomo I)*, Biblioteca Matemática, Madrid.

REVUZ, A. (1971): «El lugar de la geometría en la educación matemática», en J.Piaget y otros: *La enseñanza de las matemáticas modernas*, Alianza Editorial, Madrid, 291-297.

SANTALÓ, L. A. (1980): «Situación de la enseñanza de la Geometría frente a las nuevas tendencias de la educación matemática», *Revista de Bachillerato*, suplemento del n.° 13, 23-28.

Josep Gascón
Departamento
de Matemáticas.
Universitat Autònoma
de Barcelona

Rodea con una curva cerrada cada CONJUNTO de cosas de la misma clase.



SUMA 39
febrero 2002, pp. 27-32

Programación lineal y diccionarios

C. González Martín
G. Herrera Rodríguez

ARTÍCULOS

Por la importancia que tiene, por las aplicaciones prácticas y por su sencillez, dentro de los contenidos básicos de las Matemáticas de Bachillerato sería obligado incluir una introducción a la Programación Lineal. Actualmente, dichos contenidos sólo se imparten en los Bachilleratos de Ciencias Sociales, resolviendo algunos problemas sencillos con la ayuda del método gráfico. En este trabajo se propone un método alternativo consistente en la utilización de una herramienta sencilla y eficaz (los denominados diccionarios) para resolver problemas de Programación Lineal sin explicar el Método del Simplex y sin utilizar operaciones matriciales. Esencialmente, el procedimiento introducido (ver, por ejemplo, Chvàtal (1983) o Vanderbei (1996)) consiste en resolver un sistema de ecuaciones lineales por un método de sustitución dirigido.

ES INDUDABLE que la Programación Lineal es una de las partes de más interés y utilidad de la Investigación Operativa. Además, desde el punto de vista histórico, ha servido para iniciar el gran desarrollo posterior de esta nueva ciencia. Es conocido que la aparición del Método del Simplex en 1947, debido al matemático y estadístico G. B. Dantzig, constituye uno de los hitos de la ciencia del siglo XX y marca el comienzo de la expansión de un nuevo campo científico de gran importancia en la actualidad. El Método del Simplex es, esencialmente, un procedimiento de resolución de un sistema de ecuaciones lineales de acuerdo con un determinado criterio de búsqueda. Dantzig, para intentar resolver los problemas de optimización catalogados más tarde como de Programación Lineal, estudió formas eficientes de resolver sistemas de ecuaciones lineales (entre otros, los provenientes de las tablas Input-Output introducidas por Leontief para explicar determinados fenómenos de la economía de Norteamérica ocurridos a finales del primer cuarto del siglo veinte). El análisis de los diferentes problemas desde una vertiente económica posibilitó una búsqueda eficaz de soluciones con atributos de optimalidad. La visión exclusiva desde las Matemáticas de los mismos problemas, había sido incapaz, hasta entonces, de proponer un método que los resolviera adecuadamente.

El Método del Simplex se ha desarrollado y enriquecido hasta la actualidad con aportaciones de un número importante de grandes científicos que han extendido sus aplicaciones a multitud de problemas de la economía, ingenierías, ciencias de la gestión, administraciones públicas y privadas, etc. Su aplicación se ve favorecida por una cantidad importante de paquetes de programas de ordenador que incorporan distintas adaptaciones a la especificidad de los problemas que se intentan resolver.

Después de la reducción del problema de optimización a un sistema de ecuaciones, la actuación del Método del

Simplex en cada una de sus iteraciones, tiene un eje central constituido por el cálculo de la inversa de una matriz denominada *base* y la transformación del sistema a través de la multiplicación por dicha inversa. Sin embargo, desde la perspectiva didáctica, existen maneras alternativas de explicar su desarrollo sin la necesidad explícita de manejo de inversas de matrices. Una de estas formas es el uso de la herramienta que Chvàtal (1983) o Vanderbei (1996) denominan *diccionarios.*

Los diccionarios funcionan, esencialmente, como la resolución de un sistema de ecuaciones lineales por el método de sustitución, fijando un criterio para seleccionar la variable que hay que despejar y la ecuación sobre la que se ha de ejecutar. Luego se sustituye en el resto de ecuaciones y, en su caso, se itera despejando y sustituyendo. En cada iteración se tiene, de una manera clara, una *solución básica* del sistema de ecuaciones, la cual, cuando corresponda, se constituirá en solución óptima del problema planteado originalmente.

Por la forma de trabajo que exigen, los diccionarios pueden ser considerados en la enseñanza del Bachillerato como alternativa a la simple utilización del método gráfico para resolver problemas sencillos de Programación Lineal. Estamos convencidos de la necesidad de que todos los alumnos que cursan Matemáticas en Bachillerato deberían conocer los elementos básicos de la Programación Lineal y de algunas de las problemáticas más sencillas planteadas sobre Grafos y Redes. Estos conocimientos presentan el denominador común de la facilidad de motivación desde distintas situaciones reales y de la sencillez de su planteamiento como problemas de Matemáticas. También de su estudio se derivan métodos sencillos de resolución que se pueden desarrollar desde un planteamiento exclusivamente práctico.

En el presente trabajo hacemos una explicación de cómo se pueden usar diccionarios para desarrollar las ideas del Método del Simplex.

Los diccionarios funcionan, esencialmente, como la resolución de un sistema de ecuaciones lineales por el método de sustitución, fijando un criterio para seleccionar la variable que hay que despejar y la ecuación sobre la que se ha de ejecutar.

Fundamentos básicos del Método del Simplex

El Método del Simplex resuelve problemas de Programación lineal, es decir, problemas de optimización de una función objetivo lineal en un contexto definido por restricciones (ecuaciones o inecuaciones) también de tipo lineal. Para fijar las líneas básicas de la aplicación de este método, consideremos el siguiente caso particular:

> Una empresa dispone de seis millones de pesetas para repartir entre dos actividades productivas (I y II). La cantidad destinada a la primera actividad no debe sobrepasar cuatro millones, mientras que el dinero dedicado a la segunda actividad debe ser menor o igual que cinco millones. El beneficio obtenido por cada unidad de actividad tipo I es igual a dos millones, mientras que el correspondiente a cada unidad tipo II es igual a un millón. Si la empresa quiere maximizar los beneficios globales de su actividad productiva, ¿cuáles son los correspondientes niveles óptimos de las dos actividades?

Para afrontar la resolución de este problema, es fundamental formalizar un modelo adecuado. Si representamos por x_1 (*variable de decisión* asociada a la primera actividad) al nivel que ha de alcanzar la actividad I y por x_2 al correspondiente nivel de la actividad II, el criterio que gobierna la búsqueda de soluciones es el de maximizar la expresión (función objetivo):

$$2x_1 + x_2$$

Por otro lado, las condiciones expresadas más arriba (*restricciones*) imponen que:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 6 \\ x_1 \quad &\le 4 \\ x_2 &\le 5 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

La resolución gráfica de este problema (figura 1) indica que los niveles óptimos para las actividades I y II son, respectivamente, 4 y 2 con un beneficio máximo de 10 millones.

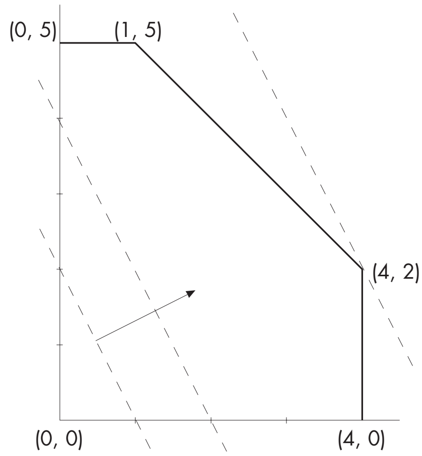


Figura 1

¿Cómo encuentra esta solución el Método del Simplex?

En primer lugar, expresando el anterior problema como un sistema de ecuaciones. Para ello se hace necesario considerar *variables de holgura* que conviertan en ecuaciones cada una de las tres inecuaciones planteadas anteriormente, de forma que todas las variables de decisión sean no negativas. Esto nos permite obtener:

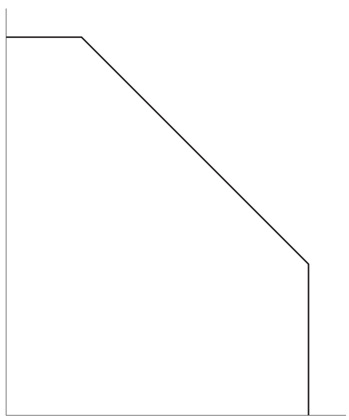
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 6 \\ x_1 \qquad\quad + x_4 \quad &= 4 \\ x_2 \qquad\quad + x_5 &= 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Las variables de holgura se incorporan a la función objetivo multiplicadas por cero.

En segundo lugar, es necesario identificar, para cada una de las ecuaciones, una *variable básica*; es decir una variable que tenga coeficiente igual a 1 y que aparezca en una sola de las ecuaciones (existen casos en los que la búsqueda de variables básicas iniciales exige desarrollar métodos auxiliares específicos). En este caso, es fácil señalar a x_3, x_4 y x_5 como variables básicas iniciales. Si las variables que restan, que denominaremos *no básicas,* toman valores iguales a cero, tenemos entonces una *solución básica* del anterior sistema. Dicha solución es:

$$x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = 6,\ x_4 = 4,\ x_5 = 5$$

siendo el valor de la función objetivo igual a cero. En dimensión dos, esta solución se corresponde con (0,0) (figura 2).



(0, 0)

Figura 2

Una vez establecido el concepto y realizados los cálculos de los costos relativos de las variables no básicas en la solución básica actual, podemos concretar si ésta es óptima o es necesario encontrar otra mejor.

Propiedad Fundamental

> Se demuestra que si un problema de Programación Lineal, como el anteriormente planteado, tiene solución óptima finita, esta se alcanza en una solución básica. Además, el número de soluciones básicas de un problema de Programación Lineal es siempre finito.

Por ello, es válido plantear un esquema de búsqueda de soluciones que, si no detecta la no acotación del problema, cambie iterativamente de una solución básica a otra mejor. De esta forma, el proceso de búsqueda acaba indefectiblemente en un número finito de iteraciones.

¿Cómo se busca una solución básica mejor que la actual?

Respecto a la solución básica actual introducida previamente, es posible concretar si es óptima o puede existir otra mejor (con mayor valor de la función objetivo) utilizando el concepto de *costo relativo*. Los costos relativos, asociados a cada una de las variables no básicas en la solución básica actual, representan *el incremento que se produce en el valor objetivo, respecto al alcanzado en dicha solución básica, cuando se utiliza una solución factible en la que la correspondiente variable no básica es incrementada en una unidad, manteniendo el resto de variables no básicas a nivel cero y haciendo que las variables básicas adapten sus valores para que se satisfagan las ecuaciones del sistema*. Se puede entender entonces que el costo relativo representa el incremento en el valor de la función objetivo por unidad incrementada a la correspondiente variable no básica.

En el ejemplo que hemos manejado anteriormente, para la solución básica:

$$x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = 6,\ x_4 = 4,\ x_5 = 5$$

Si $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 5$, $x_4 = 3$, $x_5 = 5$, obtenemos una solución factible con valor objetivo igual a 2. Por tanto, el costo relativo asociado a x_1, representado por $\bar{c}_1$ es igual a $2 - 0 = 2$ (valor objetivo de la nueva solución factible – valor objetivo de la solución básica actual). Con un razonamiento similar llegaríamos a la conclusión de que $\bar{c}_2 = 1$.

Una vez establecido el concepto y realizados los cálculos de los costos relativos de las variables no básicas en la solución básica actual, podemos concretar si ésta es óptima o es necesario encontrar otra mejor. Si, como en el caso que estamos resolviendo, el problema planteado es de máximo, la optimalidad de una solución básica se establece cuando todos los costos relativos de las variables no básicas son menores o iguales que cero (el incremento de una unidad en el valor actual de una variable no básica no representa una mejora en el valor de la función objetivo).

¿Cuál es la nueva solución básica?

Como $\bar{c}_1 = 2$, parece lógico incrementar el valor actual de x_1. Sabemos que el valor que debe tomar esta variable debe ser mayor o igual que cero y que por cada unidad que se incremente el valor actual (igual a cero), el valor de la función objetivo aumenta en 2 unidades. Por esta razón nos planteamos encontrar el valor mayor posible para x_1. Si $x_1 = \lambda \geq 0$ y $x_2 = 0$, para tener una solución factible es necesario que $x_3 = 6 - \lambda \geq 0$, $x_4 = 4 - \lambda \geq 0$ y $x_5 = 5$. Por tanto, el mayor valor posible para λ es igual a 4. Si $\lambda = 4$, entonces la solución factible que resulta es:

$$x_1 = 4,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ x_4 = 4,\ x_5 = 5$$

Esta solución se corresponde, en dimensión dos, con (4,0) (figura 3).

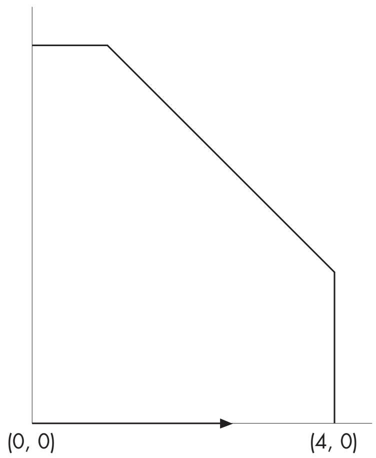


Figura 3

Esta solución es también básica y tiene asociado un valor objetivo igual a 8 (2 veces el valor que toma λ). Para esta nueva solución básica se calcularían los costos relativos de las variables no básicas y se repetiría el razonamiento que acabamos de efectuar.

Hay que señalar que si, al llevar a cabo la tarea anterior, resulta que el valor que puede tomar λ no está acotado superiormente, entonces el problema que estamos resolviendo resulta no acotado.

Las ideas anteriores merecen un desarrollo más amplio, pero dicho estudio, contenido en cualquier buen libro sobre Programación Lineal, no es el objeto de este trabajo. Trataremos a continuación de aplicar las referidas ideas sobre los diccionarios.

Esta representación del problema anterior es lo que se denomina (por similitud) diccionario.

Diccionarios y su aplicación

Dado el problema anterior:

$$\begin{array}{rl} \text{máx} & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

añadiendo variables de holgura y llamando z al valor de la función objetivo, podemos escribir:

$$\begin{array}{rcl} z & = & 0 + 2x_1 + x_2 \\ \hline x_3 & = & 6 - x_1 - x_2 \\ x_4 & = & 4 - x_1 \\ x_5 & = & 5 - x_2 \end{array}$$

Esta representación del problema anterior es lo que se denomina (por similitud) *diccionario*. Se observa que si $x_1 = x_2 = 0$, en las tres últimas líneas se puede leer directamente la solución básica inicial que se señaló anteriormente. En la primera fila aparece el correspondiente valor de la función objetivo y los costos relativos. Según razonamos previamente, interesa incrementar el valor actual de x_1, manteniendo $x_2 = 0$ y haciendo que el resto de las variables sigan tomando valores mayores o iguales que cero.

Se observa que si $\lambda \geq 0$ es el valor que se le asigna a x_1, siempre que $x_2 = 0$, los valores que toman el resto de las variables son:

$$x_3 = 6 - \lambda \geq 0,\ x_4 = 4 - \lambda \geq 0,\ x_5 = 5$$

Tenemos entonces que el valor mayor posible para x_1 es igual a 4 (coincide con el mayor valor que puede tomar λ). Como esta conclusión se saca a partir de la tercera ecuación, despejamos de ella x_1 y sustituimos en el resto de las ecuaciones. Obtenemos el diccionario:

$$\begin{array}{rcl} z & = & 8 + x_2 - 2x_4 \\ \hline x_3 & = & 2 - x_2 + x_4 \\ x_1 & = & 4 - x_4 \\ x_5 & = & 5 - x_2 \end{array}$$

Donde, de nuevo se lee la solución básica:

$$x_1 = 4,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ x_4 = 0,\ x_5 = 5$$

con valor objetivo igual a 8.

Se observa que el nuevo costo relativo de x_2 es $\bar{c}_2 = 1$, mientras que $\bar{c}_4 = -2$. Por ello, la solución básica actual no es óptima y cada unidad que incrementemos a x_2 produce un aumento de una unidad en el valor actual de la función objetivo. Si $x_2 = \lambda \geq 0$ y $x_4 = 0$, el valor mayor posible para λ es igual a 2 y se obtiene de la segunda ecuación. Despejando x_2 de esa ecuación y sustituyendo en el resto, obtenemos:

$$\begin{array}{rcl} z & = & 10 - x_3 - x_4 \\ \hline x_2 & = & 2 - x_3 + x_4 \\ x_1 & = & 4 - x_4 \\ x_5 & = & 3 + x_3 - x_4 \end{array}$$

La solución básica que se lee ahora es:

$$x_1 = 4,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 3$$

y el valor correspondiente de la función objetivo es $z = 10$.

En la figura 4 se completa el recorrido realizado por el procedimiento sobre la correspondiente región factible de dimensión dos.

Como los costos relativos de las variables no básicas (x_3 y x_4) son, respectivamente, iguales a –1 y –1, concluimos que la actual solución básica es óptima y, por ello, la resolución del problema planteado anteriormente ha concluido.

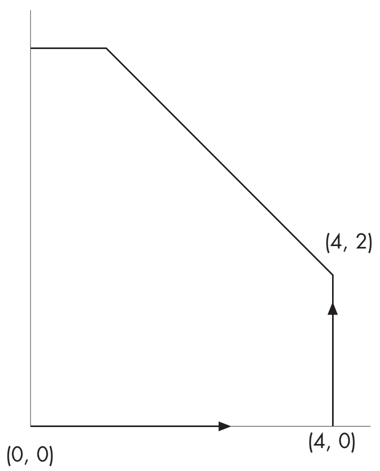


Figura 4

…podemos utilizar variables artificiales (mayores o iguales que cero y colocadas convenientemente) jugando el papel de las variables básicas no disponibles inicialmente.

Dificultades que se pueden presentar

Fundamentalmente se concretan en el cálculo de la solución básica inicial. Puede suceder que no podamos encontrar directamente dicha solución como lo hemos hecho en el anterior ejemplo (esto ocurre cuando las restricciones iniciales son ecuaciones o cuando alguna de dichas restricciones son inecuaciones de la forma ″ pero los correspondientes términos independientes son negativos). En estos casos podemos utilizar variables artificiales (mayores o iguales que cero y colocadas convenientemente) jugando el papel de las variables básicas no disponibles inicialmente. Estas variables artificiales se tratarán de eliminar utilizando de forma adecuada el método previamente desarrollado. Para conseguirlo se puede utilizar, en una primera fase, un problema auxiliar en el que se minimice la suma de variables artificiales añadidas sobre la región factible del problema en la que se han incluido dichas variables. La resolución correspondiente concluirá con que la suma de las variables artificiales no se puede anular (en este caso, el problema original no tiene solución) o que dicha suma es igual a cero. En este último caso, eliminando en el diccionario resultante las variables artificiales y la fila de la función objetivo considerada hasta ahora y poniendo en su lugar (expresada convenientemente) la función objetivo original, se afronta la segunda fase en la que se concluye la resolución del problema.

Ejemplo

Sea el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \textit{máx} & 4x_1 + 3x_2 \\ \textit{s.a:} & x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

Resolución

Fase I

En esta fase se resolverá el problema auxiliar en el que se minimizará la suma de las dos variables artificiales que es necesario añadir, es decir:

$$\begin{array}{rl} \textit{mín} & x_4 + x_5 \\ \textit{s.a:} & x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 6 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0 \end{array}$$

Por tanto, el primer diccionario de la fase I es :

$$\begin{array}{rcl} w & = & 10 - x_2 - 2x_3 \\ \hline x_4 & = & 4 - x_1 + x_2 - x_3 \\ x_5 & = & 2 + x_1 - 2x_2 - x_3 \end{array}$$

Es claro que x_3 pasa a ser básica en sustitución de x_4. Por tanto, se despeja x_3 en la segunda ecuación del diccionario anterior y se sustituye en el resto de las ecuaciones. El nuevo diccionario es:

$$
\begin{array}{l}
w = 2 + 2x_1 - 3x_2 + 2x_4 \\
\hline
x_3 = 4 - x_1 + x_2 - x_4 \\
x_5 = 2 + 2x_1 - 3x_2 + x_4
\end{array}
$$

Ahora pasa x_2 a ser básica sustituyendo a x_5. Después de despejar x_2 en la tercera ecuación y sustituir en el resto, obtenemos el diccionario:

$$
\begin{array}{l}
w = 0 + x_4 + x_5 \\
\hline
x_3 = (14/3) - (1/3)x_1 - (2/3)x_4 - (1/3)x_5 \\
x_2 = (2/3) + (2/3)x_1 + (1/3)x_4 - (1/3)x_5
\end{array}
$$

Como el valor de la función objetivo del problema auxiliar de la fase I es igual a cero, podemos iniciar la fase II.

Fase II

Planteamos el problema:

$$
\begin{array}{ll}
\text{máx} & 4x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a:} & (1/3)x_1 + \quad + x_3 = 14/3 \\
 & (-2/3)x_1 + x_2 = 2/3 \\
 & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0
\end{array}
$$

El correspondiente diccionario es:

$$
\begin{array}{l}
z = 2 + 6x_1 \\
\hline
x_3 = (14/3) - (1/3)x_1 \\
x_2 = (2/3) + (2/3)x_1
\end{array}
$$

Como ahora tenemos un problema de máximo, x_1 debe ser básica sustituyendo a x_3. Por tanto, despejando x_1 en la segunda de las anteriores ecuaciones y sustituyendo en el resto se obtiene:

$$
\begin{array}{l}
z = 86 - 18x_3 \\
\hline
x_1 = 14 - 3x_3 \\
x_2 = 10 - 2x_3
\end{array}
$$

Este diccionario es óptimo, siendo la solución óptima la dada por $x_1 = 14$, $x_2 = 10$, $x_3 = 0$, con valor objetivo igual a 86.

C. González
Departamento de Estadística,
Investigación Operativa
y Computación.
Universidad de La Laguna

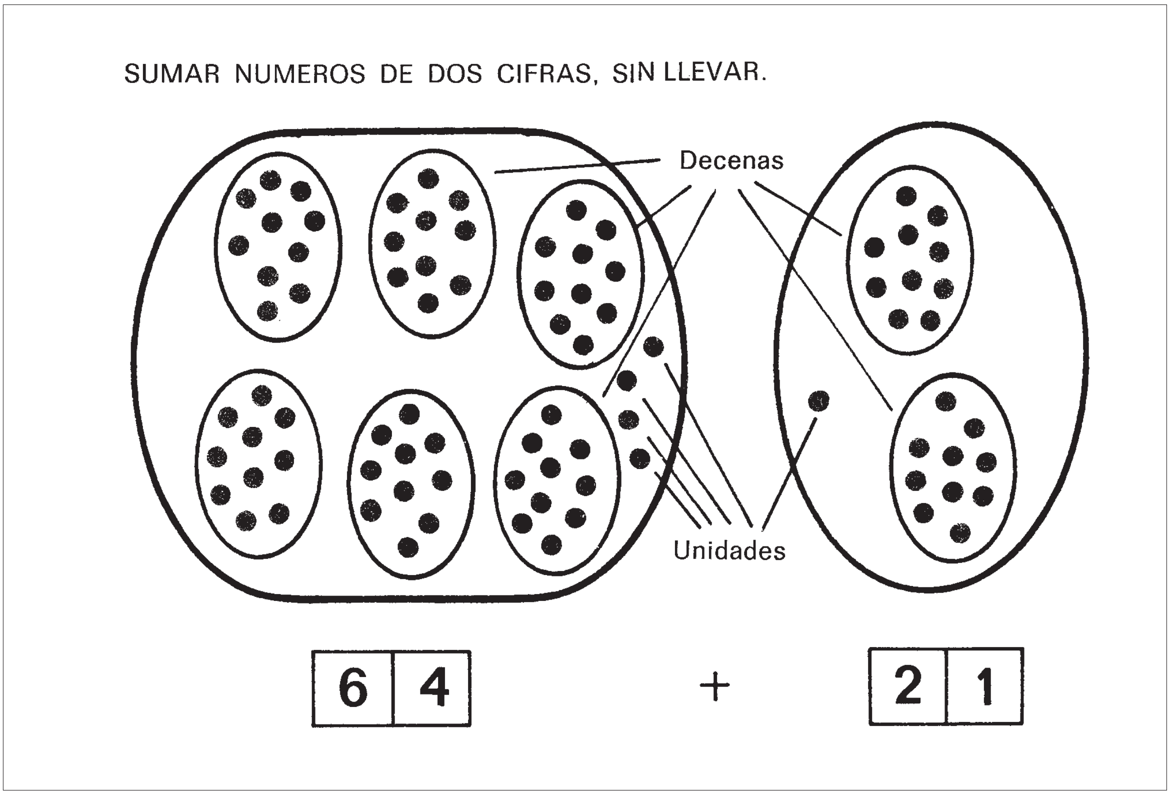
G. Herrera
IES San Matías.
La Laguna.
Sociedad Canaria
de Profesores de Matemáticas
«Isaac Newton»

Referencias bibliográficas

CHVÁTAL, V. (1983): *Linear programming*, Freeman.

DANTZIG, G. B. y M. N. THAPA (1997): *Linear programming. 1: Introduction*, Springer.

VANDERVEI, R. J. (1996). *Linear programming. Foundations and extensions*, Kluwer.



Preescolar

SUMA 39
febrero 2002, pp. 33-36

Distinas formas de deducción de las fórmulas trigonométricas de suma o resta de ángulos

Jaume Munné i Munné

ARTÍCULOS

Se pretende desarrollar las diferentes formas demostrativas que los autores de los libros de texto de matemática básica (bachillerato,...) nos aportan para deducir las fórmulas trigonométricas de suma o resta de ángulos, y presentar tres nuevas formas no detectadas en la bibliografía consultada.
El objetivo final es mostrar qué distintos caminos pueden llevarnos a un mismo resultado. Es el profesional de la enseñanza el que ha de adoptar uno u otro camino, o simultanear varios para que el alumno llegue a tener más recursos deductivos.

LA BIBLIOGRAFÍA nos ofrece un abanico de posibilidades para enfrentarnos al problema cotidiano de razonar, coherente y deductivamente, las fórmulas trigonométricas típicas de adicción o sustracción de ángulos.

Sabido es que cuando se ha deducido una sola, sea $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$, $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, o bien $\cos(\alpha-\beta)$ para dos ángulos α y β cualesquiera, las demás se obtienen por simple aplicación de las relaciones trigonométricas de ángulos complementarios y de ángulos opuestos.

Como un buen referente histórico cabe citar a Johann Werner (1468-1528) que estableció el cálculo prostaferético para convertir productos en sumas o restas, aplicando expresiones del tipo

$$\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$$

al objeto de facilitar cálculos astronómicos de la época, hasta que el escocés John Neper (1550-1617) generó el cálculo logarítmico.

No es de extrañar que, tal como desarrolla Campbell (1956) en *La trigonométrie*, usando proyecciones llegue a deducir las expresiones de Werner, y combinándolas obtenga el $\cos(\alpha+\beta)$ y el $\cos(\alpha-\beta)$.

Se pretende dar aquí las diferentes alternativas que en la actualidad aplican los escritores de los libros de texto, indicando en cada caso los conocimientos previos necesarios y presentar tres nuevas formas distintas de enfocar el problema para llegar a las mismas expresiones.

1

La mayoría de los textos actuales de Bachillerato deducen el seno (y el coseno) de una suma de ángulos haciendo intervenir cuatro triángulos rectángulos y aplicando conceptos de semejanza tal como queda patente en la figura 1.

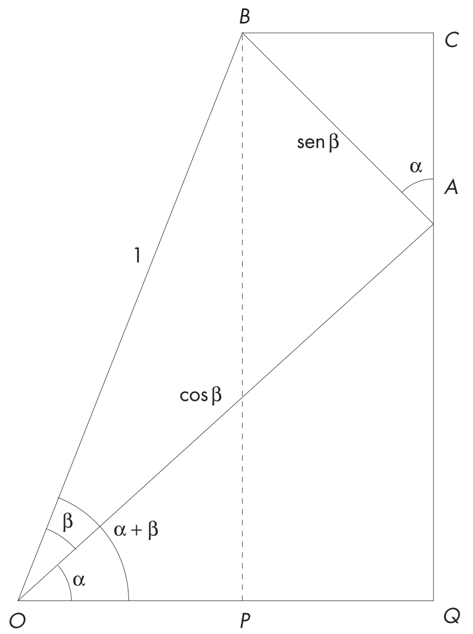


Figura 1

Esbozo deductivo

- Del triángulo *OAB*, $\overline{OB} = 1$, $\cos\beta = \overline{OA}$ y $\operatorname{sen}\beta = \overline{AB}$.
- Del triángulo *OPB*,

$$\cos(a+b) = \frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} = \overline{OP}$$

- Como $\overline{PB} = \overline{QA} + \overline{AC}$, dado que $\overline{QA} = \overline{OA} \cdot \operatorname{sen}\alpha = \cos\beta \cdot \operatorname{sen}\alpha$ y $\overline{AC} = \overline{AB}\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha$, se deduce $\overline{PB}$ igual

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta \qquad [1]$$

Análogamente,

- Del triángulo *OPB*,

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} = \overline{OP}$$

- Dado que $\overline{OP} = \overline{OQ} - \overline{PQ}$, $\overline{OQ} = \overline{OA} \cdot \cos\alpha = \cos\beta \cdot \cos\alpha$ y $\overline{PQ} = \overline{BC} = \overline{AB}\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\alpha$, resulta ser $\overline{OP}$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

2

El libro de Besora (1998) presenta una deducción atractiva partiendo como concepto conocido el producto escalar de dos vectores unitarios. El único inconveniente es la forma de desarrollar el currículo que obliga a analizar primero los vectores en el plano antes que la trigonometría en estudio.

Esbozo deductivo:

Tal como presenta la figura 2, si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores unitarios (módulo 1) de componentes $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\beta)$ y $(\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$ respectivamente, su producto escalar resulta:

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta = \\ = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha+\beta)$$

o sea

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta \quad [2]$$

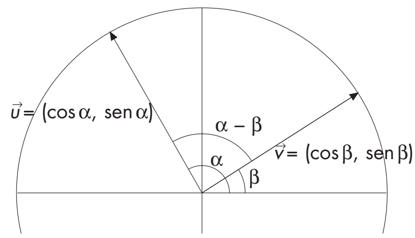


Figura 2

3

Otros autores usando la circunferencia de radio unidad, construyen un triángulo con ángulo central $\alpha - \beta$, para luego trasladarlo al origen de ángulos. Con cálculos de distancias entre puntos obtienen el $\cos(\alpha - \beta)$. Eso sí, hacen intervenir la fórmula fundamental de trigonometría $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ para cualquier α.

Esbozo deductivo

En la figura 3 se consideran los puntos de la circunferencia de radio unidad $A(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ y $B(\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$. Apicando la distancia entre los puntos $\overline{AB}$ queda

$$\overline{AB}^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)^2 = \\ = \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2 + \operatorname{sen}^2\alpha + \\ + \operatorname{sen}^2\beta - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \\ 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta) \quad [3]$$

Al girar el triángulo, haciendo coincidir el punto *B* con el *C*(0, 1), el punto *A* se traslada al *D* con las componentes (cos

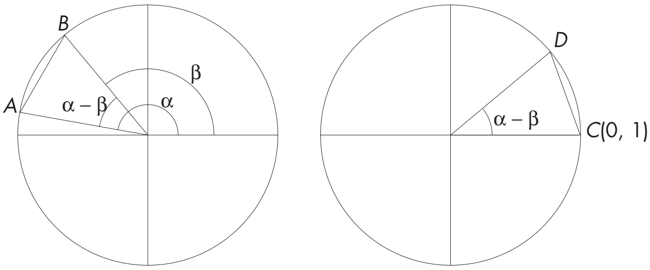


Figura 3

$(\alpha - \beta)$, sen $(\alpha - \beta)$); como la distancia $\overline{AB}$ igual a la $\overline{DC}$, y

$$\overline{DC}^2 = [\cos(\alpha - \beta) - 1]^2 + [\operatorname{sen}(\alpha - \beta) - 0]^2 = \\ = 2 - 2\cos(\alpha - \beta) \qquad [4]$$

Por igualación de las dos se deduce [2].

4

Thomas-Finney (1984) utilizan un proceso análogo al anterior, con la única variante de hacer intervenir el teorema de los cosenos.

Esbozo deductivo

La figura 4 es muy parecida a la figura 3. $\overline{AB}^2$ es el dado en [3], pero luego lo recalcula aplicando el teorema de los cosenos según

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2 \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OB} \cdot \cos(\alpha - \beta) = \\ = 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$$

idéntica a $\overline{DC}^2$ de [4].

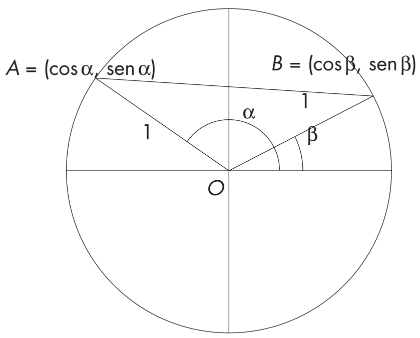


Figura 4

5

Visto el estado actual en que tratan el tema en cuestión los autores de los libros consultados, se presentan ahora tres alternativas que parten de la aplicación de los teoremas del seno y del coseno (haciendo intervenir cuando conviene propiedades fundamentales de trigonometría).

5.1

Según el triángulo oblicángulo de la figura 5, que tiene un gran parecido al que se emplea para deducir los teoremas del cateto y de la hipotenusa de los triángulos rectángulos, si proyectamos los lados a y b sobre c se obtiene con facilidad la relación

$$c = b \cdot \cos\alpha + a \cdot \cos\beta \qquad [5]$$

Al aplicar, acto seguido, el teorema de los senos tenemos

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}[180 - (\alpha + \beta)]}$$

Como sen $(180 - x)$ = sen x para cualquier x, aislando a y b queda

$$a = \frac{c \cdot \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}; \; b = \frac{c \cdot \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$$

sustituyendolos en [5] queda

$$c = \frac{c \cdot \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \cos\beta + \frac{c \cdot \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \cos\alpha$$

multiplicando toda la igualdad por $\cos(\alpha + \beta)/c$ queda demostrada [1].

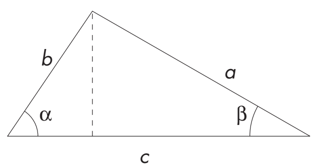


Figura 6

5.2

En la figura 6 se presenta un trozo de circumferencia de radio unidad OCB, lo que genera un triángulo rectángulo OAB de ángulo β en O. Acto seguido, se ha trazado la recta tangente a la circunferencia en C y otra nueva recta desde O formando un ángulo α con el segmento $\overline{OC}$, incidiendo las dos en el punto E. Por tanto, se tiene dibujado un nuevo triángulo rectángulo OCE. Finalmente la prolongación del segmento $\overline{AB}$ hasta $\overline{CE}$ termina de completar el triángulo oblicángulo ODE con el que se pretende trabajar.

Por tratarse de circunferencias de radio unidad $\overline{DC}$ = tan β y $\overline{EC}$ = tan α. Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos ODC y OEC obtenemos que $\overline{OD}$ = $1/\cos\beta$ y $\overline{OE}$ = $1/\cos\alpha$ pues $1 + \tan^2 x = 1/\cos^2 x$ para cualquier ángulo x. El ángulo en D se obtiene como $180 - (90 - \beta)$ y el ángulo en O por construcción es $\alpha - \beta$.

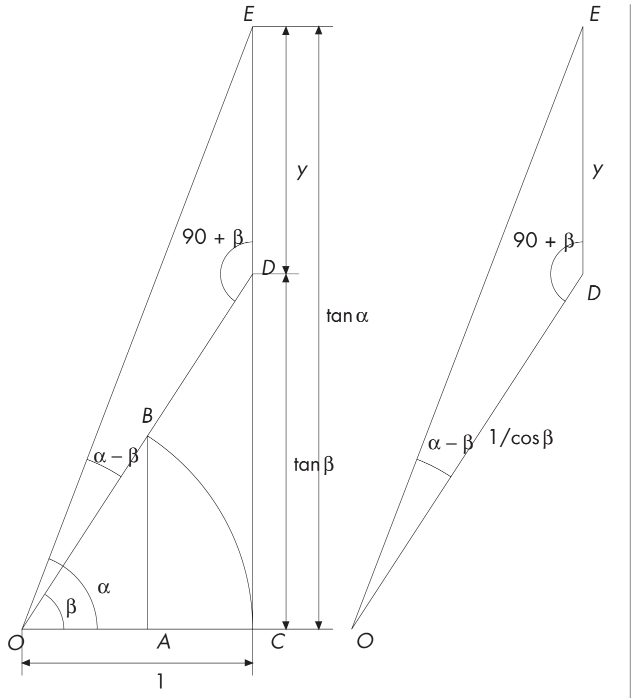


Figura 6

5.2.1

Aplicando el teorema de los senos al triangulo *ODE* queda

$$\frac{y}{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}=\frac{1/\cos\alpha}{\operatorname{sen}(90+\beta)}$$

dado que $\operatorname{sen}(90+\beta)=\cos\beta$ e $y=\tan\alpha-\tan\beta$,

$$\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}=\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}$$

resultando

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta(\tan\alpha-\tan\beta)=\cos\alpha\cos\beta\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}\right)$$

de donde $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha$

5.2.2

Aplicando al mismo triángulo *OEC* el teorema de los cosenos, se tiene

$$(\tan\alpha-\tan\beta)^2=(1/\cos\alpha)^2+(1/\cos\beta)^2-$$
$$-2(1/\cos\alpha)(1/\cos\beta)\cos(\alpha-\beta)$$

desarrollándola queda

$$\tan^2\alpha+\tan^2\beta-2\tan\alpha\tan\beta=1+\tan^2\alpha+1+\tan^2\beta-\frac{2\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

o bien

$$-2-2\tan\alpha\tan\beta=-\frac{2}{\cos\alpha\cos\beta}\cos(\alpha-\beta)$$

dividiendo por –2 y aislando queda

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta(1+\tan\alpha\tan\beta)=\cos\alpha\cos\beta\left(1+\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}\right)$$

resultando la expresión [2].

Jaume Munné
EUPVG
Departamento de Matemática Aplicada
IES Francesc X. Lluch Rafecas
Vilanova i la Geltrú
Societat d'enseyants
de matemàtiques del Garraf

Conclusiones

Si bien cada forma de deducción tiene sus atractivos, se ha pretendido ofrecer las distintas posibilidades deductivas que pueden ser empleadas, tanto para seleccionar una única manera de proceder, como para verificar que distintos caminos pueden llevarnos a unas mismas expresiones.

Bibliografía

ALFA NAUTA (Programa Educativo Temático) (1998): *Ciencias Matemáticas I ESO-LOGSE*, Alfa, Barcelona.

ARA, L. T. y M.ª E. RIOS (1960): *Matemáticas Tomo II (Geometría y trigonometría)*, Santander.

AYRES, F. (1970): *Teoria y problemas de trigonometría plana y esférica*, McGraw-Hill, Colombia.

BESORA, J., A. JANE y J. M. GUITERAS (1998): *Matemàtiques (Batxillerat)*, McGraw-Hill, Barcelona.

BIOSCA, A, M. J. ESPINET, M. J. FANDOS y M. JIMENO (1998): *Matemàtiques I (Batxillerat)*, Edebé, Barcelona.

CAMPBELL, R. (1956): *La trigonométrie*, Press Universitaires de France, Paris.

CÓLERA, J., M. DE GUZMAN, M.ª J. OLIVEIRA y S. FERNÁNDEZ (1996): *Matemáticas I (Bachillerato Logse)*, Anaya, Madrid.

GALDOS, L. (1998): *Matemáticas Galdós*, Cultural, Madrid.

GARCIA, F. (1952): *Curso práctico de trigonometria rectilínea y esférica*, Dossat, Madrid.

GOMA, A., C. BAILO, J. TUDURI y R. CASALS (1997): *Matemàtiques (1 batxillerat)*, Teide, Barcelona.

GUÍA ESCOLAR VOX (1993): *Matemáticas*, Bibliograf, Barcelona.

LANG, S. (1990): *Cálculo*, Addison-Wesley iberoamericana, EUA.

SOBEL, M. A. y N. LERNER (1995): *Algebra and Trigonometry*, Printice Hall, London.

SWOKOWSKY, E. W. (1988): *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*, Iberoamericana, México.

THOMAS, G. B. y R. L. FINNEY (1984): *Cálculo con geometría analítica*, Addison-Wesley iberoamericana, USA.

VILA, A. (1993): *Elements de trigonometria esfèrica*, Col. Aula UPC, Barcelona.

VIZMANOS, J. R., M. ANZOLA (1997): *Matemàtiques (Ciències de la naturalesa i la salut-Tecnologia) Batxillerat*, Cruïlla, Barcelona.

SUMA 39
febrero 2002, pp. 37-46

El IPC en la vida cotidiana

Andrés Nortes Checa

El IPC es un dato que mensualmente publica el INE y es una medida de la evolución del conjunto de precios de los bienes y servicios que consume la población española y su publicación tiene una gran repercusión en todos los sectores económicos del país. En este artículo hacemos una breve descripción de la historia del IPC, de las Encuestas de Presupuestos Familiares –que sirven para determinar las ponderaciones–, de los trabajos de campo y del proceso que se sigue hasta su publicación. Por último, presentamos cómo se obtiene la variación del IPC de forma práctica y su aplicación a dos casos de enorme trascendencia: las pensiones y la sentencia de la Audiencia Nacional sobre el aumento de sueldo de los funcionarios. Este artículo es un acercamiento de las matemáticas a la vida cotidiana, ya que tiene una aplicación inmediata en el bloque de tratamiento de la información y en el de números, con los cálculos de porcentajes.

ARTÍCULOS

EL 16 DE ENERO de 1998 el diario *El País* en una doble página de economía (51 y 52), publicaba estos titulares y subtitulares:

> *Los precios tocan suelo.* Los precios subieron un 2 % en 1997, un mínimo histórico que permite la incorporación al Euro
>
> *El primer año completo de Gobierno del PP se cierra con la inflación más baja de los últimos 35 años.* Economía y la CEOE piden moderación salarial para mantener el control de la inflación

El mismo día el diario *El Mundo* dedicaba una página de economía, la 31, al IPC con los siguientes titulares:

> *1997 cierra con la inflación más baja de los últimos 35 años.* Pensionistas y trabajadores ganan poder adquisitivo

El 16 de enero de 1999 el diario *El País* en su página 46 de economía publicaba:

> *Los precios cierran 1998 con un mínimo histórico del 1,4 %, pese al alza de los servicios.* Economía recomienda el 1,5 % como referencia para las subidas salariales de este año

Ese mismo día el diario *El Mundo* su página 40 de economía la dedicaba al IPC con los siguientes encabezamientos:

> *El aumento de precios cierra el año cinco décimas por debajo de la previsión oficial.* En 1998, el IPC finalizó en el 1,4 %, lo que supone el menor incremento desde 1962

El 15 de enero de 2000 el diario *El País* dedicaba sus dos paginas de economía, la 49 y 50, al IPC con los siguientes titulares y subtitulares:

> *La inflación sube al 2,9 % y desborda los salarios.* El fuerte repunte del IPC obligará a revisar casi cinco millones de sueldos, mientras que otros seis pierden el poder adquisitivo
>
> *El resultado de 1999 rompe la trayectoria a la baja de los precios en los últimos nueve años.* El Gobierno no ha cumplido ni el objetivo inicial del 1,8 % ni el revisado después hasta el 2,4 %

Ese mismo día el diario *El Mundo* encabezaba su página 36 de economía así:

> *1999 se cierra con una inflación del 2,9 %, la más alta en tres años.* El IPC se dobla respecto a 1998 por el encarecimiento del crudo y de los alimentos

El 11 de enero de 2001 el diario *El País* en su primera página decía: «Los precios subieron el 4 % en 2000, el doble de la previsión oficial», un editorial con el título *El precio de la inflación* y las páginas 57 y 58 de economía con los siguientes titulares y subtitulares:

> *La inflación acabó el año en el 4 %, el doble del objetivo.* A la crisis del petróleo se ha unido el encarecimiento de los alimentos por el mal de las «vacas locas».
>
> *El 71 % de los trabajadores con convenio tendrá revisión salarial.* La desviación supondrá un sobresueldo de más de 200.000 millones

Ese mismo día el diario *El Mundo* en su primera página anunciaba: «El 4 % del IPC del 2000 duplica la previsión del Gobierno y es el más alto desde 1995». En su página 36 de economía estos eran los encabezamientos:

> *El año 2000 acaba con un IPC del 4 %, el más alto desde 1995.* Los alimentos relevan a la energía como el componente más inflacionista

Estos titulares ponen de manifiesto que el IPC es algo muy importante en nuestro país porque lo relaciona con el euro, la inflación, el poder adquisitivo, los convenios, las subidas salariales, etc. El Índice de Precios de Consumo, conocido por IPC, es el índice regulador de la economía de nuestro país. De ahí que su variación se siga con enorme interés y sobre todo los índices que cierran año como los indicados anteriormente de 1997, 1998, 1999 y 2000. Por la trascendencia que tiene el IPC en nuestra vida cotidiana, exponemos de forma breve en las líneas que sigue algunos aspectos importantes de su obtención y cálculo, así como el proceso seguido a lo largo de la historia, y algunas de sus aplicaciones.

¿Qué es el IPC?

El Instituto Nacional de Estadística (INE) nos dice que «el IPC es una medida estadística de la evolución del conjunto de precios de los bienes y servicios que consume la población residente en viviendas familiares en España».

Para llegar a comprender el significado del IPC tendremos que comenzar diciendo qué es un número índice y un número índice es un número abstracto que nos muestra los cambios de una variable entre dos situaciones temporales, una de ellas tomada como referencia o periodo base. Por tanto el IPC va a ser un número que nos mostrará los cambios de los precios de consumo.

Estos titulares ponen de manifiesto que el IPC es algo muy importante en nuestro país porque lo relaciona con el euro, la inflación, el poder adquisitivo, los convenios, las subidas salariales, etc.

El IPC se denominaba antes Índice del Coste de la Vida, pero se modificó por una Orden Ministerial de la Presidencia de Gobierno de 23/2/77, que en su punto primero dice:

> El Sistema de Índices del Coste de la Vida se denominará en lo sucesivo Índices de Precios de Consumo.

En Europa se empezó sustituyendo el nombre de Índices del Coste de la Vida por el de Índices de Precios al Consumidor, nombre reducido del empleado en EE.UU. cuyo título «Índices de Precios al consumidor para familias de ingresos moderados, en las grandes ciudades» se adoptó en agosto de 1945. En Inglaterra en 1953 se utilizó el nombre de «Índices de precios al por menor» considerando que el término Índice del Coste de la Vida era más amplio.

Tres son las causas que contribuyen a determinar el coste de la vida:

1) Los precios.
2) El nivel de consumo.
3) Las distintas situaciones socio-económicas de las familias.

El IPC estudia la variación de los precios manteniendo constantes los otros dos, estableciendo periodos de tiempo para que no cambien ni los productos ni las cantidades necesarias para satisfacer las necesidades de una familia.

Para poder establecer un Sistema de Índices de Precios de Consumo hay que considerar un periodo de referencia, un año base, siendo en la actualidad 1992. Para ello se calculó el índice mensual de 1992 utilizando este nuevo sistema, se obtuvo la media aritmética de los doce meses y se igualó a 100.

Las encuestas de presupuestos familiares

Con la finalidad de establecer un Sistema de Índices de Precios de Consumo se efectúa una Encuesta de Presupuestos Familiares (EPF) que proporcione la información básica sobre los gastos de los hogares en bienes y servicios.

Las Encuestas de Presupuestos Familiares (EPF) tiene su origen en una encuesta en EE.UU. en el periodo 1888-1890 sobre 5.288 familias de trabajadores elegidos por las nóminas de salario, y en otra encuesta en 1901-02 que abarcó a 25.000 familias obreras y cuyo objetivo principal era obtener una ponderación adecuada para un Índice del Coste de la Alimentación. Dentro de Europa, Inglaterra, Suecia y Suiza fueron los primeros países en realizarlas de forma opinática hasta que en 1947 se comenzó a seleccionar las familias de forma aleatoria.

En España en *marzo de 1958* el Instituto Nacional de Estadística (INE) realizó la primera EPF que se llamó *Encuesta de Cuentas Familiares* y que sirvió de base para la estructura de un nuevo sistema de índices que sustituyera al que estaba en vigor de base julio de 1936. Para ello se seleccionaron 4.192 familias con ingresos anuales inferiores a 80.000 pts., representantes de todo el territorio nacional y la duración fue de 1 mes.

Posteriormente se llevó a cabo la *EPF de 1964-65*, que tuvo una duración de 1 año y empezó en marzo de 1964. La muestra estaba formada por 20.800 hogares con salarios del sustentador principal comprendido entre 21.600 pts. y 120.000 pts.

En julio de 1973 se puso en marcha una nueva *EPF 73/74* que duró un año y cuyo estrato de referencia eran familias con ingresos anuales entre 81.000 pts. y 720.000 pts. y cuyo sustentador principal es activo

Desde el 1 de abril de 1980 hasta el 31 de marzo de 1981 duró la nueva *EPF 80/81*, aplicada al conjunto de hogares pluripersonales, tanto activos como inactivos con ingresos comprendidos entre las 322.575 pts. y los 2.000.000 pts.

La última, realizada en nuestro país, *EPF 90/91*, duró desde el 1 de abril de 1990 al 31 de marzo de 1991. Para ello se tomó un grupo de población para que su estructura de gastos sirviera de base a la selección de artículos representativos, al tiempo que sirviera para calcular las ponderaciones de los mismos. Ese grupo de población o estrato de referencia lo ha compuesto la población residente en España y a una muestra representativa se le computó el gasto que hacían dedicado al consumo. Sólo se tiene en cuenta los gastos reales que realiza la población, excluyendo el gasto por autoconsumo, autosuministro, salario en especie, consumos subvencionados, alquiler imputado, etc.

En la EPF 90/91 se computaron 900 partidas de gasto, seleccionando finalmente 471 artículos que se clasifican en ocho grupos: 1) Alimentación; 2) Vestido; 3) Vivienda; 4) Menaje; 5) Medicina; 6) Transporte; 7) Cultura; y 8) Otros. La evolución de precios de estos artículos representa a todos los bienes y servicios de consumo y constituyen la «cesta de la compra».

Encuestas continuas de presupuestos familiares

Las encuestas de objetivo coyuntural se inician en el segundo trimestre de 1977 con la Encuesta Permanente de Consumo (EPC) y desde el primer trimestre de 1985 hasta el segundo de 1997 la Encuesta Continua de Presupuestos Familiares.

La nueva encuesta ECPF 1997, aglutina los objetivos de las dos encuestas, la continua de 1985 y las periódicas fijas de 1958, 1964/65, 1973/74, 1980/81 y 1990/91, a las que viene a sustituir en nuestro sistema estadístico oficial español, manteniendo los objetivos tradicionales de las EPF de proporcionar información estructural para la estimación del consumo privado y suministrar el conjunto de ponderaciones para la elaboración del IPC.

Para ello la Encuesta Continua de Presupuestos Familiares iniciada en 1985 ha sido objeto de una reforma metodológica a partir del tercer trimestre de 1997 ajustando la mecánica de recogida e incrementando el tamaño muestral para permitir establecer estimaciones sobre las Comunidades Autónomas. Además, se introduce una nueva clasificación de bienes y servicios para adecuar los gastos efectuados por los hogares españoles a las necesidades de la Contabilidad Nacional y facilitar la comparación europea e internacional, según los requisitos de la Oficina de Estadística de la Unión Europea.

Las Encuestas Continuas de Presupuestos Familiares proporcionan unos resultados trimestrales, se recogen datos de todo el territorio nacional y se investigan al conjunto de hogares que residen en viviendas familiares principales.

El *muestreo* que se realiza es bietápico con estratificación de las unidades de primera etapa, secciones censales, y siendo las unidades de segunda etapa las viviendas familiares principales. En la estratificación se sigue el criterio geográfico de asignar el estrato según el tamaño del muni-

El muestreo que se realiza es bietápico con estratificación de las unidades de primera etapa, secciones censales, y siendo las unidades de segunda etapa las viviendas familiares principales.

cipio al que pertenece la sección, estableciendo los siguientes estratos: 1) Municipios capital de provincia; 2) Municipios con más de 100.000 habitantes; 3) Municipios de 50.000 a 100.000 habitantes; 4) Municipio de 20.000 a 50.000 habitantes; 5) Municipios de 10.000 a 20.000 habitantes; y 6) Municipios con menos de 10.000 habitantes. Dentro de cada estrato geográfico las secciones censales se agrupan en subestratos de acuerdo con la categoría socioeconómica de los hogares de cada sección definida según los siguientes grupos: 1) Agricultores; 2) Trabajadores por cuenta propia; 3) Directivos y profesionales por cuenta ajena y personal administrativo; y 4) Resto de trabajadores.

La muestra la constituyen 1.008 secciones censales, investigándose 8 viviendas de cada una de ellas, lo que supone una muestra teórica de 8.064 viviendas por trimestre. Se ha realizado una afijación uniforme de una parte de la muestra y el resto se ha afijado proporcionalmente al tamaño poblacional de las Comunidades garantizando una muestra por Comunidad de al menos 24 secciones censales.

Los resultados sobre los gastos de consumo se publican trimestralmente de forma global y mas detallados, por grupos, en el boletín mensual del INE. Así, por ejemplo, los gastos de consumo correspondientes al segundo trimestre de 1998 aparecen en la tabla 1, y los gastos totales y medios por hogar sin desglosar por grupos, se muestran en la tabla 2.

También se publican los resultados por Comunidades Autónomas y por otras variables.

Grupos, ponderaciones y bases

Para el cálculo del IPC se ha seguido el criterio de elegir los gastos y servicios de

	Total (Mill. pts.)	*%*	*Por hogar (miles pts.)*	*Por persona (miles pts.)*
1. Alimentos y bebidas no alcoh.	1.687.050	19,49	140,3	43,2
2. Beb. alcoh., tabaco y narcóticos	235.300	2,72	19,6	6,0
3. Artículos de vestir y calzado	615.932	7,12	51,2	15,8
4. Viv., ag., elec., gas y otros comb.	2.294.251	26,51	190,8	58,7
5. Mob., equip. hogar y otros gastos	419.049	4,84	34,9	10,7
6. Salud	218.260	2,52	18,2	5,6
7. Transportes	1.202.562	13,89	100,0	30,8
8. Comunicaciones	172.089	1,99	14,3	4,4
9. Ocio, espectáculos y cultura	430.472	4,97	35,8	11,0
10. Enseñanza	128.066	1,48	10,7	3,3
11. Hoteles, cafés y restaurantes	785.155	9,07	65,3	20,1
12. Otros bienes y servicios	467.497	5,40	38,9	12,0
Total	8.655.683	100,00	719,8	221,4

Tabla 1. Gastos de consumo, año 1998, segundo trimestre

Año/Trimestre		*Gastos totales*	*Alimentos, bebidasy tabaco*	*Resto de gastos*	*Gastos medios por hogar*	*Alimentos, bebidas y tabaco*	*Resto de gastos*
1998	I	8.602.179	1.890.132	6.712.047	715.407	157.194	558.213
	II	8.655.683	1.922.350	6.733.333	719.730	159.845	559.885
	III	8.778.169	1.901.297	6.876.872	725.544	157.149	568.395
	IV	9.102.139	2.002.039	7.100.100	746.796	164.260	582.536
1999	I	9.052.564	1.918.058	7.134.506	737.389	156.238	581.151
	II	9.008.458	1.925.867	7.082.591	729.415	155.937	573.478
	III	9.154.879	1.956.288	7.198.591	739.493	158.021	581.472
	IV	9.802.908	2.068.089	7.734.819	783.364	165.264	618.100
2000	I	9.908.625	2.012.051	7.896.574	789.347	160.285	629.062
	II	9.852.257	2.083.792	7.768.465	781.064	165.198	615.866
	III	10.142.334	2.145.901	7.996.433	794.894	168.183	626.711

Tabla 2

los artículos que representan más del 0,03‰ del gasto familiar y clasificarlos por grupos siguiendo las recomendaciones internacionales. Hasta 1976 existían cinco grupos: Alimentación, Vestido y calzado, Vivienda, Gastos de casa y Gastos diversos. En 1977 la O.M. de 23 de febrero de 1977 en la que se establecía el «Sistema de Números Índices de Precios de Consumo, base 1976» amplió a 8 los grupos, quedando establecidos los siguientes: 1) Alimentación, bebidas y tabaco; 2) Vestido y calzado; 3) Vivienda; 4) Menaje y servicios para el hogar; 5) Servicios médicos y conservación de la salud; 6) Transporte y comunicaciones; 7) Esparcimiento, deportes, cultura y enseñanza; y 8) Otros gastos. Cada grupo, subgrupo y artículo tiene una ponderación.

La *ponderación* es la importancia o peso que tiene cada artículo en el total de la cesta de la compra y permanece fija durante el periodo de vigencia de un Sistema de Indices de Precios de Consumo. Se indica por w_i, representando la proporción del gasto efectuado por ese artículo respecto del reparto total y se expresa en tanto por ciento o en tanto por mil.

Todos los sistemas van referidos a un año, que recibe el nombre de año base y sirve para establecer el punto de partida de las cantidades consumidas o gastadas por las familias. Se obtienen las cantidades consumidas de los artículos de la cesta de la compra y sus precios en el año base y posteriormente se van tomando los precios en los meses siguientes para poder determinar el aumento o disminución de los Índices de Precios de Consumo.

Los sistemas de Índices de Precios de Consumo hay que actualizarlos con el paso del tiempo porque los gustos cambian, el nivel de vida varia y los gastos familiares se reparten de distinta forma. Prueba de ello es el cuadro adjunto (tabla 3) en donde presentamos las ponderaciones obtenidas de las tres últimas EPF y que sirvieron de base en los Sistemas de base 1976, 1983 y 1992. Las ponderaciones indican la cantidad que se gasta de cada mil pesetas en cada grupo.

La ponderación es la importancia o peso que tiene cada artículo en el total de la cesta de la compra y permanece fija durante el periodo de vigencia de un Sistema de Indices de Precios de Consumo.

Grupo	*Base 1976*	*Base 1983*	*Base 1992*
1. Alimentación	405,2	330,3	293,6
2. Vestido	81,7	87,4	114,8
3. Vivienda	140,0	185,6	102,8
4. Menaje	77,5	74,2	66,8
5. Medicina	33,8	23,9	31,3
6. Transporte	97,4	143,8	165,4
7. Cultura	69,4	69,6	72,7
8. Otros	95,0	85,2	152,6
Total	1000,0	1000,0	1000,0

Tabla 3

Los Sistemas de Índices que han sido utilizados en nuestro país desde la puesta en marcha del IPC (antes ICV) son:

Índices base julio 1936

- Vigencia: desde julio de 1939 hasta diciembre de 1960.
- Estrato de referencia: familias de clase media constituida por cuatro o cinco personas con un ingreso mensual de unas 600 pesetas de 1939.
- Encuesta base para obtener ponderaciones: estudios realizados sobre las cuentas familiares en 1939.
- Desagregación geográfica: índices para cada capital de provincia y un índice para el conjunto de capitales.
- Número de artículos de la cesta de la compra: variando de 95 a 139 artículos según capital de provincia.

Índices base 1958

- Vigencia: desde enero de 1961 hasta diciembre de 1968.
- Estrato de referencia: hogares cuyo sustentador principal es activo con ingresos anuales inferiores a 80.000 pesetas de marzo de 1958.
- Encuesta base para obtener ponderaciones: Encuesta de Cuentas Familiares de marzo de 1958.
- Desagregación geográfica: índices para cada capital de provincia, Ceuta y Melilla, el conjunto nacional, el conjunto de capitales y el de municipios no capitales.
- Número de artículos de la cesta de la compra: 181.

Índices base 1968

- Vigencia: desde enero de 1969 hasta diciembre de 1976.
- Estrato de referencia: hogares pluripersonales cuyo sustentador principal es activo, con ingresos anuales comprendidos entre 21.600 y 120.000 pesetas del año 1968.

- Encuesta base para obtener ponderaciones: Encuesta de Presupuestos Familiares realizada de marzo de 1964 a marzo de 1965, entrevistando a 20.000 familias.
- Desagregación geográfica: índices para cada capital de provincia, conjunto nacional urbano, conjunto nacional no urbano y conjunto nacional total.
- Número de artículos de la cesta de la compra: 255.

Índices base 1976

- Vigencia: desde enero de 1977 hasta julio de 1985.
- Estrato de referencia: familias pluripersonales cuyo sustentador principal es activo, con ingresos anuales entre 81.000 y 720.000 pesetas de 1973-74.
- Encuesta base para obtener ponderaciones: Encuesta de Presupuestos Familiares realizada de julio de 1973 a julio de 1974.
- Desagregación geográfica: índices para el conjunto nacional total, urbano y no urbano, capitales de provincia, Ceuta, Melilla y agrupaciones regionales.
- Número de artículos de la cesta de la compra: 378.

Índices base 1983

- Vigencia: desde agosto de 1985 hasta diciembre de 1992.
- Estrato de referencia: conjunto de hogares pluripersonales, tanto activos como inactivos, con ingresos comprendidos entre las 322.575 y 2.000 pesetas de 1980-81.
- Encuesta base para obtener ponderaciones: Encuesta de Presupuestos Familiares realizada del 1 de abril de 1980 al 31 de marzo de 1981.
- Desagregación geográfica: Indices para los conjuntos nacional total, urbano y no urbano, capitales de provincia, Ceuta, Melilla y comunidades autónomas.
- Número de artículos de la cesta de la compra: 428.

Índices base 1992

- Vigencia: desde enero de 1993 hasta enero de 2001.
- Estrato de referencia: conjunto de todos los hogares.
- Encuesta base para obtener ponderaciones: Encuesta de Presupuestos Familiares realizada del 1 de abril de 1990 al 31 de marzo de 1991.
- Desagregación geográfica: índices para el conjunto nacional total, provincias, Ceuta, Melilla y comunidades autónomas.
- Número de artículos de la cesta de la compra: 471.

El mes de enero de 200l entró en vigor la primera fase del proceso de cambio del IPC con la publicación el 13 de febrero de los datos de enero. La segunda se implantará el próximo año cuando se establezca completamente el nuevo Sistema con base año 2001. En esta primera fase el IPC se ha adaptado a la clasificación internacional de consumo (COICOP) para los grandes grupos, que supone que los ocho grupos establecidos, para los que se publicaban índices hasta ahora pasen a ser estos doce: 1) Alimentación y bebidas no alcohólicas; 2) Bebidas alcohólicas y tabaco; 3) Vestido y calzado, 4) Vivienda; 5) Menaje, 6) Medicina, 7) Transporte; 8) Comunicaciones, 9) Ocio y cultura; 10) Enseñanza; 11) Hoteles, cafés y restaurantes; y 12) Otros. Cada uno de estos grupos, así como los sugbrupos y artículos tiene una ponderación. La nueva estructura de ponderaciones, comparada con la utilizada hasta ahora es la presentada en esta nueva tabla:

El mes de enero de 200l entró en vigor la primera fase del proceso de cambio del IPC.

Grupo	*Ponderación IPC-92*	*Ponderación IPC-92**
1. Alimentos y bebidas no alcohólicas	267,767	215,052
2. Bebidas alcohólicas y tabaco	25,834	32,182
y calzado	114,792	100,384
4. Vivienda	102,801	114,613
5. Menaje	64,329	63,574
6. Medicina	24,743	28,718
7. Transporte	135,783	157,331
8. Comunicaciones	14,434	25,374
9. Ocio y cultura	67,908	65,238
10. Enseñanza	12,916	16,878
11. Hoteles, cafés y restaurantes	109,572	113,259
12. Otros	59,121	67,398
Total	1.000,000	1.000,000

*Ponderaciones actualizadas en enero de 2001

Tabla 4

La segunda se implantará el próximo año…

La metodología también ha cambiado en esta primera fase y es el tratamiento de los artículos de recogida centralizada en donde antes para el cálculo del precio medio de cada uno de estos artículos se tenía en cuenta el número de unidades y ahora se utilizan las ponderaciones de las variedades que los componen medidas por el gasto que se haya realizado en cada una de ellas.

Este nuevo sistema llevará incorporado una revisión anual de las ponderaciones y la inclusión de nuevos productos en el momento en que su consumo resulte significativo. Además se irán introduciendo de forma inmediata las modificaciones metodológicas que se vayan produciendo, tanto a nivel nacional como internacional.

Cálculo del IPC

El *Índice de Precios de Consumo* (IPC) tiene una cobertura en todo el territorio nacional, calculándose tres tipos de índices: Índices por capitales, Ceuta y Melilla; Índices autonómicos e Índices para el conjunto nacional urbano, no urbano y total. Para cada uno de ellos se obtiene el índice total y por grupos. También para las 57 rúbricas que se mantienen desde el Sistema de base 1976.

Para calcular el IPC se utiliza una media aritmética ponderada, denominada fórmula de Laspeyres, siendo el índice correspondiente al periodo t:

$$I_t = 100 \sum_i w_i I_{it} = 100 \sum_i w_i \frac{p_{it}}{p_{i0}}$$

en donde:

- p_{it} = precio del artículo i-ésimo en el periodo t.
- p_{i0} = precio del artículo i-ésimo en el periodo 0.
- w_i = proporción del gasto efectuado por el artículo i-ésimo en el periodo 0.

El *tratamiento de la información* se efectúa en tres fases: 1) Toma directa de los artículos mediante un cuestionario y su posterior depuración; 2) Análisis de la serie de precios; y 3) Procesamiento en los Servicios Centrales de todos los datos enviados por las delegaciones provinciales. Previamente se ha seleccionado el número de establecimientos informantes que proporcionan mensualmente los precios de los artículos, que se clasifican en cuatro tipos, de acuerdo con la variabilidad de sus precios y el consumo según la Encuesta de Presupuestos Familiares, siendo los dos primeros bienes perecederos en su totalidad como carnes, pescados, huevos, frutas y hortalizas frescas que presentan una mayor variabilidad en sus precios, mientras que en los restantes grupos predominan los productos no perecederos.

La muestra de establecimientos representa a todos los establecimientos de la localidad…

La recogida de precios se realiza mediante visita personal a los establecimientos…

La *muestra de establecimientos* representa a todos los establecimientos de la localidad y su selección la lleva a cabo personal especializado de las delegaciones provinciales del INE teniendo en cuenta una serie de normas de carácter general, no pudiendo recoger más de un precio de un mismo artículo, pero sí de artículos diferentes. La muestra de establecimientos permanece fija a lo largo del tiempo y solo serán sustituidos los que cierren o cambien de actividad o cesen de comercializar el artículo medido.

La *recogida de precios* se realiza mediante visita personal a los establecimientos entre el 1 y el 22 de cada mes encargándose de ello un agente entrevistador que para los artículos perecederos toma sus precios tres veces a lo largo del mes, siempre el mismo día, en cada uno de los establecimientos de las capitales de provincia y una vez en los establecimientos del resto. Para el resto de artículos visita una vez al mes el establecimiento para tomar los precios salvo para aquellos otros que por su mayor estabilidad en el precio se hace la toma trimestral. Los artículos estacionales con grandes fluctuaciones de precios tienen un tratamiento especial para que no influya su variación en los resultados finales del IPC.

La organización y desarrollo del *trabajo de campo* en cada provincia la llevan a cabo los entrevistadores-encuestadores que recogen los precios y las incidencias, los inspectores de entrevistadores que comprueban la representatividad e idoneidad de los artículos y establecimientos controlando el trabajo realizado por los entrevistadores a su cargo, y el inspector de la encuesta que es el responsable máximo encargado de organizar y distribuir el trabajo, planificar las visitas y en general resolver los problemas que surjan durante la recogida de precios.

Los precios se toman en 130 municipios (50 capitales de provincia, Ceuta, Melilla y 78 municipios no capitales con más de 50.000 habitantes) informando 29.000 establecimientos y un total de 150.000 precios aproximadamente.

Los IPC se *publican* entre el 11 y el 14 de cada mes y el INE ofrece los datos del mes anterior, tanto del índice general como por grupos, por Comunidades Autónomas y por provincias. Además del número índice se publican variaciones en tanto por ciento respecto al mes anterior, en lo que va de año y en un año. También los índices nacionales de rúbricas, en total 57. Así en Alimentación aparecen como rúbricas: cereales, pan, huevos, leche, carne de vacuno...; en Vestido: prendas de vestir de hombre, de mujer, de niño y de bebé, calzado de hombre...; en Vivienda: en alquiler...; en Menaje: muebles y revestimientos del suelo, textiles y accesorios para el hogar, electrodomésticos...; en Medicina: servicios médicos y similares...; en Transporte: transporte personal, público urbano...; en Cultura: objetos recreativos, publicaciones, esparcimiento...; y en Otros: artículos de uso personal...

Así, por ejemplo, el IPC de noviembre de 2000 (datos nacionales), se presentó de esta manera:

Grupo	*Índice*	*Sobre mes anterior*	*% variación en lo que va de año*	*En un año*
1. Alimentación	127,2	0,2	2,1	2,9
2. Vestido	123,8	0,5	2,2	2,3
3. Vivienda	140,3	0,2	4,5	5,0
4. Menaje	125,4	0,2	2,9	3,1
5. Medicina	133,4	0,2	3,4	3,5
6. Transporte	141,6	0,7	6,3	6,7
7. Cultura	128,1	0,4	2,9	2,9
8. Otros	141,9	0,3	4,4	5,0
Índice general	132,9	0,2	3,6	4,1

Tabla 5. Índices de precios de consumo. Base 1992. Noviembre 2000. Datos provisionales. Índices nacionales: general y de grupos

Obtención de las variaciones del IPC

En la tabla 6 presentamos los índices de los últimos años del siglo XX, que nos servirán para hacer algunos casos prácticos y para dos actividades cuya relevancia ha tenido mucha importancia. Me refiero a la paga extra de los pensionistas en los dos últimos años por desajuste entre la inflación prevista por el Gobierno en los presupuestos del estado y la subida real del IPC, y la otra correspondiente a la sentencia de la Audiencia Nacional sobre la subida salarial a los funcionarios.

Índices	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Enero	170,6	180,6	103,2	108,3	113,1	117,5	120,8	123,2	125,1	128,7
Febrero	170,4	182,0	103,2	108,4	113,6	117,8	120,8	122,9	125,2	128,9
Marzo	170,9	182,0	103,6	108,7	114,3	118,2	120,8	123,0	125,7	129,4
Abril	171,3	182,5	103,6	109,2	114,9	118,9	120,9	123,3	126,2	129,9
Mayo	171,8	182,9	104,3	109,4	114,9	119,3	121,0	123,5	126,2	130,2
Junio	172,3	182,9	104,6	109,5	115,1	119,2	121,0	123,5	126,2	130,6
Julio	174,4	183,5	105,0	109,9	115,1	119,3	121,3	123,5	126,8	131,3
Agosto	175,1	185,2	105,6	110,7	115,4	119,7	121,8	124,0	127,3	131,9
Septiembre	176,5	186,7	106,2	111,0	115,8	120,0	122,4	124,3	127,5	132,2
Octubre	177,6	186,8	106,6	111,2	116,1	120,1	122,4	124,4	127,5	132,6
Noviembre	177,9	186,9	106,8	111,4	116,4	120,1	122,6	124,3	127,7	132,9
Diciembre	178,0	187,5	107,3	111,9	116,7	120,5	122,9	124,7	128,3	133,4
Variación	5,5	5,3	4,9	4,3	4,3	3,2	2,0	1,4	2,9	4,0

Nota: Coeficiente de enlace K = 0,545261

Tabla 6

Ejemplo 1. Obtención de la variación del IPC en el año 2000

Hemos de comparar el índice de diciembre de 2000 con el de diciembre de 1999 y obtener la variación en % así:

$$V_{D00-D99} = (\frac{I_{D00}}{I_{D99}} - 1) \cdot 100 =$$

$$= (\frac{133,4}{128,3} - 1) \cdot 100 = 3,975$$

La variación es del 3,98 %

Ejemplo 2. Variación del IPC en el año 1993

En este caso como indice D92 está en base 83 y D93 está en base 92 hay que expresarlos en la misma base para lo cual el índice de base 83 se multiplica por el coeficiente K de enlace, por tanto:

$$V_{D93-D92} = (\frac{I_{D93}}{I_{D92}} - 1) \cdot 100 =$$

$$= (\frac{107,3}{187,5 \cdot 0,545261} - 1) \cdot 100 = 4,952$$

La variación es del 4,95 %

Ejemplo 3

Un piso se alquila el 1 de agosto de 1996 a un precio de 100.000 pts. habiendo en el contrato una cláusula que indica que se aumentará cada año el precio según la variación del IPC. ¿Cuál será el precio del alquiler cada año hasta el 2001?

- Aumento de julio de 1996 a julio de 1997:

$$(\frac{121,8}{119,3} - 1) \cdot 100 = 2,1$$

Alquiler del 1 de agosto de 1997 a 1 agosto de 1998: 100.000 · 1,021 = 102.100 pts.

- Aumento de julio de 1997 a julio de 1998:

$$(\frac{123,5}{121,3} - 1) \cdot 100 = 1,81$$

Alquiler del 1 de agosto 1998 al 1 agosto de 1999: 102.100 · 1,081 = 103.948 pts.

- Aumento de julio de 1998 a julio de 1999:

$$(\frac{126,8}{123,5} - 1) \cdot 100 = 2,67$$

Alquiler del 1 de agosto de 1999 al 1 agosto de 200: 103.948 · 1,0267 = = 106.723 pts.

- Aumento de julio de 1999 a julio de 2000:

$$(\frac{131,3}{126,8} - 1) \cdot 100 = 3,55$$

Alquiler del 1 de agosto de 2000 al 1 de agosto de 2001: 106.723 · 1,0355 = = 110.512 pts.

Acontecimientos importantes en los que el IPC ha sido referente diario en los medios de comunicación

Pensiones

Un caso que tiene mucha repercusión a nivel nacional es el aumento de las pensiones. Cada año cuando el Gobierno presenta los Presupuestos del Estado para su aprobación en el Congreso de los Diputados establece una previsión de la subida del IPC para el año siguiente, y en función de esta previsión establece el aumento de las pensiones.

La Ley de Pensiones de 1997, para que los pensionistas no perdieran poder adquisitivo, estableció el mes de noviembre como referencia de actualización. Si el aumento durante un año en noviembre era menor que la previsión del Gobierno los pensionistas tendrían que devolver una cantidad y en caso contrario el Gobierno tendría que abonarles esa diferencia. Hubo dos años en donde la subida del IPC fue menor que la prevista por el Gobierno y éste decidió no descontar esa cantidad. Sin embargo, en los dos últimos años la inflación anual referida al mes de noviembre ha sido mayor a la prevista por el Gobierno y en este caso se establece una paga extra para compensar el desequilibrio, paga a recibir antes del 1 de abril, según la Ley de Pensiones.

Un caso que tiene mucha repercusión a nivel nacional es el aumento de las pensiones. Cada año cuando el Gobierno presenta los Presupuestos del Estado para su aprobación en el Congreso de los Diputados establece una previsión de la subida del IPC para el año siguiente, y en función de esta previsión establece el aumento de las pensiones.

En 1999 la previsión del Gobierno fue del 2 % y la inflación, del 4,1 %. Esta diferencia cifrada en 355.000 millones de pesetas es la cantidad que se abonó a los pensionistas en una paga extra en Enero del 2001.

Así, un pensionista que durante el año 2000 recibiera una pensión de 100.000 pesetas, durante 1999 era de 98.039 pesetas, ya que como el aumento previsto por el Gobierno era del 2 % (100.000/1,02 = 98.039 pts.) y el aumento debió de ser del 4,1 %, esas 98.039 se habrían traducido en 102.059 pts. (98.030 x 1,041) en lugar de las 100.000 pts. que estuvo cobrando. Esa diferencia mensual de 2.059 pts. multiplicada por 14, supone la paga extra de 28.826 pts. que recibió en el mes de enero. Además sobre esta cantidad de 102.059 pts. se fija la pensión para el 2001 que según las previsiones del Gobierno es de un 2 %, y por lo tanto 104.100 pts. es lo que percibirá dicho pensionista durante el año 2001.

Sentencia de la Audiencia Nacional sobre el sueldo de funcionarios

Con motivo de la publicación el 11 de enero de 2001 del IPC de diciembre de 2000 que daba un aumento durante ese año del 4 %, muchos especialistas volvieron a retomar el tema de la subida del IPC, ya que es una cuestión de vital importancia en nuestro país. Basta recordar que debido a estos datos el 71 % de los trabajadores con convenio tendrán una revisión salarial y que supondrá a los trabajadores una retribución estimada en 200.000 millones ya que el aumento establecido en los convenios no llegaba al 2,2 %, pero debido a una cláusula de revisión del salario según el aumento del IPC hace que casi 6 millones de trabajadores no pierdan poder adquisitivo, cosa que no ha ocurrido con los trabajadores de la Administración.

Pues parecía un anticipo a la sentencia que se produjo a finales de enero emitida por la Audiencia Nacional en la que textualmente se dice «... declarando el derecho de los funcionarios incluidos en el ámbito del Acuerdo de 15 de septiembre de 1994 objeto de autos a percibir el incremento de su retribución, según la previsión presupuestaria del crecimiento del IPC en el año 1997, más las cantidades dejadas de percibir durante los años sucesivos como consecuencia de la inaplicación del señalado incremento, y ordenamos a la Administración demandada que proceda a llevar a efecto en el menor plazo posible, negociaciones sobre el incremento retributivo previsto en el artículo VI, titulo II del acuerdo señalado, con efectos al año 1996, momento en que dicha negociación debió producirse…»

Según han publicado todos los medios de comunicación el acuerdo entre Sindicatos y Administración abarcaba tres años 1995, 1996 y 1997. En 1997 la previsión de inflación prevista por el Gobierno era del 2,6 % –previsión a la que se ha ajustado el Gobierno los dos últimos años 1999 y 2000 para las subidas salariales de los funcionarios, concretamente 1,8 % y 2 %, si bien la subida del IPC fue de 2,9 % y 4 % respectivamente– mientras que la subida del IPC fue del 2 %. Si nos atenemos a lo que ha hecho el Gobierno en estos dos últimos años, en esta negociación a la que «obliga» la Audiencia Nacional entre Sindicatos y Administración debería de aplicarse el mismo criterio que en estos dos últimos años y establecer esa subida en el 2,6%. Y esto, ¿qué representa?

Un trabajador que en 1996 cobrara 100.000 pesetas, en 1997 debió cobrar 100.000·1,026 = 102.600 pts. mensuales, luego se le adeuda 2.600·14 = 36.400 pts. A esta cantidad hay que aumentarle los porcentajes previstos por el Gobierno, luego:

- Año 1998: se incrementa esta cantidad en el 2,1 %, es decir 37.164 pts.
- Año 1999: se incrementa esta cantidad en 1,8 %, es decir 37.833 pts.
- Año 2000: Se incrementa esta cantidad en 2 %, es decir 38.590 pts.

A este trabajador que en 1996 cobraba 100.000 pesetas mensuales la Administración por la sentencia de la Audiencia Nacional debe abonarle por una sola vez una paga de: 149.987 pesetas.

Las matemáticas que están presentes en nuestra vida cotidiana deben de ser conocidas y aplicadas con toda soltura por nuestros alumnos…

A modo de conclusión

A lo largo de las páginas anteriores hemos realizado un rápido recorrido de las aplicaciones del IPC en la vida cotidiana, hecho que nos obliga a los docentes a tratar estos temas con nuestros alumnos. Si bien no aparece como contenido específico dentro del área de matemáticas en Secundaria sí es un contenido que debamos de tratar ya que tiene una aplicación en el estudio de porcentajes, tiene una aplicación en el estudio de gráficas y tiene una aplicación en el estudio del tratamiento de la información.

Las matemáticas que están presentes en nuestra vida cotidiana deben de ser conocidas y aplicadas con toda soltura por nuestros alumnos, para que temas como el del IPC que interviene en tantos aspectos económicos, como el del aumento de las pensiones, el aumento de los salarios, en los convenios o en el alquiler de un piso, queden dentro de la alfabetización matemática que los alumnos han de tener al finalizar la enseñanza obligatoria.

Andrés Nortes
Facultad de Educación.
Universidad de Murcia.
Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales».
Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton».
Sociedad de Eduación Matemática de la Región de Murcia

Bibliografía

INE (1971): *El Índice del coste de la vida*, INE, Madrid

INE (1975): *Encuesta de Presupuestos Familiares. Junio 1973-Junio 1974. Metodología y resultados*, INE, Madrid

INE (1983): *Encuesta de Presupuestos Familiares 1980-1981. Tomo I: El gasto y el ingreso en los hogares. Conjunto Nacional*, INE, Madrid

INE (1992): *Encuesta de Presupuestos Familiares 1990-91. Metodología*, INE, Madrid

INE (1994): *Índice de Precios de Consumo Base 1992. Metodología*, INE, Madrid

INE (1998): *Encuesta Continua de Presupuestos familiares. Metodología. Resultados de 1988*, INE, Madrid

INE (1998): *Encuesta Continua de Presupuestos Familiares (renovada en el 2.° trimestre de 1997). Metodología*, INE, Madrid

INE (1999): *Encuesta Continua de Presupuestos Familiares Base 1997. Primeros resultados Año 1998*, INE, Madrid

NORTES CHECA, A. (1987): *Encuestas y precios*, Síntesis, Madrid

NORTES CHECA, A. (1993): *Estadística teórica y aplicada*, PPU, Barcelona

NORTES CHECA, A. (1995): «Los números índices y sus aplicaciones en la enseñanza», *Uno*, n.° 6, 127-140.

SUMA 39
febrero 2002, pp. 47-52

Programar en Logo: enseñar al ordenador el cálculo con fracciones

Guido Angelo Ramellini

ARTÍCULOS

El autor, a modo de continuación de un artículo suyo publicado en el número 32 de *Suma*, presenta un desafío aún mayor, en el que los alumnos deben enseñar al ordenador cómo resolver cálculos y expresiones con fracciones, expresando en fracción el resultado.

SE PUEDE considerar este trabajo como la continuación de la actividad: «Cómo calcular el Máximo Común Divisor y el Mínimo Común Múltiplo», que forma parte del artículo: «Algunos contenidos matemáticos con Logo» (Ramellini, 1999).

Por qué *Logo*[1]

En la premisa del artículo citado, daba un cuantas razones que nos llevaron a escoger *Logo* como lenguaje de programación, una vez decidido empezar una alfabetización informática en el último trienio de la Escuela Primaria y en el primero bienio de la ESO[2].

Me limité a exponer estas razones para evitar abrir un debate sobre si es necesario enseñar a programar o si, dado el escaso tiempo y los limitados medios que tenemos en las escuelas, no es más conveniente concentrar los esfuerzos en que los alumnos aprendan a ser usuarios conscientes de los grandes medios que ofrece el *software* didáctico y, sobre todo, la red.

Mantendré esta prudencia, porque el tema necesita tiempo y competencias que no poseo, pero me gustaría citar unas declaraciones de Umberto Eco[3] para *Liberation* en la inauguración del sitio *Internet* sobre la educación de la diversidad (www:\\academie-universelle.asso.fr):

> [...] Existe el riesgo de un universo a lo Orwell, fundado sobre tres clases, pero no en sentido marxista: la clase de los que interaccionan activamente con la red, que reciben y emiten mensajes; la pequeña burguesía de los usuarios pasivos, y el proletariado que se limita a mirar lo que pasa la televisión [...].

Para evitar la tecno-exclusión «[...] tenemos que buscar la solución fuera de la red, en las escuelas. Para permitir que cada niño sea parte de esa aristocracia de masa, la escuela debe enseñarle a programar y no sólo a utilizar programas».

Enseñar a los niños a programar «[...] es la cosa más fácil del mundo, porque esta generación nace con un talento para el ordenador».

Evidentemente, ni creo haber resuelto el debate con estas palabras, de fuente tan competente, ni comparto totalmente el optimismo de la última afirmación: enseñar a los niños a programar es difícil, en parte porque requiere esfuerzo, tiempo, una estrategia correcta y eficaz, medios, objetivos claros y, especialmente, una sociedad que esté volcada a incentivar en los niños la participación activa. Desdichadamente, estoy convencido de que el modelo cultural dominante induce, por el contrario, a la pasividad y que ésta juega un papel importante en la crisis que sufren los modelos educativos democráticos, que incentivan la participación crítica.

…enseñar a los niños a programar es difícil…

El cálculo con fracciones

Creo que todos los compañeros que trabajamos con niños de primaria o de los primeros años de secundaria compartimos la impresión de que se ha perdido de forma considerable la capacidad de cálculo a todos los niveles.

No sé de qué depende: si del estímulo social de habilidades distintas (Hidalgo y otros, 1999), o de un uso excesivo y equivocado de los aparatos tecnológicos de cálculo, si del rechazo de contenidos áridos y repetitivos compartido por el alumnado y por parte del profesorado, o si de un poco de todo esto.

En los *Programmi della Scuola Media*[4], las indicaciones finales para la enseñanza de las matemáticas, dicen textualmente:

> Se desaconseja insistir en aspectos puramente mecánicos y mnemónicos, y por esto de escaso valor formativo. [...] Por ejemplo, argumentos como la descomposición en factores primos, el cálculo del Máximo Común Divisor y el Mínimo Común Múltiplo, el cálculo de largas expresiones aritméticas, el algoritmo para la extracción de la raíz cuadrada, el cálculo literal sin referencias concretas, no deben de tener un valor preponderante en la enseñanza, y menos aún en la evaluación.

Esta postura oficial, que recogía las experiencias pedagógicas más avanzadas, ayudó a cambiar las prioridades y la metodología de la enseñanza de las matemáticas en Italia, que, hasta aquel momento (a pesar de que experiencias tan renovadoras como la de Emma Castelnuovo son de los años cincuenta), estaba basada en la repetición mecánica y eterna de expresiones aritméticas antes y ecuaciones después.

Es difícil no compartir esta postura, pero tampoco podemos cruzarnos de brazos ante las dificultades de cálculo, que sigue siendo un instrumento fundamental para el desarrollo de capacidades matemáticas más elevadas.

Objetivos

Continúo pensando que, además de querer reforzar el aprendizaje de los contenidos matemáticos (esenciales, en esto caso), e informáticos, que resultarán evidentes en la explicación de nuestra experiencia, trabajar con un lenguaje para ordenador implica para el alumno el esfuerzo de traducir sus estrategias y razonamientos en algo que la máquina pueda «entender» y aplicar.

Este esfuerzo, que comporta una reflexión profunda sobre los contenidos disciplinares y la comparación entre distintas maneras de aproximarse a ellos, me parece el principal aspecto formativo del trabajo con el ordenador en esta etapa escolar.

Un trabajo sistemático de este tipo resalta las diferencias en la forma de trabajar del ordenador y la del ser humano, y asienta la capacidad de buscar soluciones alternativas y el hábito de modificar la propia forma de pensar.

Prerrequisitos

- Haber trabajado en clase con fracciones y con las reglas del cálculo.
- Haber desarrollado en el laboratorio de informática los procedimientos para calcular con el ordenador el Máximo Común Divisor y el Mínimo Común Múltiplo.

Actividad con el ordenador

Primeros pasos

Se propone a los alumnos que experimenten las respuestas del ordenador a distintos input con fracciones. Es:

```
PRINT 2/3      →0,666666666666667
PRINT 2*2/3    →1,33333333333333
```

1 *Microsoft Windows Logo*, versión 6.2g, Softronics, Inc.: http://www.softronix.com

2 Las Escuelas Italianas de Madrid siguen los planes de estudio italianos y están divididas entre: 5 años de primaria, 3 de secundaria de I grado y 5 de II grado. Los alumnos trabajan en el laboratorio de informática 1 hora a la semana a partir del IV año de Primaria. No se trabaja exclusivamente con *Logo.*

3 En *La Repubblica*,(8 de enero de 2000: 13) La traducción es mia.

4 Los *Programmi della Scuola Media Inferiore* de 1979, que han sido una de las fuentes de inspiración de la LOGSE que ha reformado la escuela española, recogen los objetivos, los contenidos, la metodología y las comprobaciones de todos los currículos de las materias que se imparten en el primer nivel de la Escuela Secundaria Italiana. La traducción es mia.

PRINT 1/6*6/5 → 0,2
PRINT 2/3 + 5/3 → 2,33333333333333...

El ordenador reconoce las fracciones, pero las transforma en números decimales para poder resolver las operaciones y darnos el resultado. Podemos así:

a) transformar el resultado de número decimal en fracción (*input* = fracción → cálculo = número decimal → *output* = fracción);

b) «enseñar» al ordenador a trabajar con fracciones, sin pasar a través de los números decimales.

Esta estrategia comporta una dificultad difícilmente superable, porque el ordenador no distingue entre números decimales finitos e infinitos periódicos (trabajando a partir de fracciones, evidentemente nunca obtendremos números decimales infinitos no periódicos).

La estrategia que debemos utilizar es la de introducir y operar separadamente con los numeradores y los denominadores de las fracciones.

¿Con qué operación empezamos?

Podemos dejar que cada alumno escoja por qué operación empezar. O bien, podemos asignar una operación distinta a cada alumno (o pareja de alumnos), según las distintas habilidades y competencias. Y también podemos proponer a la clase un *brain storming* en el que se evidencia:

- que el algoritmo de la adición, por el que todos los alumnos proponen empezar, no es el más fácil con los números fraccionarios;
- que hay unas evidentes y fuertes relaciones entre los algoritmos de adición y sustracción (en un caso se suman y en el otro se restan los numeradores) y los de multiplicación y división (dividir es igual a multiplicar por la fracción inversa);
- que el resultado final tiene que ser una fracción primitiva, o sea simplificada.

Podemos además ponernos de acuerdo para empezar operando con sólo dos fracciones, y por lo tanto tendremos cuatro variables diferentes: los dos numeradores (*n*1 y *n*2) y los dos denominadores (d1 y d2).

La estrategia que debemos utilizar es la de introducir y operar separadamente con los numeradores y los denominadores de las fracciones.

Preparación de los procedimientos básicos

Para calcular el MCD

TO MCD :*a* :*b*	Para calcular el MCD entre *a* y *b*
MAKE "*r* REMAINDER :*a* :*b*	se llama r el resto de a/b
IF :*r*=0 [MAKE "*MCD* :*b* PRINT [MCD=]	si r=0, b es el MCD, se imprime
PRINT :*MCD* STOP]	y se termina el trabajo
MAKE "*a* :*b* MAKE "*b* :*r*	si r > 0, *b* se convierte en *a* y *r* en *b*
MCD :a :b	se repite el procedimiento
END	hasta que *r* = 0

Para calcular el MCM

```
TO MCM :a :b
MCD :a :b
MAKE "MCM :a*:b/:MCD
PRINT :MCM
END
```

Para simplificar una fracción n/d

TO SEM :*a* :*b*	
MCD :*a* :*b*	(eliminando, si no nos sirven, las
MAKE "*a* :*a*/:*MCD* MAKE "*b* :*b*/:*MCD*	instrucciones para imprimir el MCD)
END	

Algoritmo de la multiplicación

TO PRO :*n1* :*d1* :*n2* :*d2*	
***(SEM :*n1* :*d1*	***estas líneas sirven para simpli-
MAKE "*n1* :*a* "*d1* :*b*	ficar las fracciones iniciales:
SEM :*n2* :*d2*	son opcionales, se pueden
MAKE "*n2* :*a* "*d2* :*b*)***	añadir a los cuatro procedimientos***
MAKE "*n* :*n1**:*n2* MAKE "*d* :*d1**:*d2*	se multiplican los dos numeradores y los dos denominadores
SEM :*n* :*d*	se simplifica el resultado
PRINT (LIST :*n* "/ :*d*)	se imprime el resultado en forma
END	de fracción

Algoritmo de la división

TO CUO :*n1* :*d1* :*n2* :*d2*	
PRO :*n1* :*d1* :*d2* :*n2*	sólo es necesario invertir numerador y deno-
END	minador de la segunda fracción y multiplicar

Algoritmo de la potencia

No tiene secretos: una vez comprobado si numerador y denominador se pueden simplificar, se multiplican cada uno por sí mismo las veces indicadas por el exponente:

```
TO PT :n1 :d1 :e
SEM :n1 :d1
MAKE "n :n1 MAKE "d :d1
REPEAT :e [MAKE "n :n*:n1 MAKE "d :d*:d1]
PRINT (LIST :n "/ :d)
END
```

Algoritmos de la adición y de la resta

Se puede enfocar el trabajo de dos formas distintas (profundizaremos en la discusión las dos opciones):

a) obteniendo pragmáticamente, en modo rápido y simple, el resultado correcto;

b) desarrollando didácticamente los contenidos: MCD, MCM, común denominador, etc.

a)

```
TO SUMA :n1 :d1 :n2 :d2
MAKE "d :d1*:d2        el denominador común es el producto
                       de los denominadores y no el MCM
MAKE "n1 :n1*:d2
MAKE "n2 :n2*:d1
MAKE "n :n1+:n2
SEM :n :d              es fundamental simplificar el resultado
END
```

```
TO RES n1 :d1 :n2 :d2
MAKE "n2 :n2*-1
SUMA :n1 :d1 :n2 :d2
END
```

```
TO RES n1 :d1 :n2 :d2
SUMA :n1 :d1 -:n2 :d2
END
```

b)

```
TO SUMA :n1 :d1 :n2 :d2
MCM :d1 :d2            el denominador común es el MCM
MAKE "d :mcd
MAKE "n1 :n1*:mcm/:d1
MAKE "n2 :n2*:mcm/:d2
MAKE "n :n1+:n2
SEM :n :d              simplificar el resultado no tiene la misma
END                    importancia que en el otro procedimiento
```

```
TO RES n1 :d1 :n2 :d2
MAKE "n2 :n2*-1
SUMA :n1 :d1 :n2 :d2
END
```

```
TO RES n1 :d1 :n2 :d2
SUMA :n1 :d1 -:n2 :d2
END
```

Ejercicios más complejos

Una vez construidos los procedimientos básicos, podemos aprovechar la estructura modular de Logo para elaborar super-procedimientos que resuelvan expresiones.

Siguen unos ejemplos, algunos fáciles y otros más complejos:

```
TO EXP1
;(3/5+2/3)*5/19=1/3
SUMA 3 5 2 3
MAKE "n1 :n MAKE "d1 :d
PRO :n1 :d1 5 9
PRINT (LIST :n "/ :d)
END
```

```
TO EXP2
;(2/5*15/8-1/18:5/6)*30/41
PRO 2 5 15 8
MAKE "z1 :n MAKE "v1 :d
CUO 1 18 5 6
MAKE "z2 :n MAKE "v2 :d
RES :z1 :v1 :z2 :v2
MAKE "n1 :n MAKE "d1 :d
PRO :n1 :d1 30 41
PRINT (LIST :n "/ :d)
END
```

```
TO EXP3
;[13/5-(3/20*2/3)]^3:(7/6+4/3)^4
PRO 3 20 2 3
MAKE "n2 :n MAKE "d2 :d
RES 13 5 :n2 :d2
PT :n :d 3
MAKE "nn1 :nn MAKE "dd1 :dd
SUMA 7 6 4 3
PT :n :d 4
MAKE "nn2 :nn MAKE "dd2 :dd
CUO :nn1 :dd1 :nn2 :dd2
PRINT (LIST :n "/ :d)
END
```

```
TO EXP4          (este ejercicio combina los dos
                 precedentes: EXP2 y EXP3)
;[(2/5*15/8-1/18:5/6)*30/41]*[13/5-
-(3/20*2/3)]^3:(7/6+4/3)^4
EXP2
;MAKE "nt1 :n MAKE "dt1 :d
EXP3
MAKE "nt2 :n MAKE "dt2 :d
PRO :nt1 :dt1 :nt2 :dt2
PRINT (LIST :n "/ :d)
END
```

La estructura modular de Logo evidencia el procedimiento de resolución de las expresiones y las reglas para su resolución. Si la expresión es larga, se puede partir en distintos trozos, resolverlos separadamente y, finalmente, llegar al resultado final.

La estructura modular de *Logo* evidencia el procedimiento de resolución de las expresiones y las reglas para su resolución. Si la expresión es larga, se puede partir en distintos trozos, resolverlos separadamente y, finalmente, llegar al resultado final:

```
TO EXP5
;(2/5+8/15-1/3)*(7/6-4/3+4/4)
EE1
```

```
MAKE “n1 :n MAKE “d1 :d
EE2
MAKE “n2 :n MAKE “d2 :d
PRO :n1 :d1 :n2 :d2
PRINT (LIST :n “/ :d)
END

TO EE1
;(2/5+8/15-1/3)
SUMA 2 5 8 15
RES :n :d 1 3
PRINT (LIST :n “/ :d)
END

EE2
;(7/6-4/3+1/2)
RES 7 6 4 3
SUMA :n :d 1 2
PRINT (LIST :n “/ :d)
END
```

Conclusiones

Como decía esquematizando los objetivos, la actividad presentada permite reforzar algunos contenidos y competencias muy importantes, que muchos alumnos aprenden normalmente de forma superficial y mecánica, y olvidan, aún cuando mantengan algunas habilidades y sepan resolver operaciones con fracciones.

Sin adentrarme demasiado en el tema, creo que muchos profesores conocemos la facilidad con que alumnos de capacidad suficiente, después de meses en que han resuelto ejercicios largos y complejos, se equivocan todavía ante simples operaciones como: 2 + 3/5 (donde contestan 5/5), 1/2 – 1/4 (con varios errores posibles), 1/4 : 1/2 (que normalmente resulta igual a 1/8), y muchas otras del mismo tipo.

De poco sirve que les hayamos obligado a imaginar tartas, que las hayan dibujado en papel cuadriculado, coloreado, recortado con tijeras: en sus casas, los alumnos nunca cortan tartas, que, además, está claro que no llevan cuadrículas, sino, como mucho, guindas, que no siempre ayudan a una repartición matemáticamente correcta.

De poco sirve que les hayamos obligado a imaginar tartas, que las hayan dibujado en papel cuadriculado, coloreado, recortado con tijeras: en sus casas, los alumnos nunca cortan tartas, que, además, está claro que no llevan cuadrículas, sino, como mucho, guindas, que no siempre ayudan a una repartición matemáticamente correcta.

No pretendo afirmar que las actividades con el ordenador resuelvan por sí solas este tipo de problemas, pero reconducen los contenidos a un ambiente operativo distinto, en donde las reglas, por abstractas que sean, adquieren una operatividad, producen una respuesta de la máquina, correcta o no, realizan un *feed back.*

Esta interacción con la máquina me parece un aspecto muy importante cuando trabajamos con contenidos abstractos (evidentemente, las operaciones con las fracciones no tienen en un contexto social amplio la misma centralidad que les otorga el currículo de matemáticas) o formalizado.

> El ordenador puede convertir en concreto (y personal) lo que es formal. (Papert, 1980)

Es evidente que mejores serán las respuestas de un mayor número de alumnos cuanto más cercanos, concretos y motivadores sean los temas que el laboratorio de informática les sabe proponer, respetando de este modo el *principio de continuidad* (la relación entre las matemáticas y los conocimientos personales), el *principio de potencia* (permitiendo a los alumnos la elaboración de proyectos significativos) y el *principio de resonancia cultural* (la materia debe de tener un sentido en un contexto social más amplio) (Papert, 1980).

Por otro lado, es inútil forzar la significatividad o la pragmaticidad de unos contenidos: el riesgo es aumentar aún más la artificialidad de la situación.

Podemos aprovechar el hecho de que el trabajo con el ordenador ejerce una fuerte fascinación sobre los alumnos y tiene una aceptación social muy positiva. Tiene también reglas, lenguajes, situaciones comunicativas propias, a veces muy rígidas y áridas; otras veces mucho más dinámicas que algunas de las tareas que ofrecemos día a día en nuestras clases.

Además, se puede potenciar el valor comunicativo de la actividad, organizando a los alumnos por parejas o pequeños grupos y permitiendo la confrontación de las ideas.

Otro aspecto importante que se manifiesta a menudo en el trabajo con el ordenador es la relativización de la importancia de los contenidos.

Sin considerar el aspecto formal y conceptual, si comparamos la importancia operativa, en el contexto de las operaciones con fracciones, parece evidente que el MCM desarrolla un papel mucho más importante que el MCD. Saber calcular el MCM es fundamental para sumar y restar fracciones, si queremos evitar cálculos complicados, mientras que, en la tarea de simplificar fracciones, el rol del MCD puede ser sustituido eficazmente por unas simples divisiones progresivas.

En los procedimientos del ordenador, por el contrario, no parece en absoluto necesario calcular el MCM (la computadora no teme los grandes números) y resulta esencial calcular el MCD (procedimiento SEM).

El cálculo del MCM aparece sólo si decidimos acercar las tareas del ordenador a nuestra forma de proceder (ADD, versión 2).

En todo caso, el ordenador no es una medicina definitiva ni, mucho menos, inmediata.

Así, el objetivo transversal de conducir los alumnos a reflexionar sobre su forma de pensar no se mide con comprobaciones rápidas, al terminar una tarea, sino a lo largo de varios años y en situaciones concretamente problemáticas.

> Empecé a ver cómo los niños que habían aprendido a programar un ordenador podían utilizar modelos informáticos para reflexionar sobre cómo se piensa, para aprender cómo se aprende, y, de este modo, para desarrollar sus capacidades de psicólogos y epistemólogos. (Papert, 1980)

Guido Angelo Ramellini
Scuola Media Statale Italiana.
Madrid.
Sociedad Madrileña
de Profesores de Matemáticas
«Emma Castelnuovo»

Referencias bibliográficas

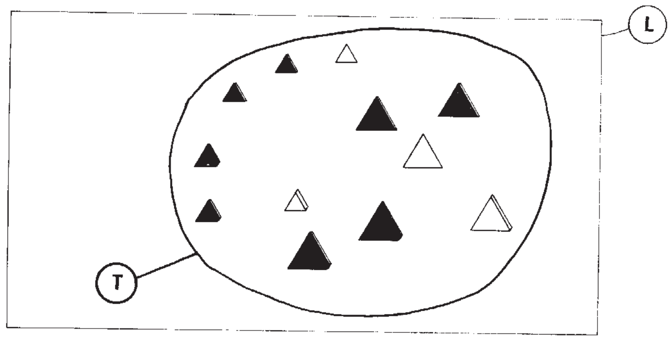
HIDALGO ALONSO S. y otros (1999): «Evolución de las destrezas básicas para el cálculo y su influencia en el rendimiento escolar en matemáticas», *Suma* n.° 30, 37-45.

HIDALGO ALONSO S. y otros (1999): «La destreza para el cálculo elemental como factor de aprovechamiento en Matemáticas en el primer ciclo de la ESO», en *Actas de las 9as JAEM,* 538-541.

RAMELLINI, G. A. (1999): «Algunos contenidos matemáticos con Logo», *Suma*, n.° 32, 91-97.

PAPERT, S. (1980): *Mindstorm*, Basic Book, New York.

Coge la caja de Bloques Lógicos, o conjunto L. La línea roja encierra el subconjunto T = { triángulos }.



— Con un trazo azul encierra { triángulos pequeños }. Le llamarás P.

— Completa:

.... ∈ P	.... T	Podemos decir
.... ∈ P	.... T	P........T
.... ∈ P	.... T	
.... ∈ P	.... T	
.... ∈ P	.... T	
.... ∈ P	.... T	

En la ficha 2 A has encontrado que $T \subset L$.

Si $P \subset T$
y $T \subset L$ } podemos afirmar que $P \subset L$.

— Repite todo el ejercicio, formando el subconjunto { círculos } y luego { círculos pequeños }.

— Traza el esquema.

Si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$
Esta propiedad de la inclusión es la propiedad transitiva.

3.° EGB

SUMA 39
febrero 2002, pp. 53-61

La demostración en el currículo: una perspectiva histórica

Marcelino J. Ibañes Jalón
Tomás Ortega del Rincón

ARTÍCULOS

En la primera parte de este artículo se hace un breve análisis histórico del tratamiento que los distintos planes de estudios, cuestionarios o sistemas educativos que se han sucedido en España en las últimas décadas, han dado a las demostraciones (pruebas). Finalmente, teniendo en cuenta la investigación que desde hace unos años venimos desarrollando en nuestra Universidad, desde la óptica de la Didáctica de la Matemática, se comentan las aportaciones del currículo actual, que suponen una mejora sobre los anteriores, y las deficiencias observadas, que podrían ser subsanadas con la propuesta curricular que se hace aquí.

EL PRIMER plan de estudios de enseñanza secundaria se remonta al 4 de agosto de 1836 (Ministerio de Educación Nacional, 1964). Con él se inicia una larga lista: veinte durante los dos últimos tercios del siglo XIX y diez a lo largo del siglo XX, cuyas características generales –en cuanto a la asignatura de Matemáticas– pueden verse en Ibañes (1993). Un análisis detenido de los últimos se encuentra en Rico y Sierra (1994). A continuación se hace una lectura más específica –en lo que se refiere al tema de la demostración (prueba)– de los planes más recientes.

Plan de 1934 (Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes, 1934*a* y *b*)

En este plan el Bachillerato consta de 7 cursos, y el cuestionario de Matemáticas consiste en una enumeración detallada de los contenidos de cada curso. Al final hay un apartado de *Observaciones* que incluye los siguientes párrafos:

> En el tercer año se inicia el estudio racional de la Aritmética y de la Geometría, sin que esto quiera decir que se explique Aritmética y Geometría de carácter abstracto. Por el contrario, se procurará limitar el grado de abstracción de las materias enseñadas en todos los cursos, adaptándolo a la edad mental de los alumnos. En cambio, los cursos intuitivos no deben reducirse a una mera exposición de recetas para resolver ejercicios prácticos, sino que se hará razonar al alumno en todo momento, siempre dentro de los límites que imponga su desarrollo mental.
>
> La dosificación de la intensidad y grado de abstracción de las materias estudiadas es una cuestión de tacto, fundamental en el arte de la enseñanza, y que ha de ser confiada a los profesores, pues solamente ellos pueden resolverla en cada caso particular con el criterio que les dicte su experiencia.

No hay referencias explícitas de la demostración (prueba), y como muestra la cita anterior, simplemente se hace una llamada de atención a la transición de los «cursos intuitivos» a los de «estudio racional», que deja al buen criterio de los profesores.

Plan de 1938 (Ministerio de Educación Nacional, 1938 y 1939)

En este plan el Bachillerato consta de 7 cursos. El cuestionario de Matemáticas consiste en una enumeración detallada de los contenidos de cada curso. Después de los cursos primero, tercero, quinto y séptimo, se especifican unas *Instrucciones metodológicas*, de las que extraemos los siguientes comentarios:

> Las materias que componen el cuestionario de este primer curso se expondrán de forma intuitiva sin demostraciones y con el único objeto de que el alumno se habitúe a la nomenclatura y notación propia de la Aritmética y de la Geometría…
>
> Durante el segundo y tercer curso podrán iniciarse ya los alumnos en las demostraciones y razonamientos elementales que justifiquen los enunciados y teoremas de la Aritmética y Geometría que vayan aprendiendo. De manera que comiencen a adquirir nociones del rigor y exactitud lógicos, así como el proceso sistemático que exige la ciencia. La exactitud analítica y el rigor lógico nunca serán, sin embargo, llevados a una exageración tal que resulten repulsivos para las inteligencias vivas e imaginativas de los niños. Siempre, sobre todo, en presencia de conceptos y figuras nuevas, se utilizará el método intuitivo y directo en la medida de lo posible…
>
> Durante el cuarto y quinto cursos podrán exigirse ya de los alumnos la precisión, el rigor lógico y el espíritu sistemático propios de las Ciencias Exactas; de manera que sus espíritus se formen y se desarrollen según estas saludables directrices.
>
> Las demostraciones y razonamientos no sobrepasarán, sin embargo, del nivel elemental…

Hay algunas referencias explícitas a las demostraciones, aunque no se orienta sobre qué proposiciones pueden ser demostradas, ni se especifica nada acerca de las técnicas de demostración adecuadas o exigibles. Se establece una gradación en cuanto al rigor y abstracción de los razonamientos, en la que se observa cierta prisa respecto a la adquisición, por parte de los alumnos, del razonamiento hipotético deductivo. En este sentido, parece muy exagerado pretender que en los cursos cuarto y quinto –14 y 15 años– puedan «exigirse de los alumnos la precisión, el rigor lógico y el espíritu sistemático propios de las Ciencias Exactas». Además, este comentario está en contradicción con el siguiente párrafo: «Las demostraciones y razonamientos no sobrepasarán, sin embargo, del nivel elemental…».

Plan de 1953 (Ministerio de Educación Nacional, 1953 y 1954)

En este plan el Bachillerato consta de 6 cursos, más un curso preuniversitario. El cuestionario de Matemáticas consiste en una enumeración detallada de los contenidos de cada curso. Al final se incluyen unas *Orientaciones metodológicas*, que se especifican para cada curso, y de las que extraemos los siguientes comentarios:

…parece muy exagerado pretender que en los cursos cuarto y quinto –14 y 15 años– puedan «exigirse de los alumnos la precisión, el rigor lógico y el espíritu sistemático propios de las Ciencias Exactas».

> En el primer curso inicial de Matemáticas se omitirá todo razonamiento abstracto. Las propiedades numéricas esenciales se harán notar con la repetición de ejercicios. Lo mismo cabe decir con las propiedades geométricas…
>
> La Geometría queda circunscrita en este curso segundo a una parte de la Geometría plana, y con ella han de iniciar los alumnos el razonamiento lógico, que es una de las finalidades de la enseñanza de la Matemática en el Bachillerato. Sin embargo, no se estima lo anterior como un *desideratum*, pues es imposible que los niños de once a doce años puedan realizar un razonamiento lógico perfecto…
>
> El tercer curso, en el que se han de exponer someramente, pero con carácter lógico, los fundamentos de la teoría de los números exige por parte del profesor una atención profunda para no recargar al alumno con teoremas innecesarios. No parece conveniente tratar la teoría de la divisibilidad por la de congruencias, aunque la elegancia que éstas imprimen en las demostraciones sea manifiesta. Ello obligaría a recargar el estudio del alumno con varias propiedades que pueden dejarse de lado, empleando otros caminos de demostración…
>
> En el segundo ciclo del Bachillerato, las Matemáticas deben desarrollarse, sin dejar de presentarlas en contacto con la realidad, dándoles un carácter más riguroso, en un desarrollo lógico deductivo, intensificando, además, el propio «descubrir» del alumno, haciendo a los estudiantes pensar más y reduciendo al mínimo la información directa; es preciso despertar el interés, que, por otra parte, es el mejor estímulo del trabajo.

Hay referencias explícitas a la clase de razonamiento y a las demostraciones. Se indica alguna materia en la que puede llevarse a cabo el razonamiento hipotético deductivo, y, también, qué clase de demostraciones no proceden. No se especifican las técnicas de demostración adecuadas o exigibles. Igual que en el Plan anterior, el razonamiento lógico se inicia en el segundo curso; sólo en primero se omite del razonamiento abstracto, pero no se señalan vías alternativas de razonamiento intuitivo.

Plan de 1957 (Ministerio de Educación Nacional, 1961)

En este plan el Bachillerato consta de 6 cursos, más el curso preuniversitario. El cuestionario de Matemáticas consiste en una enumeración detallada de los contenidos de cada curso, divididos, a su vez, en *lecciones*. Al final se incluyen unas *Orientaciones metodológicas* para todos los cursos, de las que extraemos los siguientes comentarios:

> En el primer curso la enseñanza de la Matemática tendrá un carácter práctico e intuitivo, debiendo renunciar el profesor a explicar siguiendo cualquier clase de razonamiento abstracto…
>
> La Geometría debe tratarse por procedimientos preferentemente empíricos. Se recurrirá, por tanto, al empleo de pliegues, papel transparente para el transporte y superposición de figuras, hilos, etc. La frecuente resolución de ejercicios gráficos con regla y compás, y la construcción y observación de modelos geométricos sencillos permitirá al alumno captar multitud de propiedades geométricas. La «evidencia sensible» debe preceder a la «evidencia racional», y, en muchas ocasiones, la primera será suficiente. Hay que prescindir, por consiguiente, de la justificación de propiedades evidentes. No debe darse al alumno la impresión de que el buen sentido es inútil. Será preferible, por ejemplo, que el alumno realice ejercicios de construcción y superposición de triángulos con los datos adecuados, a obligarle a una justificación racional de los casos de igualdad…
>
> Los cursos tercero y cuarto constituyen un ciclo que podemos considerar de transición entre el método empírico practicado en primero y segundo cursos y el método racional que habrá de seguirse en el Bachillerato Superior. Se puede considerar, por tanto, como un ciclo intuitivo de tendencia racional, y en él no será necesario presentar los conocimientos matemáticos constituyendo una estructuración lógica perfectamente eslabonada. Por este motivo no se considera imprescindible empezar los estudios de Álgebra de los números racionales siguiendo directrices de carácter lógico…
>
> En Geometría no deben abandonarse prematuramente las consideraciones de tipo práctico-intuitivo. Se hará ver al alumno, poco a poco, lo procedente de las demostraciones, en la seguridad de que sólo cuando consiga un espíritu fino, sentirá su necesidad con carácter imperioso. Se prescindirá de teoremas secundarios o de escasa utilidad, presentando sólo los verdaderamente esenciales.
>
> También debe iniciarse la Geometría del espacio mediante procedimientos intuitivos y prácticos que permitan al alumno vislumbrar las primeras propiedades del espacio geométrico por evidencia racional simple, y poder abordar rápidamente el estudio de los poliedros…
>
> En todo caso, se procurará aprovechar las situaciones creadas por las cuestiones concretas como introducción a los desarrollos teóricos y que el alumno adquiera la experiencia de los entes y relaciones matemáticas antes de iniciarle en el razonamiento deductivo.
>
> En cuanto a la metodología de los cursos que integran el Grado Superior, de carácter preeminentemente racional, importa extender progresivamente la construcción deductiva de la Matemática y favorecer la iniciativa individual tanto como el trabajo en equipo; dar prioridad a la reflexión y al razonamiento antes que al adiestramiento…

…cabe destacar la consideración de tres ciclos: los cursos primero y segundo son de carácter empírico; en tercero y cuarto, debe producirse una transición entre el método empírico y el racional; éste último es el adecuado para los cursos quinto y sexto.

Hay referencias explícitas a las demostraciones y, sobre todo, al tipo de razonamiento. En este sentido, cabe destacar la consideración de tres ciclos: los cursos primero y segundo son de carácter empírico; en tercero y cuarto, debe producirse una transición entre el método empírico y el racional; éste último es el adecuado para los cursos quinto y sexto. En comparación con los planes anteriores se mejora notablemente, puesto que se establecen con más claridad las pautas para una evolución progresiva del razonamiento, retrasándose la edad en la que se exige el pensamiento lógico. Además –a diferencia de los anteriores–, cuando se recomienda un planteamiento intuitivo, se establecen alternativas al razonamiento deductivo, indicando actividades manipulativas concretas para el aprendizaje de la Geometría. No se especifica nada acerca de las técnicas de demostración adecuadas o exigibles, aunque sí hay algunas orientaciones acerca de cuándo procede o no hacer demostraciones.

En el programa de quinto curso se incluye una lección –la primera– titulada *Iniciación al método racional*, cuyo índice de conceptos es:

> Postulados.– Teoremas: hipótesis y tesis; demostración.– Cadenas deductivas. Teoremas directos, recíprocos y contrarios.– Condición necesaria y suficiente.– Ejemplos de aplicación.– Ejercicios.

Así pues, se introduce una terminología y se abordan los conceptos relativos al razonamiento hipotético-deductivo: postulados, teoremas, hipótesis y tesis, y demostración. También se distinguen diversos tipos de teoremas: directos, recíprocos y contrarios. Por último, se explican las expresiones *condición necesaria* y *condición suficiente*. Como aplicación inmediata de estos conocimientos, en las lecciones 2 a 7, el programa oficial propone:

> Dedíquense seis lecciones como mínimo y ocho como máximo al desarrollo racional de un capítulo de la Aritmética y un capítulo de la Geometría libre elección del autor del texto o del profesor.

En el temario de este mismo curso hay varias referencias a los *métodos* matemáticos que se proponen utilizar. Así, las lecciones ocho a once se dedican a los *Métodos de resolución de problemas* y a los *Métodos especiales de la Geometría métrica*.

A lo largo del temario del último ciclo –tanto en quinto curso como en sexto– se propone el estudio de multitud de teoremas referidos no sólo a la Geometría, sino también a otras ramas de las Matemática: Aritmética, Álgebra y Análisis.

En este plan de estudios, que introduce tantas novedades, se nota la influencia del profesor D. Pedro Puig Adam –en la Nota de la Redacción titulada «Balance de cuatro años de labor» e incluida en la obra de Puig Adam (1960: 132-136) se detalla el trabajo de éste, entre los años 1953 y 1956, para modernizar la enseñanza de las Matemáticas y sus repercusiones en los programas oficiales–. La influencia de Puig Adam no se reduce al plan de 1957, sino que reaparece en los primeros movimientos de reforma del sistema educativo de los años ochenta, que toman como referencia sus publicaciones didácticas (Rico y Sierra, 1994: 192).

Plan de 1970 (Ministerio de Educación y Ciencia, 1975 y 1978)

En este plan el Bachillerato consta de 3 años, más el Curso de Orientación Universitaria. Los cuestionarios de Matemáticas consisten en una enumeración bastante escueta de los contenidos de cada curso. Después de cada uno de ellos se incluyen unos comentarios en los que se mezclan la formulación de objetivos, la enumeración más detallada de conceptos y algunas orientaciones. No hay referencias a la demostración (prueba) y muy pocas referencias directas al razonamiento; no obstante, a continuación se reproducen algunas citas. En lo concerniente al Bachillerato, en una breve presentación para el Área de las Ciencias Matemáticas y de la Naturaleza, se alude a la formación de los alumnos en cuanto al razonamiento:

> El área de las ciencias matemáticas y de la naturaleza tratará de capacitar al alumno para comprender los fenómenos naturales, científicos y técnicos de su entorno. Se resaltará la importancia del mecanismo lógico implícito en el razonamiento científico habituando al alumno a los métodos deductivo e inductivo y a la experimentación.

El enfoque estructuralista característico de este plan de estudios (Rico y Sierra, 1994: 148) se deja ver en el inicio del comentario correspondiente al primer curso, donde se expone que:

> Partiendo de los conceptos de anillo y cuerpo introducidos en la segunda etapa de Educación General Básica, se pretende… [enumera los objetivos para el primer curso].

No hay otras instrucciones explícitas en este sentido en los programas de Bachillerato, pero la excesiva –en nuestra opinión– tendencia al formalismo se inicia ya en la Educación General Básica y esto va a condicionar el tratamiento de la «demostración». En unas orientaciones dictadas por el Ministerio de Educación y Ciencia (1971) se dice que:

…en los planes de 1934, 1938 y 1953 se propone que la adquisición del razonamiento deductivo se haga de forma gradual, pero no se clarifica cómo debe hacerse el escalonamiento.

> La segunda etapa de E.G.B. (11-14 años) pretende ir hacia una mayor profundidad en el formalismo matemático. Se hace preciso desarrollar en el alumno la capacidad de elaborar los sistemas formales necesarios en la resolución de problemas.

Y, entre los objetivos para el octavo curso de EGB figura el siguiente:

> Construcción rigurosa del conjunto Q de los números racionales.

Se puede resumir lo anteriormente expuesto para los planes de estudios comprendidos entre 1934 y 1970 en los siguientes puntos:

- Hay muy pocas referencias explícitas a las demostraciones (pruebas), aunque sí hay más alusiones a la clase de razonamiento –sobre todo hipotético-deductivo.
- En los planes de 1934, 1938 y 1953 se advierte una excesiva –a nuestro juicio- prisa en la introducción del razonamiento deductivo, lo que se hace en el segundo curso. Esto es corregido en el plan de 1957, ya que esa introducción se retrasa al tercer curso.
- También en los planes de 1934, 1938 y 1953 se propone que la adquisición del razonamiento deductivo se haga de forma gradual, pero no se clarifica cómo debe hacerse el escalonamiento.
- En el plan de 1957 se establecen claramente tres fases: la empírica, la de transición y la deductiva.
- En el plan de 1970 se pretende una iniciación muy prematura en el formalismo matemático, y un predominio excesivo del enfoque estructuralista.
- No hay comentarios sobre las distintas técnicas de demostración que podrían utilizarse.
- Salvo lo ya mencionado para el plan de 1957, no hay propuestas concretas a una exposición deductiva de los temas.
- Destaca, por el lado positivo, la incorporación –en el plan de 1957– de un tema para exponer los con-

ceptos de teorema, demostración, etcétera, e introducir el lenguaje matemático asociado.

Currículo de la LOGSE

En el currículo de la ESO (MEC, 1991*a*), en la Introducción del apartado correspondiente a Matemáticas (véanse las páginas 74 a 81 del Anexo) se pueden leer las siguientes citas:

> … la tradicional idea de las matemáticas como ciencia puramente deductiva, idea ciertamente válida para el conocimiento matemático en cuanto producto desarrollado y ya elaborado, ha de corregirse con la consideración del proceso inductivo y de construcción a través del cual ha llegado a desarrollarse ese conocimiento. La especial trascendencia que para la educación matemática tiene el proceso, tanto histórico como personal, de construcción empírica e inductiva del conocimiento matemático, y no sólo formal o deductiva, invita a resaltar dicho proceso de construcción…
>
> Es preciso, por tanto, que el currículo refleje el proceso constructivo del conocimiento matemático, tanto en su progreso histórico, como en su apropiación por el individuo. La formalización y estructuración del conocimiento matemático como sistema deductivo no es el punto de partida, sino más bien un punto de llegada de un largo proceso de aproximación a la realidad, de construcción de instrumentos intelectuales eficaces para interpretar, representar, analizar, explicar y predecir determinados aspectos de la realidad…

Y, a continuación (página 75), se enuncian tres principios de selección y organización de los contenidos, de los que reproducimos el primero:

> Las Matemáticas han de ser presentadas a alumnos y alumnas como un conjunto de conocimientos y procedimientos que han evolucionado en el transcurso del tiempo, y que, con seguridad, continuarán evolucionando en el futuro. En esa presentación, han de quedar resaltados los aspectos inductivos y constructivos del conocimiento matemático, y no sólo los aspectos deductivos de la organización formalizada que le caracteriza como producto final. En el aprendizaje de los propios alumnos hay que reforzar el uso del razonamiento empírico inductivo en paralelo con el uso del razonamiento deductivo y de la abstracción.

Después –en la misma página–, se dice:

> … El desarrollo de la competencia cognitiva general de los alumnos, en estos años, y, en concreto, la posibilidad de llevar a cabo razonamientos de tipo formal abre nuevas posibilidades para avanzar en el proceso de construcción del conocimiento matemático, asegurando niveles intermedios de abstracción, simbolización y formalización.
>
> Esas posibilidades aparecen en una doble línea. En primer lugar, la capacidad que el adolescente tiene de abstraer relaciones y realizar inferencias, no sólo a partir de operaciones concretas con objetos físicos, como en la etapa educativa anterior, sino también a partir de operaciones sobre representaciones simbólicas referidas a dichos objetos, permite avances sustanciales en el conocimiento matemático. En segundo lugar, y en estrecha relación con lo anterior, la capacidad del adolescente de trascender las informaciones concretas sobre la realidad y los datos de la experiencia inmediata, dando entrada a las conjeturas e hipótesis como forma de pensamiento y de razonamiento, hace posible la introducción del pensamiento hipotético deductivo y abre una vía de acceso a los componentes más formales del conocimiento matemático.
>
> De todas formas, debe reconocerse que los contenidos más complejos, formales y deductivos de las matemáticas siguen estando a menudo fuera de las posibilidades de comprensión de los alumnos, incluso al final de la educación obligatoria…

También en la misma página 75, se añade:

> … En consecuencia, en el currículo básico deben incluirse los contenidos más generales del conocimiento matemático, los que son transversales a sus distintos ámbitos e incluyen conceptos y procedimientos de carácter más común, a la vez que más funcional.

Y, cita las habilidades en la comprensión y en el uso de los diferentes lenguajes matemáticos, las rutinas y algoritmos particulares, las estrategias heurísticas, y las competencias relativas a la toma de decisiones, pero no hace referencia a los procedimientos de verificación.

…cita las habilidades en la comprensión y en el uso de los diferentes lenguajes matemáticos, las rutinas y algoritmos particulares, las estrategias heurísticas, y las competencias relativas a la toma de decisiones, pero no hace referencia a los procedimientos de verificación.

En los *Objetivos generales* (página 76), se formulan diez, de los que destacamos el segundo:

> 2. Utilizar las formas de pensamiento lógico para formular y comprobar conjeturas, realizar inferencias y deducciones, y organizar y relacionar informaciones diversas relativas a la vida cotidiana y a la resolución de problemas.

En las páginas 76 a 80 se especifican los *Contenidos*. A continuación se indican aquellos que se relacionan con la demostración (prueba). En el primer bloque de contenidos, *Números y operaciones*, en el procedimiento 22, se dice:

> Formulación de conjeturas sobre situaciones y problemas numéricos, y comprobación de las mismas mediante el uso de ejemplos y contra-ejemplos, el método de ensayo y error, etc.

En el tercer bloque, *Representación y organización del espacio*, hay varios procedimientos que nos conciernen:

> 8. Utilización del Teorema de Tales para obtener o comprobar relaciones métricas entre figuras.
>
> 9. Búsqueda de propiedades, regularidades y relaciones en cuerpos, figuras y configuraciones geométricas.
>
> 14. Formulación y comprobación de conjeturas acerca de propiedades geométricas en cuerpos y figuras y de la solución de problemas geométricos en general.

> 16. Utilización de métodos inductivos y deductivos para la obtención de propiedades geométricas de los cuerpos y de relaciones entre ellos.

En el mismo bloque, en *Actitudes*, se cita:

> 2. Reconocimiento y valoración de las relaciones entre diferentes conceptos, como la forma y el tamaño de los objetos, y entre los métodos y lenguajes matemáticos que permiten tratarlos.
>
> 5. Curiosidad e interés por investigar sobre formas, configuraciones y relaciones geométricas.

Por último, el procedimiento 10 del quinto bloque, *Tratamiento del azar*, es:

> Formulación y comprobación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos.

En el resto de los bloques de contenido no hay referencias a los procedimientos de verificación.

El currículo de Matemáticas se finaliza con la formulación de trece *Criterios de evaluación* (página 81), ninguno de los cuales parece relacionarse con el tema que nos ocupa.

Para facilitar a los centros de enseñanza secundaria el desarrollo del currículo, el MEC publicó unas orientaciones para la distribución de objetivos, contenidos y criterios de evaluación para cada uno de los ciclos (MEC, 1992*a*). A continuación, se detallan las citas que tienen relación con el aprendizaje de la demostración (prueba). Para el *primer ciclo*, en el bloque de *Organización y representación del espacio*, se indica (página 9868):

> Otro aspecto destacable en el que inciden estos contenidos es el que se refiere a la utilización de las distintas formas de razonamiento. De entre ellas cabe resaltar la importancia que deben tener aquí las formas inductivas y, en menor medida, una cierta presencia del razonamiento deductivo.

En el resto de los bloques de contenido no hay referencias a los procedimientos de verificación. Y, en los *procedimientos* (página 9869):

> Junto a técnicas de recogida y organización de la información, en algún caso ya indicadas, se pueden poner en práctica, en tareas de resolución de problemas, algunas estrategias tales como la búsqueda de casos particulares, los métodos de ensayo y error, etc. Todo ello en situaciones suficientemente conocidas por los alumnos, o sobre las que tengan la posibilidad de manejar y experimentar con los objetos a los que se refiere.

En contraposición, para el *segundo ciclo*, en el bloque de *Organización y representación del espacio*, se indica (página 9869):

> En definitiva, se trata de llevar a cabo un estudio más profundo de las propiedades de las figuras geométricas en todos sus aspectos: reconocimiento, representación, propiedades métricas, etcétera. Se puede esperar, por otra parte, una utilización más ajustada de las distintas formas de razonar, con una presencia mayor de los métodos deductivos.

Para facilitar a los centros de enseñanza secundaria el desarrollo del currículo, el MEC publicó unas orientaciones para la distribución de objetivos, contenidos y criterios de evaluación para cada uno de los ciclos.

En el resto de los bloques de contenido no hay referencias a los procedimientos de verificación. Y, en los *procedimientos* (página 9870):

> Junto a ello, los alumnos de este ciclo están más capacitados para la formulación y comprobación de conjeturas y para realizar generalizaciones en situaciones diversas, que constituyen herramientas de gran potencia, en particular, en tareas de resolución de problemas.
>
> En todos los ámbitos de la actividad matemática, en el tratamiento de distintos objetos y en diferentes situaciones, pueden en este ciclo introducirse un mayor «rigor» en cuanto a la justificación de las conclusiones, tanto las obtenidas por el propio alumno como las que obtengan o le presenten otros. Llegar a la justificación, que en algún caso puede ser demostración, pero no necesariamente siempre, requiere ir desarrollando paulatinamente ideas y actitudes más ajustadas sobre el rigor y la coherencia en la argumentación, sobre la necesidad de precisión al utilizar términos y al realizar medidas, sobre la exactitud y control del error en la utilización de cantidades.

Termina el documento con unas *especificaciones para el cuarto curso* –en el que, como se sabe, hay dos opciones: Matemáticas A y Matemáticas B–. En ellas (páginas 9870 y 9871), no hay ninguna referencia a la demostración (prueba).

En el *Curriculum del Bachillerato* (MEC, 1992*b*) se establecen los objetivos, contenidos y criterios de evaluación para todas las materias. En el apartado correspondiente a Matemáticas I y II, en la *Introducción* (página 97 del Anexo) se pueden leer las siguientes citas:

> Las Matemáticas… Les caracteriza la naturaleza lógico-deductiva de su versión acabada, el tipo de razonamientos que utilizan y la fuerte cohesión interna dentro de cada campo y entre unos campos y otros…
>
> En la Educación Secundaria Obligatoria los alumnos se han aproximado a varios campos del conocimiento matemático que ahora están en condiciones de asentar y utilizar. Esta será la base sobre la que se apoyará el desarrollo de capacidades tan importantes como la de abstracción, la de razonamiento en todas sus vertientes, la de resolución de problemas de cualquier tipo, matemático o no, la de investigación y la de analizar y comprender la realidad…
>
> El conocimiento matemático, en el Bachillerato, debe tener un cierto respaldo teórico.

> Las definiciones, demostraciones y los encadenamientos conceptuales y lógicos, en tanto que dan validez a las intuiciones y confieren solidez y sentido a las técnicas aplicadas, deben ser introducidos en estas asignaturas. Sin embargo, este es el primer momento en el que el alumno se enfrenta con cierta seriedad a la fundamentación teórica de las matemáticas, y el aprendizaje, por tanto, debe de ser equilibrado y gradual.

En los *Objetivos generales* (página 97), se formulan nueve, de los que destacamos el primero y el cuarto:

> 1. Comprender los conceptos, procedimientos y estrategias matemáticas que les permitan desarrollar estudios posteriores más específicos de ciencias o técnicas y adquirir una formación científica general.
>
> 4. Utilizar, con autonomía y eficacia, las estrategias características de la investigación científica y los procedimientos propios de las matemáticas (plantear problemas, formular y contrastar hipótesis, planificar, manipular y experimentar) para realizar investigaciones y, en general, explorar situaciones y fenómenos nuevos.

En las páginas 97 y 98 se especifican los *Contenidos*, pero no hay referencias directas a los procedimientos de verificación (pruebas o demostraciones).

Para finalizar, se formulan los *Criterios de evaluación* (páginas 98 y 99). Hay nueve en Matemáticas I y ocho en Matemáticas II. Solamente uno en cada una de estas asignaturas se podría relacionar con las pruebas (demostraciones). En Matemáticas I, el número 9:

> Organizar y codificar informaciones, seleccionar estrategias, comparándolas y valorándolas, para enfrentarse a situaciones nuevas con eficacia, y utilizar las herramientas matemáticas adquiridas.
>
> Se pretende que el alumno utilice la modelización de situaciones, la reflexión lógico-deductiva, los modos de argumentación propios de las matemáticas y las destrezas matemáticas adquiridas para realizar investigaciones enfrentándose con situaciones nuevas.

Y, en Matemáticas II, el número 8:

> Realizar investigaciones en las que haya que organizar y codificar informaciones, seleccionar comparar y valorar estrategias para enfrentarse a situaciones nuevas con eficacia, eligiendo las herramientas matemáticas adecuadas en cada caso.
>
> Se pretende evaluar la madurez del alumno para enfrentarse con situaciones nuevas, utilizando la modelización de situaciones, la reflexión lógico-deductiva, los modos de argumentación propios de las matemáticas y las destrezas matemáticas adquiridas.

Propuesta de una transición gradual, en función de la competencia cognitiva de los alumnos, del razonamiento inductivo con objetos físicos concretos a la introducción del pensamiento hipotético deductivo.

En las recién aparecidas modificaciones a las enseñanzas mínimas de ESO y bachillerato (MECD 2001*a* y 2001*b*) no hay ninguna novedad en el tema que nos ocupa.

De todo lo dicho en este apartado y teniendo en cuenta el trabajo de investigación desarrollado por los autores, (Ibañes, 1993, 1996 y 2001; Ibañes y Ortega, 1997), se pueden extraer las siguientes reflexiones:

1. En primer lugar, hay que constatar que se intuye la presencia de la demostración (prueba) en muchos de los comentarios de las distintas disposiciones que desarrollan la LOGSE, lo que ya, en sí mismo, es un aspecto muy positivo, pero, además, supone una mejora muy importante respecto de planes de estudios anteriores. A continuación se recogen las principales aportaciones en este sentido:

- Múltiples referencias al razonamiento matemático.
- Distinción entre el proceso de construcción de las Matemáticas y su presentación como ciencia elaborada, con la consiguiente consideración y diferenciación de las clases de razonamiento propias de cada una de estas fases: inductivo en la primera y deductivo en la segunda.
- Esta distinción en las Matemáticas como ciencia induce a una secuenciación para su aprendizaje. En primer lugar, se atiende a la construcción de instrumentos intelectuales para interpretar, analizar y explicar la realidad; y, después se busca la formalización y estructuración del conocimiento matemático como sistema deductivo. De ello se pueden extraer pautas para la elección de los procedimientos de verificación adecuados a cada fase.
- Apuesta por una conjugación de los fines funcional y formativo de la enseñanza de las matemáticas, con el consiguiente enriquecimiento en la diversidad de razonamientos y estrategias que deben aplicarse.
- Propuesta de una transición gradual, en función de la competencia cognitiva de los alumnos, del razonamiento inductivo con objetos físicos concretos a la introducción del pensamiento hipotético deductivo. Esta evolución se observa en las propuestas para el primer ciclo de ESO, para el segundo ciclo, y para el Bachillerato.

2. Pero, también es preciso señalar algunas deficiencias:

- Hay muy pocas referencias explícitas a los procedimientos de verificación.
- No se indica qué clase de pruebas –comprobaciones, justificaciones, explicaciones, demostraciones…– se puede esperar de los alumnos; y, por

supuesto, tampoco se dice nada de las distintas técnicas de demostración.

- Entre los objetivos que se formulan, tanto en la ESO como en el Bachillerato, hay varios que pueden relacionarse con las demostraciones (pruebas). Sin embargo, no se produce la correspondiente presencia de estos procedimientos en los contenidos, en los que, como se ha podido observar en los comentarios anteriores, hay muy pocas citas.
- Ajustándonos a los contenidos, no hay un equilibrio adecuado entre las referencias a la demostración en Geometría y en otras áreas. Es de sobra conocido que la Geometría constituye un campo muy adecuado para introducirse en el razonamiento deductivo, y así se ha hecho tradicionalmente; pero ello no justifica que se vuelva a un viejo y persistente vicio en la enseñanza de las Matemáticas, consistente en llevar a cabo un razonamiento muy riguroso en Geometría, para abandonarlo en el resto de los temas, con el consiguiente desconcierto de los alumnos.
- Parece también incongruente con los objetivos enunciados que los procedimientos de verificación no sean tenidos en cuenta a la hora de formular los criterios de evaluación, ya que, como se ha comentado anteriormente, éstos no incluyen referencia alguna a las demostraciones (pruebas).

Parece también incongruente con los objetivos enunciados que los procedimientos de verificación no sean tenidos en cuenta a la hora de formular los criterios de evaluación.

3. Se propone corregir estas deficiencias curriculares, incluyendo referencias explícitas a los procedimientos de verificación, indicando qué clase de pruebas se puede esperar de los alumnos, formulando distintas técnicas de demostración, guardando un equilibrio en toda las áreas, teniendo en cuenta los procedimientos de verificación en los criterios de evaluación.

Referencias bibliográficas

IBAÑES, M. (1993): «Matemáticas en la secundaria a través de los planes de estudios», *Sigma*, n.° 15, 25-31.

IBAÑES, M. (1996): «Alumnos de bachillerato interpretan una demostración y reconocen sus funciones», *Uno*, n.° 13, 95-101.

IBAÑES, M. (2001): *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato*, Universidad de Valladolid. Valladolid

IBAÑES, M., y T. ORTEGA (1997): «La demostración en Matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación Secundaria», *Educación Matemática*, vol. 9, n.° 2, 65-104.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1971): *Nuevas orientaciones pedagógicas para la segunda etapa de E.G.B.*, Madrid.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1975*a*): *Orden de 22 de marzo de 1975 por la que se desarrolla el Decreto 160/75 de 23 de enero, que aprueba el Plan de Estudios de bachillerato y se regula el Curso de Orientación Universitaria*, B.O.E. de 18 de abril de 1975.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1975*b*): *Resolución de 21 de agosto de 1975 por la desarrolla la disposición transitoria 4.ª de la Orden Ministerial de 22 de marzo, referida al Curso de Orientación Universitaria*, B.O.E. de 6 de septiembre de 1975.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1978): *Resolución de 1 de marzo de 1978 sobre contenidos y orientaciones metodológicas para el Curso de Orientación Universitaria*, B.O.E. de 17 de marzo de 1978.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1990): *Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación general del Sistema Educativo*, B.O.E. de 4 de octubre de 1990.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1991*a*): *Real Decreto 1345/1991, de 6 de septiembre por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria*, B.O.E. de 13 de septiembre de 1991.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1991*b*): *Real Decreto 1700/1991, de 29 de Noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato*, B.O.E. de 2 de diciembre de 1991.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1992*a*): R*esolución de 5 de marzo de 1992, de la Secretaría de Estado de Educación, por la que se regula la elaboración de proyectos curriculares para la Educación Secundaria Obligatoria, y se establecen orientaciones para la distribución de objetivos, contenidos y criterios de evaluación para cada uno de los ciclos*, B.O.E. de 25 de marzo de 1992.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1992*b*): *Real Decreto 1179/1992, de 2 de octubre por el que se establece el currículo del Bachillerato*, B.O.E. de 21 de octubre de 1992.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE (2001*a*): *Real Decreto 3473/2000, de 29 de diciembre, por el que se modifican el Real Decreto 1700/1991, por el que se establece la estructura del bachillerato y el Real Decreto 1178/1992, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de bachillerato*, B.O.E. de 16 de enero de 2001.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE (2001*b*): *Real Decreto 3474/2000, de 29 de diciembre, por el que se modifica el Real Decreto*

1007/1991, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la educación secundaria obligatoria*, B.O.E. de 16 de enero de 2001.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1938): *Ley de 20 de septiembre de 1938 de Reforma de la segunda enseñanza*, B.O.E. de 13 de septiembre de 1938.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1939): *Orden de 14 de abril de 1939 aprobando los Cuestionarios de Enseñanza Media*, B.O.E. de 8 de mayo de 1939.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1953): *Decreto de 12 de junio de 1953 por el que se establece el Plan de Estudios de Bachillerato*, B.O.E. de 2 de julio de 1953.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1954): *Orden Ministerial de 21 de Enero de 1954 por la que se establecen los Cuestionarios del Plan de 1953*, B.O.E. de 10 de febrero de 1954.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1961): *Legislación de Enseñanza Media. Tomo I*, Publicaciones de la Revista «Enseñanza Media», Madrid.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1964): *Legislación de Enseñanza Media. Tomo V: Planes de Estudio (1787-1938)*, Publicaciones de la Revista «Enseñanza Media», Madrid.

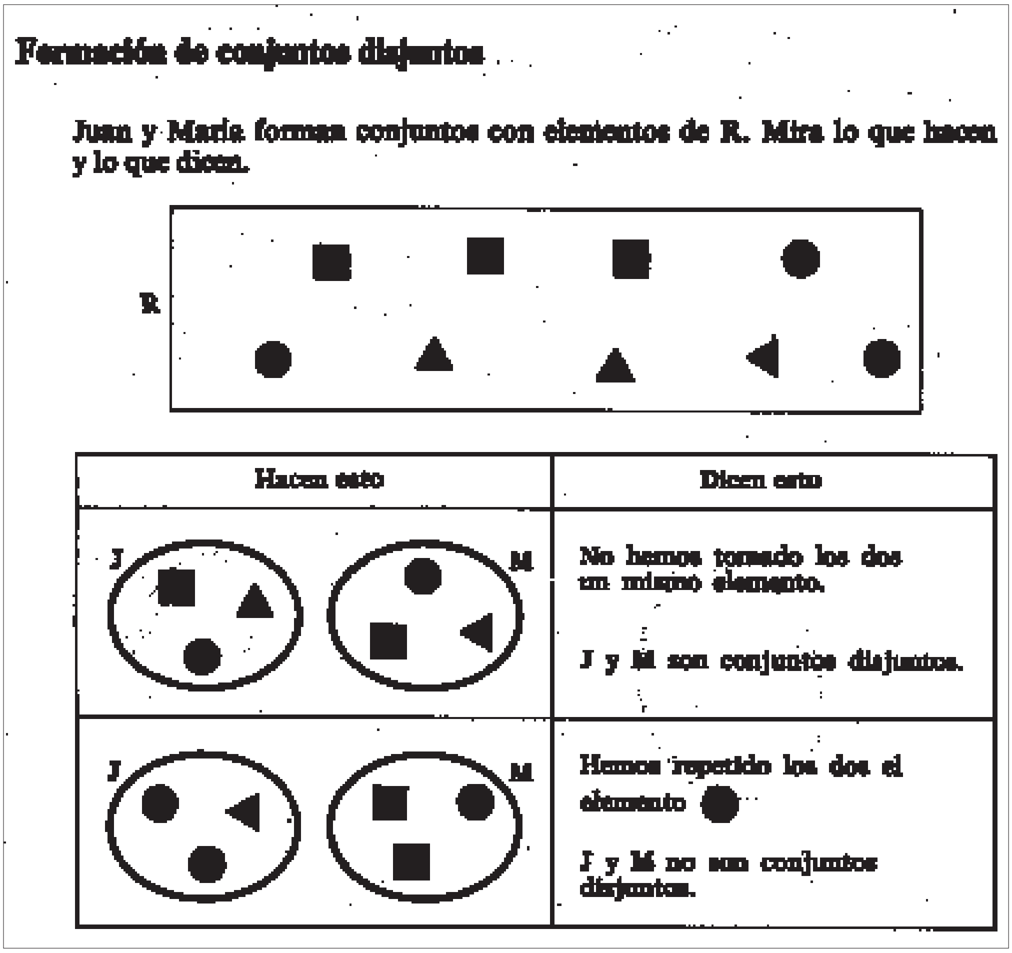
MINISTERIO DE INSTRUCCIÓN PÚBLICA Y BELLAS ARTES (1934*a*): «Decreto de 29 de agosto de 1934 por el que se establece un nuevo plan de Estudios», *Gaceta* de 21 de octubre de 1934.

MINISTERIO DE INSTRUCCIÓN PÚBLICA Y BELLAS ARTES (1934*b)*: «Cuestionarios del plan de 1934», *Gaceta* de 21 de octubre de 1934.

PUIG ADAM, P. (1960): *La matemática y su enseñanza actual*, Publicaciones de la Revista de Enseñanza Media, Madrid.

RICO, L., M. y SIERRA (1994): «Educación matemática en la España del siglo XX», en KILPATRICK, RICO y SIERRA: *Educación matemática e investigación*, Síntesis. Madrid.

Marcelino J. Ibañes
Instituto «Vega del Prado»
Valladolid.
Tomás Ortega
Facultad de Educación.
Universidad de Valladolid



3.° EGB

SUMA 39
febrero 2002, pp. 63-67

(re)Descubrimiento automático del teorema de Simson y las generalizaciones de Steiner y Guzmán

José Luis Valcarce Gómez
Francisco Botana Ferreiro

Describimos aquí, con ánimo ilustrador, una aplicación de un prototipo experimental de programa de computadora que une las capacidades de un entorno de geometría dinámica con las funcionalidades de un sistema de cálculo simbólico. Se trata de (re)descubrir, de manera sencilla, el teorema de Simson y dos de sus generalizaciones por un usuario dotado de regla y compás virtuales y conocedor de unos pocos conceptos geométricos básicos.

ARTÍCULOS

DESCRIBIMOS aquí, con ánimo ilustrador, una aplicación de un prototipo experimental de programa de computadora que une las capacidades de un entorno de geometría dinámica con las funcionalidades de un sistema de cálculo simbólico. Se trata de (re)descubrir, de manera sencilla, el teorema de Simson y dos de sus generalizaciones por un usuario dotado de regla y compás virtuales y conocedor de unos pocos conceptos geométricos básicos.

Consideremos un triángulo *ABC* y un punto *X*, desde el que trazamos perpendiculares a los lados del triángulo, siendo *M*, *N* y *P* los pies de éstas. Si hacemos esta construcción en un entorno de geometría dinámica (aquí y en lo que sigue utilizaremos REX (Valcarce y Botana, 1999)) tendremos un diagrama similar al mostrado en la figura 1.

Arrastrando el punto *X* se observa que, *a veces*, los puntos *M*, *N* y *P* aparentan estar alineados. La pregunta surge de modo natural: ¿qué circunstancias en el diagrama producen esta alineación? Puesto que lo único que hemos hecho es arrastrar el punto *X*, parece razonable reformularla en estos términos: ¿cuáles son las posiciones, es decir, el lugar geométrico, de *X* para las que *M*, *N* y *P* están alineados? El lector bien informado habrá recordado al punto uno de los teoremas más conocidos de la geometría euclídea, el teorema de Simson, que establece como condición necesaria para el alineamiento buscado, la pertenencia de *X* al circuncírculo del triángulo. Este teorema se utiliza como primer ejemplo ilustrador de un trabajo de Roanes y Roanes (1999) acerca de la búsqueda automática de lugares geométricos, donde también se referencian sus demostraciones usual y automática. El propósito declarado de dicho artículo es «el de contribuir a la divulgación de modernos métodos de investigación en Geometría» –concretamente utilizan el método de Wu (1994)–, «presentándolos desprovistos de todo formalismo, de modo que sean aprovechables por los no especializados en técnicas de

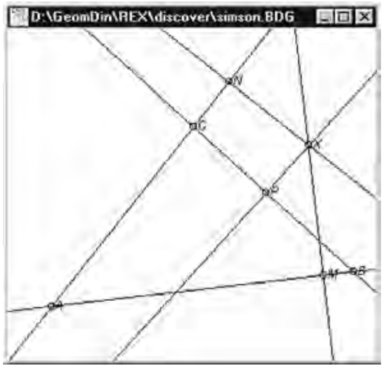


Figura 1

Álgebra Computacional». El camino para esta divulgación pasa por la exploración experimental del teorema en un entorno de geometría dinámica y, posteriormente, por el descubrimiento del lugar geométrico mediante la realización, *por el usuario*, de los cálculos necesarios para el algoritmo de Wu en un sistema de cálculo simbólico. Recio (1998) estudia las posibilidades didácticas de la conexión informática entre geometría y álgebra, poniendo por ello el énfasis en el descubrimiento de teoremas, más que en su demostración automática. También aquí es utilizado el teorema de Simson para ilustración de las técnicas propuestas: tras la exploración geométrica del problema, el usuario ha de utilizar un sistema de cálculo simbólico que «sepa» calcular bases de Groebner para obtener la ecuación analítica del lugar buscado.

La necesidad de que el usuario, en ambas aproximaciones, maneje un sistema de cálculo simbólico constituye la principal dificultad para su repercusión escolar. Recio señala que «la simplificación fundamental vendría de la mano del establecimiento de una Comunicación entre el programa gráfico y el programa (o programas) de Cálculo Simbólico» y que «los primeros años de la enseñanza superior pueden ser, en el estado actual de las cosas, el marco idóneo» (70-71). El prototipo que aquí se ilustra une REX, un entorno de geometría dinámica desarrollado por los autores, con el programa Mathematica (Wolfram, 1996) en su versión 3.0, en un interfaz que permite describir gráficamente la construcción y, de manera transparente para el usuario, utiliza los recursos simbólicos necesarios para el descubrimiento. Se amplía así el uso de estas técnicas a los alumnos de Secundaria.

REX ha sido ya descrito en Valcarce y Botana (1999), donde también se presenta una breve comparación con otros entornos de geometria dinámica en el terreno de la demostración automática. REX obtuvo el segundo premio en el concurso de software educativo de las IX JAEM. El ejecutable se encuentra también disponible en el CD IX JAEM (1999). Estas referencias aluden a un entorno de geometría dinámica originalmente construido como soporte gráfico a la implementación de métodos automáticos de prueba en geometria enclídea que posteriormente derivó a un programa estándar de geometría dinámica. Actualmente hemos abandonado parcialmente esa línea para enfocarnos en el descubrimiento automático (Recio, 1998) y en la obtención automática de lugares geométricos (Roanes y Roanes, 1999). En cuanto al descubrimiento automático en geometría elemental, el prototipo aquí descrito ha requerido leves cambios en REX (relacionados principalmente con la comunicación entre él y Mathematica) y el desarrollo de un *package* de Mathematica encargado de la automatización de los cálculos simbólicos necesarios. E1 interfaz se describe, pues, no a nivel de código, sino de producción. Los ejemplos que siguen dan pautas suficientes para remedar «a mano» el proceso seguido. Empero, se ha insertado el código de Mathematica con las tareas que el *package* realizaría sobre los ejemplos. Así las tres tareas (generación de ecuaciones analíticas, eliminación de variables en sistemas de ecuaciones polinómicas y factorización de polinomios, y generación de enunciados lingüísticos y matching entre éstos y ecuaciones) pueden ser realizadas a mano de manera cuasi automática.

REX obtuvo el segundo premio en el concurso de software educativo de las IX JAEM.

Primer (re)descubrimiento: el teorema de Simson

Tras haber realizado la construcción de la figura 1, REX «conoce» la existencia de siete puntos y de seis relaciones geométricas. De los primeros, A, B, C y X pueden situarse en cualquier posición del plano, mientras que M, N y P no tienen ningún grado de libertad. El programa asigna coordenadas simbólicas a los puntos, distinguiendo sus tipos por el nombre: *Un* indica una coordenada libre y $x[m]$ una ligada. Además puede fijarse un sistema de referencia escogiendo dos puntos con coordenadas libres. Finalmente la información de REX relativa a los puntos de la construcción y sus coordenadas simbólicas es: $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(U5, U6)$, $X(U7, U8)$, $M(x[1], x[2])$, $N(x[3], x[4])$ y $P(x[5], x[6])$. Las relaciones geométricas son

Alineados(M, A, B), Perpendiculares(AB, MX), Alineados(N, A, C), Perpendiculares(AC, NX), Alineados(P, B, C) y Perpendiculares(BC, PX). La condición impuesta a los pies de las perpendiculares, Alineados(M, N, P), se añade a las anteriores y se generan las correspondientes ecuaciones analíticas:

$(0 - x[2]) * (1 - 0) - (0 - 0) * (0 - x[1]) = 0,$
$(0 - 0) * (x[2] - U8)+(1 - 0) * (x[1] - U7) = 0,$
$(0 - x[4]) * (U5 - 0) - (U6 - 0) * (0 - x[3]) = 0,$
$(U6 - 0) * (x[4] - U8)+(U5 - 0) * (x[3] - U7) = 0,$
$(0 - x[6]) * (U5 - 1) - (U6 - 0) * (1 - x[5]) = 0,$
$(U6 - 0) * (x[6] - U8) + (U5 - 1) * (x[5] - U7) = 0,$
$(x[6] - x[4]) * (x[1] - x[5]) - (x[2] - x[6]) * (x[5] - x[3]) = 0.$

REX pasa entonces el control a Mathematica, que trata de eliminar en el anterior sistema de ecuaciones las variables x[m], devolviendo la ecuación

$U6\hat{}2 * (U5 - U5\hat{}2 - U6\hat{}2) * U8 + U6\hat{}3 * U8\hat{}2 = U6\hat{}3*(1 - U7) * U7.$

Cualquier asignación de coordenadas que haga verdaderas las ecuaciones del sistema, también convertirá en identidad la ecuación resultante de la eliminación, la cual establece restricciones únicamente para las variables libres de la construcción. La ecuación, factorizada, puede reescribirse como:

$U6\hat{}2 *((U5 - U5\hat{}2 - U6\hat{}2) * U8 + U6 * U8\hat{}2 - U6*(1 - U7) * U7) = 0.$

En resumen, para que las ecuaciones del sistema sean identidades ha de ocurrir que al menos una de las siguientes lo sea también:

$U6=0$, o
$(U5 - U5\hat{}2 - U6\hat{}2) * U8 + U6 * U8\hat{}2 - U6*(1 - U7) * U7 = 0.$

La transcripción de la sesión en Mathematica es:

```
ecs= {(0 – x[2]l*(1-0) – (0-0)* (0-x[1] == 0,
   (0 – 0) * (x[2] – U8) + (1 – 0) * (x[1] – U7) == 0,
   (0 – x[4]) * (U5 – 0) – (U6 – 0) * (0 – x[3]) == 0,
   (U6 – 0) * (x[4] – U8) + (U5 – 0) * (x[3] – U7) == 0,
   (0 – x[6]) * (U5 – 1) – (U6 – 0) * (1- x[5]) == 0,
   (U6 – 0) * (x[6] – U8) + (U5 – 1) * (x[5] – U7) == 0,
   (x[6] – x[4]) * (x[1] – x[5]) – (x[2] – x[6]) * (x[5] – x[3]) == 0};
Eliminate, {x[1], x[2], x[3], x[4], x[5], x[6]}]
```

$U6^2\ (U5 - U5^2\ \_\ U6^2)\ U8 + U6^3\ U8^2 == U6^3\ (1 - U7)\ U7$

pol = %[[1]] – %[[2]]

$-U6^3\ (1 - U7)\ U7 + U6^2\ (U5 - U5^2 - U6^2) U8 + U5^3\ U8^2$

Factor [pol]

$-U6^2\ (U6U7 - U6U7^2 - U5U8 + U5^2\ U8 + U6^2\ U8 - U5U8^2)$

En este punto REX asume de nuevo el control y busca en una base de enunciados linguísticos relativos a la construcción cuáles de ellos se traducen analíticamente en alguna de las anteriores ecuaciones. Nótese que bajo el rótulo «Search criterio» en la figura 2 aparece una ventana con propiedades geométricas. Así por ejemplo, si un criterio de búsqueda es «aligned» se generará un enunciado linguístico («Los puntos –, – y – están alineados») y la correspondiente ecuación polinómica por cada triple de puntos distintos.

En el ejemplo la primera ecuación casa con la del enunciado «Los puntos A, B y C están alineados» y la segunda con «Los puntos X, A, B y C están en una circunferencia». Nótese que el programa ha encontrado una condición de degeneración (para la cual $M = N = P$) y una condición necesaria no trivial para la alineación buscada. La razón por la que el segundo enunciado no habla explícitamente del circuncírculo del triángulo es doble: en primer lugar, en la construcción hecha no aparece el circuncentro por lo que ningún enunciado linguístico lo incluye; en segundo lugar, razones de eficiencia nos han impedido introducir en el prototipo conocimiento del tipo «la circunferencia que pasa por los tres vértices de un triángulo no degenerado se llama circuncírculo».

Segundo (re)descubrimiento: el teorema de Steiner

Puesto que la alineación de los puntos M, N y P equivale a la nulidad del área del triángulo con esos vértices, cabe preguntarse cuál es el lugar geométrico de los puntos X que mantienen constante el área de dicho triángulo. Steiner enunció que este lugar es una circunferencia de centro el circuncentro del triángulo ABC.

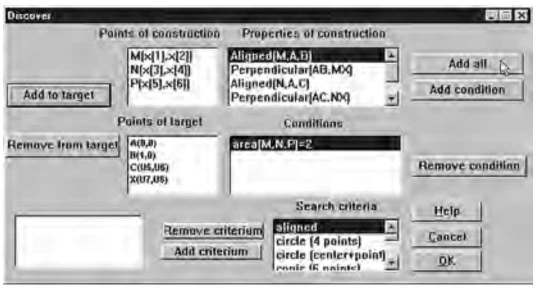


Figura 2

Para el descubrimiento automático de este lugar usaremos de nuevo la construcción de la figura 1. Como en la Sección anterior, escogemos como referencia el punto A y como unidad el segmento *AB*, e introducimos, por medio de un editor de línea, la condición de la constancia del área del triángulo *MNP*: area(*M*, *N*, P)=2.

Cuando seleccionamos la opción Descubrir, se abre un cuadro de diálogo en el que indicamos cuáles son los puntos relevantes para el eventual hecho a descubrir y cuáles las condiciones sobre las que trabajar (figura 2).

El programa devuelve la siguiente condición necesaria:

Figura 3

siendo ahora la sesión de Mathematica como sigue

ecs = {(0 – x[2]) * (1- 0) – (0 – 0) * (0 – x[1]) ==.0,
(0 – 0) * (x[2] – U8) + (1- 0) * (x[1] – U7] == 0,
(0 – x[4]) * (U5 – 0] – [U6 – 0) * (0 – x[3]) == 0,
(U6 – 0) * (x[4] – U8] + (U5 – 0) * (x[3] – U7] == 0,
(0 – x[6]) * [U5 – 1) – (U6 – 0) * (1 – x[5]) == 0,
(U6 – 0) * (x[6] – U8) + (U5 – 1) * (x[5] – U7) == 0,
Det[{{x[1], x[2], 1}, {x[3], x[4], 1}, {x[5], x[6], 1}}]/2 == 2};

Elineinatele[ecs, {x[1], x[2], x[3], x[4], x[5], x[6]}]

$U6^2$ (U5 – U52 – U62) U8 + U63 U82 ==
4 U52 – 8 U53 + 4 U54 + 4 U62 – 8 U5 U62 + 8 U52 U62 + 4 U64 + U63 U7 – U63 U72

pol = %[[1]] – %[[2]]

-4 U52 + 8 U53 – 4 U54 – 4 U62 + 8 U5 U62 – 8 U52 U62 –
4 U54 – U63 U7 + U63 U72 + U62 (U5 – U52 – U62) U8 + U63 U82

Factor[pol]

-4 U52 + 8 U53 – 4 U54 – 4 U62 + 8 U5 U62 – 8 U52 U62 – 4 U64 -
U53 U7 + U63 U72 + U5 U62 U8 – U52 U62 U8 – U64 U8 + U63 U82

Obsérvese que no puede haber ahora condiciones de degeneración debido a la exigencia explícita de no alineamiento de los puntos *M*, *N* y *P*. Por otra parte, no se ha obtenido la forma lingüística de la condición debido a que ninguna de las que se generan acerca de los puntos seleccionados (*A*, *B*, *C* y *X*) incluye un enunciado de la forma «*X* está en la circunferencia de centro *O*», punto este último que ni siquiera aparece en la construcción. Esta cuestión, aparecida en la sección anterior y que volveremos a encontrar en la siguiente, es actualmente objeto de estudio: puesto que la mayoría de los lugares en geometría elemental son rectas y circunferencias, un sencillo análisis simbólico de la ecuación obtenida permitirá su traducción lingüística. En este análisis también serán consideradas las secciones cónicas.

Volviendo a la ecuación obtenida, podemos obtener un aprovechamiento didáctico con alumnos de Bachillerato o nivel superior si se plantea su reconocimiento como una ecuación polinómica de grado dos en las variables *U7* y *U8* que tienen iguales coeficientes, es decir, una circunferencia.

Coefficient[%, U7, 2]

U63

Coefficient[%%, U8, 2]

U69

Puede ampliarse la propuesta a la determinación de su centro, que, dice Steiner, es el circuncentro de *ABC*. Esta cuestión, aún no resuelta en nuestro prototipo y que implica el uso por el alumno del sistema de cálculo simbólico, es sin duda interesante pero nos aleja del objetivo de este artículo, la automatización efectiva del descubrimiento.

Tercer (re)descubrimiento: el teorema de Guzmán

Guzmán (1999) ha considerado el caso en que las proyecciones desde *X* a los lados del triángulo *ABC* sigan tres direcciones fijas cualesquiera, salvo que sean paralelas a los respectivos lados. El lugar geométrico de los puntos *X* que determinan un triángulo *MNP* de área constante es una cónica. La construcción de esta situación se muestra en la figura 4, donde las tres direcciones fijas se muestran en la esquina superior izquierda.

Tras un proceso idéntico al seguido en el teorema de Steiner (origen *A*, unidad *AB*, area(*M*, *N*, *P*) = 2), el programa devuelve una ecuación en las variables *U*5,…,*U*16 con ¡154 términos y cada término, en media, 5 factores! Tal longitud es en gran

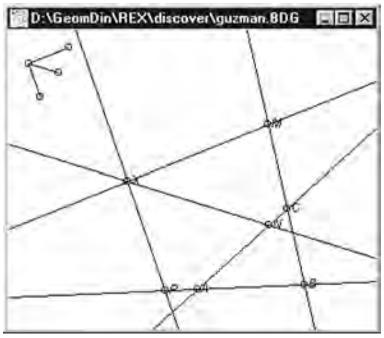


Figura 4

parte debida a las ocho variables *U*9, …, *U*16, que corresponden a los puntos que fijan las direcciones de proyección. Un análisis análogo al realizado para Steiner, esta vez con el concurso altamente recomendable del sistema de cálculo simbólico, muestra que la ecuación obtenida es la correspondiente a una cónica para las variables *U*7 y *U*8, coordenadas del punto *X*.

José Luis Valcarce
IES Pontepedriña
Santiago
Francisco Botana
Departamento de Matemática
Aplicada
EUET Forestal
Universidad de Vigo

Bibliografía

CD IX JAEN: <\soft\rex\> (debido al compilador utilizado para la ejecucuón de REX sitúe el calendario de su PC en 1999)

GUZMÁN, M. (1999): «An extension of the Wallace-Simson theorem: projecting in arbitrary directions», *American Math. Monthly*, n.° 106 (6), 574-580.

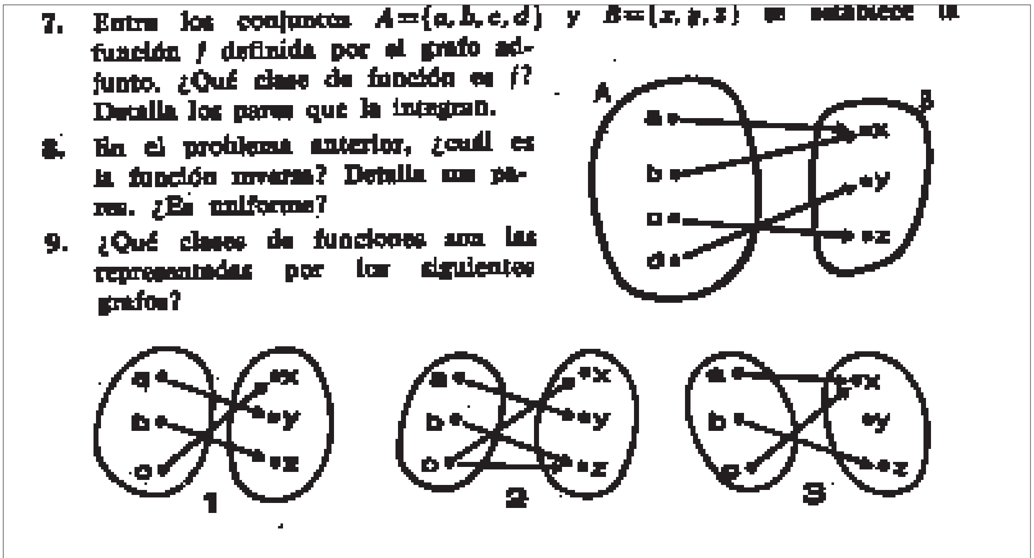
RECIO, T. (1998): *Cálculo simbólico y geométrico*, Síntesis, Madrid.

ROANES MACÍAS, E. y E. ROANES LOZANO (1999): «Búsqueda automática de lugares geométricos», *Boletín de la Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas-Congreso IMACS-ACA'99*, n.° 53, 67-77.

VALCARCE, J. L. y F. BOTANA (1999): «REX: un recurso para el estudio de la geometría», *Actas de las IX Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas, Lugo*, 260-262. <http://www-mapo.uvigo.ees/dg/rex>

WOLFRAM, S. (1996): *The Mathematica book*, Cambridge University Press, Cambridge.

WU, W. T. (1994): *Mechanical Theorem Proving in Geometries*, Springer, Viena.



7. Entre los conjuntos $A=\{a,b,c,d\}$ y $B=\{x,y,z\}$ se establece la función f definida por el grafo adjunto. ¿Qué clase de función es f? Detalla los pares que la integran.
8. En el problema anterior, ¿cuál es la función inversa? Detalla sus pares. ¿Es uniforme?
9. ¿Qué clase de funciones son las representadas por los siguientes grafos?

5.° EGB

XI JAEM

CANARIAS 2003

2.3.4 y 5 de Julio

Las JAEM de la comunicación

Lanzarote

Fuerteventura

Gran Canaria

Tenerife

La Palma

La Gomera

El Hierro

Visitas a Santa Cruz de Tenerife, Las Palmas de Gran Canaria y La Laguna (Patrimonio de la humanidad)

Convoca:

Federación Española de Profesores de Matemáticas

Organiza:

Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas

SUMA 39

febrero 2002, pp. 69-76

El problema del dado con partidas no jugadas

Jesús Basulto Santos
José Antonio Camúñez Ruiz

El problema de los puntos, –que ya habían abordado autores, como Pacioli, Tartaglia y Cardano–, es un problema de decisión bajo incertidumbre, que motivó la correspondencia entre Pascal y Fermat en 1654. Ahora bien, en la primera carta que escribe Pascal a Fermat, introduce un nuevo problema sobre dados, también de decisión bajo incertidumbre, «el problema de las partidas no jugadas», que ha motivado el presente trabajo. Aunque más sencillo que el problema de los puntos, ambos tienen cosas en común. Fermat aportará soluciones a estos problemas basadas en la enumeración de todos los posibles resultados, lo que Pascal denomina «el método combinatorio». Al tratar de evitar las enumeraciones de todos los resultados, Pascal descubrirá lo que llamó «método universal»: la esperanza matemática. Igualmente, y a requerimientos de Pascal, Fermat, descubrirá lo que llamamos el modelo de Pascal o modelo geométrico. En el presente trabajo aplicamos estos nuevos métodos al problema de las partidas no jugadas, lo que permitirá apreciar el trabajo que desarrollaron ambos matemáticos.

DURANTE EL VERANO DE 1654 se produce la famosa correspondencia entre Pascal y Fermat. Esta correspondencia ha dado lugar a una literatura posterior más o menos fundamentada, que sitúa el origen del cálculo de probabilidades en el contenido de dichas cartas.

El primer contacto entre ambos autores (que nunca llegaron a conocerse personalmente) se cree que fue una carta que Pascal dirigió a Fermat. Decimos «se cree» porque esta carta está perdida, pero, por los contenidos de las cartas posteriores, hay indicios de que existió. En ella se supone que Pascal planteaba ciertos problemas sobre juegos, problemas que ya existían en el ambiente y que de alguna forma ya habían sido estudiados y resueltos, aunque a veces con soluciones erróneas, por los matemáticos italianos del Renacimiento (Pacioli, Tartaglia, Cardano, Peverone, Forestani) en el siglo XVI (ver Coumet, 1965). Parece ser que, en dicha carta, Pascal también proponía sus propias soluciones a esos problemas, rogándole a Fermat algún juicio sobre ellas.

Entre esos problemas había uno que conoceremos a partir de ahora como el *problema del dado con partidas no jugadas*, núcleo de la carta escrita por Fermat que F. N. David (1962) sitúa como respuesta a la anterior (la carta, aunque se conserva, no tiene fecha). Una traducción al castellano de esta carta puede encontrarse en De Mora Charles (1989).

Este problema tiene estrecha relación con el conocido históricamente como el *problema de los puntos* o *problema de las partidas* o *regla de los repartos*, que constituye el núcleo fundamental de la correspondencia entre Pascal y Fermat. La solución que propone Fermat al problema del dado con partidas no jugadas es la misma que utilizará, al final de la correspondencia entre Pascal y Fermat (la carta del 25 de septiembre de 1654), para resolver el problema de los puntos, tanto para dos jugadores como para tres o más.

Ambos problemas, el del dado con partidas no jugadas y el de los puntos, tienen en común el hecho de tratarse de problemas de decisión bajo incertidumbre. Las decisiones son las diferentes proporciones del total apostado que deben darse a cada uno de ellos, en el caso del problema del dado con partidas no jugadas, o los repartos que debemos hacer entre dos o más jugadores, en el caso del problema de los puntos. La incertidumbre entra al no jugarse una o más partidas en el primer caso o al interrumpirse el juego en el problema de los puntos. En ambas situaciones, tanto al no jugar como al interrumpirse, los jugadores no son ganadores ni perdedores, es decir, desconocen cuál sería el resultado final del juego.

A partir de aquí, el trabajo consiste en lo siguiente: en el siguiente epígrafe introducimos, usando la carta de Fermat a Pascal, el problema del dado con partidas no jugadas y lo comparamos con el problema de los puntos; en la sección titulada *la solución de Fermat al problema de los dados,* queda recogida ésta; y en la siguiente sección proponemos una explicación de la solución de Fermat y resolvemos el problema por el método universal de Pascal. Finalizamos el trabajo con un ejemplo ilustrativo del problema del dado con partidas no jugadas.

Planteamiento del problema

En la carta de Fermat a Pascal comentada anteriormente, Fermat recoge el planteamiento del problema del dado con partidas no jugadas que Pascal propuso en su carta perdida. Siguiendo las palabras de Fermat:

> Pero Vd me propone en el último ejemplo de su carta (utilizo sus propios términos) que si intento encontrar el seis en ocho partidas y si ya he jugado tres veces sin encontrarlo, si mi jugador (el jugador contrario) me propone que no juegue mi cuarta y quiere desinteresarme de ello porque podría obtenerlo (el seis), me pertenece 125/1296 de la suma total de nuestras apuestas.

En el planteamiento de Pascal, (descrito aquí por Fermat) parece que se acepta que el jugador *ya ha jugado* tres partidas y no ha ganado y decide dejar de jugar en la cuarta. El planteamiento de Fermat cambia, y es en dicho «cambio» donde radica el «error» de Pascal en la proporción anterior. Así Fermat propone el problema de la siguiente forma:

> Si intento hacer un punto (determinado) con un solo dado, en ocho partidas; si convenimos cuando el dinero ya está en juego, que yo no jugaré la primera partida… Que si todavía después de eso con venimos en que yo no jugaré la segunda partida… Y si después de eso convenimos en que no jugaré la tercera partida… Y si después de eso todavía convenimos en que no jugaré la cuarta partida…

Nosotros interpretamos el problema planteado por ambos matemáticos de la siguiente forma:

Pascal

Fermat

Uno de los jugadores, el jugador B, apuesta una cierta cantidad a que el otro, el jugador A, no logrará en ocho lanzamientos (partidas) de un dado perfecto sacar un seis. El jugador A apuesta una cantidad frente a la de B, y afirma que logrará sacar un seis en las ocho partidas. El jugador B puede estar interesado en disminuir el número de partidas que puede hacer el jugador A, así, por ejemplo, el jugador A puede convencerse de no jugar la segunda partida, habiendo no sacado en la anterior un seis. Ahora bien, el jugador B debe compensar al A por no jugar éste la segunda partida. Surge ahora el siguiente problema: ¿cuál debe ser la proporción del total apostado que debe llevarse el jugador A como compensación? En el planteamiento de Pascal, éste considera que el jugador A ha jugado ya las tres primera partidas sin éxito y decide no jugar la cuarta partida. El problema surge igualmente cuando el jugador A se convenza de no jugar las cuatro primera partidas, como en el planteamiento de Fermat.

Antes de hacer comparaciones con el otro problema, el de los puntos o repartos, vamos a recordar, por medio de un ejemplo, en qué consiste el mismo. Dos jugadores, A y B, juegan a cara y cruz con una moneda perfecta, ganando A un punto si en la partida (lanzamiento) sale cara, y en el otro caso, si sale cruz, el punto lo ganaría B. Ambos jugadores hacen sus apuestas y deciden que el primero que logre r éxitos (r puntos) se llevará el total apostado. El problema surge cuando ambos jugadores deciden de común acuerdo interrumpir el juego cuando al jugador A le faltan a partidas (le faltan a puntos para completar los r), $a < r$, y al otro jugador b partidas, $b < r$, y deben repartirse el total apostado.

Comparando ambos problemas, vemos que en el del dado el número de partidas es conocido (8 en nuestro caso), mientras que en el de los puntos, el número de partidas es aleatorio, aunque se sepa el número máximo de partidas que se jugaría. También, en el problema del dado se puede no jugar las cuatro primeras partidas pero retomar el juego con la quinta, mientras que en el problema de los puntos, el juego se interrumpe a partir de un número de partidas jugadas. Ambos problemas son ejemplos de toma de decisiones bajo incertidumbre, donde las decisiones son las distintas proporciones que debe retirar el jugador A, como en el caso del dado con partidas no jugadas, o los diferentes repartos del total apostado entre los jugadores, como en el problema de los puntos. La incertidumbre surge ya sea porque el jugador decide no jugar alguna partida, caso del problema del dado, o interrumpir el juego, caso del problema de los puntos. El no jugar ciertas partidas conduce a que no tengamos un ganador o un perdedor, es decir, desconocemos el resultado de estas partidas y así, las decisiones deben tomarse bajo incertidumbre.

Veamos a continuación cómo resolvió Fermat el problema que aquí nos ocupa.

La solución de Fermat al problema del dado

En la carta de Fermat a Pascal, Fermat resuelve el problema del dado con partidas no jugadas de la siguiente forma:

> …si intento hacer un punto (determinado) con un solo dado, en ocho tiradas; si convenimos cuando el dinero ya está en juego, que yo no jugaré la primera partida es necesario, según mi principio, que extraiga del juego 1/6 del total para desinteresarme (del mismo), en razón de dicha primera partida.

Y añade

> si todavía después de eso convenimos en que no jugaré la segunda tirada, para mi indemnidad deberé retirar una sexta parte del resto, que es 5/36 del total.

Y sigue:

> y si después de eso convenimos en que no jugaré la tercera tirada, para mi indemnidad deberé retirar la sexta parte del resto, que es 25/216 del total.

Y termina:

> y si después de eso, todavía convenimos en que no jugaré la cuarta tirada, deberé retirar un sexto del resto, que es 125/1296 del total y convengo con vos que ese es el valor de la cuarta tirada.

Este error de Pascal, así como otros que surgirán en la correspondencia entre ambos autores, han conducido a muchos investigadores a disminuir la importancia de Pascal en su contribución al cálculo de probabilidades frente a Fermat.

Fermat continúa su carta con un punto en el que comenta y rechaza la solución que daba Pascal a una determinada situación de este problema. Leemos:

> Usted me propone en el último ejemplo de su carta que si intento encontrar el 6 en ocho tiradas y si ya he jugado tres veces sin encontrarlo, si mi jugador me propone que no juegue mi cuarta tirada y quiere desinteresarme de ello porque podría obtenerlo (el seis), me pertenecerá 125/1296 de la suma total de nuestras apuestas.
>
> Lo cual, sin embargo, no es cierto según mi principio. Pues en este caso, al no haber obtenido nada en las tres primeras tiradas el que tiene el dado en su poder, y siguiendo en juego la suma total, el que tiene el dado y conviene en no jugar su cuarta tirada, debe tomar para su indemnidad 1/6 del total.

Para Fermat, entonces, las tres primeras partidas jugadas por el jugador A sin éxito, es decir, sin haber obtenido el seis, no contribuyen a la valoración de las partidas no jugadas. La independencia de los sucesivos lanzamientos del dado, que en el caso de un juego más general describiría la hipótesis de que los jugadores no aprenden con la experiencia y, por lo tanto, sus habilidades no cambian, hace que las partidas ya jugadas no contribuyan al cálculo o valoración de las que están por jugarse.

Vemos pues que Fermat corrige la solución errónea de Pascal, 125/1296, frente al valor de 1/6 de Fermat.

Este error de Pascal, así como otros que surgirán en la correspondencia entre ambos autores, han conducido a muchos investigadores a disminuir la importancia de Pascal en su contribución al cálculo de probabilidades frente a Fermat. Recogemos las siguientes líneas de M. De Mora Charles (1989), tomadas de F.N. David (1962), como muestra de esta opinión negativa:

> Siempre fue tras él (tras Fermat) en los descubrimientos referentes al cálculo de probabilidades y tardó mucho más en comprender los problemas que el propio Fermat. Se insinúa incluso la influencia que su fracaso como geómetra pudo tener en su decisión de abandonar las matemáticas y convertirse por segunda vez (su conversión al jansenismo). La personalidad de Pascal no aparece favorable a través de sus cartas y de sus otras obras, en cambio Fermat parece haber sido un hombre que incluso después de trescientos años atrae a todos los que lo leen.

Una respuesta, que nosotros compartimos, frente a esta opinión de David, es la dada por A.W.F. Edwards (1987):

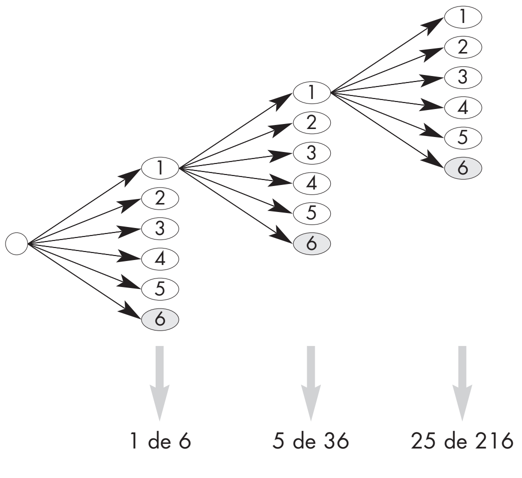
> David omite mencionar cualquier contribución de Pascal, y entonces atribuye (como muchos otros investigadores) el concepto de esperanza a Huygens, aunque no solo fue usado por Pascal, sino que Huygens conocía este hecho antes de que publicase su libro de *De ratiociniis in alea ludo* (1667), como veremos. No hay duda de que esta opinión de David proviene de su falta de familiaridad con el relevante libro de Pascal, su *Traité du triangle aritmétique* (1665), en el que él resuelve completamente el problema de los puntos, haciendo uso del concepto de *esperanza matemática*.

Veamos a continuación una explicación de la solución que Fermat da en su carta al problema del dado con partidas no jugadas, así como una aplicación del método universal de Pascal a este problema del dado.

La solución de Fermat y Pascal: una explicación

Consideremos un juego con un dado perfecto, donde un jugador A va a jugar 8 partidas, o sea, va a efectuar 8 lanzamientos consecutivos y ganará el total apostado K si saca un seis en una de las partidas. En caso contrario, si el jugador A no obtiene seis en ninguno de los 8 lanzamientos, entonces el total apostado será para el jugador B. Si el jugador A decide no jugar las cuatro primeras partidas, es decir, quiere asegurarse una parte de lo apostado, veamos que la solución de Fermat es equivalente a que la cantidad que retira el jugador A, del total apostado K, debe ser proporcional al número de alternativas que le harían ganar si se jugasen esas cuatro primeras partidas.

Dividamos el total de alternativas favorables al jugador A en cuatro grupos: *el primero*, el jugador A ganaría el juego de las cuatro partidas, si sale un seis en la primera partida, y esto lo consigue con 1 alternativa favorable de un total de 6. Todas estas alternativas son iguales de probables. *Segundo*, el jugador gana si sale un seis en la segunda partida, es decir, en la primera no sale un seis, lo que supone 5 alternativas en contra de un total de 6, y en la segunda sale un seis que es 1 alternativa favorable de un total de 6. En el lanzamiento de dos veces consecutivas de un dado hay $6^2 = 36$ alternativas de igual probabilidad de las que 5 representan la situación descrita en segundo lugar, o sea, 5 son favorables al jugador A. *Tercero*, el jugador gana si sale un seis en la tercera partida, es decir no sale un seis ni en la primera ni segunda partida y si sale en la tercera. Tendríamos 5 alternativas en la primera, 5 en la segunda y 1 en la tercera. Lanzando tres veces consecutivas el dado tenemos $6^3 = 216$ alternativas igualmente probables de las que $5^2 = 25$ son favorables al jugador A. Representamos parcialmente el árbol de decisiones que ayuda a ilustrar los cálculos anteriores:



Donde suponemos que salen flechas de todos los círculos-óvalos en blanco y no así de los que están rayados, ya que ahí se ha producido el éxito y, por tanto, la terminación del juego.

…mientras que las alternativas dentro de cada grupo son comparables, al ser igual de probables, esto no ocurre si queremos comparar alternativas de distintos grupos.

Y *cuarto*, el jugador A gana si sale un seis en la cuarta partida. En este caso el total de alternativas es 1296 y todas son comparables. Las alternativas favorables al jugador A son 125.

En la tabla siguiente recogemos todos los cálculos:

Salir un 6 en la partida	Alternativas favorables al jugador A	Total de alternativas
1ª	1	6
2ª	5	$6^2 = 36$
3ª	$5^2 = 25$	$6^3 = 216$
4ª	$5^3 = 125$	$6^4 = 1296$

Ahora bien, mientras que las alternativas dentro de cada grupo son comparables, al ser igual de probables, esto no ocurre si queremos comparar alternativas de distintos grupos. Por ejemplo, la probabilidad de que el jugador A saque un seis en la primera partida es 1/6, mientras que la probabilidad de sacar un cinco en la primera partida y un seis en la segunda es 1/36, con lo que no podemos sumar las alternativas de los distintos grupos. Vamos a resolver este problema por medio de sumergir el juego de las cuatro partidas, que como hemos vistos puede acabar con una, dos, tres o cuatro partidas, en un juego imaginario que siempre finalice con cuatro partidas. Este método fue utilizado por Fermat y Pascal para resolver el problema de los puntos (carta de Pascal a Fermat del 24 de agosto de 1654.)

En este juego imaginario que siempre finaliza con cuatro partidas, el primer grupo debe ampliarse a un total de 1296 alternativas, todas comparables, y donde las alternativas favorables al jugador A son 216. Es decir, siempre lanzaremos el dado cuatro veces, de ahí los 1296 posibles resultados, y una vez ha salido un seis en la primera partida, todos los resultados que provienen de lanzar tres veces el dado, un total de 216, son las alternativas favorables al jugador A. El segundo grupo se amplía a un total de 1296 alternativas, y una vez ha salido un seis en la segunda partida, este resultado ocurre con 5 alternativas, todos los resultados que provienen de lanzar dos veces el dado, un total de 36, lo que hace un total de 5·36 = 180 alternativas favorables al jugador A. No vamos a continuar por no cansar al lector. Recogemos los cálculos en la siguiente tabla:

A partir de sacar un 6 en la partida	Alternativas favorables	Total de alternativas
1ª	$5^0 \cdot 6^3 = 216$	$6^4 = 1296$
2ª	$5^1 \cdot 6^2 = 180$	$6^4 = 1296$
3ª	$5^2 \cdot 6^1 = 150$	$6^4 = 1296$
4ª	$5^3 \cdot 6^0 = 125$	$6^4 = 1296$

Ahora, al ser todas las alternativas comparables (son igualmente probables), podemos sumar las favorables de cada uno de los cuatro grupos. La cantidad que el jugador A debe retirar, del total apostado K, es:

$$K\left(\frac{6^3+5\cdot 6^2+5^2\cdot 6+5^3}{6^4}\right)=K\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{6^2}+\frac{5^2}{6^3}+\frac{5^3}{6^4}\right) \qquad [1]$$

Vamos a ver que es la misma solución que la propuesta por Fermat en su carta. Operando en la expresión [1]:

$$K\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{6^2}+\frac{5^2}{6^3}+\frac{5^3}{6^4}\right)=$$

$$\frac{K}{6}+\left(K-\frac{K}{6}\right)\frac{1}{6}+\left(\left(K-\frac{K}{6}\right)-\left(K-\frac{K}{6}\right)\frac{1}{6}\right)\frac{1}{6}+$$

$$+\left(\left(\left(K-\frac{K}{6}\right)-\left(K-\frac{K}{6}\right)\frac{1}{6}\right)-\left(\left(K-\frac{K}{6}\right)-\left(K-\frac{K}{6}\right)\frac{1}{6}\right)\frac{1}{6}\right)\frac{1}{6}$$

Donde lo que retira el jugador A por no jugar las cuatro primera partidas es igual a la sexta parte de *K* (primer término del segundo miembro), que Fermat identifica por el valor de la primera partida, y, por tanto, lo que se llevaría el jugador A por no jugarla. De lo que queda:

$$\left(K-\frac{K}{6}\right)=K\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)=K\cdot\frac{5}{6}$$

el jugador vuelve a retirar la sexta parte (segundo término del segundo miembro), que Fermat identifica como valor de la segunda partida. De nuevo, de lo que queda:

$$\left(\left(K-\frac{K}{6}\right)-\left(K-\frac{K}{6}\right)\frac{1}{6}\right)$$

el jugador retira su sexta parte (tercer término del segundo miembro), lo que Fermat identifica como valor de la tercera partida. Por último, de lo que queda, el jugador A vuelve a tomar su sexta parta (último término del segundo miembro), que Fermat identifica como valor de la cuarta, y por tanto, la *indemnidad* por no jugarla.

De la expresión [1], el total de lo que se lleva el jugador A por no jugar las cuatro primeras partidas se puede escribir como:

$$\frac{K}{6}\left(1+\frac{5}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^3\right)=\frac{K}{6}\left(\frac{1-(5/6)^4}{1-5/6}\right)=K\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^4\right)$$

Lo que queda, $K\cdot(5/6)^4$ es la apuesta que permanece en el juego, a partir de la quinta partida.

El artificio de sumergir el juego original en un juego imaginario, pretende, como hemos visto, operar con resultados comparables, con las mismas probabilidades. Este artificio será utilizado por Fermat y Pascal en la resolución del problema de los puntos. Ahora bien, como es conocido, Pascal tuvo que defenderse de las dudas que le planteó el matemático Roberval. Este método de enumerar todas las alternativas fue llamado por Pascal como el método combinatorio frente a su método universal de la *esperanza matemática*. Sabemos que cuando Pascal quiso aplicar el método combinatorio al problema de los puntos con tres o más jugadores, se encontró con dificultades que no logró resolver por este método (carta del 24 de agosto 1654). Pascal acabará su carta solicitando ayuda a Fermat.

Tanto las dudas presentadas sobre el método de sumergir el juego original en un juego imaginario, como las dificultades que encontró Pascal en la resolución del problema de los puntos con tres jugadores, conducirán a Fermat a trabajar con lo que hoy conocemos como el *modelo geométrico*. Con este nuevo método introducido por Fermat en su carta del 25 de septiembre de 1654, se resolverá definitivamente el problema de los puntos con dos o más jugadores.

Veamos que la solución de Fermat al problema del dado con partidas no jugadas coincide con la suma de probabilidades, mediante la función de cuantía de un modelo geométrico (o con la función de distribución del propio modelo).

De la primera tabla, el jugador A saca un seis en las cuatro partidas siempre que el seis salga en la primera, segunda, tercera o cuarta. También, obsérvese que estos cuatro sucesos son excluyentes y exhaustivos, con lo que la probabilidad de que el jugador A saque un seis en las cuatro partidas es:

$$\frac{1}{6}+\frac{5}{6^2}+\frac{5^2}{6^3}+\frac{5^3}{6^4} \qquad [2]$$

y entonces, el jugador A debe retirar, por no jugar las cuatro partidas, la cantidad que resulta de multiplicar *K* por el valor de la expresión [2], que es precisamente la expresión [1].

Si ahora recordamos el concepto de variable aleatoria geométrica X, como el número de lanzamientos de un dado que debemos efectuar hasta lograr obtener un seis, por primera vez, con valores en los enteros {1, 2,…}. Su función de probabilidad o cuantía viene dada por la siguiente expresión:

$$f_X(x) = q^{x-1}p$$

donde $q = 1 - p$ y $p = 1/6$ en nuestro problema.

La expresión [2] es ahora equivalente a:

$$f_X(1) + f_X(2) + f_X(3) + f_X(4)$$

O sea, la suma de los cuatro primeros valores de la función de probabilidad de un modelo geométrico (o el valor de la función de distribución del modelo geométrico).

Veamos a continuación cómo por medio del *método universal* de Pascal (como él lo llamaba) podemos resolver el problema del dado con partidas no jugadas. Este método universal fue introducido por Pascal en su *Traité du Triangle aritmétique* (aunque publicado en 1665, tres años después de la muerte de Pascal, las ideas fundamentales expresadas en el *Traité* ya habían sido desarrolladas por él mismo cuando se produjo el intercambio de correspondencia con Fermat en 1654, como lo atestigua la propia correspondencia), una exposición de parte de este libro puede verse en A. W. F. Edwards (1987). Vamos a recordar, en primer lugar, sus dos principios y los dos corolarios que se sigue de ellos, y que dan lugar al nacimiento de la esperanza matemática.

El *primer principio* afirma que en la lotería: «lanzar una moneda perfecta, si sale cara el jugador gana K unidades monetarias y si sale cruz también gana K unidades monetarias». Entonces si el jugador no juega debe llevarse la cantidad K.

El *segundo principio* afirma que en la lotería: «lanzar una moneda perfecta, si sale cara el jugador gana K unidades monetarias y si sale cruz cero unidades monetarias. Es decir, pierde todo lo apostado». Entonces, el jugador debe llevarse la mitad de la apuesta, es decir, $K/2$, si decide no participar en el juego.

A partir de estos dos principios, Pascal propone los siguientes corolarios.

> *Corolario I:* En la lotería, «lanzar una moneda perfecta, si sale cara entonces el jugador gana $K + W$ unidades monetarias (u.m.), y si sale cruz gana K unidades monetarias», entonces el jugador debe llevarse la cantidad de $K + W/2$, si no participa en el juego.

En este corolario debe observase que el jugador tiene seguras K unidades monetarias, ya que por el primer principio le pertenecen. El resto, W, puede ganarlo si sale cara, o perderlo si sale cruz. En consecuencia, por el segundo principio, el jugador debe retirar $W/2$. En resumen, el jugador retira $K + W/2$ por no jugar a dicha lotería.

…cómo por medio del método universal *de Pascal (como él lo llamaba) podemos resolver el problema del dado con partidas no jugadas. Este método universal fue introducido por Pascal en su* Traité du Triangle aritmétique…

> *Corolario II:* En la lotería, «lanzar una moneda perfecta, si sale cara entonces el jugador gana $K + W$ unidades monetarias (u.m.), y si sale cruz gana K unidades monetarias», entonces el jugador debe llevarse la cantidad de $(K + K + W)/2$ si no participa en el juego.

Es evidente que este último corolario es equivalente al primero.

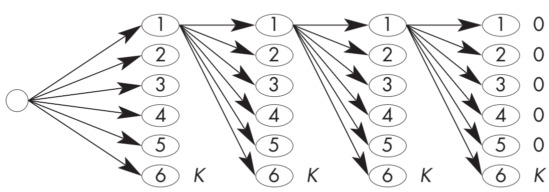
Si representamos la siguiente lotería: «lanzar una moneda perfecta, si sale cara el jugador gana 30 u.m. y si sale cruz gana 20 u.m», por {30, 1/2; 20, 1/2}, donde 1/2 es la probabilidad de salir cara. El corolario I valora esta lotería por la cantidad:

$$20 + \frac{30 - 20}{2} = 30 \cdot \frac{1}{2} + 20 \cdot \frac{1}{2}$$

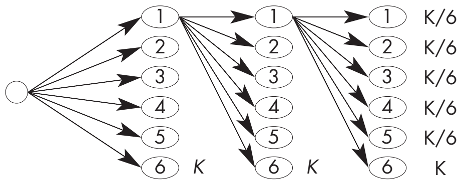
que es precisamente la esperanza matemática de la lotería.

En nuestro problema del dado, si el jugador saca un seis en una partida, gana K, el total apostado, y si no saca el seis no retira cantidad alguna. Esta lotería es de la forma {K, 1/6; 0, 5/6}, donde la probabilidad de salir el seis es 1/6. Esta lotería es equivalente a la siguiente: {K, 1/6; 0, 1/6; 0, 1/6; 0, 1/6; 0, 1/6; 0, 1/6}, que por el *segundo principio* de Pascal, que nosotros extendemos a un número finito de alternativas comparables y exhaustiva, es valorada por la cantidad $K/6$. En consecuencia, la lotería {K, 1/6; 0, 5/6} es valorada por $K/6 + 0 \cdot (5/6) = K/6$ En general, la lotería {K_1, 1/6; K_2, 5/6}, con $K_1 > K_2$, será valorada por la cantidad $K_2 + (K_1 - K_2) \cdot (1/6)$, que coincide con la esperanza matemática $K_1 \cdot (1/6) + K_2 \cdot (5/6)$ como se deduce del Corolario de Pascal extendido a nuestro problema.

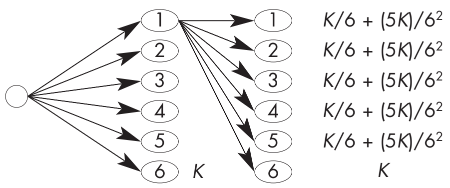
Veamos ahora como aplicamos estas ideas de Pascal al problema del dado con partidas no jugadas. El árbol de decisión de nuestro problema es:



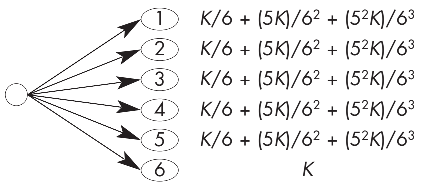
donde sólo hemos desarrollado algunas de las ramas del árbol. También, hemos indicado que si sale el seis, el jugador A se lleva todo lo apostado, K, y en otro caso no se modifica el total apostado. Si valoramos las últimas loterías del este árbol, es decir, $\{K, 1/6; 0, 5/6\}$, por $K/6$, segundo principio. Esta lotería es equivalente a:



Si valoramos ahora las últimas loterías del este segundo árbol, es decir, $\{K, 1/6; K/6, 5/6\}$ por $K/6 + (5K)/6^2$, por el Corolario. Esta lotería es equivalente a:



Si valoramos de nuevo las últimas loterías del este tercer árbol, es decir, $\{K, 1/6; K/6 + (5K)/6^2, 5/6\}$, por $K/6 + (5K)/6^2 + (5^2K)/6^3$, por el Corolario, entonces esta lotería es equivalente a:



y esta última lotería, es por el corolario de Pascal, valorada por $K/6 + (5K)/6^2 + (5^2K)/6^3 + (5^3K)/6^4$, coincidiendo con la expresión [1] de Fermat.

Estas sustituciones de loterías compuestas por otras loterías, al sustituir loterías simples por valores, es semejante al axioma 3 del Herstein y Milnor (1953). Este axioma fundamental permite a estos dos autores obtener el criterio del valor esperado de la utilidad del dinero como la regla para valorar loterías. Este criterio del valor esperado, donde las probabilidades entran de forma lineal, será criticado por M. Allais (1953), por medio de experimentos, sobre el comportamiento de los individuos en situaciones de toma de decisiones bajo incertidumbre.

El segundo principio de Pascal reduce la función de utilidad a una función lineal, con pendiente positiva, del dinero, es decir, Pascal describe situaciones de individuos bajo condiciones de *riesgos neutros*. Aquí, Pascal está más interesado en un problema de justicia, ya que supone que ambos jugadores son «iguales» en todo. No se trata de la toma de un seguro entre un individuo y una empresa de seguros, donde las diferencias, las necesidades y la aversión al riesgo del individuo, son utilizadas por la empresa en su provecho. Respecto del primer principio, sirve para reducir a loterías ciertas las apuestas totales de ambos jugadores.

Obsérvese que si definimos una función $h(x)$ donde x toma los valores enteros 1, 2, 3 y 4, que valora la esperanza matemática en cada una de las cuatro partidas. Es fácil de comprobar que $h(x)$ es solución de la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$h(x) = \frac{K}{6} + h(x+1)\frac{5}{6} \qquad \text{donde } h(4) = k/6$$

Esta ecuación en diferencias finitas se resuelve fácilmente por medio de sustituciones hacia adelante, siendo su solución, como puede comprobar el lector, igual a:

$$h(x) = K\left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{5-x}\right]$$

El valor $h(1)$ coincide con la expresión [1] de Fermat si se usa la suma de una progresión geométrica finita. Por ejemplo, si el total apostado es K = 100 u.m., la cantidad que retira el jugador por no jugar las cuatro primeras partidas es de $h(1)$ = 51,774 u.m. ¿Qué han apostado cada uno de los jugadores antes de comenzar el juego? La respuesta es: la apuesta del jugador A es $100 \cdot [1 - (5/6)^8]$ = 76,74 u.m., y la del jugador B es 100 – 76,74 = 23,26 u.m. Obsérvese que el jugador A ahorró la cantidad de 51,774 por no jugar las cuatro primeras partidas, apostando para las siguientes cuatro partidas la cantidad de 76,74 – 51,774 = 24,996, lo que genera un total de 24,996 + 23,26 = 48,226 u.m. El valor que espera ganar el jugador B, una vez que el jugador A ha decido no jugar las cuatro primeras partidas, es $48{,}226 - 48{,}226 \cdot [1 - (5/6)^4]$ = 23,26, que es lo apostado, al comienzo, por el mismo.

Vamos a finalizar esta sección con el planteamiento y la solución de Pascal, del problema del dado con partidas no jugadas. Pascal plantea el problema bajo la situación de que el jugador A decide no jugar la cuarta partida cuando no ha tenido éxito en las tres primeras.

La solución de Pascal es 125/1296, que como señala Fermat es errónea, siendo la solución verdadera igual a 1/6.

Las tres primeras partidas jugadas por el jugador A, sin éxitos, sin haber salido un seis, no contribuyen al cálculo de los valores de las partidas no jugadas. En su carta, Fermat señala que la cantidad apostada K no se modifica después de cada una de estas partidas jugadas sin éxito. La independencia de los sucesivos lanzamientos del dado justifica la solución correcta de Fermat. Estas partidas jugadas sin sacar un seis no modifican, por ejemplo, la probabilidad de sacar un seis en la cuarta partida, que como sabemos es de 1/6.

Si, por ejemplo, las probabilidades 1/6 y 5/6 midiesen las habilidades de los jugadores A y B, respectivamente, la hipótesis de independencia entre los sucesivos lanzamientos del dado recogería el hecho de que ambos jugadores «no se cansan», «no se deterioran», «en cada nueva partida los jugadores se encuentra como en la primera partida», y mantienen sus habilidades.

Un ejemplo ilustrativo

Un juego semejante al del dado con partidas no jugadas puede ser observado actualmente cuando un jugador (una empresa de seguros), B, propone abonar la cantidad K_2, valor de un cierto bien, en el caso de que éste se pierda, asegurándose dicho bien, por ejemplo, por períodos de un mes hasta un máximo de 10 meses. El jugador A, que es dueño del bien valorado en K_2, puede necesitar asegurarlo durante 8 meses. El problema surge sobre qué cantidad, K_1 debe pagar el jugador A al B para que, en el caso de pérdida del bien en un período de 8 meses, el jugador B abone el valor del bien, K_2 al jugador A.

Si la cantidad K_1 es elevada para el jugador A, éste puede estar interesado en jugar (en este caso, no asegurar), algunas partidas, (durante algunos meses). De nuevo surge el problema de calcular la cantidad que el jugador A debe abonar al B por los meses asegurados, es decir, no jugados. En este último caso, el jugador A corre el riesgo de perder el bien en aquellos meses no asegurados.

Si suponemos que la probabilidad de perder el bien es 1/6, igual que la de ganar el jugador A en el caso del dado, entonces es fácil ver que si el jugador A quiere asegurar 8 meses el bien, debe abonar al jugador B la cantidad:

$$K_2\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^8\right]$$

que coincide con el valor que espera perder el jugador A si corre el riesgo durante los 8 meses.

Mientras que, en el caso del dado, si el jugador A quiere jugar las 8 partidas, debe apostar la cantidad:

$$K\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^8\right]$$

donde, recordemos, K es la cantidad total apostada por ambos jugadores.

También, en el problema del dado, cuando el jugador A no jugaba las dos primeras partidas, entonces podía retirar la cantidad:

Un juego semejante al del dado con partidas no jugadas puede ser observado actualmente cuando un jugador (una empresa de seguros), B, propone abonar la cantidad K_2, valor de un cierto bien, en el caso de que éste se pierda, asegurándose dicho bien, por ejemplo, por períodos de un mes hasta un máximo de 10 meses.

Jesús Basulto
José Antonio Camúñez
Facultad de Ciencias
Económicas y Empresariales.
Universidad de Sevilla

$$K\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^2\right]$$

Mientras, en el juego del seguro, si el jugador A decide asegurar sólo los dos primeros meses, no jugar las dos primeras partidas, entonces debe abonar al jugador B la cantidad:

$$K_2\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^2\right]$$

Por último, si en el juego del dado, el jugador A no ha tenido éxito en las tres primeras partidas, y decide no jugar la cuarta, entonces sabemos que el jugador A debe retirar la cantidad:

$$K\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)\right]$$

Mientras que en el juego del seguro, si el jugador A ha jugado las tres primeras partidas y «no ha tenido éxito», es decir, no se ha perdido el bien en los tres primeros meses no asegurados. Si el jugador A decide asegurar el cuarto mes, entonces debe pagar al jugador B la cantidad:

$$K_2\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)\right]$$

que por la hipótesis de independencia, las partidas jugadas «sin éxito» no contribuyen a los pagos por la partidas aseguradas.

Vemos que si lo apostado en el juego del dado es K, en el juego del seguro lo apostado es K_2.

Bibliografía

ALLAIS, M. (1953): «Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: critique des postulats et axiomes de l'ecole americane», *Econometrica*, Vol 21, 503-546.

COUMET, E. (1970): La thèorie du hasard esselle neè par hasard?, *Annales: Economies, Societes, Civilisation*. Vol 25, 574-598.

DAVID, F.N. (1962): *Games, gods and gambling*, Griffin, London.

DE MORA CHARLES, M.S. (1989): *Los Inicios de la Teoría de la Probabilidad: siglos XVI y XVII,* Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco.

EDWARDS, A.W.F. (1987): *Pascal' s arithmetical triangle*, Griffin, London.

HERSTEIN, I.N y J. MILNOR (1953): «An axiomatic approach to measurable utility», *Econometrica*, Vol 21, 291.297.

SUMA 39
febrero 2002, pp. 77-82

Geometría de ayer y de hoy

José Antonio Mora

IDEAS Y RECURSOS

Se describe la experiencia consistente en la construcción de un omnipoliedro, por medio de una estructura de varillas formada por los armazones de los cinco sólidos platónicos encajados uno dentro de otro.

LA SOCIEDAD de Educación Matemática de la Comunidad Valenciana «Al-Khwarizmi» propuso a finales de 1999 la realización de un omnipoliedro con motivo de los actos conmemorativos en Alicante del año 2000, como Año Mundial de las Matemáticas, con el fin de contribuir a la divulgación de los contenidos matemáticos en la sociedad. En su construcción se implicó el IES Leonardo da Vinci de Alicante y, posteriormente, se firmó un convenio con la Concejalía de Educación del Ayuntamiento de Alicante para su financiación. Esta colaboración dio como resultado la colocación de la escultura en el Parque Temático del Monte Tossal de Alicante el curso pasado y continúa este curso con la realización de una actividad educativa en la que participan los centros de la ciudad (figura 1).

Omnipoliedro significa «todos los poliedros». Es una composición realizada con los armazones de los cinco sólidos platónicos o poliedros regulares, conocidos y utilizados desde hace más de 4000 años. La estructura se ha realizado de forma que los cinco están inscritos uno dentro de otro (figura 2). En el interior se encuentra el *octaedro* (amarillo), sus vértices se sitúan en el centro de las aristas del *tetraedro* (rojo). Los cuatro vértices del tetraedro coinciden con otros tantos del *cubo* (verde). Cada una de las aristas del cubo se encuentra sobre una cara del *dodecaedro* (morado). Y, por último, el *icosaedro* (azul) proporciona rigidez al dodecaedro ya que las aristas de ambos se cortan en los puntos medios para que los vértices del icosaedro queden situados en los centros de las caras del dodecaedro y viceversa. De esta forma, podemos estudiar las relaciones entre unos y otros, además de conseguir una estructura de gran belleza estética.

Algunos de los cálculos para que cada poliedro encaje en el siguiente no son complicados, aplicar el teorema de Pitágoras o tener alguna idea feliz, son suficientes para el octaedro, el tetraedro y el cubo. Para los dos poliedros

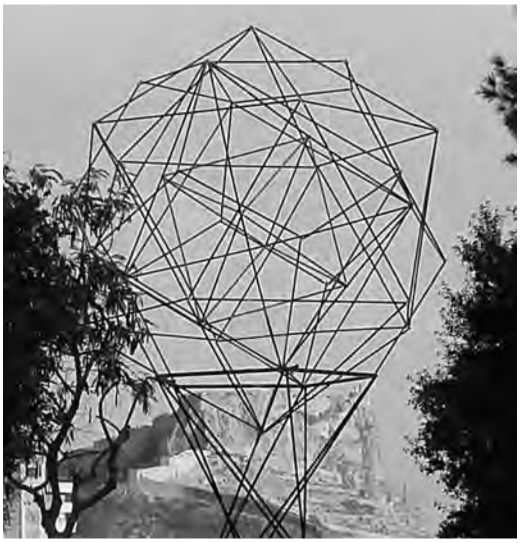


Figura 1

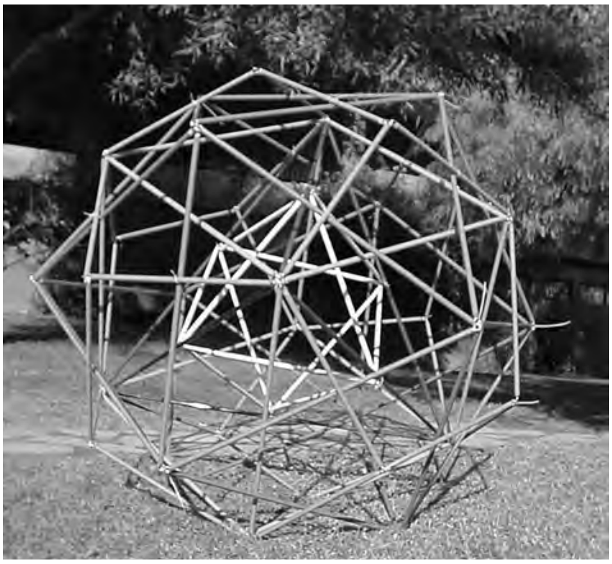


Figura 2

que van por el exterior –el dodecaedro y el icosaedro– hay que aplicar la proporción áurea, concepto que ha sido aplicado por científicos y artistas de todas las épocas. La proporción áurea es la relación geométrica que tienen en común la Pirámide de Keops en Egipto, el Partenón de Atenas, San Marcos en Venecia, Nôtre Dame en París o el edificio de las Naciones Unidas en Nueva York (figura 3). Las medidas para que estas inclusiones sean posibles se han tomado de los estudios de Pedro Puig Adam que, en su libro *Didáctica de la Matemática Moderna*, describe el proceso de construcción de esta estructura y aporta los datos necesarios. El propio profesor Puig Adam construyó un gran icosaedro en el patio de su instituto.

Las medidas para que estas inclusiones sean posibles se han tomado de los estudios de Pedro Puig Adam que, en su libro Didáctica de la Matemática Moderna*, describe el proceso de construcción de esta estructura y aporta los datos necesarios. El propio profesor Puig Adam construyó un gran icosaedro en el patio de su instituto.*

Figura 3

La adopción de la propuesta por el IES Leonardo da Vinci vino promovida por el significado tan especial que tiene para el instituto, ya que conecta con la obra de este genio. Como otros artistas del Renacimiento, Leonardo utilizó diseños en perspectiva de los poliedros en sus obras, pero su trabajo fue más lejos en la creación de dibujos de gran originalidad para los armazones de los poliedros en el libro *La divina proporción* de Luca Paccioli. Son los que llamó *abscisus vacuus* y en la figura 4 tenemos el diseño del dodecaedro.

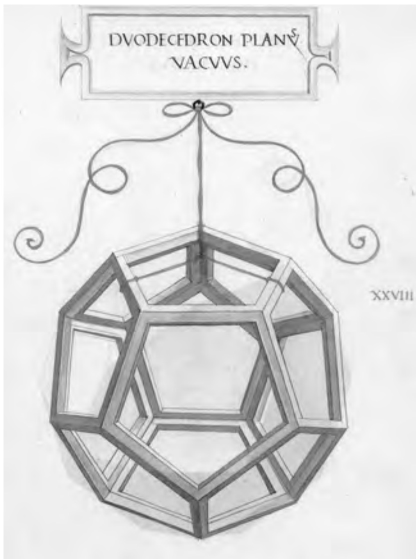


Figura 4

El omnipoliedro conecta con la obra de artistas alicantinos como Eusebio Sempere que legó a la ciudad de Alicante la escultura *Como una estrella*, también conocida como *Estrella Varada*, que se encuentra en uno de los cruces más concurridos de la ciudad (figura 5). En ella un dodecaedro regular está situado sobre un eje giratorio coincidente con uno de los ejes de rotación del poliedro que lo atraviesa por el centro de dos caras opuestas, mientras de cada cara surgen varillas de acero.

También hay otras obras que conectan con los sólidos platónicos: *Seccions Aurees* de los arquitectos Pérez y Frías en la avenida de Denia (figura 6) es una réplica del *Icosaedro en el Aire* de Buckmister Fuller de 12 metros de altura en la que se combina la rigidez de seis barras de hierro con seis tensores de acero que conectan los extremos de las barras según los vértices de un icosaedro regular con un resultado realmente espectacular, porque la estructura sólo se mantiene como la vemos bajo tensión, de hecho tres de las barras están en el aire.

En varias plazas nos encontramos fuentes con diseños geométricos, en los juegos infantiles de algunos parques de la ciudad podemos identificar un poliedro que, no siendo regular, le falta poco; es el sólido de Kelvin, que resultaría de cortar las seis esquinas a un octaedro para formar un poliedro con seis cuadrados y ocho hexágonos regulares (figura 7).

Edificios como la iglesia de Santiago en la playa de la Albufereta (figura 8) o el Museo de la Universidad de Alicante tienen mucho que ver con el cubo. También en el museo de la Asegurada tenemos esculturas de claro contenido geométrico de Eduardo Chillida, Víctor Vasarely, Julio González, Andreu Alfaro y el propio Eusebio Sempere.

Después de ver algunas conexiones de los poliedros regulares con la ciudad de Alicante, pasaremos a analizar algu-

El omnipoliedro conecta con la obra de artistas alicantinos como Eusebio Sempere que legó a la ciudad de Alicante la escultura Como una estrella*, también conocida como* Estrella Varada…

Figura 5

Figura 6

Figura 7

Figura 8

nas de las características del omnipoliedro construido. Para la elección de los colores de las barras se ha tenido en cuenta la simbología clásica que relacionaba los sólidos platónicos con los cuatro elementos por los que los griegos creían que estaba constituida la materia: tetraedro-fuego-rojo (que vemos en la figura 9 la ilustración de J. Kepler para su libro *Harmonice Mundi*) o icosaedro-agua-azul. Por otra parte, se ha atendido a la armonía cromática: el poliedro con menor presencia debe tener un color más luminoso que lo haga resaltar. Así, el octaedro, que sólo supone un 11% del total de las barras utilizadas, se ha pintado de color amarillo, mientras que el que más aparece, el icosaedro, supone el 40% y se ha pintado de color azul.

En los Talleres de Carrocería del IES Leonardo da Vinci se han estudiado distintas alternativas para la pintura del tubo de aluminio. Se resolvió el problema de la adherencia de la pintura mediante una imprimación, se pintó con una pistola de aerografía y el secado se consiguió con calor en cabina (figura 10).

El tamaño ha sido otra de las preocupaciones, debía ser grande para que se pueda apreciar en un espacio abierto, pero no tanto que impidiera su montaje con cierta facilidad, las dimensiones podían ser «humanas». Para la arista del cubo –y también del icosaedro–, se ha tomado una longitud igual a la media de estaturas de la población adulta española. El problema surgió con la obtención de esa medida, ya que no hay estadísticas en los organismos oficiales sobre las estaturas ni en las instancias a nivel nacional ni en las que corresponden a la Comunidad Valenciana. Hay algunos datos de las mediciones de los reemplazos que hacían el servicio militar, pero empiezan a estar anticuados y, lo que es aún peor, no tienen en cuenta la estatura de las mujeres. Por fin, encontramos algunas investigaciones médicas que estimaban, mediante la utilización de muestras, en 1,67 metros el promedio de estaturas de la población adulta española.

Una de las características más interesantes del omnipoliedro realizado es que puede ser desmontado para volverlo a construir.

Una de las características más interesantes del omnipoliedro realizado es que puede ser desmontado para volverlo a construir. Basta con cortar las bridas de plástico que realizan las uniones de los vértices (figura 11), soltar todas las varillas y realizar un nuevo montaje de la estructura. Así, la construcción se convierte en un diseño interactivo, término muy de moda en todo lo que envuelve a las nuevas tecnologías, y que aquí cobra especial relevancia al permitir la manipulación del omnipoliedro para desarrollar la imaginación y servir de vehículo para plantear preguntas e intentar encontrar las respuestas. Todos estos aspectos son fundamentales en la

Figura 9

Figura 10

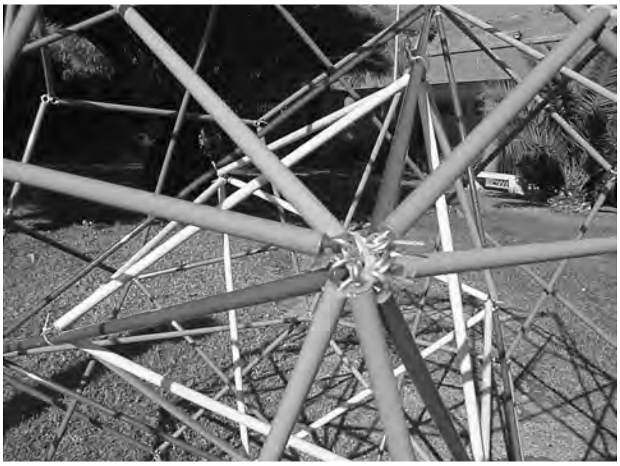


Figura 11

comprensión de las ideas y los métodos de las matemáticas.

A lo largo del trabajo de montaje (figuras 12, 13 y 14) los estudiantes pueden reflexionar sobre problemas de la geometría del espacio como la rigidez de ciertas estructuras y su utilización en las construcciones humanas, se estudian los planos de simetría y ejes de rotación comunes a dos o más poliedros, se analiza por qué se han tomado determinadas medidas para las barras, qué relación hay entre las caras, las aristas y los vértices de los poliedros –la fórmula de Euler–, o se piensa en el resultado de truncar los vértices de los poliedros regulares para obtener nuevos poliedros como el balón de fútbol y también abordar conceptos complejos como la dualidad. Podemos salirnos de los contenidos estrictamente geométricos e ir a otros campos para recordar en qué manifestaciones encontramos los poliedros y en qué objetos de uso cotidiano o construcciones de nuestra ciudad tenemos ejemplos de su utilización. También podemos tratarlo desde una perspectiva funcional y analizar el porqué de su utilización, encontraremos que unas veces los motivos son estéticos, para proporcionar belleza a los diseños, mientras otras son económicos o funcionales con el fin de obtener un mayor rendimiento de las construcciones. Podemos pasar al arte y estudiar la representación de los poliedros que hicieron los artistas del Renacimiento como una forma de dar armonía a sus composiciones y llegar a la obra de Maurits C. Escher, Salvador Dalí y Eusebio Sempere.

Figura 12

Figura 13

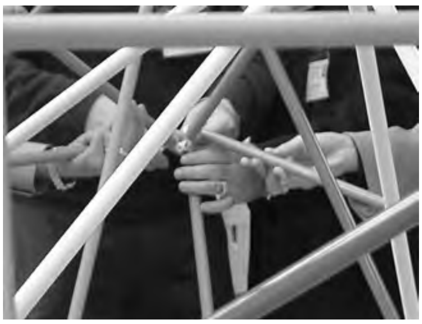


Figura 14

…y estudiar la representación de los poliedros que hicieron los artistas del Renacimiento como una forma de dar armonía a sus composiciones y llegar a la obra de Maurits C. Escher, Salvador Dalí y Eusebio Sempere.

Figura 15

La posibilidad de realizar el montaje del omnipoliedro se ha utilizado para una segunda fase en la colaboración entre la SEMCV «Al-Khwarizmi» y la Concejalía de Educación del Ayuntamiento de Alicante. En el curso 2000-2001 la SEMCV «Al Khwarizmi» ha firmado un segundo convenio por medio del cual se ha editado la guía didáctica *Un Omnipoliedro para el Monte Tossal de Alicante* (figura 16) y se ha diseñado una actividad educativa para que los profesores de matemáticas acompañen a los grupos de estudiantes a montar la estructura. Durante este curso participan cerca de mil alumnos en treinta grupos de quince centros educativos de la ciudad que imparten Secundaria. Para esto se ha construido

Figura 16

Figura 17

otro omnipoliedro algo más pequeño: la arista del cubo es de un metro de longitud, tiene dos metros de diámetro y 15 kilos de peso, que se guarda desmontado en el Parque Temático. La tarea consiste en que son los estudiantes los que construyen el omnipoliedro con la supervisión de un monitor.

La guía didáctica detalla el proceso que se ha seguido en el diseño del omnipoliedro y conecta el estudio de los poliedros con otros campos artísticos y científicos y con la utilización que los artistas alicantinos han hecho de ellos. Hay un capítulo dedicado al proceso de construcción en el que se relata el procedimiento para armar el omnipoliedro y los problemas que pueden surgir. También se ha elaborado un cuaderno para el estudiante con una colección de diez actividades para realizar en la clase de matemáticas con el fin de que la actividad de construcción del omnipoliedro se pueda enmarcar dentro del estudio que se realiza en la clase de Matemáticas en los cursos de Educación Secundaria.

En la figura 17 vemos el omnipoliedro que se ha instalado en el Monte Tossal. Se ha colocado sobre una base diseñada para la ocasión, está formada por dos pentágonos, uno de ellos anclado al suelo y el otro es el que sirve de soporte al omnipoliedro haciéndolo descansar sobre uno de los pentágonos del dodecaedro. La conexión entre los dos pentágonos se hace con barras que se cruzan uniendo sus vértices. En las instalaciones del Parque Temático se encuentran las noventa varillas de colores del segundo omnipoliedro preparadas para realizar la actividad educativa de construcción.

Se puede obtener información adicional acerca del modelo construido en la página de Internet:

http://teleline.terra.es/personal/joseantm/

allí se encuentra una secuencia fotográfica de la construcción realizada por los estudiantes del instituto Leonardo da Vinci.

José Antonio Mora
IES Leonardo da Vinci.
Alicante.
Societat d'Educació
Matemàtica de la Comunitat
Valenciana «Al-Khwarizmi»

Figura 18

SUMA 39
febrero 2002, pp. 83-93

Tres profesores de Matemáticas en el supermercado

Mercedes Rodríguez Sánchez
José María Chamoso Sánchez
William B. Rawson

IDEAS Y RECURSOS

Hay muchos factores que influyen en la existente actitud negativa generalizada hacia las Matemáticas. Uno de ellos puede ser la desconexión entre lo que se entiende por Matemáticas y la realidad cotidiana diaria. Por ello se quiere mostrar una forma de trabajo que considere el entorno circundante, concretamente en un supermercado. De esta forma, a partir de una situación real, se presenta una serie de actividades clasificadas según diferentes tópicos matemáticos. Para finalizar se ofrecen algunas sugerencias acerca de cómo se podían llevar actividades similares al aula con estudiantes, así como algunas conclusiones del trabajo efectuado.

ACERCAR las Matemáticas a la vida corriente

Unos puntos de vista

Existe una antipatía generalizada hacia las Matemáticas, no sólo entre los estudiantes sino en la sociedad en general. La mayor parte de las personas están de acuerdo en la importancia de tener una buena cultura, a lo cual consideran que contribuye la Geografía, la Historia, la Lengua, la Literatura, el Arte, los Idiomas, etc. Pero, sin embargo, muchos se preguntan: ¿para qué sirven las Matemáticas?, ¿para qué sirven las funciones, traslaciones, cónicas, matrices, polinomios…?

Para mucha gente las Matemáticas no forman parte de la cultura. Ven en ellas más los problemas que acarrean que los beneficios que proporcionan.

> Para muchos ciudadanos adultos el único signo de visibilidad que conceden a las Matemáticas es su carácter de obstáculo social. Sufrieron en la escuela un duro aprendizaje de conceptos y algoritmos a los que no concedían y no conceden interés ni utilidad más allá del ámbito escolar. (Herrero Pérez y Lorenzo Blanco, 1998)

Parece que los estudiantes tienen ese mismo sentimiento hacia las Matemáticas: no les gustan, no les encuentran sentido, no les parecen útiles… Las ven como algo ajeno, que se transmite de unas personas a otras (normalmente de profesor a alumno), y luego se olvidan y abandonan porque no son más que un lastre que no forma parte de la vida.

Sin embargo es evidente, al menos para los matemáticos, que las Matemáticas invaden nuestras vidas de un modo innegable en multitud de aspectos, tanto en la vida cotidiana, como ayuda o complemento a casi todas las ciencias, en la organización de cualquier empresa, en buena parte de la economía, en la tecnología e incluso en el arte.

Entonces, ¿por qué aparece esa aparente contradicción entre la invasión de las Matemáticas en la vida corriente de cualquier ciudadano y la percepción de éste de la escasa presencia de las mismas? Este fenómeno, la paradoja de la relevancia, describe la existencia simultánea de la relevancia objetiva con la irrelevancia subjetiva de las Matemáticas.

Esta irrelevancia subjetiva se puede ver en la supuesta separación entre las Matemáticas y la vida cotidiana. Muchos ciudadanos no ven relación entre las que aparecen en los centros educativos y libros de texto, y las de la vida ordinaria. Realmente no consideran su uso como familiar. Esto se debe, en parte, a la forma en que se han aprendido: siempre en clase, con un libro y en forma de lecciones del profesor. Es decir, son algo del aula. En la calle «no hay Matemáticas».

Sin embargo, los profesores de Matemáticas no podemos desentendernos de la responsabilidad de formar ciudadanos con una cultura general acorde con el estado de la civilización actual. Durante los años de enseñanza obligatoria el alumno debe ser instruido, junto con las técnicas corrientes específicas de cada materia y que son de utilidad inmediata para la vida laboral, en la cultura general que constituye la base de nuestro concepto actual del mundo (MEC 1992*a* y *b*). El NCTM (1991) recomendaba que los estudiantes estudiaran mayormente la misma matemática que se enseñaba pero con un enfoque distinto, de forma que los fines que deberían conseguir todos los alumnos en relación con la importancia de la instrucción matemática deberían ser: que aprendan a valorar la Matemática, que se sientan seguros de su capacidad de hacer Matemáticas, que lleguen a resolver problemas matemáticos, que aprendan a comunicarse matemáticamente y que aprendan a razonar matemáticamente.

Hay que tener en cuenta esas circunstancias. Quizás modificando la metodología de enseñanza se puedan cambiar las creencias existentes acerca de las Matemáticas. Se quiere trabajar de forma distinta para que dejen de ser algo aislado y se conviertan en parte de la sociedad. Con ello se intenta desmitificar la inutilidad de las mismas. En ese caso es fundamental el papel del profesor, porque en sus manos está la imagen que sus alumnos reciben de la materia, así como la forma de su utilización.

…¿por qué aparece esa aparente contradicción entre la invasión de las Matemáticas en la vida corriente de cualquier ciudadano y la percepción de éste de la escasa presencia de las mismas?

Una propuesta de enseñanza

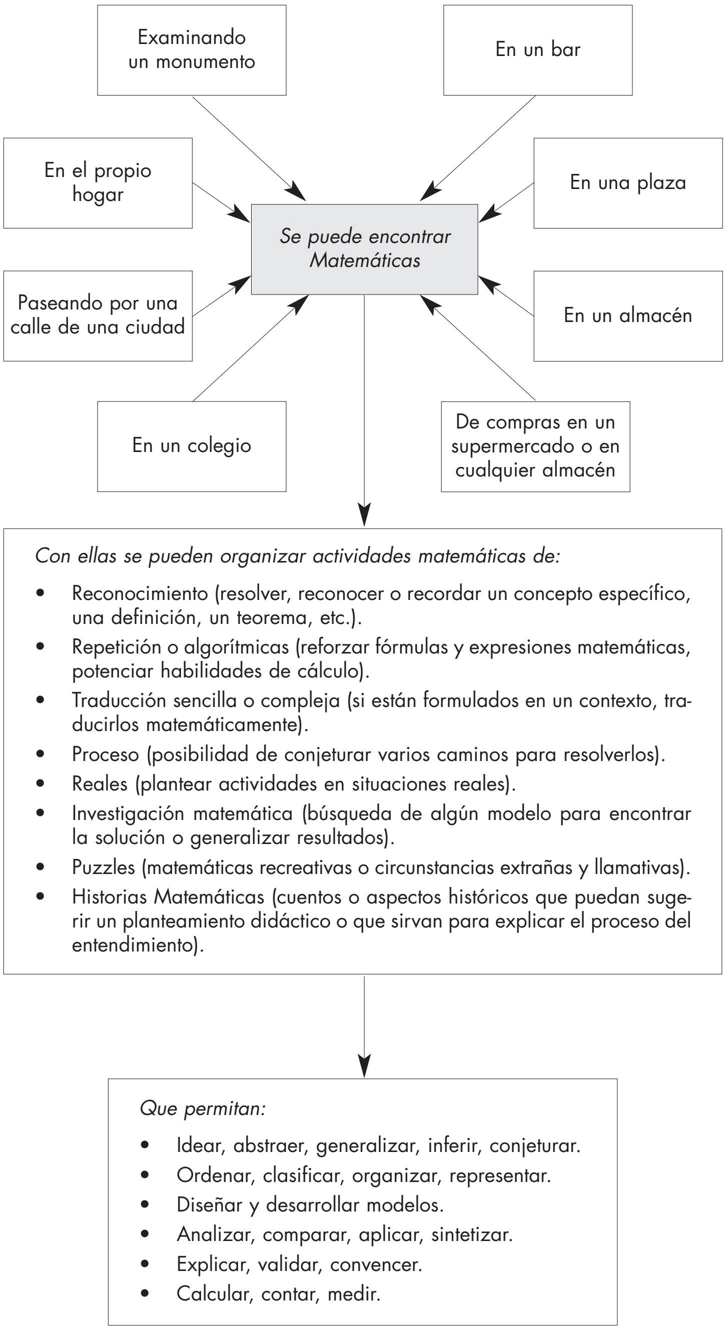
Los objetivos prioritarios son intentar conseguir una formación integral del estudiante a través de un aprendizaje significativo con el que se espera mejorar su rendimiento y su actitud. Esto se quiere hacer mediante una forma de enseñanza más abierta y participativa, más cercana a la calle y al ciudadano usual. Se espera que los alumnos se den cuenta de que lo que estudian en el aula existe realmente fuera de ella. Es decir, se desea que entiendan el mundo a través de las Matemáticas.

Y para ello pretendemos buscar situaciones cercanas a la vida diaria que sean enriquecedoras, es decir, que tengan en cuenta las experiencias previas y los diferentes intereses, y permitan encontrar actividades para el disfrute, la motivación y el estímulo. De esa forma las Matemáticas se convierten en algo cotidiano y familiar, algo que podemos encontrar en cualquier lugar y con lo que estamos conviviendo diariamente. Las Matemáticas pasarían de ser algo extraño a ser parte de la vida real, de la propia vida.

Es decir, más específicamente, con las Matemáticas queremos conseguir:

- Que sean parte de la vida real, de la sociedad y de la cultura.
- Hacerlas cercanas, útiles, interesantes, divertidas y cotidianas.
- Enculturar y dar sentido a contenidos matemáticos.
- Conseguir diferentes formas de presentación de una situación.
- Conectar actividades.
- Facilitar la exploración y expresión.
- Orientar y dar fluidez a las tareas.
- Desarrollar técnicas visuales y de recodificación.
- Construir relaciones sociales.
- Trabajar de forma cooperativa.
- Organizar discusiones.
- Desarrollar argumentaciones y razonamientos.
- Tratar la diversidad.
- Fomentar un espíritu de innovación y creatividad.
- Aprender de una forma diferente.

Y para ello queremos buscar las Matemáticas en la calle. Se dice que éstas se pueden encontrar en todas partes, pero queremos demostrar que realmente es así. De esa forma se quieren organizar una serie de actividades matemáticas que permitan conseguir los objetivos pretendidos, según el siguiente esquema:



Esquema 1. Actividades matemáticas

Con esas actividades estaríamos integrando las Matemáticas en el contexto del alumno, aumentando así su motivación y consiguiendo que adquirieran unos conocimientos más significativos y, por tanto, más duraderos. Es difícil recordar aquello que nos es ajeno. Sin embargo, resulta más sencillo recordar con lo que convivimos diariamente. Así, si integramos las Matemáticas en nuestra vida quizás no sea tan difícil entenderlas y recordarlas.

De compras en el supermercado

Con el propósito de poner en práctica nuestras ideas elegimos una forma de trabajo distinta que posteriormente se pudiera aplicar en el aula con los estudiantes. Ya se había realizado un trabajo similar rebuscando datos del entorno físico, social y cultural del estudiante, de forma que se pudieran desarrollar actividades matemáticas con contenidos de historia, arte, tradiciones, población, nivel cultural, etc., del lugar en el que viven. De esa forma se les anima a no dar la espalda a la abrumadora cantidad de cifras que les invade diariamente, y a que conozcan y se impliquen en la sociedad en la que viven (Chamoso, Rawson y Rodríguez, 1997).

Pero en esta ocasión los tres profesores decidimos ir al supermercado. Nos encaminamos hacia él y, una vez allí, cada uno se dirigió hacia lugares diferentes con lápiz y papel en mano. No era necesario mucho tiempo. Sólo el suficiente para descubrir que era posible encontrar material referido a diferentes aspectos matemáticos. Ése era nuestro objetivo.

Al cabo de media hora nos volvimos a reunir en la cafetería. Tomando un café ordenamos nuestras notas y empezamos a charlar sobre lo que cada uno había observado. Posteriormente clasificamos las sugerencias que habían aparecido en nuestro paseo individual, ahora ya globalmente en forma de problemas distribuidos en diversas secciones que se explican a continuación.

Observa el entorno

Nada más entrar en el supermercado, lo primero que pudimos ver fue la sección de flores. Sin embargo, tardamos en encontrar la sección del pan (estaba al fondo del establecimiento). ¿Sabrías explicar por qué?

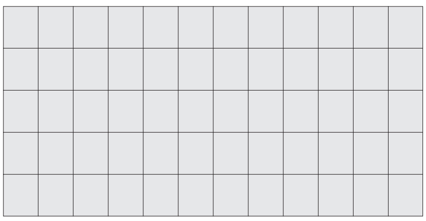
Junto o separado (numeración)

En la sección de frutería, las manzanas rojas se podían comprar en paquetes de 6, 4 o por unidades sueltas. Los precios del kilogramo eran 160, 245 y 199 pesetas respectivamente según las distintas situaciones (observa la sucesión). Si necesitara 6 manzanas, ¿qué debería comprar? ¿Y si quisiera únicamente 5? Y si me bastara con 4, ¿qué interesaría más? ¿Cuánto pagaría en cada caso? (un kilogramo contiene 4 manzanas aproximadamente).

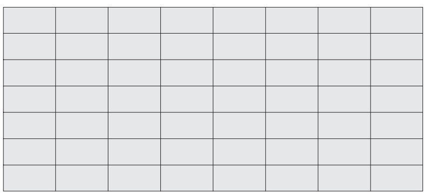
Operaciones con números

Números naturales

La mayor parte de los productos del supermercado estaban situados en estantes. Sin embargo los paquetes de azúcar de 1 kg estaban en palés rectangulares. Éstos estaban colocados tumbados de forma ordenada, rellenando diferentes capas del palé. Observando la capa inferior, la más cercana al suelo del supermercado, se veían, desde el exterior por la parte más estrecha del palé, la parte lateral que ocupa más espacio de 5 paquetes de azúcar tumbados y, por la parte más ancha del palé, la base de 12 paquetes de azúcar tumbados. En la capa inmediatamente superior los paquetes se habían ordenado, también tumbados, de forma perpendicular a los anteriores. En ésta se distinguían, también desde el exterior y por la parte más estrecha del palé, la base de 7 paquetes de azúcar y, por la parte más ancha del palé, la parte mayor de 8 (figura 1). En la capa tercera, empezando desde abajo, había tantos como en la más inferior y ordenados de la misma forma. Y así sucesivamente. ¿Por qué?



Capa inferior del palé (capa 1)



Capa 2 del palé

Figura 1

Desde el lateral se veían 14 alturas de las cuales las 3 últimas no estaban completas. Concretamente, en la capa 12 faltaba una fila de 12 (y por tanto también faltaba esa misma fila en las capas superiores). En la capa 13 faltaban, además, otros 5 paquetes de azúcar (y por tanto también en la superior). En la capa 14 faltaban 8 más que en la capa 13. ¿Cuántos paquetes de azúcar había en total? ¿Cuántos kilos suponen? Si el kilogramo de azúcar costaba 149 pesetas, ¿cuánto se podría obtener de la venta de todo el azúcar que había en ese momento en el palé?

Operaciones numéricas

Las Cajas Rojas de *Nestlé* estaban hechas de distinto material y tenían formas diferentes, así como distintos precios dependiendo de su tamaño y componentes. Se resumen en la siguiente tabla:

Forma	*Material*	*Peso (en gramos)*	*Precio (en pesetas)*
Rectangular	Cartón	800	2565
Oval	Hojalata	500	1805
Rectangular	Cartón	400	1360
Petaca	Hojalata	400	1445
Oval	Hojalata	250	1095
Rectangular	Cartón	200	745
Rectangular	Cartón	100	325

Tabla 1

Comprueba que salía más barato comprar 2 cajas de 100 gramos que 1 de 200. O 4 cajas de 100 gramos que 1 de 400, todo ello del mismo material. ¿Observas más circunstancias llamativas?

Comprueba que salía más barato comprar 2 cajas de 100 gramos que 1 de 200.

Propiedad conmutativa

Observamos los botes de suavizante *Lenor* que estaban colocados en los estantes. En uno de ellos se podía ver que ocupaban 7 filas con 4 botes cada una, mientras que en otro ocupaban 4 filas con 7 botes cada una. Si contábamos todos ellos, en ambos casos observábamos que ambas cantidades coincidían. Por tanto se verificaba la propiedad conmutativa.

Múltiplos y divisores

Las latas de comida para animales, todas de igual tamaño, estaban ordenadas en filas y columnas de la siguiente forma: la marca *Félix* ocupaba 4 filas y 6 columnas, *Cat Chow* completaba 3 filas y 4 columnas y una tercera, *Friskies*, 2 filas y 3 columnas. Calcula el área que rellenaba cada marca y observa que los resultados son múltiplos o divisores de 12. ¿Por qué? Halla el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor.

Sucesiones de números naturales

Los botes de mermelada *Bonne Maman* estaban colocados de forma llamativa, en filas con una unidad creciente en cada caso. Así, en la parte superior había 1 bote, en la inmediata inferior 2, en la siguiente hacia abajo 3, en la inferior a ésta 4 y en la más baja 5. Se observa que se trataba de una sucesión creciente de números, precisamente la de los números naturales: 1, 2, 3, 4 y 5. ¿Cuántos tarros había en total? No es difícil adivinar cuántos habría en cada fila si hubiera 9 filas, en vez de 5, manteniendo la misma ordenación; en ese caso, ¿cuántos envases habría en total? ¿Y si hubiese otro número cualquiera de filas de botes de mermelada colocados de la misma forma? ¿Se podría generalizar a cualquier número de filas?

Números enteros

En la sección de juegos estaba la lista de los más vendidos. Esta semana aparecía en primer lugar un cierto juego que la semana pasada ocupaba el tercer puesto. Sin embargo, el que la semana pasada estaba en primer lugar, en ésta se encontraba en el quinto. ¿Podrías explicar qué sucedió con ambos juegos en términos de números positivos y negativos? Se podría hacer algo similar con los demás juegos e incluso considerando más semanas.

Proporciones

Había diversas marcas de piña en rodajas. Se relacionan a continuación con sus respectivos precios y pesos:

Marca	*Peso (en gramos)*	*Precio (en pesetas)*
Del Monte	820	283
Carrefour	820	225
Dole	836	295
Del Monte	560	217
Carrefour	567	179
Dole	567	225

Tabla 2. Piña en rodajas

Señala si el precio de las diversas marcas guardaban relación similar entre los dos tamaños que presentaban cada una.

Proporciones

En la sección dedicada a periódicos y revistas se podía observar que, los que tenían fotografías de mayor tamaño, estaban situados en los estantes superiores, mientras que los que tenían más espacio reservado para la escritura estaban en los inferiores. ¿Por qué ocurría eso? Estudia el porcentaje de espacio que ocupan las fotografías en cada página de cada una de las diversas publicaciones (periódicos y revistas).

La mayor parte de las ofertas proporcionaban situaciones que permiten trabajar con fracciones y proporciones.

Ofertas

La mayor parte de las ofertas proporcionaban situaciones que permiten trabajar con fracciones y proporciones.

1

Según los artículos se observaba que unas veces la oferta se presentaba en forma de descuento global (por ejemplo, descuento de 100 pesetas), otras veces se hacía en forma de porcentaje (por ejemplo, descuento del 20 %) y otras en forma de fracción (por ejemplo, descuento de 1/3 del precio total).

Veamos algunas situaciones de cada tipo:

- 3 kg de patatas para freír costaban 299 pesetas, pero tenían un descuento de 100. Por tanto el precio final era 199 pesetas.
- Las bolsas de sopa *Knorr* de 84 g costaban 168 pesetas, pero tenían un descuento de 1/3. Por tanto el precio final era 112 pesetas.
- Los paquetes de spaghetti carbonara de 170 g estaban de oferta. Costaban 260 pesetas pero tenían un descuento del 20 %. Por tanto su precio final era 208 pesetas.

Sin hacer cuentas, ¿qué artículo piensas que tenía más descuento, la sopa o los spaghetti? ¿Y si comparamos la sopa con las patatas? ¿Y entre los tres artículos? (observa, por ejemplo, que si el precio inicial de las patatas fuese 300 pesetas entonces el descuento de las patatas y la sopa sería el mismo).

Rellena la siguiente tabla:

Precio inicial	*Descuento de 100 pesetas*	*Descuento de un 20 %*	*Descuento de 1/3*	*Mejor precio final*
Patatas				
Sopa				
Spaghetti				

Tabla 3

¿Hay un tipo de descuento que es más favorable para el cliente en todos los casos? ¿Eso ocurre con cualquier producto y cualquier cantidad? ¿Por qué?

2

Había otros tipos de descuento, como los de aquellos productos cuyos precios estaban «congelados por un año». Por ejemplo, un paquete de bolígrafos *BIC* costaba 195 pesetas durante un año. ¿Cómo se podía medir el descuento de ese producto? ¿Quizás considerando la subida del IPC anual?

3

Otras veces el descuento no era tal, sino que al comprar el producto entregaban, además, otro artículo diferente. Por ejemplo, al comprar el vídeo *Toy Story* regalaban un patinete. ¿Cómo se podía considerar ese tipo de descuento?

4

Una lavadora Balay costaba 77.900 pesetas pero en ese precio ya se incluía un descuento del 10 %. ¿Cuál era su precio inicial, antes de haber hecho ese descuento?

5

En un mismo estante había dos ofertas de cereales: cada caja de *Corn Flakes* de 750 g costaba 398 pesetas pero, al comprar 2 cajas, por la segunda sólo se pagaba la mitad. Las cajas de *Corn Flakes* de 500 g también estaban de oferta y costaban 315 pesetas cada una.

Si se comprase un solo paquete, ¿cuánto costaban 100 g en cada caso?

Teniendo en cuenta la primera oferta, ¿cuánto costaban 100 g de *Corn Flakes* si se compraran los 2 paquetes de 750 g?

Si se tuviese pensado comprar 1 kg, ¿qué se compraría para pagar lo menos posible?

Si la ración diaria que una persona suele tomar fuese de 50 g, ¿cuántos días le duraría la compra?

Supón que esa persona tuviese que realizar un viaje dentro de 11 días. ¿Qué cantidad sobraría si todo se desarrollara con normalidad? ¿Qué haría con ello si no pudiera llevárselo?

6

Una pizza de 8-10 raciones costaba 359 pesetas, pero tenía un 20 % de descuento. ¿Cuántas personas comerían gratis? Por otro lado, con una pizza se pueden tratar los conceptos de diámetro, radio, circunferencia, círculo, secante, cuerda, arco… Y, conocido el diámetro de la circunferencia, se pueden calcular longitudes de arco, áreas, etc.

Curiosidades y ofertas que no son tales

1

Los recambios de fregona estaban de oferta si se compraban en paquetes de 2. De esa forma se podía adquirir un paquete por 495 pesetas cuando antes costaban 575. Era una buena rebaja a no ser que uno se diese cuenta de que esos mismos recambios se podían comprar de forma individual a 230 pesetas cada uno.

2

La comida para gatos de *Kitekat* estaba en oferta: se anunciaba que comprando dos latas de 400 g te regalaban una bolsa de 100 g del mismo producto, todo ello al precio de 225 pesetas. Sin embargo 400 y 100 g costaban, comprándolos sueltos, 95 y 55 pesetas respectivamente. Comprueba que, efectivamente, salía más barato comprar todo junto que hacerlo de forma individual, pero que no era cierto que si se compraban dos latas de 400 gramos la bolsa de 100 fuese de regalo. Si únicamente se quisiesen las latas, ¿comprarías la oferta o las individuales? ¿Por qué?

3

Las toallitas húmedas tenían precios muy diversos dependiendo del número que contenían en cada envase. Referida a una misma marca, los paquetes de 24 y de 80 unidades costaban 175 y 299 pesetas respectivamente, una caja de 80 salía a 389 pesetas y un bote de 200 costaba 259 pesetas. ¿Qué llama la atención de toda esa información? Aparentemente no parece haber ninguna circunstancia que aclare ese extraño desajuste. ¿Se te ocurre alguna causa?

…con una pizza se pueden tratar los conceptos de diámetro, radio, circunferencia, círculo, secante, cuerda, arco… Y, conocido el diámetro de la circunferencia, se pueden calcular longitudes de arco, áreas, etc.

Medida-Volumen

1

Las patatas estaban muy bien colocadas. Había cajas grandes que contenían 3 pisos de cajas más pequeñas. Cada uno de esos pisos contenía 6 de esas cajitas. Cada cajita pesaba 750 g y costaba 60 pesetas.

Con los datos que hay, ¿qué unidad de medida se podría utilizar para calcular el volumen de la caja grande?

¿Cuánto pesaba el contenido de patatas de esa caja grande? ¿Cuál sería ahora la unidad de medida?

¿Cuánto costaba esa caja grande? Y ahora, ¿cuál sería la unidad de medida?

2

Los cartones de leche nos hicieron pensar en la superficie exterior del tetrabrik. ¿Qué cantidad de cartón se necesitaría para envasar 300 litros de leche en cartones de 1 l? ¿Y en cartones de 2 l? ¿Hay mucha variación entre uno y otro? ¿En qué sentido? ¿Por qué?

3

A muchos niños les gustan los chicles. Había dos cajas de igual tamaño y, en ambas, se podía ver que contenían 2 filas, cada fila con 5 paquetes de chicles. Pero observamos que en una de las cajas cada paquete tenía 5 chicles, mientras que en la otra cada uno tenía 7. Observando con mayor detalle descubrimos que la caja que contenía los paquetes de 5 chicles tenía 3 pisos, mientras que la otra tenía 2.

Si te dejasen elegir una de las dos cajas, ¿cuál elegirías? ¿Por qué? ¿Cuál tenía más chicles?

Conversiones

1

En casi todos los artículos estaban marcados los precios de dos formas diferentes: en pesetas y en euros. Veamos un ejemplo. Los discos que se introducen en las barras para hacer pesas y ejercitar los músculos estaban colocados, unos encima de otros, en columnas verticales según su tamaño y su peso.

…a partir de la equivalencia marcada en un producto, sería interesante calcular la equivalencia entre peseta y euro.

Peso (en kg)	*N.° de columnas de ese tipo de discos*	*N.° de discos en cada columna*	*Precio de cada disco (en pesetas)*	*Precio de cada disco (en euros)*
0,5	2	18 y 3	130	0,7
1	3	3, 6 y 11	280	1,68
2	1	6	530	3,1
3	3	13, 4 y 6	795	4,7
4	1	14	995	5,98
5	3	13, 13 y 3	1090	6,55
20	2	13 y 2	4635	27,8

Tabla 4

¿Es correcta la equivalencia a euros en todos los casos? ¿Cuánto vale un euro? Si no lo sabes, ¿cómo podrías saberlo con esos datos?

Es decir, a partir de la equivalencia marcada en un producto, sería interesante calcular la equivalencia entre peseta y euro. Después se puede comprobar en otros casos.

Si se quiere empezar a hacer pesas inicialmente con 2 kg a cada lado de la barra, ¿qué discos interesa comprar? ¿Qué punto de vista has seguido? ¿Por qué?

2

Al fijarse en la equivalencia entre euros y pesetas alguien comentó la diferencia de capital que se conseguiría entre ingresar 1 peseta en un banco un millón de veces o hacerlo con 1 millón de pesetas en una sola operación (se sabe que, en la actualidad, en el ingreso bancario no figura el dinero en pesetas sino su equivalente en euros). Recuerda que en los bancos se hace la correspondencia directa en euros, considerando únicamente dos cifras decimales. Comprueba que hay una diferencia superior a medio millón de pesetas de un caso a otro. ¿Es cierto que se conseguiría la misma anotación en la libreta si se ingresase 1 peseta que si se ingresase 2?

El resultado anterior, ¿demuestra que los dirigentes económicos europeos cometieron un error en sus directrices generales de cambio? ¿Es factible realizar 1 millón de operaciones bancarias? Estima cuánto tiempo se emplearía en ello.

166,386 pesetas = 1 euro.

Escalas

1

En la sección de quesos pudimos descubrir que los había de distintos tipos y que cada uno tenía un precio. Si se refiere a la marca de un determinado producto, los precios eran los siguientes:

	Tierno	*Semicurado*	*Curado*	*Extra*
Pesetas por kg	1175	1395	1795	1995

Tabla 5

Organiza una escala para catalogar los quesos. Según tu escala, ¿qué lugar ocupaba el semicurado? ¿Y el tierno?

¿Sabrías escribir otra escala distinta con otro criterio?

El queso extra estaba de oferta pues costaba sólo 797 pesetas los 500 g. Ese dato, ¿cambiaría el orden de las diversas escalas que has elegido?

2

Según estábamos tomando café, Bill se refirió al ruido que había en la cafetería. Dijo que lo puntuaría con un 3. ¿Había mucho o poco ruido?

Nos preguntó si estábamos de acuerdo con dicha puntuación y cuál sería la nuestra. No supimos contestar. ¿Por qué?

¿Que ocurriría con la puntuación de Bill si utilizó una escala de 0 a 6? ¿Y si fuese de 1 a 10? ¿Y de 0 a 3?

3

Era curioso observar las distancias entre las estanterías de las distintas secciones. Por ejemplo, en la sección de moda la distancia era de 6 baldosas, en la de alimentación 9, en la de bebidas 11, en la de aseo 6 y en los cajeros 3,5. ¿Sabrías encontrar alguna explicación para estas cantidades?

Estimación

1

¿Cuántos días duraría una caja de galletas de 200 g si cada día comieses 4 galletas? Recuerda que los sábados y domingos sueles comer 6.

2

La receta para hacer una tarta indica que se necesita emplear 150 g de azúcar, pero no hay posibilidad de utilizar una báscula. ¿Cómo se podría calcular cuántas cucharadas de azúcar se deben poner?

3

El papel higiénico se vendía en paquetes de 12, 18, 24 y 32 rollos. Lo que más nos llamó la atención es que, en todos los casos, tenían los paquetes envueltos en plástico según las siguientes ordenaciones respectivas: 2 pisos de 2 x 3, 3 pisos de 2 x 3, 3 pisos de 2 x 4, 4 pisos de 2 x 4. ¿Qué sugieren esos datos? Observa distintas formas de empaquetarlo e investiga cuál utiliza menos plástico como envoltorio.

Organización de la información

1

En la sección de moda estuvimos observando camisas. Las tallas eran S (pequeña), M (mediana), L (grande) y XL (extra-grande). Todas estaban desordenadas, y al ordenarlas vimos que había 4 de la M, 5 de la L y 1 de la XL. No había ninguna de la S. ¿Sabrías calcular la media, la mediana y la moda?

2

Siguiendo con la moda, en la sección infantil había carteles para las tallas que indicaban que los niños de 4-5 años miden 110 cm de alto y 58 cm de ancho, mientras que los de 5-6 años miden 116 cm de alto y 60 cm de ancho. Se supone que estas medidas se obtuvieron después de hacer un promedio. ¿Podrías decir si son acertadas? Por ejemplo, observa a los niños de tu colegio y contesta si son ciertas.

3

Observando los datos del ejercicio 1 del apartado de conversiones, el que se refiere a los discos para hacer pesas, y sin utilizar lápiz ni papel, ¿cómo se podría calcular la media, la mediana y la moda de los discos en sus diferentes modalidades? ¿Qué resultados se obtendrían?

Era curioso observar las distancias entre las estanterías de las distintas secciones.

Funciones

1

Los huevos estaban empaquetados según diferentes cantidades y según distinto tamaño. Se vendían en paquetes de 6, 12 o 18 huevos. Y, según su tamaño, en pequeños, medianos o grandes. Así, por ejemplo, un paquete de 6 huevos medianos costaba 96 pesetas, uno de 12 suponía 180 y uno de 18 era 252. ¿Cuánto valdría una unidad en cada caso?

Escribe la información en forma de tabla e intenta extrapolar el valor de una caja de 15 huevos, en caso de que existiera, así como el precio por unidad en esa situación. Representa gráficamente la situación. Escribe una función que la describa.

2

Las mesas-camilla tenían diferentes precios dependiendo de la medida del diámetro del círculo de su tablero superior. Así:

Diámetro del tablero (en cm)	*Precio (en pesetas)*
40	1650
50	1695
60	2950
70	3250
90	3995

Tabla 6

El precio de cada mesa-camilla, ¿era proporcional a la medida del diámetro de cada tablero superior? Para comprobarlo representa una función que asigne a cada mesa, según su diámetro, el precio que tenía marcado. ¿Es una función lineal definida por una recta? ¿Por qué?

3

Los precios de los rellenos nórdicos variaban dependiendo de sus tamaños según la siguiente tabla:

Medida del relleno nórdico (en cm)	*Precio sin descuento (en pesetas)*	*Precio con descuento (en pesetas)*
150 x 200	9995	7995
200 x 220	13995	11195
220 x 240	15995	12795

Tabla 7

¿Qué significan esas medidas dadas en forma de 150 x 200? ¿Son medidas lineales o de superficie? El resultado de ese producto, ¿en qué unidades se daría?

Representa una función que asigne a cada relleno nórdico, dependiendo de sus medidas, su precio sin descuento. Representa otra que asigne a cada relleno nórdico, dependiendo de sus medidas, su precio con descuento. Observa ambas funciones. ¿Existe alguna relación entre ellas? Si cada una de ellas definiese una recta y ambas fuesen paralelas, ¿qué significaría eso?

4

Había muchos tipos de pan y sus precios eran distintos. Así una cantidad de 250 g costaba, según el tipo de pan y en pesetas, 55 (rosco castellano), 65 (sin sal), 75 (fabiola), 85 (espiga), 91 (pagés), 95 (libreta), 135 (cereales) y 135 (centeno).

Si cada persona comiera dos rebanadas diarias de media, escribe una función que represente el gasto diario en pan de una familia según la clase de pan que coma y el número de miembros de la familia. Represéntalo gráficamente.

El primer artículo en tener un código de barras fue el chicle Wrigley.

Observando la gráfica, ¿cuánto gastaría diariamente una familia de 4 miembros en pan? ¿Y al mes? ¿Y al año?

Teoría de colas

1

El supermercado tenía 22 cajas para cobrar. Fuimos un martes normal y a las 11:00 sólo había 11 abiertas. ¿Cuándo crees que habría abiertas más cajas? ¿Y menos? ¿Por qué?

En la caja del supermercado

Al terminar, uno de los profesores tenía que pasar por caja para abonar unas cuantas cosas que quería comprar. Los otros dos decidieron acompañarle. Mientras se dirigían hacia allí comentó que se había dado cuenta cómo todo supermercado plantea multitud de posibilidades, aunque varía de unos a otros.

Mientras esperaban en la cola, otro de los docentes dijo que siempre le gustaban las cajas de los supermercados, pues se imponía el reto de organizar y guardar los productos en bolsas de plástico de forma suficientemente rápida para llevar el ritmo del *bip* del escáner cuando el género pasa por él. Éste es un láser que lee códigos de barras, un fenómeno común que ocurre en la mayoría de los supermercados de todo el mundo.

El profesor contó que el código de barras actual tiene su origen en 1948. En esas fechas se dice que un estudiante licenciado en el Instituto Tecnológico de Drexel (Filadelfia), Plata de Bernardun, escuchó casualmente una conversación al presidente de una cadena alimenticia local. Pedía a uno de sus trabajadores que investigara un sistema automático para obtener información en la caja registradora de cada uno de los productos. Plata se lo dijo a su amigo Joseph Woodland Normando, que se puso a trabajar en el problema.

El primer escáner fue el denominado Producto Universal Codificado (UPC) y se instaló en los supermercados *Pantano* en Troy (Ohio) en 1974. El primer artículo en tener un código de barras fue el chicle *Wrigley*. Hoy este código es tan familiar que aparece en los productos que encontramos en los estantes de las tiendas de todas partes del mundo. Aquí hay una muestra de algunos de los números de los productos que compramos. Por ejemplo, las bolsas con 4 paquetes de chicles *Orbit* de menta sin azúcar tenían 4 009900 012683 (mientras que cada paquete interior tenía código 5017 3204); *Mini Tostas BIMBO* 8 000270 018004; desodorante en crema *Lancaster* 3 414200 068635; *Laca fijación sana de Pantene Pro-V* 5 601059 481847; yogurt *Danone Vitalínea* 8410 5806.

Algo que enseguida observamos en estos códigos es que son diferentes unos de otros. El espesor de las líneas varía. Esto parece obvio porque pertenecen a distintos artículos como galletas y chicles. Los números también son diferentes. Algunos códigos empiezan con 8; otros con 5, 4, 3, etc. Parece claro que cada número se corresponde con un único producto.

Los ejemplos anteriores muestran diferentes códigos de barras de 8 y 13 dígitos. Son un ejemplo del Número del Artículo Europeo (EAN), una adaptación del UPC. Proporcionan información acerca del fabricante y el producto, así como un sistema que asegura que el escáner ha leído correctamente el número del código.

Seleccionar un código cualquiera nos permite explorar la importancia de los números y barras paralelas. ¡Esto debe llevar más tiempo que el fragmento de segundo que dedica el escáner! Por ejemplo, el código 8 410128 000318 tiene 3 pares de barras paralelas delgadas en la parte izquierda, centro y derecha del código. Son ligeramente más largas que el resto y actúan como barras control. Los números son «de lectura humana» y no son examinados por el láser. Por cierto, los números de la izquierda y derecha de las barras del centro tienen diferente codificación.

Seleccionar un código cualquiera nos permite explorar la importancia de los números y barras paralelas.

El último dígito es importante porque se elige para comprobar que el láser del escáner ha leído el resto del número correctamente. Para llevar esto a cabo la computadora hace el cálculo que se detalla a continuación de forma que, si la lectura es correcta, el resultado es divisible por 10.

Empezando por el lado derecho, pero sin contar el dígito de control, se suman los números alternativos y se multiplican por 3:

$$(1 + 0 + 0 + 2 + 0 + 4) \times 3 = 21.$$

Se suman los números restantes excluyendo el dígito de control:

$$(3 + 0 + 8 + 1 + 1 + 8) = 21.$$

Se suman ambos totales:

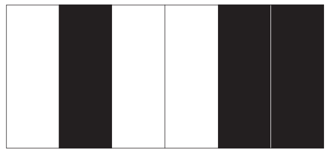
$$21 + 21 = 42$$

Y finalmente se agrega el dígito de control a ese total,

$$42 + 8 = 50$$

que es un número divisible por 10.

Un examen más profundo de la organización de las líneas paralelas revelará su estructura básica. Cada dígito, excepto el primero, se representa con un par de líneas que varían en anchura y espaciado. El escáner del láser lee cada línea espaciando. Cada par de líneas para cada dígito ocupa un espacio que tiene siete unidades de ancho. Este código se compone de negro (*n*) y luz (*l*) dentro de estos siete espacios. Por ejemplo, el dígito 4 es *lnllnn*:



Se puede decir mucho más sobre la estructura de los códigos de barras. Y no digamos sobre los tiques de compra que había en las papeleras de las cajeras. Y sobre otras muchas cosas. Pero era nuestro turno y estaba sonando el *bip* según se acercaban al escáner los productos que queríamos comprar.

Conclusiones

Se observa que surgieron actividades de muy diverso tipo. Entre ellas elijamos algún ejemplo de cada una siguiendo el esquema anterior, aunque muchas podrían pertenecer a varias clases:

- *Reconocimiento:* 1 y 3 de Organización de la información.
- *Algoritmos*: 2 y 7 de Operaciones con números.
- *Traducción simple o compleja*: 2 de Medida-Volumen.
- *Procesos*: 2 de Estimación.
- *Situaciones reales*: 4 de Operaciones con números y 5 de Ofertas.
- *Investigación matemática*: 3 de Estimación y 5 de Operaciones con números.
- *Puzzles*: 1 y 3 de Curiosidades y ofertas que no son tales.
- *Historias matemáticas*: En la caja del supermercado.

Ahora falta lo más importante: llevarlo al aula con estudiantes para ver si realmente se consiguen los objetivos que se pretenden. ¿Cómo se podría hacer?

Una posibilidad podría ser realizando rutas matemáticas. Diversos autores se refieren a las ventajas de trabajar de esa forma (Cross, 1997). Se trataría de organizar una serie de actividades matemáticas en la calle o en un cierto entorno concreto, normalmente fuera del aula, que faciliten conseguir ciertos conocimientos a los estudiantes. El objetivo es convertir las Matemáticas en algo cotidiano y familiar, algo que se puede encontrar en cualquier lugar y con lo que se convive diariamente. Las Matemáticas pasarían de ser algo extraño a ser parte de la vida real, de la propia vida (Rawson, 1990; Rawson y Chamoso, 1998).

Se pueden plantear distintas formas de hacer una ruta:

- Pasear y discutir sobre cualquier aspecto que se vea con relación a las Matemáticas.
- Ir a sitios concretos, marcados previamente para ver cosas determinadas.
- Hacerla basándose en un tema concreto: por ejemplo, la proporcionalidad.
- Mirar los objetivos de la unidad didáctica que se está trabajando y usar la ruta para conseguirlos.
- Hacer la ruta, anotar todo lo que se ocurra y posteriormente observar si se cumplen los objetivos iniciales.

Se pueden hacer fuera del aula, o en clase simplemente discutiendo sobre fotografías o un vídeo hecho por el profesor o un alumno. Se pueden utilizar para presentar una unidad o para afianzar conceptos. O de muchas otras formas. Pero, si se decidiese trabajar de esa manera, antes de organizar la ruta sería fundamental tener en cuenta las características y edades de los estudiantes a los que se vaya a dirigir, la parte de las Matemáticas sobre las que se quiere hacer hincapié, el tiempo del que se dispone y las personas que van a ayudar a supervisar el trabajo de los alumnos.

El objetivo es convertir las Matemáticas en algo cotidiano y familiar, algo que se puede encontrar en cualquier lugar y con lo que se convive diariamente.

Una vez analizado todo lo anterior, habrá que organizar cómo se quiere desarrollar el trabajo. Se decide si los estudiantes lo van a hacer de forma individual o en grupo (en este caso habría que considerar el número de miembros de cada uno de ellos), cómo se va a enfocar la supervisión, el material necesario, y cómo se completará el trabajo de la ruta en sesiones posteriores en el aula (Ashworth, Cobden, y Johns, 1991, dan algunas sugerencias concretas para ello).

Para terminar, sólo un apunte acerca de la denominada «paradoja de la relevancia». ¿Qué significan esas quejas acerca de la importancia de las funciones, las traslaciones, las cónicas, las matrices, los polinomios…? Hay una diferencia entre el profesor y el estudiante. El primero conoce la importancia del conocimiento y uso, por ejemplo, de las matrices, mientras que el segundo no lo sabe. Las Matemáticas que se enseñan en el aula tienen su significado en situaciones de la vida cotidiana. Este artículo trata de explicar esa relevancia. Y el deber del docente es buscar formas para poder demostrar que eso es así. Aunque puede ser distinto en las Matemáticas superiores, cuyo significado y trascendencia es, en ocasiones, desconocido por los investigadores, aunque esperen que otras generaciones posteriores consigan profundizar y aplicar su trabajo.

Mercedes Rodríguez
EU Magisterio. Zamora.
Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas
José María Chamoso
Facultad de Educación.
Universidad de Salamanca.
Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas
William B. Rawson
Lecturer in Mathematics Education.
School od Education.
University de Exeter.

Referencias bibliográficas

ASHWORTH, F., D. COBDEN y J. JOHNS (1991): «Maths Trailing in Dorset», *Mathematics in School*, enero 1991, 2-7.

CHAMOSO, J.M.ª, W.B. RAWSON y M. RODRÍGUEZ (1997): «Conocimiento de Toro, investigando sus cifras en el aula de Matemáticas», *AULA*, Universidad de Salamanca, 421-436.

CROSS, R. (1997): «Developing Maths Trails», *Mathematics Teaching*, n.° 158, 38-39.

HERRERO PÉREZ, J.L. y J. LORENZO BLANCO (1998): «La invisibilidad de las Matemáticas», *Suma*, n.° 28, 27-30.

MEC (1992): *Primaria. Área de Matemáticas*, Secretaría de Estado de Educación, Madrid.

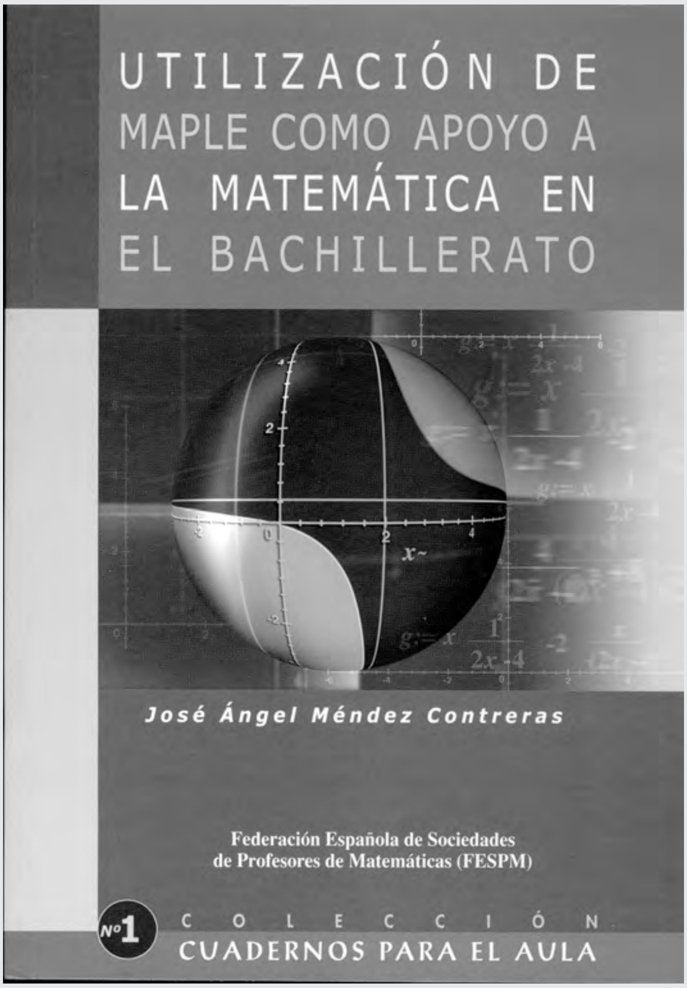
MEC (1992): *Secundaria Obligatoria. Área de Matemáticas*, Secretaría de Estado de Educación, Madrid.

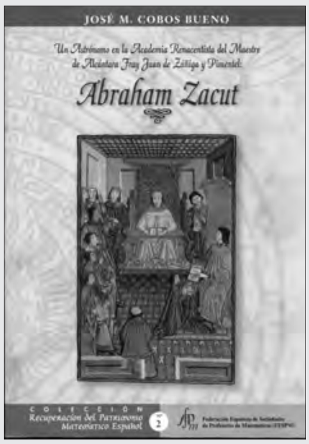
N.C.T.M. (1991): *Estándares curriculares y de la evaluación para la Educación Matemática*, Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales», Sevilla.

RAWSON, W.B. (1990): «Trails on Trial», *Mathematics in School*, marzo 1990, 2-5.

RAWSON, W.B., y J.M.ª CHAMOSO (1998): «Ruta matemática en Toro», *Actas V Seminario Regional Castellano-Leonés de Educación Matemática (Toro)*, 259-271.

PUBLICACIONES DE LA FEDERACIÓN





SUMA 39
febrero 2002, pp. 95-97

El grabado prehistórico de la cueva de Calafí Vell (Menorca) y la rectificación del círculo

Vicente Ibáñez Orts

Este breve artículo pretende únicamente que la comunidad matemática conozca la existencia de un enigmático grabado rupestre de carácter inciso que existe en una cueva de enterramiento menorquina, en el predio de Calafí Vell (Alayor). La figura está formada por rectas y arcos de círculo, y hasta la fecha, nadie le ha pretendido buscar una explicación que se pueda llamar matemática. A nuestro modo de ver se trata de un intento de rectificar el círculo, lo que supone que la persona que la trazó conocía el valor del número π.

MISCELÁNEA

LOS GRABADOS e ideogramas de carácter inciso que se encuentran en las paredes de algunas cuevas de enterramiento menorquinas son de muy diversos tipos. Entre ellos destacan los de carácter geométrico, siendo algunos de ellos muy elaborados y complejos. La mayoría los descubrió el incansable e intrépido investigador Mascaró Pasarius en el año 1952, comenzando por el ideograma de la Cova de s´Encantament, situada en la finca de Biniguarda Vell (Alayor). Sus resultados los publicó en periódicos y revistas locales, y en Mascaró (1953). Desde aquellas lejanas fechas nadie les ha prestado una atención que pudiéramos llamar matemática, y ello a pesar de que algunos de estos grabados están constituidos por rectas, curvas y círculos que se prestan fácilmente a dar una interpretación geométrica de los mismos.

Sobre todos ellos persiste el grave problema de su cronología, si bien para los realizados con esta técnica la fina pátina calcárea que recubre la incisión parece corroborar su antigüedad. Algo más tarde, el propio Mascaró (1983) contradice su primera opinión, que proponía para todos una datación prehistórica, y matiza esta consideración, especialmente para los de aspecto cruciforme y, al igual que otros muchos investigadores coetáneos, sitúa estos dibujos incluso en época medieval.

El sorprendente grabado geométrico que vamos a comentar se encuentra en una cueva del predio de Calafí Vell. Este «lloc» está en la margen izquierda de la carretera que de Ferreries va a Cala Galdana. La cueva se debe de encontrar mas allá de la casa predial y debe de ser una de las muchas que bordean el límite de la finca con el barranco de Trebalúger, ya que en dicho punto hay un pequeño altozano rocoso horadado de cuevas y rodeado de maleza. Mascaró se limita a indicar que dicho grabado está en esa finca de labor, sin concretar más su ubicación. A pesar de nuestros intentos, no lo hemos podido localizar y, por tanto, nos basamos únicamente en el dibujo que de él realizo Mascaró y que se recoge en la publicación citada, en la que viene identificado con el número 3.

El grabado es realmente enigmático, como puede observar el lector en la figura 1. En él aparecen dos cuadrantes de círculo concéntricos, cuyo centro en el dibujo inferior hemos marcado con la letra *A*. En el punto que hemos denominado *O* puede observarse una cruz de lados desiguales, cuyo ramal derecho se prolonga ingrávido en el vacío de una manera exagerada y misteriosa. Intrigante es, así mismo, el segmento inclinado que parte de *A* y que forma con la recta *AB* un ángulo de 21°. Dado que no lo hemos podido visitar personalmente, todo lo que vamos a especular sobre él está sujeto a este grave inconveniente y forzosamente nos hemos de fiar de la exactitud de la copia que sacó Mascaró. Al menos en la Cova de s'Encantament cuyo ideograma central sí que conocemos, y que representa una estrella de cinco puntas frente a la que hay arrodillado un hombre desnudo y esquemático con cabeza de triángulo, esta correspondencia entre la reproducción y la realidad es buena.

En el dibujo se aprecia que el radio del cuadrante del círculo interior es la mitad del mayor. Ambos deberán trazarse completamente para intentar comprender el problema geométrico que ocultan. La circunferencia mayor con centro en *A* es tangente a la recta *DE* en el punto *O*. Se aprecia que esta recta DE es igual al diámetro de dicho círculo, pero está ligeramente desplazada hacia la parte inferior. Si el segmento *AG* se gira 90°, obtenemos la recta *AH*,

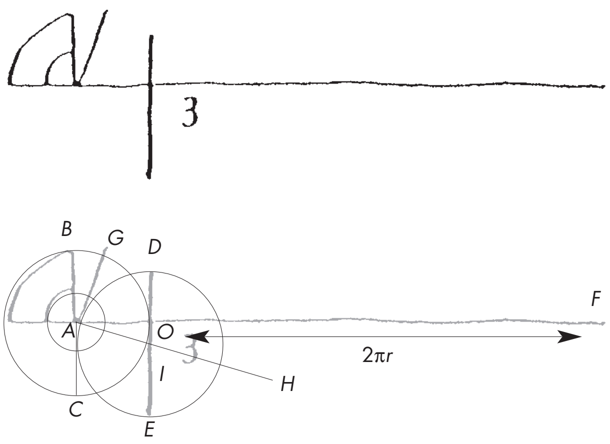


Figura 1.
Parte superior: grabado rupestre inciso de carácter geométrico que se encuentra en la pared de una cueva de Calafí Vell, Mascaró (1953).
Parte inferior: reconstrucción hipotética de la figura geométrica del grabado anterior. Según este modelo se trataría de un método para rectificar el círculo.
El segmento *OF* correspondería a la longitud de la circunferencia de centro *A* y diámetro *BC*.

Para nosotros esta figura geométrica representa un intento de «rectificar el círculo», esto es, tratar de extender sobre una línea recta la longitud de una circunferencia.

que corta a la recta *DE* en el punto *I*. A su vez, con centro en este punto se puede trazar una circunferencia cuyo diámetro es el segmento DE. Por tanto, ambos círculos son iguales. Faltaría, únicamente, un último paso que consistiría en trazar correctamente el enigmático segmento *OF*.

Para nosotros esta figura geométrica representa un intento de «rectificar el círculo», esto es, tratar de extender sobre una línea recta la longitud de una circunferencia. Obviamente esta operación matemática de desenrollar un círculo es imposible, ya que por ser el número π un número trascendente, no existe solución al problema de encontrar un segmento que mida exactamente esta longitud. Como es conocido, en el mundo helénico este problema se enunciaba como la cuadratura del círculo, a saber, encontrar un cuadrado cuya superficie coincidiera exactamente con el área de una circunferencia dada. Si bien el problema no tiene solución, no siempre se ha sabido que esto era así, por lo que numerosas inteligencias se han desvelado en encontrar soluciones geométricas aproximadas que resuelvan este problema con razonable precisión, llegando incluso en muchos casos a pensar que lo habían resuelto correctamente. Para nosotros, el segmento *OF* que se prolonga excesivamente hacia la derecha del punto *O*, casi en el espacio tenebroso, es justamente la longitud del círculo cuyo centro es *A*, y presupone el conocimiento del mismísimo número π. De hecho, si Mascaró trazó a escala su dibujo, y sobre él se mide el segmento *BC*, y esta longitud se multiplica por 3,14, se obtiene el segmento *OF*. Es una hipótesis razonable, y de ser así, el enigma de quién y cuándo se trazó esta figura es interesante y crucial. Además, hay que tener presente que el grabado está realizado de manera tal que lo debe interpretar el espectador. Es él quien debe reflexionar para completar los círculos y conjeturar que el segmento de la parte derecha es la rectificación del mayor. Siendo esto así, ¿quién lo pudo dibujar? Dado que Pitágoras falleció alrededor del año 500 a. C. y que la destrucción de su escuela y la diáspora de sus seguidores se produjo hacia el año 450 a. C., tras la matanza de Metaponto, al menos podemos arriesgarnos a tomar esta fecha como límite superior.

Frente a la hipótesis de que el ideograma de la Cova de s'Encantament representa una estrella de cinco puntas o pentagrama, formada por las diagonales de un pentágono regular, símbolo y emblema de la escuela pitagórica, o cualquier otra explicación estelar o iniciatica, y dado que también aparecen pentágonos estrellados en las jambas del portal de entrada de la Cova de Santa Ana (Mahón) y en Alcaidús de Dalt, lo que podría suponer algún tipo de contacto entre miembros de la escuela pitagórica y Menorca en los siglos IV o III a. C., surge el grave inconveniente de que, tal como cita Mascaró (1983), en el muro exterior de piedra de la ermita de la Consolació (Santanyí, Mallorca) hay grabada una estrella similar.

En los libros de geometría analítica (véase González, 1992; o Rodríguez de Abajo, 1992), suelen aparecer numerosos métodos aproximados para rectificar un círculo, ya que se trata de una operación geométrica cotidiana que suelen utilizar los delineantes en su trabajo diario, pero no hemos encontrado ninguno que remita al método expuesto en la pared de Calafí Vell. Por otra parte, en los textos de historia de las matemáticas apenas si se le da importancia a esta cuestión, dada la imposibilidad de su solución. En Gardner (1986), recopilación de los divertidos artículos publicados por este notable matemático en la revista *Scientific American* se incluye el titulado «El trascendente número π», que es una forma sencilla y deliciosa de introducirse en estas cuestiones.

La figura de Calafí Vell se puede interpretar como un intento de encontrar de forma geométrica la longitud de una circunferencia, si bien el problema está planteado como un acertijo que hay que resolver y lleva aparejada la visita de algún pitagórico a la isla. Claro que toda esta bella hipótesis se basa en la fidelidad de la copia que realizó Mascaró y en que no se trate de un grabado realizado como pasatiempo por algún matemático ocioso de época muy posterior.

Vicente Ibáñez
Societat de d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»

Bibliografía

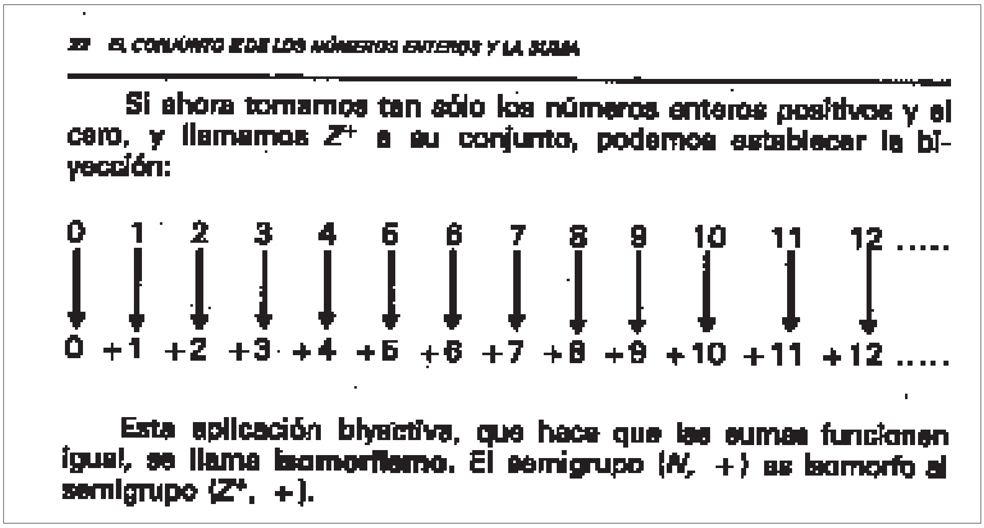
GARDNER, M. (1986): *Nuevos pasatiempos matemáticos*, Alianza Editorial, Madrid.

GONZÁLEZ, M. y J. PALENCIA (1992): «Trazado geométrico», editado por los autores, Sevilla.

MASCARÓ PASARIUS, J. (1953): «Las cuevas prehistóricas y los grabados rupestres de Menorca», *Ampurias XV-XVI*, Barcelona, 345-349.

MASCARÓ PASARIUS, J. (1983): «Los grabados rupestres», *Geografía e Historia de Menorca, vol. IV*, Menorca, 55-63.

RODRÍGUEZ DE ABAJO, F. J. y V. ÁLVAREZ BENGOA (1992): *Curso de dibujo geométrico y de croquización*, Editorial Donostiarra, San Sebastián.



EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS Y LA SUMA

Si ahora tomamos tan sólo los números enteros positivos y el cero, y llamamos Z^+ a su conjunto, podemos establecer la biyección:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 .....

0 +1 +2 +3 +4 +5 +6 +7 +8 +9 +10 +11 +12 .....

Esta aplicación biyectiva, que hace que las sumas funcionen igual, se llama isomorfismo. El semigrupo (N, +) es isomorfo al semigrupo (Z^+, +).

7.° EGB

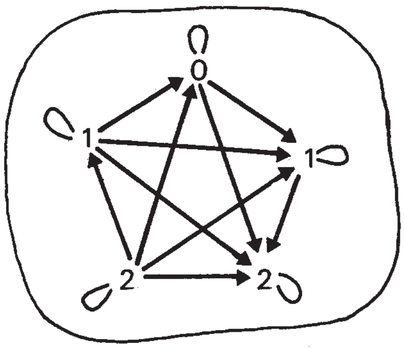
La expresión $a \leqslant b$, se lee "*a* es menor o igual que *b*".
Ejemplos:

$-5 \leqslant -2$	$-3 \leqslant 0$	$-4 \leqslant +2$
$+2 \leqslant +2$	$+3 \leqslant +4$	$-3 \leqslant -3$

Dibujando el diagrama de flechas para un subconjunto cualquiera de números enteros, por ejemplo,

$$A = \{-2, -1, 0, +1, +2\}$$

podemos observar que se cumplen las tres propiedades de la relación de orden:



$\longrightarrow$ se lee $\leqslant$

Reflexiva: todos los elementos llevan 

Antisimétrica: no hay ningún dibujo 

Transitiva: si hay , entonces hay 

SUMA 39
febrero 2002, pp. 99-102

El problema isoperimétrico y el Cálculo de Variaciones

Grupo Construir las Matemáticas*

TALLER DE PROBLEMAS

¿CUÁL ES EL CAMINO más corto entre dos puntos del plano? ¿Y del espacio?

¿Y sobre una superficie cualquiera?

¿Qué forma tiene el tobogán más rápido?

¿Cuál es la curva plana que encierra mayor área entre todas las que tienen una misma longitud?

Estos son algunos problemas de optimización que se consideran clásicos y supusieron, a finales del siglo XVII, la génesis de una nueva rama de las matemáticas: el Cálculo de Variaciones.

En esta ocasión haremos una breve revisión del problema de los isoperímetros desde la perspectiva de esta nueva teoría y se determinarán sus soluciones que son, respectivamente, las líneas geodésicas, la cicloide y, naturalmente, la circunferencia.

* Los componentes del Grupo Construir las Matemáticas son Rafael Pérez, Isabel Berenguer, Luis Berenguer, Belén Cobo, M.ª Dolores Daza, Francisco Fernández, Miguel Pasadas y Ana M.ª Payá.

Los problemas del Cálculo de Variaciones

El Cálculo de Variaciones tiene por objeto los problemas de extremos, es decir, máximos y mínimos, de naturaleza más complicada que los problemas de extremos ordinarios de los que se ocupa el cálculo diferencial. Estos últimos, como es sabido, permiten determinar valores de una o varias variables (geométricamente, coordenadas de ciertos puntos) para los cuales una función dada de estas variables alcanza el mayor o el menor valor.

Cuestiones geométricas como el camino más corto entre dos puntos, el problema de la *braquistócrona* (curva de descenso más rápido) o el problema isoperimétrico, resueltos en principio por Johan Bernouilli y Leonard Euler por métodos del cálculo diferencial ordinario, no pueden ser tratados de una manera rigurosa y completa más que por otras teorías más complejas.

El Cálculo de Variaciones consiste en la búsqueda de condiciones bajo las cuales tienen lugar los extremos de una cantidad, que puede ser una integral definida (el caso más frecuente), la solución de una ecuación diferencial, etc., dependiente de *funciones incógnita*, que se deben determinar.

Se hace, por tanto, jugar a las *funciones* el papel atribuido, en el cálculo diferencial, a las *variables*.

Otros problemas clásicos son: la superficie de revolución de área mínima, superficies minimales, sistemas de partículas en campos conservativos, osciladores armónicos, péndulos, trayectoria de propagación de la luz, cuerda y membrana vibrantes, flexión de vigas y placas, etc.

Breve revisión histórica

La historia del Cálculo de Variaciones se divide de forma natural en tres períodos.

El primero debe ser considerado como preparatorio y se puede fijar su origen en un intercambio epistolar entre Johan Bernouilli y G. W. Leibniz. El problema del sólido de revolución de menor resistencia, considerado por Isaac Newton en 1687, el problema de la braquistócrona, propuesto por Johan Bernouilli en 1696, y el *problema isoperimétrico*, propuesto por Jacob Bernouilli en 1697, fueron la base de las investigaciones que condujeron a la nueva teoría del Cálculo de Variaciones.

Los hermanos Jacob y Johan Bernouilli imaginaron, para estos dos últimos problemas, métodos de resolución que se redujeron a reemplazar un arco infinitésimamente pequeño de la curva buscada por una línea poligonal y a calcular esta última con la ayuda del cálculo diferencial ordinario. Leonard Euler generalizó el procedimiento empleado.

J. L. Lagrange inaugura el segundo período con la creación del «método de las variaciones». En principio, el objetivo de este método fue resolver problemas isoperimétricos con cosideraciones geométricas, pero pronto se extiende a importantes cuestiones de mecánica. Asimismo, con el fin de determinar condiciones suficientes para la determinación de soluciones, este método fue desarrollado por otros grandes matemáticos como A. M. Legendre, C. G. J. Jacobi o A. Chebychev.

El tercer período comienza con los trabajos de W. Weierstrass, quien, en su curso sobre el Cálculo de Variaciones, desarrollado en la Universidad de Berlin entre 1865 y 1890, no sólo mostró los errores existentes en la teoría desarrollada hasta entonces, sino que fijó las bases de la teoría actual. Una próximo entrega sobre el problema isoperimétrico estará dedicada a las aportaciones de Weierstrass a la determinación de la existencia de solución para el problema.

En un curso en la Universidad de París, en 1866, G. Darboux, utilizando el teorema de Gauss sobre las coordenadas curvilíneas, e independientemente de los estudios desarrollados por Weierstrass, desarrolló un nuevo método en el que determinaba condiciones suficientes para los problemas de extremos, referidos a las líneas geodésicas y a ciertas cuestiones de mecánica.

Por otra parte, antiguos alumnos de Weierstrass, como H. Hancock, E. Sérmelo, W. F. Osgood y, sobre todo, A. Knesser divulgan los descubrimientos de su maestro o, en otros casos, desarrollan sus indicaciones, preparando así los progresos más importantes realizados al principio del siglo XX. A Weierstrass se le debe, como se ha indicado, las primeras investigaciones sobre la existencia de soluciones para problemas del Cálculo de Variaciones, como aplicación de ciertos teoremas de soluciones de ecuaciones diferenciales, a partir de los cuales David Hilbert, en 1900, desarrolla una nueva perspectiva de esta teoría.

En nuestros días, parece haber nacido un cuarto período gracias a la influencia de las ideas del Cálculo Funcional y a la generalización de la noción de variación. Conviene señalar aquí el importante descubrimiento realizado por D. Hilbert, en 1904, sobre la relación existente entre el cálculo diferencial, la teoría de ecuaciones integrales y la de ecuaciones diferenciales, demostrando que las ecuaciones integrales lineales pueden ser aplicadas a la resolución del problemas del Cálculo de Variaciones. Por otra parte, D. Hilbert da un gran valor a la idea de considerar estos problemas como cuestiones del cálculo diferencial en una infinidad de variables, lo que, en efecto, generaliza los problemas diferenciales. Todo esto contribuirá, sin duda, a acelerar el progreso del Cálculo de Variaciones.

Condiciones necesarias y suficientes para la existencia de extremos

El problema más usual del cálculo de variaciones es hallar los extremos de una expresión integral dependiente de una función:

$$\mathrm{F}[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx \qquad (1)$$

o bien de varias funciones. Por ejemplo, para dos funciones sería del tipo:

$$\mathrm{F}[x, y] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, y, x', y')dt \qquad (2)$$

A este tipo de expresiones que varían según una o varias funciones y algunas de sus derivadas se les denomina *funcionales*.

Una condición necesaria para que un funcional del tipo (1) alcance un extremo (máximo o mínimo) en una cierta función y es que se verifique la siguiente ecuación diferencial:

$$F_y(x, y, y') = \frac{d}{dx}(F_{y'}(x, y, y'))$$

A esta condición se le conoce como *ecuación de Euler-Legendre*. Asimismo, en el caso de funcionales del tipo (2), una condición necesaria para que el funcional F alcance un extremo en el par de funciones (x, y) es que se verifique el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange:

$$F_x(t, x, y, x', y') = \frac{d}{dt}(F_{x'}(t, x, y, x', y'))$$
$$F_y(t, x, y, x', y') = \frac{d}{dt}(F_{y'}(t, x, y, x', y'))$$

A lo largo del desarrollo histórico del Cálculo de Variaciones se han determinado diferentes condiciones suficientes para que un funcional alcance un máximo o un mínimo en una solución de la ecuación o ecuaciones de Euler-Lagrange (llamadas extremales). Las más conocidas son la condición de Jacobi-Legendre o aquéllas que se deducen para funcionales de tipo convexo.

El problema isoperimétrico

Se trata de:

> Hallar, de entre todas las curvas cerradas y simples de perímetro L, la que encierra una región de mayor área.

Desde el punto de vista del cálculo de variaciones se trata de un problema de extremos condicionados para el que Lagrange desarrolló su conocido método de los multiplicadores. En concreto, el problema se puede formular de la siguiente forma:

> Hallar una curva paramétrica ($x(t)$, $y(t)$) $t \in [0, 1]$cerrada –es decir, tal que $x(0) = x(1)$ e $y(0) = y(1)$– y simple tal que sea mínimo el funcional de área de la región interior que determina:
>
> $$A[x, y] = \int_0^1 x(t)y'(t)-y(t)x'(t))dt$$
>
> entre todas aquellas cuya longitud es L , es decir,
>
> $$\int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt = L$$

En este caso, mediante el método de los multiplicadores de Lagrange, se trata de hallar una curva paramétrica cerrada y simple que verifica el sistema de ecuaciones:

$$y' - \frac{d}{dt}\lambda\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = 0$$
$$-x' - \frac{d}{dt}\lambda\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = 0$$
$$\int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt = L$$

una de cuyas soluciones, para un cierto valor del multiplicador λ, es:

$$x(t) = \frac{L}{2\pi} sen 2\pi t \qquad y(t) = \frac{L}{2\pi}\cos 2\pi t \qquad t \in [0,1]$$

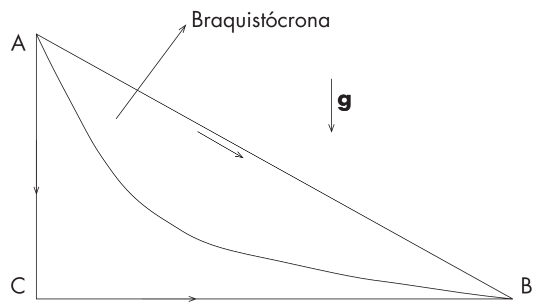
es decir, la circunferencia de radio L/2π.

El problema de la braquistócrona

Este problema, propuesto por Johan Bernouilli en 1696, ha sido relevante en el desarrollo del cálculo de variaciones y puede ser considerado como el inicio de esta teoría.

Se trata del siguiente problema:

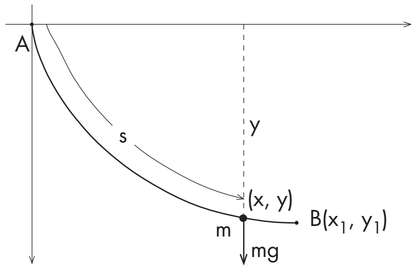
> Dados dos puntos A y B del campo gravitatorio terrestre, el primero a mayor altura que el segundo, se trata de encontrar la curva que posea la propiedad de que un punto material se deslice de A a B en el menor tiempo posible, llamada *braquistócrona*.



En otros términos, podemos decir que se trata de encontrar el tobogán más rápido.

En principio, observamos que la solución no es la recta ya que, aunque la recta determina la menor distancia entre dos puntos, otras curvas de mayor pendiente en sus inicios producirán mayor velocidad y compensarán con ello el hecho de que el camino se alargue.

Analíticamente, fijamos el origen en A (0, 0), y suponemos que B(x_1, y_1) y que el sentido positivo en el eje de ordenadas es hacia abajo. Representamos la curva como la gráfica de la función $y = y(x)$, con $x \in [0, 1]$, que cumple que $y(0) = 0$ e $y(x_1) = y_1$.



Aplicando el principio de la conservación de la energía, y teniendo en cuenta que el vector velocidad es la derivada del vector de posición en cada instante, se deduce que:

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{2gy(x)}$$

Por último, como x es función monótona de t, podemos expresar t en función de x, $t = t(x)$, de donde, fácilmente, se obtiene la siguiente expresión para el tiempo de deslizamiento de una partícula para ir de A a B:

$$t[y] = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2gy(x)}}\, dx$$

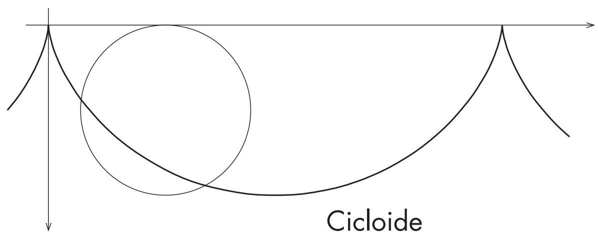
Se trata, por tanto, de un funcional de tipo (1) cuya ecuación de Euler-Lagrange asociada es la ecuación diferencial:

$$\sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} - y' \frac{y'}{\sqrt{2gy(1 + y'^2)}} = cte.$$

Considerando una solución en forma paramétrica adecuada se obtiene que las extremales del funcional de tiempo son de la forma:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{C}{2}(2t - sen 2t) + D \\ y(t) &= \frac{C}{2}(1 - \cos 2t) \end{aligned} \qquad C, D \in \mathbb{R}$$

Se trata de una familia de cicloides de la que las condiciones $y(0) = 0$, $y(x_1) = y_1$ determinarán la única solución del problema.



Luego,

¡un tobogán debe ser un arco de cicloide!

SUMA 39

febrero 2002, pp. 103-105

Cambio de moneda

Fernando Corbalán

MATES Y MEDIOS

COMO EN EL CUENTO del lobo, tras recordatorios variados y anunciando desgracias sin cuento, por fin el euro está entre nosotros. Casi se diría a estas alturas que escribo (¡y mucho más cuando lo leas!) que aquí está desde siempre, que la peseta es la prehistoria. Parece que había desconfianza sobre la numerización de la sociedad ante la resurrección de los números decimales, por los redondeos o por otros conceptos que hasta el presente estaban confinados en las clases de matemáticas y que de golpe han aparecido en nuestra vida cotidiana. Lo cierto es que no ha llegado la sangre al río (debe ser que no lo habíamos hecho tan mal los profes de matemáticas), pero algún rasguño sí que ha habido. Y de algunos de sus reflejos en los medios nos vamos a ocupar.

Reglas mnemotécnicas

La escuela proporciona un variado muestrario de reglas mnemotécnicas para aprender los conceptos, nombres o duraciones de los aspectos más variados (desde el número de días de cada mes, pasando por cuál es la que sube de las estalactitas y las estalagmitas, a los reyes o las capitales de los países). La mayoría de una utilidad dudosa cuando no francamente nula.

Pero ahora ha aparecido una de uso cotidiano y de gran importancia para hacerse una composición de lugar de los precios, ampliamente publicitada durante meses en los diferentes medios. Me refiero a la fórmula mágica:

$$6 \text{ Euros} \oplus 1000 \text{ pesetas}$$

que hacía desaparecer la rebuscada equivalencia entre euros y pesetas.

En nuestro país hemos tenido una regla sencilla, pero en los otros once que también han cambiado al euro, ¿cómo se lo han montado? ¿También tenían alguna regla? Hasta donde yo he rebuscado en los medios de nuestro país nadie se ha hecho eco de su (presumible) existencia. Como no hay constancia de ella (y es un buen ejercicio de imaginación) os propongo que busquemos (o propongamos a nuestros alumnos) reglas de conversión adecuadas para cada uno de los países. Por si no tenéis a mano las equivalencias de todas las monedas las reproducimos a continuación.

Peseta	166,386
Marco alem.	1,995583
Franco fr.	6,55957
Libra irl.	0,787564
Lira italiana	1936,27
Franco blega	40,3399
Franco lux.	40,3399
Florín	2,20371
Chelín aust.	13,7603
Escudo	200,482
Marco fin.	5,94573
Dracma G.	340,75

Espero vuestras propuestas que contrastaremos con las realmente utilizadas, a las que no dudéis que les vamos a seguir la pista.

Redondeo

Es otro concepto técnico-matemático que parecía propio de la rijosidad de los matemáticos que no sólo ha salido a la calle sino que hasta se han dado por parte de las autoridades las normas para hacerlo. Eso sí, con una conciencia generalizada de que era un buen argumento para subir los precios y, por consiguiente, que aumentara la inflación. ¿Qué ha pasado realmente? Apelando a los medios nos quedamos sin saber qué responder, porque en el mismo día, unos dicen que sí (y además destacado: *El País*, 12/1/02) y otros que no (y en pequeño: *Heraldo de Aragón*, 12/1/02).


ECONOMÍA **EL PAIS** TRA

La desviación de siete décimas sobre el objetivo inicial cuesta 270 millones de euros en salarios

Los precios subieron en 2001 un 2,7% por los alimentos, el turismo y el redondeo del euro


REACCIONES

■ **Rodrigo Rato.** El ministro de Economía opinó que el IPC de diciembre no muestra que se haya producido un aumento de los precios debido al redondeo alcista en la conversión al euro. También pidió más responsabilidad al sector servicios.

Lo que sí ha conseguido el Euro es hacer cifras «redondas» (o casi) en esa moneda que nunca se hubieran hecho en pesetas. Así el anuncio de Ford (¿os imagináis «166.386 pts por el morro»?) o fascículos a 2,95 euros (491 pts).

Y es que la introducción del euro nos ha planteado otro problema del redondeo, en el que quizás no habíamos «caído», porque a pesar de que en la calle los precios se redondeaban a múltiplos de 5 pts (de duro) en clase seguíamos redondeando a unidades decimales de orden superior o inferior (así tomamos 2,9 por 2,87 o bien 4,12 en vez de 4,123). Con la moneda común los redondeos en algunos países (como Finlandia por ley, según recogieron los medios) ya se han hecho también a los 5 céntimos de euro, retirando de la circulación las monedas de 1 y 2 céntimos. Y en nuestro país (*La Vanguardia*, 19/01/02, destacado en portada) la práctica lleva a algo parecido, haciendo incluso redondeos a la baja para evitar esas monedillas.


LA VANGUARDIA

Los obispos de Cataluña dicen no al preservativo en los institutos

Cela descansa bajo un olivo en Iria Flavia

La calderilla del euro comienza a ser arrinconada

▶ *Empresas y comercios tienden a evitar las monedas de uno y dos céntimos*

▶ *Ligeros redondeos, incluso a la baja, como en el tabaco* • *páginas 23 y 24*

La calculadora

También la introducción del euro aporta argumentos para esa perpetua discusión sobre la pertinencia de la calculadora en las aulas de matemáticas, un tanto añeja pero que no acaba de superarse (esos comentarios de «si usan la calculadora en vez del lápiz y el papel nunca sabrán calcular»). Cuando ha habido que tratar un tema importante para los poderes constituidos, como es lo tocante a la economía, y se ha querido eficacia no se ha admitido ninguna discusión. Ni entre los que decidían ni entre los usuarios: no sólo se ha recomendado el uso de la calculadora, sino que ha sido prácticamente obligatoria. Era el argumento de autoridad en todos los posibles diferendos y errores. Que los había (y aún sigue habiendo) y frecuentes, porque durante un tiempo parecía que estuviéramos de turismo pagando con unas monedas que no conocíamos, con una dificultad añadida: quien nos cobraba también era algo parecido a un turista (quizás con algunos días más de estancia en el país). Lo cual de paso servía para un ejercicio de confianza y desprendimiento que me gustaría sobreviviera a estos meses: se entregaba al que tenía que cobrar todo el dinero que uno llevaba (sobre todo las monedas) y era él quien las cogía. O sea que durante un tiempo no sólo no se agarraba con ambos manos el dinero para que no nos lo quitaran sino que se entregaba con confianza.

Más errores

Lo que sí que ha traído el euro a los medios de comunicación es todavía más errores en las equivalencias de cantidades de dinero. A los clásicos y habituales de los «billones» sajones o franceses (mil millones) traducidos por nuestros billones (un millón de millones) se añaden ahora transformaciones con equivalencias variables.

Un ejemplo de esos cambios es el de un pie de foto en *El País* de 13/01/02 (en la reducción, la letra es excesivamenete pequeña) que decía: «Silvio Berlusconi en un mitin en Nápoles el pasado mes de mayo, donde prometió invertir 20,3 trillones (más de 10.000 millones de euros) de liras en el sur de Italia si ganaba las elecciones». Parece como si esos problemas de rechazo que ha provocado el euro en Italia (dicen que en parte provocado por el enorme factor de conversión con la lira) hubieran llegado hasta el redactor de esa conversión. Aprovechando la equivalencia que aparece más arriba podéis hacer algunos cálculos y veréis que hay un «ligero» error de magnitud de un 1 seguido de algunos ceros.

En cuanto al segundo aspecto ese mismo 13/01/02 «El defensor del lector» de *El País* ya recoge lo siguiente:

> Casero [un comunicante 'tenaz cazador de gazapos'] ha encontrado varios errores en la edición del pasado día 9 y ha advertido de ellos: «... que supone un desembolso de 45 millones de euros (7.487 millones de pesetas)». «O lo que es lo mismo, un euro vale 174.38 pesetas». «Fichado por 10.5 millones de euros (2.500 millones de pesetas)». «O sea, que un euro en esta página vale 238.095 (difuntas) pesetas».

Como se ve cambios variados e inexactos. Que nos tendrían que permitir durante algunos meses o semanas aprovechar para hacer (no sólo en clase sino nosotros mismos) otra tarea de cálculo importante: la estimación de las cantidades. Puesto que la equivalencia entre pesetas y euros es tan enrevesada (esa es otra protesta popular: «Bien que hayan hecho una equivalencia rara en pesetas: ¡pero mira que llegar hasta los decimales y tres nada menos!») no es factible una equivalencia exacta, sobre todo en los precios grandes (pisos, coches...) y una vez más se ve que una habilidad interesante, mucho más que la exactitud, es el orden de magnitud del resultado.

Vemos que los grandes problemas de la numerización han pasado por unos días a ser de dominio común y no patrimonio de los profes de matemáticas: el redondeo (la aproximación), la estimación, cómo fiarse más de los cálculos (si por algoritmos de lápiz y papel o con calculadora)... Y bueno sería que siguieran ahí, fuera de las aulas (por lo menos en nuestros intereses como objetivo de la enseñanza).

Día Escolar de las Matemáticas

SUMA 39
febrero 2002, pp. 107-109

Juegos numéricos

Grupo Alquerque*

DESDE QUE los griegos inventaron la Matemática como disciplina, la esencia de los números ha constituido un aspecto muy atractivo para los estudiosos de todas las épocas. Desde su clasificación, búsqueda de números con características especiales (primos, capicúas, amigos, perfectos, etc.), hasta el estudio de sus propiedades, estos problemas han fascinado a los matemáticos; incluso algunos han inscrito su nombre en la historia por su relación con ellos traspasando los límites del mundo matemático, como los casos evidentes de la escuela pitagórica, Pierre de Fermat o Srinivasa Ramanujan.

Esta fascinación no sólo hace mella en los matemáticos sino que también en quienes son ajenos a ese mundo es observable cierta atracción hacia esos problemas. Se ve claramente en la gran cantidad de pasatiempos numéricos que aparecen regularmente en la prensa. No es raro tampoco que al organizar alguna actividad de matemática recreativa, sean gymkanas, concursos de ingenio, pruebas individuales o por equipos, etc. estén presentes los problemas numéricos, pues son de los que más aceptación tienen.

Pensamos que el éxito de este tipo de problemas se debe a que son entretenimientos que se basan en operaciones básicas conocidas por todo el mundo, que sin embargo no suelen ser evidentes; es más, algunos pueden entrañar bastante complejidad en su resolución.

Para nosotros como profesores, esos problemas numéricos tienen características didácticas atractivas, como las siguientes:

a) Son altamente motivadores (por lo explicado anteriormente).
b) Sirven para introducir cualquier tema del bloque numérico, tomándolos directamente de la prensa o de libros de matemáticas recreativas, o adaptándolos a nuestra conveniencia (ver Muñoz y otros, 1998).
c) Complementan o refuerzan el bloque numérico de la Educación Primaria o Secundaria.
d) Agilizan el cálculo mental.

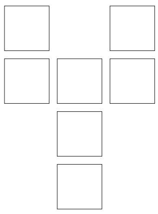
* Los componentes del Grupo Alquerque de Sevilla son Juan Antonio Hans Martín (C.C. Santa María de los Reyes), José Muñoz Santonja (IES Macarena), Antonio Fernández-Aliseda Redondo (IES Camas), José Blanco García (IES Alcalá del Río) y Josefa M.ª Aldana Pérez (C.C. Inmaculado Corazón de María –Portaceli–).

Juegos numéricos

La cantidad de pasatiempos de este tipo que pueden usarse en clase es muy amplia. Nosotros los clasificamos en dos grandes bloques: por un lado los de ordenación, en los que hay que colocar los números en determinados lugares según unas exigencias previas, y por otro lado los de cálculo, en los que se puede ir desde los más simples con sumas, hasta las operaciones más complicadas.

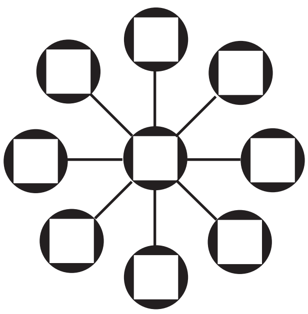
Hemos seleccionado ocho juegos con nivel adecuado para ser usados en Primaria, aunque, por supuesto, son actividades atractivas para cualquiera, como hemos comprobado cuando las hemos sacado a la calle y presentado a personas de todas las edades y formación.

Siete números en la Y griega



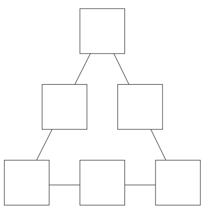
Coloca las cifras del 1 al 7 en el siguiente tablero, de manera que dos números consecutivos no estén juntos ni vertical, ni horizontal, ni diagonalmente.

La rueda numérica



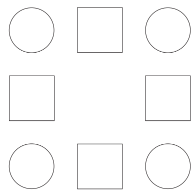
Sitúa los números del 1 al 9 en los cuadros del tablero, de forma que todas las líneas de tres números sumen 15.

El triángulo que suma igual



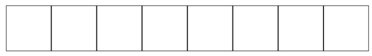
Distribuye las cifras del 1 al 6 en el tablero, de forma que la suma de cada lado del triángulo sea la misma.

El cuadro de números



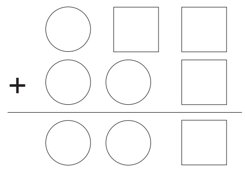
Coloca los ocho primeros números en el tablero, de forma que cada número que esté en un cuadrado, sea la diferencia de los que están en los círculos a sus lados.

Ocho números en línea



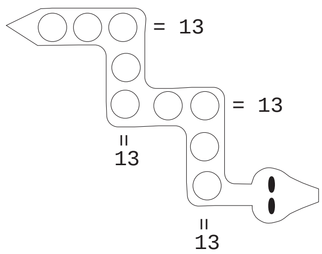
Coloca las cifras del 1 al 8 en los cuadros de la siguiente línea, de forma que la diferencia, en un orden o en otro, entre dos números vecinos, no sea nunca menor que 4.

Pares e impares en una suma



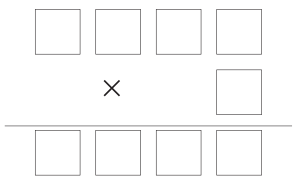
Con los números del 1 al 9 realiza la suma que aparece en el tablero, colocando los números pares en los cuadrados y los impares en los círculos.

La serpiente súmica



Sitúa sobre los círculos de la serpiente los números del 1 al 9, de manera que cada línea de tres números, sume 13.

El producto con nueve números



Coloca las cifras del 1 al 9 sobre el tablero, de forma que el producto resultante sea correcto.

Aclaraciones

En la mayoría de los juegos hay varias soluciones. Si el nivel de conocimiento de los alumnos lo permite, se les puede pedir que busquen todas las posibles.

En el enunciado del segundo juego, se pide que los diámetros de la rueda sumen 15, si se hace el juego en cursos superiores, la condición conviene expresarla diciendo que deben sumar igual, sin decirles el valor.

En el tercer juego hay diversas soluciones (los tres números suman 9, 10, 11, 12). Si se considera conveniente para alumnos pequeños, se les puede decir el valor de la suma para que les sirva de pista. Este juego, con el mismo tablero y fichas, puede complicarse modificando las exigencias; basta pedir que cuando se coloquen los seis números, cada lado del triángulo sume distinto, pero que en las sumas se obtengan tres números consecutivos.

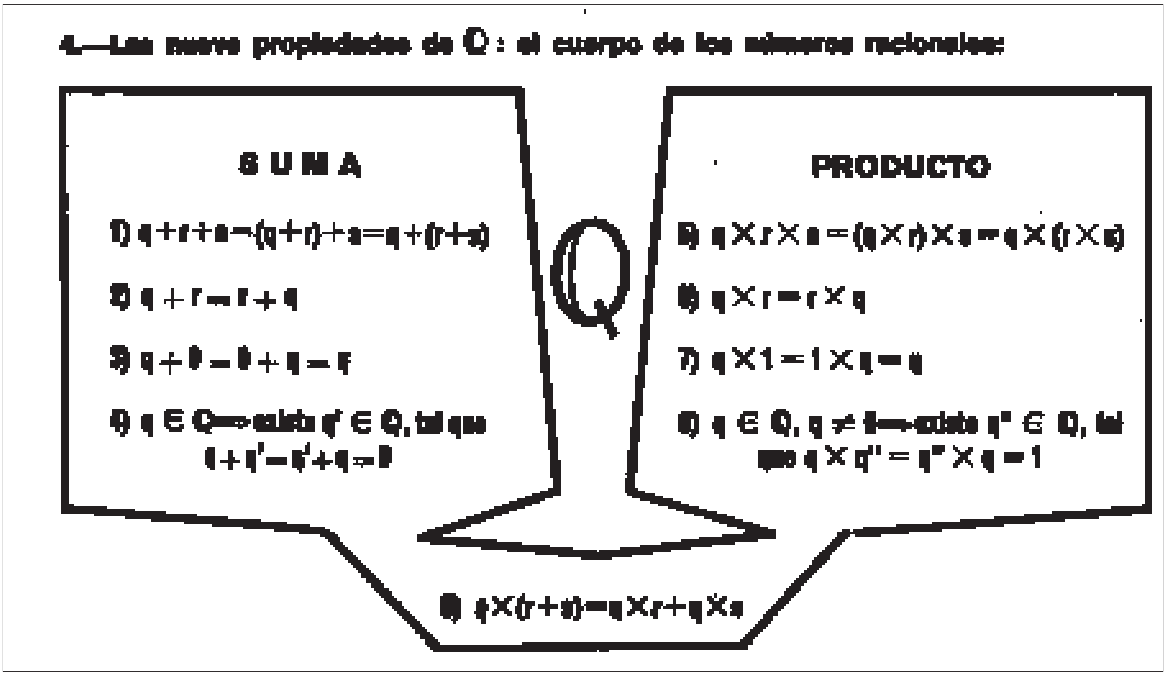
El cuarto juego se ha presentado como diferencia para que no fuese casi todo sumas, pero se puede plantear también el colocar los nueve números de manera que los que queden en los cuadros negros, sean la suma de los que están en los círculos vecinos.

Cómo presentar los juegos

Como se puede apreciar en los ejemplos anteriores, todos estos juegos se pueden hacer perfectamente con lápiz y papel, pero tenemos comprobado que el aspecto manipulativo es muy importante en la enseñanza, especialmente en Primaria, por lo que aconsejamos que se haga como juego de tablero y fichas, presentando el dibujo del tablero en cartón o sobre panel, y los números en cartulina o soporte de más consistencia (cartón pluma, panel, DM, etc.). Esto facilita la resolución pues los intentos nuevos no pasan por borrar lo hecho antes sino por cambiar las cifras de lugares. De esta manera es como la presentamos nosotros en los montajes que realizamos de «Matemáticas en la Calle». En este sentido, durante una magna exposición de materiales didácticos y recreativos, que se desarrolló durante el IX Congreso de Matemáticas THALES, celebrado el pasado Septiembre en San Fernando (Cádiz), compañeros de la SAEM THALES de Córdoba presentaron materiales en esta línea, utilizando como tableros alfombras del cuarto de baño pintadas, y como fichas los números de goma usados normalmente en Preescolar, que se pueden encontrar actualmente en las tiendas de «Todo a Cien».

Bibliografía

MUÑOZ, J., J. FERNÁNDEZ y V. CARMONA (1998): «Jugando con potencias y raíces», *Números*, 33, Tenerife, 27-38.



PUBLICACIONES DE LAS SOCIEDADES

SUMA 39
febrero 2002, pp. 111-113

Matemáticas en la Red

Antonio Pérez Sanz

RECURSOS EN INTERNET

EN LOS ARTÍCULOS de los números precedentes de esta sección de *SUMA* hemos podido comprobar una de las ventajas, quizás la más evidente, de Internet relacionada con las matemáticas: la posibilidad de acceder a una ingente cantidad de información relacionada con nuestra asignatura.

Quienes hayáis seguido esta sección disponéis ya de un amplio catálogo de direcciones y sitios con mucho, y a veces bueno, material para utilizar en la clase. Muchas de estas direcciones han podido contribuir incluso a algunos cambios metodológicos a la hora de enfocar nuestra asignatura, mostrándonos materiales novedosos o sencillamente otras formas de presentar los contenidos curriculares de matemáticas en todos los niveles.

Es decir, hasta ahora, Internet ha aparecido como un instrumento increíble... *en manos del profesor*.

Pero, ¿qué pasa con los alumnos?

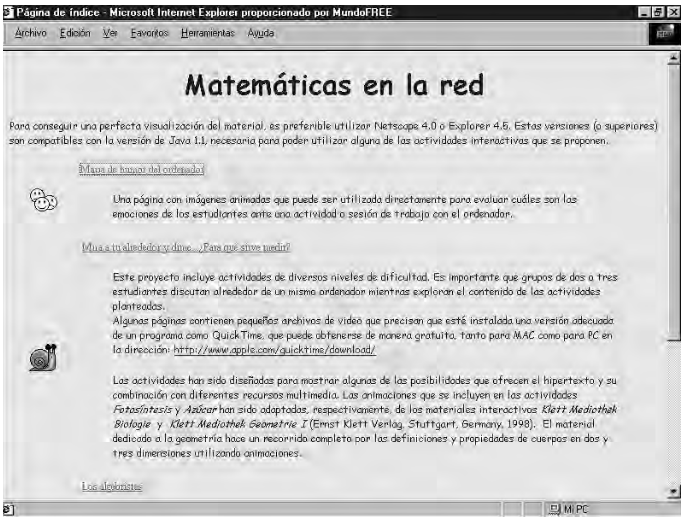
La penetración de la tecnología informática y multimedia en un cada día más alto porcentaje de los hogares españoles; la explosión de las ofertas de tarifas planas y el abaratamiento del uso de Internet en casa y últimamente la aparición de nuevas tecnologías de comunicación a precios asequibles, la RDSI o la ADSL nos han colocado en una doble situación impensable hace un par de años.

Por un lado, cada vez es más alto el número de alumnos que pueden tener acceso libre a la Red desde su propio domicilio.

Por otro, los centros empiezan a contar con aulas en red local con conexiones operativas a Internet, lo que permite la navegación en tiempo real y no simulada de todo un grupo de alumnos.

Y ahora, que parece que al menos tenemos vencidos los aspectos tecnológicos y de comunicación, cómo integramos este nuevo recurso en nuestras clases de matemáticas. ¿Qué hacemos con los alumnos? O mejor, ¿qué pueden hacer los alumnos con Internet?

Intentando responder a esta pregunta ha aparecido recientemente, dentro de la colección «Materiales 12-16 para la Educación Secundaria», coeditada por el MECD y Narcea Ediciones una carpeta titulada *Matemáticas en la Red*, elaborada por tres profesoras con una amplia experiencia en formación del profesorado, las tres desarrollan su trabajo en departamentos de Didáctica de las Matemáticas: Inés Gómez Chacón, Lourdes Figueiras y Margarita Marín.



La carpeta consta de cuatro cuadernos en los que se desarrollan los siguientes temas:

I. Planteamiento didáctico del proyecto, que incluye una reflexión sobre la incidencia y repercusión de las tecnologías informáticas y telemáticas tanto en los contenidos curriculares como, sobre todo, en los aspectos metodológicos y de integración de nuevos sistemas de representación, de acceso y procesamiento de la información, que ya están alterando la forma de aproximación de los alumnos a las matemáticas escolares, primando el pensamiento visual, abriendo las puertas del aula a una matemática más inductiva y más abierta y, sobre todo, posibilitando

nuevas formas de interacción social, rompiendo la burbuja estanca del aula y el modelo de comunicación jerarquizada y unidireccional profesor-alumno.

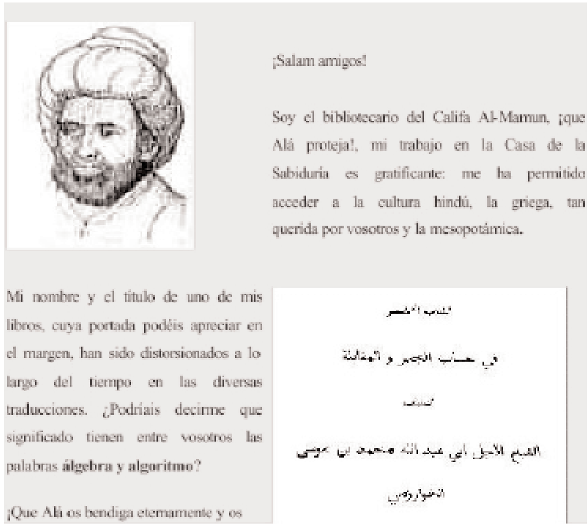
II. El segundo cuaderno, junto a una breve historia de la red, nos proporciona un amplio listado de direcciones interesantes de Internet, clasificadas en cuatro grandes bloques: webs con amplios recursos, apoyo al currículo de secundaria, popularización de las matemáticas y sociedades matemáticas. Pero también nos proporciona instrumentos, en forma de cuestionarios para evaluar las actitudes de los alumnos ante las matemáticas y ante el medio tecnológico. En el CD-ROM que contiene las actividades se incorpora un mapa de humor del alumno ante el ordenador, que permite conocer su estado de ánimo y su actitud a lo largo de cada actividad desarrollada.

Termina este cuaderno con herramientas de evaluación del proceso de aprendizaje y de páginas web. Estos instrumentos de evaluación constituyen un buen punto de partida, sobre todo para aquellos profesores que consideran que la utilización de Internet es más bien una actividad transversal de imposible evaluación.

III y IV. Proyectos telemáticos. En estos cuadernos se plantean hasta 11 proyectos distintos que proporcionan un buen campo de ideas para experimentar e investigar en clase. Están clasificados en tres grandes apartados:

– Proyectos para trabajar contenidos matemáticos ocultos:
    - Matemática discreta. Nuevos aprendizajes de modelos matemáticos.
    - Grafos, colores y números cromáticos.
    - Envío de mensajes...shhh...secretos.
    - Música y matemáticas.
– Acciones características del uso de Internet en la actividad matemática:
    - Mira a tu alrededor y dime: ¿para qué sirve medir?
    - Geometría dinámica en Internet.
    - El gran juego: una lectura con diferentes lecturas.
    - Edición escolar en Internet. Revista de Matemáticas.
– Relación con otras disciplinas:
    - Música y matemáticas.
    - Prismáticos, binoculares y catalejos.
    - Medir la Tierra desde la Luna.
    - Encuentros telemáticos con la historia: los geómetras y los algebristas.

Algunos de estos proyectos se pueden desarrollar en clase sin necesidad de conectarse a Internet, de hecho la suge-



rencia de direcciones se realiza más para completar las actividades que como herramienta imprescindible para el desarrollo del proyecto (proyectos 1, 2 y 5), a medida que avanzamos la información y las herramientas informáticas obtenidas en la red se convierten en el núcleo vertebrador del auto-aprendizaje del alumno. De hecho, en los últimos Encuentros telemáticos con la historia, la herramienta fundamental es el correo electrónico.

Completando el material impreso de la carpeta hay un CD-ROM con el desarrollo íntegro de alguno de los proyectos.

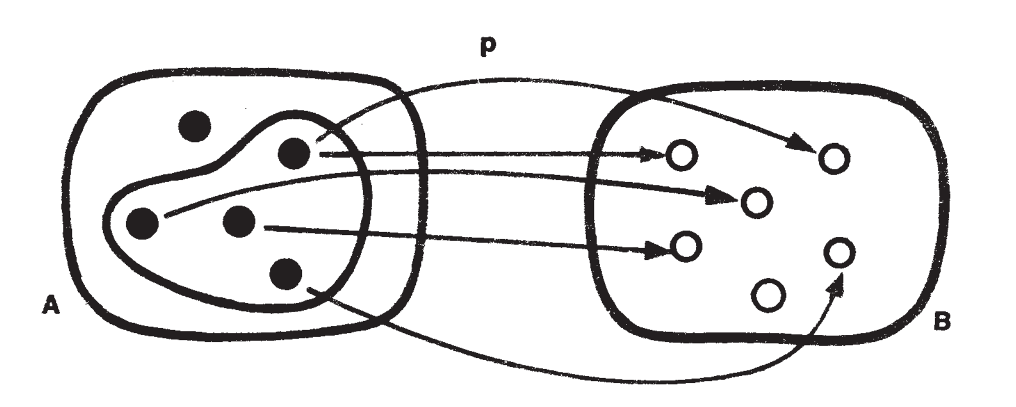
En concreto, podemos desarrollar de forma autónoma, es decir sin conectarnos obligatoriamente a la red los proyectos:

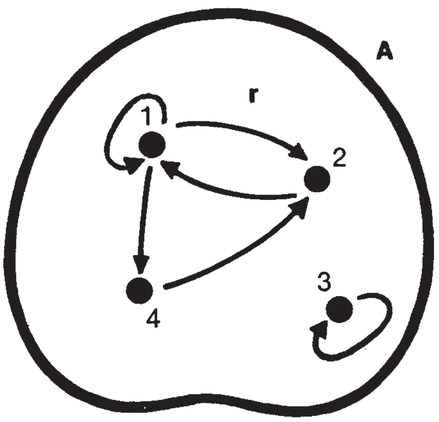
- Mira a tu alrededor y dime... ¿para qué sirve medir?
- Los algebristas en formato PDF.
- Medir la Tierra desde la Luna.

Aunque lo ideal es aplicarlos con posibilidad de conectarse a Internet para completar las actividades.

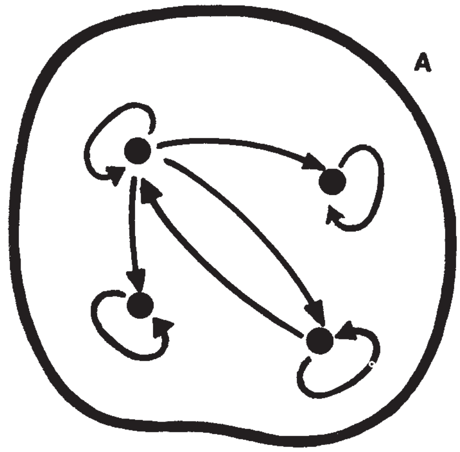
Se trata, sin duda, de una publicación pionera cuyo principal mérito es el de abrir un camino, un enorme camino que pronto se convertirá en carretera y más tarde en una autopista, el de la utilización de Internet dentro del aula y con conexiones en tiempo real y en manos de los alumnos. No pretende agotar las posibilidades de utilización de la Red sino, al contrario, sugerir y dar pistas sobre las actividades que podemos abordar con los alumnos.

Damos la bienvenida a esta publicación con la esperanza de que en poco tiempo cunda el ejemplo entre el profesorado y podamos encontrar en librerías y en la Red un amplio catálogo de experiencias de aula de aplicaciones de Internet a la enseñanza de las Matemáticas.

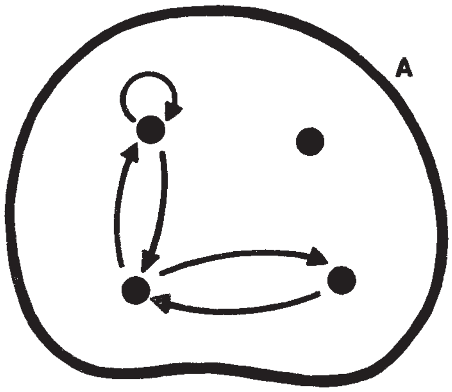




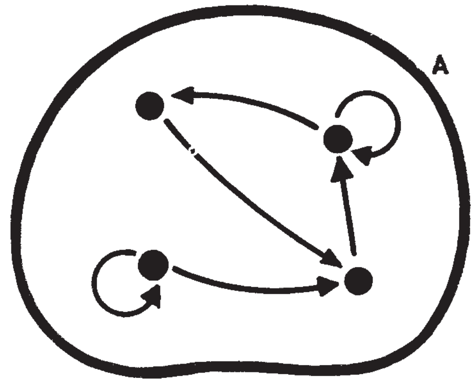
Relación



Propiedad reflexiva



Propiedad simétrica



Propiedad antisimétrica

SUMA 39
febrero 2001, pp. 115-120

El Renacimiento (II) Matemáticas más allá de las Matemáticas

Ángel Ramírez Martínez
Carlos Usón Villalba

DESDE LA HISTORIA

RESEÑÁBAMOS en «Unos siglos que cambiaron el mundo II» (*Suma*, n.º 35) la importancia que la filosofía y la ciencia islámica habían tenido en la definición del racionalismo europeo y del importante papel que había jugado el noreste peninsular en esa transformación. Y establecíamos en el capítulo anterior[1] una sólida línea de continuidad aritmética desde al-Mu'taman, Ibn Sayyid o al-Jayyani a través de los *al-Muawalat* y del *Liber Mahameleth* hasta el *Libro de Arismética que es dicho Alguarismo* y la *Summa de l'art d'Aritmètica*, en un proceso que conservaba perfectas similitudes con lo que había sucedido en otros países europeos. Así pues, eliminado aquel tópico abismo que nos separaba tanto de Europa como de la ciencia árabe, nos hemos situado, casi sin darnos cuenta, a las puertas del siglo maldito.

El siglo XVI, un siglo para la polémica

La obsesión por la modernidad de Rey Pastor, sin duda el matemático español más relevante de principios del siglo XX, cerró de un aldabonazo[2] la polémica acerca del valor de la producción matemática del siglo XVI.

Su sesgado análisis acaba por imponer un forzado optimismo en el futuro –injustificado pero políticamente correcto en ese momento– con el que termina su alocución[3]:

> Seamos optimistas porque sin fe no se ganó ninguna batalla; seámoslo con exageración, confiando ciegamente en nuestras fuerzas, –porque ya pondrá la dura realidad un dique a nuestras ambiciosas aspiraciones– y contestemos a la pregunta de Europa con decisión entusiasta: En España no ha habido matemáticos, es cierto; pero los habrá en este siglo.

Más dura y contundente fue su conclusión acerca de lo acontecido en el siglo XVI[4]. Con ella dilapidaba sin contemplaciones el trabajo de Pedro Ciruelo, Juan Martínez Guijarro (Silíceo), Gaspar Lax, Miguel Francés, Francisco Ortega y Álvaro Tomas[5]. Catedráticos unos, profesores otros, todos ellos brillaron con luz propia en la Sorbona en la primera mitad del siglo XVI. Y es que, Rey Pastor comparte con su época esa concepción de la ciencia como un edificio en permanente construcción, erigido al servicio y mayor gloria del espíritu humano[6], del que sólo importa la altura alcanzada en cada momento. Ese elitismo impuso a don Julio un criterio tan exclusivista que le impidió relativizar la importancia de la creación matemática al ámbito en el que se desarrolló hasta el punto de hacerle sentir vergüenza: «... el magisterio de los españoles en la Universidad de París, es más bien motivo para entristecerse, que para enorgullecernos» [7].

Con tan enérgico desaire se cerraba la polémica que iniciara en 1782 Masson de Morvilliers en su *Enciclopedia Metódica* de forma no menos solemne y airada: «¿Qué se debe a España? Desde hace dos siglos, desde hace cuatro, desde hace seis, ¿qué ha hecho por Europa? [...] En España no existen ni matemáticos, ni físicos, ni astrónomos, ni naturalistas». Tan tendenciosa pregunta no pudo por menos que caer como un jarro de vinagre sobre la herida abierta por el pesimismo en el acomplejado orgullo hispano, a pesar de provenir de un profundo desconocedor de la realidad española y de haber dejado constancia expresa de ello.

Ahondaron en la herida[8], por una parte Manuel de la Revilla, José del Perojo, Gumersindo Azcárate y Echegaray que no encontraba en todo el siglo XVI, en este país «donde no hubo más que látigo, hierro, sangre, rezos, braseros y humo», sino «libros de cuentas y geometrías de sastres», y que concluía como Morvilliers que «la ciencia matemática nada nos debe: no es nuestra; no hay en ella nombre alguno que labios castellanos puedan pronunciar sin esfuerzo». Por otra Felipe Picatoste, centrando la desgracia de este país en sus hijos que «lejos de defenderle le acriminan», además de Gumersindo Laverde, Alejandro Pidal y Mon, Fernández Vallín y Menéndez Pelayo para quien «nuestra historia científica distaba mucho de ser un páramo estéril e inclemente».

Con semejante panorama cualquiera se atreve a entrar a discutir desde estas líneas lo que unos hubieron y otros debieron. Sería un atrevimiento por nuestra parte tratar de terciar en semejante polémica, entre otras razones porque no nos interesa. Es más, pretendemos situarnos en el extremo opuesto para hablar, precisamente, de las matemáticas que no hicieron historia. De las que se desarrollaron al amparo de la necesidad, porque nacieron de ella, engendradas en algunos casos por la urgencia del momento. Y en este sentido, en lo que atañe a Aragón[9] que es la zona que conocemos con mayor detalle, nos centraremos tan sólo en la aritmética.

Con tantas restricciones autoimpuestas el conjunto de las obras a las que hagamos referencia debería de ser casi vacío y sin embargo el catálogo da de sí para diferenciar cuatro tipos de aritméticas[10]: especulativas, humanísticas, comerciales y contables.

De las primeras, que son las únicas que preocupan a la muy loable historia de la albañilería científica, no diremos ni palabra. Nos conformaremos con las cuatro líneas que les dedican los manuales al uso. Son, qué duda cabe, las que escribieran los ilustres de París que tuvieron la mala suerte[11] de adscribir empeño e inteligencia al decadente escolasticismo francés: Ciruelo, Lax, etc. De hecho, el apelativo de especulativas alude intencionadamente al título de una de las obras[12] de Gaspar Lax de la que casi todos hablan y casi nadie sabe a ciencia cierta lo que contiene.

Aritméticas mercantiles

Incluimos bajo este epígrafe dos tipos de libros escritos en romance y caracterizados por una marcada ambición didáctica. Unos orientados a la enseñanza[13] y los otros dirigidos a las autoridades y demás gestores municipales como apoyo al desarrollo de sus funciones[14].

De los primeros hay que decir que sus títulos son a veces más elocuentes que su contenido. Como sucede, por ejemplo, con el *Arte breve y muy provechoso de quenta castellana y arithmetica* de Juan de Yciar cuyo encabezamiento poco tiene que ver con lo que *a priori* se pudiera pensar que contiene. Otros, sin embargo, estarían más cerca de lo que habitualmente entendemos por una aritmética mercantil italiana aunque su contenido resulte algo más empobrecido que el de aquellas.

Destinados los segundos a la lucha contra el fraude, carecen de pretensiones doctas o investigadoras y adquieren su razón de ser en la utilidad que prestan a la ciudadanía en general y al comercio en particular. Pero también a los reiterados intentos de unificación de los sistemas tradicionales de medida por parte de la realeza. Una pretensión globalizadora que chocó contra la tenaz resistencia del estamento nobiliario intentando mantener sus prebendas y el profundo arraigo de un modelo perfectamente adaptado a las necesidades métricas de la población[15]. Matemáticamente hablando estos textos no son sino un catálogo de resultados escritos en forma literal, pero jugaron el mismo papel de compilación y consulta que desempeñaron en su época las tablas de logaritmos y que hoy corresponde ejercer a las calculadoras.

Aritméticas humanísticas

Dirigidas al estudio y la consulta, incluimos en este segundo grupo una serie de obras escritas en latín y nacidas de una doble necesidad. Por una parte la de establecer criterios científicos que permitieran fijar de forma rigurosa el calendario eclesiástico y por otra adoptar un modelo sólido que posibilitase una correcta interpretación de la Biblia. Pero son además una respuesta de modernidad al movimiento humanista que recorre Europa. Una necesidad para entender en su justa medida a los clásicos y poder obtener una valoración precisa del contenido de sus obras.

Sirva como ejemplo la obra de Guido Morel publicada en 1536 bajo el título de *Minervae Aragoniae, assis Budeani supputatio compendiora ad monetam: ponderaque & mesura Hispaniae nostrae*. Una adaptación al ámbito aragonés de los trabajos métricos de Guillaume Buddeo (o Budé). La sola referencia al erudito y filólogo francés, a quien Erasmo denominara *el prodigio de Francia,* es suficiente para remarcar su adhesión a la corriente humanista que representaba el Colegio de Francia frente a la fidelidad incondicional a la tradición encarnada por la Sorbona.

Aritmética contable

Podemos incluso ser más pretenciosos y plantearnos qué tipo de aritmética usaba la población, para matizar esa etérea certidumbre, más implícita que explícita, según la cual la numeración y los algoritmos indoarábigos habían dejado de estar en uso entre la población cristiana mucho antes incluso de la expulsión de los moriscos. Es cierto que si se revisan libros del siglo XV e incluso de la primera mitad del XVI eso parece una realidad. Se escribe con números romanos o en forma literal. No hemos encontrado constancia alguna en sentido contrario. Ahora bien, la pregunta que debemos plantearnos es ¿de qué libros estamos hablando? Es más, ¡estamos hablando de libros! y eso implica por sí mismo una fuerte reduccionismo.

¿Qué había pasado con la tradición islámica?

Salgamos pues de las bibliotecas y echemos un vistazo fuera. A los protocolos notariales y a los libros de cuentas[16] de las instituciones laicas y religiosas. El panorama es completamente distinto de lo esperado.

A finales del XV se usaban de forma casi exclusiva las cifras romanas, tanto para numerar los folios como en los asientos de contabilidad. Incluso para denotar el año, aunque en este caso compartieran protagonismo con la notación literal. De hecho, en ocasiones, el día aparece escrito de este modo y el año con cifras romanas.

Pero esa exigencia de literalidad se adaptaba mal a la práctica numérica real y, a partir de 1519, el año aparecerá de forma generalizada en notación indoarábiga, iniciándose un proceso tan imparable como irreversible que culminará al final de la centuria consignando los asientos por duplicado: en notación indoarábiga y en números romanos. Una evolución que evidencia el hecho de que la numeración actual se había impuesto y resultaba más cercana a la ciudadanía que la romana.

En cuanto al método de cálculo empleado para llevar la contabilidad nada hacía presuponer *a priori* que fuera algorista. Y, sin embargo, hemos encontrado pruebas de que ese era el método utilizado para realizar sumas y sustracciones. Nada nos hace suponer que las multiplicaciones y divisiones se hicieran de otro modo. Aunque, si bien es cierto que ambas son prácticamente innecesarias en el ámbito que nos ocupa, también lo es el hecho de que parecen evitarlas en algunos casos en los que su uso ahorraría esfuerzos.

Más sorprendente, si cabe, resulta la batalla que libra el cinco hasta 1590 por dotarse de una personalidad propia e inequívoca. Sin duda, un paso previo a esa definitiva unificación de la grafía que algunos autores fijan, en la zona mudéjar y morisca, a principios de la década de los ochenta.

¿Qué cifras y algoritmos se usaron en «al-Andalus» tras la conquista cristiana?

Gracias a los estudios de A. Labarta y C. Barceló[17] disponemos de bibliografía sobre la utilización de cifras y algoritmos entre la población mudéjar y morisca. Tomando como referencia sus trabajos, centrados en el análisis de actas notariales y documentación privada redactada en árabe y aljamiado, podemos establecer similitudes y diferencias en lo que afecta al uso popular de la aritmética entre las poblaciones morisca y cristiana.

Las autoras recogen cinco sistemas de numeración diferentes asociados, tanto a fechas, recuentos y cantidades, como a operaciones aritméticas a lo largo de la Edad Media y el Renacimiento. Ni que decir tiene que ni moriscos ni mudéjares hicieron uso de los números romanos en ningún momento.

1. Notación literal: Es la forma más habitual de escribir los números cuando se quiere garantizar su fiabilidad. Una costumbre que se mantiene hoy día para asegurar una certera interpretación y tratar de evitar falsificaciones. De hecho, se usaban siempre en las actas notariales y en la documentación oficial del mundo árabe. El mismo precepto se respetó en los reinos cristianos de la península[18], aunque aquí conviviendo con la numeración romana[19].
2. Huruf al-yummal o Abyad: Asigna un valor a las letras del alfabeto árabe: las nueve primeras corresponden a las unidades, las siguientes a las decenas y así sucesivamente. Este tipo de numeración se usó con asiduidad en los tratados astronómicos y astrológicos pero

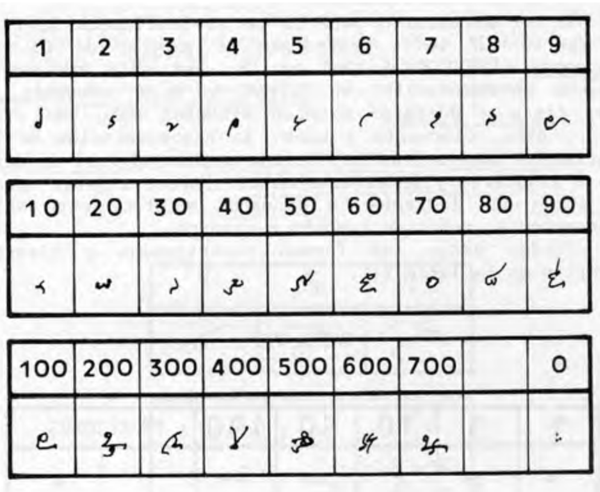
no en documentos notariales o privados. Las autoras tan sólo citan un inventario en aljamiado con este tipo de numeración en la zona aragonesa fechado alrededor de 1492.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
ا	ب	ج	د	ه	و	ز	ح	ط

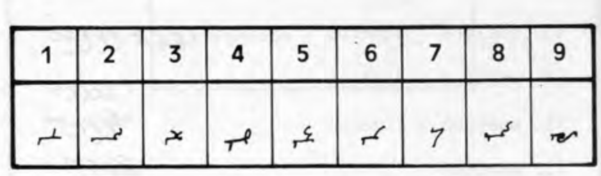
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ي	ك	ل	م	ن	ص	ع	ف	ض

100	200	300	400	500	600	700	800	900	MIL
ق	ر	س	ت	ث	خ	ذ	ش	ظ	غ

3. Rasm al-zimam al-rumi: También llamadas cifras de Fez, constan de cincuenta signos y se usaban en Marruecos a mediados del siglo XVI. Sin embargo, las que aparecen en los documentos arábigos de al-Andalus presentan algunas diferencias con el sistema norteafricano. Existen referencias documentales desde finales del XII y se seguían usando en Valencia[20] y Granada en los siglos XV y XVI. Y sin embargo todo hace suponer que no se utilizaron en la zona de Navarra y Aragón.



Unidades fraccionarias



4. De bases cinco y diez: Existen tan sólo tres ejemplos que hacen uso de este modelo. Los tres en la Corona de Aragón. De carácter aditivo, tan sólo usaba signos para 1, 5 y 10 (en ocasiones uno especial para el cuatro).

5. Valor posicional. Qalam al-gubar: Hay constancia documental de que eran usados a mediados del s. XV en Aragón y Valencia para anotar fechas y cantidades monetarias pero también para realizar cuentas. Las cifras gubaríes constituyen el sistema de numeración más usual en el Aragón mudéjar donde, al parecer, nunca se usaron cifras rumíes[21]. El parecido de este tipo de grafía con la actual resulta evidente. Mucho más a partir de 1580, momento en el que al parecer se establece de forma definitiva la del 4 y la del 5. Un paralelismo con lo que habíamos visto en el mundo cristiano que a estas alturas del relato ya no resulta sorprendente.

¿Qué pasaba por entonces en Europa?

Pero si de medir el secular atraso español se trata, no viene mal echar un vistazo a lo que pasaba por esas mismas fechas en la «culta» Europa por boca de Ifrah y recordar las tres elocuentes anécdotas que relata en *Las cifras*[22]. Habla primero de un rico mercader a finales del siglo XV al que, tras preguntar cómo dar una buena formación comercial a su hijo, le contestan: «Si sólo quiere aprender a sumar y restar, cualquier universidad alemana o francesa le servirá. Si quiere que llegue a multiplicar y dividir (si es que es capaz) entonces deberá enviarle a Italia». Relata después cómo la situación afectó en 1626 a un agregado de la Marina de Guerra Británica quien, incapaz de cuantificar las necesidades en madera de la flota inglesa y tras una sucesión de constantes madrugones, en los que involucró a su mujer, culminó su empeño de aprender las cuatro operaciones recorriendo Europa en busca de formación aritmética. «Aunque a ella (su esposa) no la quisiera perturbar con la práctica de la división». O el caso de Montaigne, uno de los hombres más eruditos de su tiempo, poseedor de una amplia biblioteca e incansable viajero, quien en 1580 confesaba: «no sé contar ni con fichas, ni a pluma».

¿Realmente hubo que esperar a Marco Aurel?

Parece ser que no sólo eran *las mujeres y demás personas que no sabían o no querían escribir* las que utilizaban aquella adaptación del ábaco romano con fichas como asegurara Rey Pastor en su discurso. Ni que hubiera que esperar a Marco Aurel. Más bien da la sensación de que, en lo que a aritmética se refiere, llegó a terreno abonado. Todos los autores y obras que hemos ido señalando cubren esa laguna aritmética que, según don Julio, siguió a los primeros veinte años del s. XVI.

Los tópicos se repiten una y otra vez, por algo son tópicos. El salvador, cómo no, había de ser extranjero. Pero es que además el propio Marco Aurel (1552) se encargó de publicitar su obra en base a esa misma concepción de la pobreza:

> Assi que por ser cosa nueua la que trato, y jamas vista, ni declarada, y podrá ser, que ni aun entendida ni imprimida en España me he atreuido a tratarla y escriuirla en lengua tan por entero repugnante a la mia.

Al-Qalasadi (¿1412?, 1486)

Pero debemos ser justos: aunque el libro de Marco Aurel comience con aritmética y dedique a ella los diez primeros capítulos, Rey Pastor se refería al álgebra[23]. Y aunque hemos afirmado al principio que no íbamos a entrar a debatir si, desde su particular punto de vista, tenía o no razón, sí que nos gustaría reverenciar aquí a esa figura cuya gloria reclamara don Julio[24] y cuya hipotética ausencia alimentó la polémica. Ahora bien, esa anhelada figura cuyo reconocimiento hubiera zanjado de una vez por todas la deuda, debida y no pagada, que con tanta virulencia nos reclamara Masson de Morvilliers, surge, una vez más, de la parte islámica de nuestro pensamiento.

Nacido en Baza en fecha imprecisa, al-Qalasadi es sin duda el algebrista hispano más señero del Renacimiento. Su obra *Desvelando los secretos de la numeración posicional*[25] es la primera en la que aparece un simbolismo completo que permite expresar todas las operaciones algebraicas y aritméticas de su época. A él se debe, entre otros[26], el haber introducido en la educación matemática de al-Andalus y el Magreb el concepto de número real positivo –diferenciado del entero y del racional– que anteriormente desarrollara Abu Kamil en Oriente. Pero sobre todo, si por algo es relevante su trabajo y el de los matemáticos de la zona es por el uso del simbolismo. Un simbolismo que A. Djebbar considera fruto de la creación colectiva y que caracteriza, y diferencia, el desarrollo del álgebra en esta zona frente a otras líneas de trabajo centradas en la resolución de ecuaciones. Un inapreciable servicio al desarrollo de la matemática en general –de la pura en particular– como reconociera el propio Rey Pastor en el discurso de Oviedo por boca de Poincaré[27], aunque haciendo referencia a Marco Aurel (1552).

A modo de colofón

Debemos asumir el inmenso daño que el cristianismo hispano hizo al desarrollo de la ciencia en estos lares por su desprecio a la tradición judía y musulmana. La expulsión de Abraham Zacuto[28] y la inadvertida presencia de al-Qalasadi son dos excelentes ejemplos. Pero ello no quita para saber situar el trabajo de la mayoría de los matemáticos españoles del XVI inmerso en el ámbito fijista, aislado de la línea renovadora que marcaría el quehacer intelectual de alemanes e italianos[29]. Es desde esa perspectiva, desde la que, a nuestro juicio, deberían ser juzgadas sus aportaciones.

Pero, además, sería bueno ampliar el objeto de estudio para aceptar la existencia en este siglo maldito de dos tipos de matemáticas, unas abstractas que no supieron traspasar el umbral de los hitos, y otras, nacidas de la necesidad y relacionadas de una u otra forma con el comercio, la enseñanza y el humanismo, cuyo nivel de partida contó con el acotado impulso de una burguesía con una no menos limitada capacidad económica.

Notas

1 «Mucho más que un matrimonio de conveniencia», *Suma*, n.º 38.

2 Oviedo, 1913. Discurso inaugural del curso académico 1913-1914.

3 En realidad lo cierra con una alusión al romancero: *...si no vencí reyes moros, engendré quien los venciera.*

4 «¿Corresponden sus obras al nuevo modo de ser de la matemática? Es decir ¿son obras modernas? (...) bastaría con hojear aquellos libros, o simplemente ver sus índices, para poder contestar sin vacilaciones. Pues bien, señores, esta contestación es desgraciadamente negativa».

5 A los astrónomos ni los nombra. Algunos de ellos como Francisco M. Zarzoso también publicaron su obra en París.

6 Parafraseando una vez más a Jacobi.

7 Seguramente fue su patriotismo el que le movió a una cierta indulgencia: «... ¿es justo que condenemos en juicio sumarísimo a aquella pléyade de españoles que laboraron fuera de su patria, honrándola grandemente, para luego traer a sus Universidades los frutos sazonados de su ciencia? No en verdad; ya que sus obras nacieron con un pecado original, el de no ser modernas».

8 Fue el botánico Antonio José de Cavanilles el primero en dar «cumplida respuesta» a Morvilliers en 1784. Antes de finalizar el siglo se formarían ya dos bandos. Por un lado Juan Pablo Forner, Martín Fernández de Navarrete, Jovellanos y Campomanes, por el otro: Iriarte, García de la Huerta y Vargas Ponce.

9 Resulta imprescindible concretar, no tanto porque en el siglo que nos ocupa España como tal no existía, sino porque al nivel al que se desarrolla el artículo resulta difícil abarcar todo el territorio peninsular.

10 Para un estudio más detallado de algunas de estas obras véase la aportación de E. Ausejo, M. Hormigón y C. Usón al Coloquio Internacional de Beaumont de Lomagne *Commerce et Mathématiques: Las aritméticas mercantiles en la Zaragoza del s. XVI.* 1999. C.I.H.S.O. Toulouse.

11 Esa que decide *a posteriori* la historia oficial en función de la época que promueve el análisis y del propio –e imprevisible– desarrollo interno de la ciencia. Una postura difícil de mantener con criterios actuales, pues pocas veces en la historia de este país ha habido más matemáticos españoles impartiendo docencia en una universidad extranjera.

12 *Arithmetica speculativa magistri Gasparis Lax aragonensis de Sarinyena duodecim libris demonstrata.*

13 Resultan sobradamente elocuentes algunos títulos como: *Libro subtilissimo por el qual se enseña a escreuir y contar pfectamente el qual lleua el mesmo horden que lleua vn maestro con su discípulo.*

14 Dos de las obras a las que hacemos referencia están dirigidas a los jurados de la ciudad de Zaragoza y a los diputados del reino de Aragón, respectivamente, aun cuando su finalidad era servir de base a los almutazafes tanto en el control métrico como en la imposición de penas a los defraudadores.

15 Resulta sorprendente hasta qué punto la psicología individual (colectiva en este caso), y el peso que impone la tradición en ella, está ausente de la Historia de la Ciencia, a pesar del grado de determinismo que le aplica en muchos casos.

16 Su carácter documental les exige criterios de corrección y de falta de ambigüedad casi notarial.

17 *Números y cifras en los documentos arábigohispánicos.* Universidad de Córdoba, 1988.

18 Así lo ordenaba Alfonso X en las *Partidas.*

19 En los documentos de los siglos XI y XII consultados por las autoras en Huesca, Tudela o Toledo nunca se usó otra notación numérica que no fuera la literal.

20 Donde se usaban tres puntos para designar el cero.

21 Al contrario de lo que sucede en Granada donde no hay constancia del uso de la notación gubarí. Valencia sería la zona de intersección de ambos modelos, conviviendo pacíficamente desde finales del XV. Y de hecho no sólo convivieron sino que cohabitaron en algunas ocasiones en un mismo número.

22 G. Ifrah, 1998. *Las cifras. Historia de una gran invención.* Madrid, A.E.

23 «... el álgebra fue ignorada por los españoles hasta que el alemán Marco Aurel se la dió a conocer en 1552 con un libro vulgar y atrasado».

24 De hecho, aunque lo nombra en su discurso, resulta evidente que al-Qalasadi no tiene cabida en su particular concepción de lo hispano.

25 Haremos referencia aquí a la traducción de Mohamed Souissi editada por la Maison Arabe du Livre. A ella remitimos para mayor información sobre su vida y obra.

26 Al-Qatrawani (s. XIV), Ibn Qunfudh (¿, 1406) o Ibn Ghazi (¿, 1513)

27 La cita, que a buen seguro suscita un acuerdo unánime, es tan habitual que se ha convertido en máxima: «Una buena notación tiene en las ciencias matemáticas tanta importancia, como una buena clasificación en las naturales».

28 La expulsión de Abraham Zacuto le puso en contacto con Andrea Alpago, quien probablemente introdujo en Italia la idea de la circulación pulmonar de Ibn al-Nafis (luego difundida por M. Servet) y el lema de Nasir al-Din Tusi que reaparece en *De Revolutionibus* de Copérnico. Un ejemplo sin más para valorar el retroceso que supuso el triunfo de la cerrazón y el dogmatismo cristiano.

29 Al parecer, a pesar de matemáticos como Juan Escrivá, los hermanos Torrellas o Pérez de la Oliva que estudiaron en Italia.

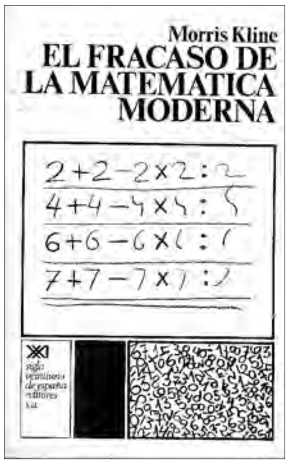
* Las ilustraciones están tomadas del libro de Ana Labarta y Carmen Barceló (1988): *Números y cifras en los documentos arábigohispanos*, Universidad de Córdoba.

* De los múltiples errores que a buen seguro se cuelan en cada artículo, a veces detectamos alguno. En el anterior, por ejemplo, en el epígrafe «Una continuidad obligada» la inercia nos llevó a escribir judeo-cristiana donde debiera poner judeo-musulmana.

SUMA 39
febrero 2002

¿Os acordáis de los conjuntos?

EL FRACASO DE LA MATEMÁTICA MODERNA
Morris Kline
Edición en castellano:
Siglo XXI Editores S.A.
Madrid 1976
Primera edición, en inglés:
Why Johnny Can´t Add: The Failure of the New Math
St. Martin´s Press
New York 1973



Una historia personal

Cuando a finales de la década de los setenta del siglo pasado (¡ay!) comencé a dar clases de 1.° de BUP en un instituto rural encontré que mis alumnos tenían un libro de texto de tapas naranjas (muy difundido entonces). En su interior se les proponía tareas matemáticas tan «motivadoras» para los adolescentes como ésta:

RECENSIONES

> “... en el anillo ˙[x] de los polinomios con coeficientes reales, la ecuación f g = h donde f , h 0 ˙[x] , f ↑ 0 y g es un polinomio desconocido no posee en general solución ... El propósito de este tema es construir un cuerpo que contenga a ˙[x] y en el que esa ecuación tenga solución.

Tras doce páginas de laboriosa construcción, se llegaba a esta triunfante conclusión:

> El cuerpo (˙(x) , + , ·) así construido contiene un subconjunto ˙(x)1 isomorfo al anillo de polinomios ˙[x].

Para un recién licenciado en Matemáticas que aterrizaba en la realidad tras cinco años de vuelo por los espacios matemáticos (*n* dimensionales) era de lo más loable que se mostrasen de forma tan diáfana y democrática las estructuras matemáticas a los jóvenes estudiantes. Suponía que esto les iba a allanar de forma considerable su posterior camino en los estudios... de la Licenciatura de Matemáticas, claro. Pero pronto constaté que tanto énfasis (editorial y mío) por la estructura y el rigor chocaba simplemente con la vida que a los quince años llama ya «... como un aullido interminable» (J.A. Goytisolo). Que mis alumnos, y no por ingratitud, no apreciaban la belleza del citado isomorfismo; ni tampoco disfrutaban, un curso después al estudiar los límites funcionales en 2.° de BUP, con la búsqueda y captura de una expresión de ε como función de un δ conocido... En lugar de ofrecerles sugerencias que les animasen a desarrollar sus intuiciones matemáticas, ideas que reconocieran como propias y así pudieran hacerse un lugar en esa misteriosa y sugerente vida, con mi enseñanza les estaba dando argumentos para hacer suya la archiconocida frase de Bertrand Russell: «Las matemáticas pueden definirse como una materia en la que nunca sabemos de qué estamos hablando ni si estamos diciendo la verdad». Y lo que en boca de un lógico profesional constituía una orgullosa declaración de independencia formal respecto de la realidad, en la formación intelectual de los futuros ciudadanos se convertía en un drama que sellaba en muchos casos una enemistad de por vida con las Matemáticas.

Tal vez si alguien hubiese puesto en mis manos durante la carrera o en el proceso de habilitación para la enseñanza *El fracaso de la matemática moderna*, tanto mis alumnos como yo nos habríamos evitado unas cuantas decepciones, aburrimiento y complejos de inutilidad (como estudiantes y como profesor).

Un libro en el momento oportuno

El libro comienza con una muy explícita cita de Goethe: «Yo pregunto si es natural, si es incluso prudente, que te hastíes tú mismo y aburras a los estudiantes». Y en el capítulo 1 (*Una muestra de la Matemática Moderna*) hace una esperpéntica, pero bastante real en aquellos años, recreación de una serie de preguntas y respuestas en el aula donde queda en evidencia la ridiculez de sustituir en la escuela el sentido numérico por la precisión conjuntista. Recreación que por sí misma ya explica el título original de la obra en inglés: *Por qué Juanito no sabe sumar*.

La obra de Kline tuvo en su tiempo el valor de saber denunciar los errores del sistema tradicional memorístico y a la vez alertar sobre los nuevos desastres que la arrolladora modernidad conjuntista traía a las escuelas e institutos.

En los años setenta se vivía la explosión de la llamada Matemática Moderna, que pretendía llevar desde la Universidad a las enseñanzas básica y secundaria el método axiomático, el lenguaje lógico–simbólico y las estructuras algebraicas que habían servido durante el siglo precedente para unificar las Matemáticas (creando también nuevas incertidumbres de profundidad abisal, como mostró Kurt Gödel). En el paroxismo de su propósito totalizador, se llegó a proponer la introducción en la Educación Secundaria del Lenguaje de Categorías (abstracciones de segundo orden que estructuran aspectos comunes a diversas estructuras), con un programa de 17 teoremas y conceptos como los funtores «que toda persona bien educada debe conocer» (Peter J. Hilton. Conferencia en el Primer Congreso Internacional de ZWIN. 1972. Centro Belga de Pedagogía Matemática). Era un pequeño consuelo pensar que las cosas aún podían haber llegado más lejos.

Los impulsores de esa corriente eran los matemáticos bourbakistas que al grito «¡Muerte al triángulo! ¡Abajo Euclides!», y por una conjunción de razones que Kline describe en su libro, consiguieron imponer su criterio en el sistema norteamericano de educación. En poco tiempo ocurrió lo mismo en Europa. ...Y así se llegó también en nuestro país a los libros de tapas naranjas y otros.

La obra de Kline tuvo en su tiempo el valor de saber denunciar los errores del sistema tradicional memorístico y a la vez alertar sobre los nuevos desastres que la arrolladora modernidad conjuntista traía a las escuelas e institutos. Al hacerlo se enfrentaba a los defensores de ambos sistemas. Lo hacía en el momento oportuno, previendo la nueva situación. Y no caía en el tono apocalíptico de quien sólo describe fracasos pasados y predice fracasos futuros, sino que argumentaba las razones para unos y otros, a la vez que sentaba los principios fundamentales para la necesaria reforma de la enseñanza de las matemáticas en dichos niveles.

Así, respecto al sentido de la presencia de la educación matemática en el currículo decía:

> No se debería intentar preparar profesionales de las matemáticas ni habría que preocuparse por lo que el futuro estudio de las matemáticas pudiera requerir. [...] El conocimiento es un todo y las matemáticas son una parte del todo. [...] De esta forma modelaríamos y enseñaríamos más allá de las propias matemáticas, las relaciones de las matemáticas con otros intereses humanos; en otras palabras, un plan de matemáticas culturalmente amplio que buscaría su íntima unión con las principales corrientes del pensamiento y de nuestra herencia cultural.

Y respecto a la metodología a seguir:

> Las matemáticas no deberían desarrollarse deductivamente sino constructivamente. [...] Enseñar a descubrir no es de ningún modo un trabajo sencillo. Exige que los estudiantes aprendan a usar la intuición, a hacer suposiciones, a tantear, a generalizar resultados conocidos, a relacionar lo que se busca con los resultados ya conocidos, a utilizar interpretaciones geométricas de las proposiciones algebraicas, a medir, y docenas de otros procedimientos. [...] Pero, casi siempre, el enseñar a descubrir exige la preparación de una serie de preguntas sencillas que gradualmente conducen a las conclusiones deseadas.

Descripción del contenido

La obra es de fácil lectura y se compone de 11 capítulos (el primero ya comentado).

Capítulo 2: El plan tradicional

En este capítulo Kline describe las carencias del plan tradicional de Matemáticas en EE.UU. Se componía fundamentalmente de: Álgebra mecánica, colección de procedimientos inconexos para que los alumnos llegasen a realizar operaciones algebraicas y que abocaban a un aprendizaje memorístico; y Geometría euclídea deductiva, en la que la cadena lógica en su perfección lineal no enseñaba a pensar pues no desvelaba cuáles eran las dificultades abordadas ni tampoco las ideas motrices que llevaron a superarlas, conduciendo por otra vía también a la memorización. Ambas ramas eran presentadas con frialdad y motivadas con razones de tipo estético, propedéutico o de un futuro muy restringido, bien alejadas de la realidad práctica en estos niveles. El valor intelectual de las Matemáticas sólo puede ser apreciado desde cierta madurez.

Como dijera Lebesgue, las Matemáticas no surgen de la lógica deductiva sino del trabajo de la imaginación creadora, guiada por analogías, intuiciones e incluso ideales estéticos; la lógica actúa después, sólo como control.

Capítulo 3: Origen del movimiento de la matemática moderna

El lanzamiento en 1957 del primer Sputnik por la URSS propició en EE.UU. la alarma sobre la inferioridad nacional en los campos científico y tecnológico. En esa coyuntura, al constatar el bajo nivel norteamericano en educación matemática, surgió la idea, secundada en los ámbitos políticos y económicos, de que era necesaria una reforma. Para ello, se supuso que era preciso abandonar la enseñanza del plan tradicional, unas Matemáticas con contenidos separados y anteriores a 1700, sustituyéndolas por otras más «modernas». Dada la importancia de las Matemáticas abstractas en el último siglo, con la unificación de sus ramas mediante conceptos generales y estructuras, se propuso reconstruir las Matemáticas de la enseñanza elemental desde ese punto de vista global. Y se vio la necesidad de reeducar a los profesores, comenzando por doquier los cursillos de Teoría de Conjuntos. Pero, como apunta Kline:

> Un plan que pudiera ser ideal para la formación de futuros matemáticos no puede ser el correcto para la formación básica de toda la población.

Capítulo 4: La interpretación deductiva de las matemáticas

Se argumentaba que si se construían todas las matemáticas elementales lógicamente, comenzando por axiomas y definiciones y avanzando con teoremas y propiedades, paso a paso, como la Geometría euclídea en el plan tradicional, se podrían *comprender* todas las Matemáticas. Extendiendo este enfoque a la Aritmética, por ejemplo, los enteros se definen como clases de equivalencia. ¿De verdad así *comprende* un niño lo que es un entero?

El error residía en ofrecer a los aprendices la versión última y perfeccionada de una ciencia que, sin embargo, fue creada con intuiciones, intentos, aproximaciones y también fracasos instructivos. Se transmitía así una visión falsa del pensamiento matemático, distante y frío en su perfección. Kline, en apoyo de su tesis, acude a ejemplos en la historia de las Matemáticas: el cero y los complejos fueron adoptados por simple pragmatismo; ni Newton ni Leibnitz pudieron formular correctamente los conceptos básicos del cálculo infinitesimal; los grandes matemáticos del s. XVIII y XIX realizaron enormes avances sin tener una definición precisa de los conjuntos numéricos; y sólo a finales del XIX se sientan los fundamentos lógicos de las ramas más importantes. Concluye que «la intuición de los grandes hombres es más poderosa que su lógica».

En definitiva, para alcanzar un nivel de pensamiento hay que pasar por las experiencias previas que lo han propiciado. Como dijera Lebesgue, las Matemáticas no surgen de la lógica deductiva sino del trabajo de la imaginación creadora, guiada por analogías, intuiciones e incluso ideales estéticos; la lógica actúa después, sólo como control. No se puede sustituir este proceso de conocimiento por la palabrería lógica, si no es destruyendo la vida y el espíritu de las Matemáticas.

> Muchos profesores salen de sus clases muy satisfechos consigo mismos después de haber expuesto una serie de semejantes teoremas y demostraciones. Pero los estudiantes no quedan satisfechos. No han comprendido de qué iba, y todo lo que pueden hacer es aprender de memoria lo que han oído. No conocían el pensamiento original y no han sacado nada en limpio de las repulidas demostraciones.

Capítulo 5: El rigor

Kline denuncia la obsesión por el rigor en la enseñanza secundaria como mera artificialidad alejada de los significados. Los modernistas tildaban de incompletas a las demostraciones de Euclides porque su desarrollo deductivo no era riguroso, al usar implícitamente axiomas y teoremas no citados por evidentes. Pero, si durante dos mil años los mejores matemáticos no advirtieron la falta de esos axiomas y teoremas, ¿cómo puede esperarse que los jóvenes vean su necesidad? Además, paradójicamente, algunos teoremas son más evidentes que los axiomas requeridos para poder demostrarlos.

Kline denuncia la obsesión por el rigor en la enseñanza secundaria como mera artificialidad alejada de los significados.

Estas frases sentencian claramente su opinión:

> El rigor puede salvar a las Matemáticas, pero seguramente perderá a los alumnos.
>
> Lo que es lógicamente prioritario no es pedagógicamente deseable.
>
> Es más fácil hacer sofisticados los temas triviales que dar una exposición clara e intuitiva de las ideas más difíciles.

Capítulo 6: El lenguaje de las matemáticas

Se explica cómo los modernistas criticaban la imprecisión de la Matemática tradicional y pasaron del necesario simbolismo a la profusión de símbolos que a menudo aturde, tan sólo a cambio de un reducido ahorro de espacio; y también desembocaron en el exceso de terminología, al final de palabrería (por ejemplo, se hacía una severa distinción en la enseñanza básica ente número y numeral). Y se recuerda que:

> Las ideas y los argumentos con los que trabaja el matemático tienen una realidad física, intuitiva y geométrica mucho antes de ser expresados mediante símbolos.

Capítulo 7: La matemática por la matemática

En la Matemática Moderna se consideraba a las Matemáticas autosuficientes. En el aula los diversos conjuntos de números se justificaban por la insuficiencia de los ya conocidos para resolver nuevos tipos de ecuaciones. Entonces parecía que el hecho de que las estructuras así construidas se ajustaran a algunos fenómenos físicos y situaciones reales fuera casual.

El autor recuerda que las Matemáticas existen sobre todo para ayudar al hombre a comprender y dominar el mundo físico y, en alguna medida, los mundos económico y social. Están al servicio de determinados fines y propósitos que no se deben ocultar. Unas Matemáticas por y para sí mismas no pueden ser atractivas para los jóvenes.

Unas Matemáticas por y para sí mismas no pueden ser atractivas para los jóvenes.

Además, ¿cómo se va a valorar la importancia de las estructuras matemáticas si no se conocen abundantes ejemplos concretos donde advertir su presencia o su singularidad por oposición con otros donde no se encuentran? ¿Qué valor tiene insistir en la conmutatividad en una edad en que sólo se conocen operaciones conmutativas?

Pero se razonaba de forma inversa:

> Se pide a los estudiantes que aprendan conceptos abstractos con la esperanza de que si lo consiguen podrán entender automáticamente sus concreciones. [...] Pero en sentido estricto es imposible enseñar una abstracción.[...] Sólo se puede unificar lo que ya conocemos.

Ese error de enfoque epistemológico es denunciado a través de casi todos los capítulos.

Capítulo 8: El nuevo contenido de la nueva matemática

¿Qué conceptos se introdujeron así en los planes de enseñanza? Fundamentalmente, la Teoría de Conjuntos. Kline la considera un despilfarro de tiempo pues opina que no pasa de ser un lenguaje que por sí mismo no ofrece resultados que puedan seducir al estudiante con sensibilidad matemática. Y comenta ácidamente que se le dio tanta importancia porque era sin duda «uno de los pocos temas de Matemáticas Modernas que los creadores de este plan podían comprender».

Además, la numeración en bases no decimales, la Lógica Simbólica, el Álgebra de Boole, las congruencias y las estructuras algebraicas. Un caso que repite por afectarle especialmente es el de las funciones, que eran definidas como conjuntos de pares ordenados, ocultando el hecho esencial de la variación dependiente.

> El formalismo de este plan solamente puede conducir a una disminución de la vitalidad de las matemáticas y a una enseñanza autoritaria, al aprendizaje mecánico de nuevas rutinas, mucho más inútiles que las rutinas tradicionales.

Termina el capítulo con ironía, al indicar que quizá la crítica más decisiva de los programas de matemática moderna la hizo inconscientemente un profesor que estaba satisfecho con ella:

> Si vamos a suspenderles en matemáticas, por lo menos les suspenderemos en unas buenas matemáticas.

Capítulo 9: El testimonio de los exámenes

En este capítulo se señalaba la falta de criterios objetivos para valorar los planes tradicional y moderno. Por una parte, los exámenes tradicionales miden ante todo la capacidad de memorizar, que ayuda pero no es precisamente lo esencial para pensar matemáticamente. Por otra, las evaluaciones realizadas en la fase inicial de un nuevo plan son sospechosas, por centrarse en los profesores pioneros y más implicados en él (de esto también supimos algo por estos pagos, años más tarde). Termina con un manifiesto que firmaban 75 matemáticos de prestigio de EE.UU. y Canadá alertando sobre los peligros del nuevo plan.

Capítulo 10: La verdadera justificación de las nuevas matemáticas

¿Por qué se adoptaba una reforma de ese tipo? Kline lo explica en la oportunidad concedida a los matemáticos profesionales (ya comentada en el Capítulo 3) para legislar en un terreno en el que los auténticos entendidos, profesores de Primaria y Secundaria y pedagogos no tuvieron voz ni la reclamaron. Y éstos no lo hicieron por temor reverencial a los doctores universitarios, a su vez poco o nada interesados por la psicología del aprendizaje ni la didáctica. Por ocupar cátedras en las principales universidades se les consideró expertos en áreas en las que eran totalmente ignorantes. Y aprovecharon la ocasión para imponer su estilo y sus criterios de valor.

Además se jugó propagandísticamente con las connotaciones del término «moderna» como algo nuevo, vital e importante, frente a lo «tradicional» como antiguo; contraposición nada justificada desde el momento que se trataba tan sólo de una nueva interpretación. Pero que tampoco se llevaba de forma coherente a los libros de texto, refritos de rutinas tradicionales y terminología moderna. Estos libros, «tan sólo mejoran nuestra comprensión de una cosa: muestra que hay matemáticos competentes que son ineptos para la pedagogía».

Esos matemáticos profesionales, según Kline, están tan absorbidos en progresar en sus investigaciones que apenas se ocupan de la historia o el significado humano y cultural de su disciplina, «forman una cofradía cerrada», ocupados tan sólo en jugar con sistemas generales abstractos de acuerdo con unas reglas. Por ello, citando a Courant dice: «No a una división entre Matemáticas Puras y Matemáticas Aplicadas»; y considera que si esa división se consuma, estas últimas las desarrollarán físicos o ingenieros, sin que los matemáticos tengan contacto con los nuevos descubrimientos.

Se trataría de estructurar el currículo alrededor de la resolución e problemas, propuesta que hoy sigue siendo «revolucionaria» en la mayoría de nuestras aulas.

Pero, sobre todo, dice: «No en educación al abandono del ideal del método socrático a favor de los métodos del dogmatismo catequético» que considera inevitablemente unidos a la enseñanza ordenada y bien definida de unas abstracciones para las que el alumno carece de la base concreta necesaria. Nada más alejado del «matematizar» como actividad humana creadora.

Capítulo 11: La dirección conveniente para una reforma

En este último capítulo se señala en qué dirección, según el autor, debería orientarse una reforma eficaz de la enseñanza en general:

> Una formación más amplia que profunda, en la que los estudiantes no sólo aprendieran cuál es el contenido de cada materia, sino también qué papel juega en nuestra cultura y en nuestra sociedad.

y de la enseñanza de las Matemáticas en particular, con palabras de alguien tan poco tachable de desconocedor de la gran matemática como Alfred North Whithead, quien decía ya en 1912:

> Las matemáticas elementales [...] deben ser depuradas de todo elemento que sólo pueda justificarse de cara a estudios posteriores. No puede haber nada más destructivo para una verdadera educación que el gastar largas horas en la adquisición de ideas y métodos que no llevan a ningún sitio. [...] Los elementos de matemáticas deberían tratarse como el estudio de un conjunto de ideas fundamentales, cuya importancia pueda apreciar el estudiante inmediatamente.

Convencido de que es más fácil interesar a los jóvenes por los problemas reales que por las matemáticas abstractas, sugiere sustituir la secuenciación matemática habitual por la presentación de conceptos y técnicas que se van precisando para cada objetivo planteado. Se trataría de estructurar el currículo alrededor de la resolución de problemas, propuesta que hoy sigue siendo «revolucionaria» en la mayoría de nuestras aulas.

Propone así un desarrollo constructivo, la recreación matemática, que cree posible en el marco del pensamiento intuitivo, no en el deductivo. Considera más importante desarrollar intuiciones que demostraciones; los argumentos heurísticos y los razonamientos por analogía deben preceder a las bases lógicas. Y se apoya en el llamado principio genético: el orden y el estilo (mediante aproximaciones, conjeturas, comprobaciones y revisión de errores) presentes en el desarrollo histórico de las Matemáticas son los adecuados para los estudiantes. La demostración sería el paso final.

> Es deplorable que demos la impresión de que los matemáticos razonan directa e indefectiblemente hacia sus conclusiones.

Termina la obra declarando su convencimiento de que, mucho más importante que el plan de enseñanza es la formación de los profesores en un sentido amplio. Y que éstos deberían ser los árbitros que en cada situación decidan qué se debe enseñar y cómo debe enseñarse.

> Un mal profesor y un buen plan darán una mala enseñanza, mientras que un buen profesor superará las deficiencias de cualquier plan.

Cualquier tiempo pasado... ya pasó

En los 25 años transcurridos desde la publicación en España de *El fracaso de la matemática moderna* se anunciaron unas reformas y se produjeron otras; pero ante todo cambió la realidad social de la educación. Ahora que se pretende redimir al sistema de sus males actuales con reválidas y criterios empresariales de calidad; ahora que algunos nostálgicos volverán a confundir interesadamente el nivel de la enseñanza con el nivel de los contenidos expuestos por el profesor, en lugar de fijarse en el nivel real del aprendizaje conseguido por los alumnos; ahora vuelve a ser muy útil la lectura de este libro. Y recordar aquellos tiempos pasados, aquellos fracasos fuera del aula (cuando la atención a la diversidad consistía en un 40% de alumnos de 15 años fuera del sistema educativo) y dentro del aula (con un nivel muy alto sí... de suspensos entre alumnos ya previamente seleccionados). Es muy útil, por si tuviéramos la tentación de volver a tiempos pasados, que por otra parte es tarea imposible.

José María Sorando Muzás

20 AÑOS DE OLIMPIADA MATEMÁTICA EN ARAGÓN
Guillermo Dorda Abaunza
Editado por el autor
Zaragoza, 2001
157 páginas

De las múltiples olimpiadas, concursos, torneos, rallies, canguros, etc. de matemáticas que en la actualidad se desarrollan hay uno, con características especiales, que fue el pionero de todos ellos. Se trata de la Olimpiada Matemática para estudiantes de 17-18 años (inicialmente de PREU, luego de COU, ahora de Bcahillerato LOGSE) que se inició en 1964 convocado y organizado por la Real Sociedad Matemática Española. Ha constado de dos fases, una que se realizaba en los distintos distritos universitarios y una fase nacional y en muchas ocasiones los ganadores de ésta participaban en la correspondiente Olimpiada Internacional.

Aunque, como es sabido, la Real Sociedad Matemática Española ha tenido una etapa, digamos, de letargo invernal, la Olimpiada se ha ido celebrando año tras año, debido al entusiasmo de una serie de profesores universitarios y de bachillerato que creían en el proyecto. Uno de ellos es el inspector Guillermo Dorda que, desde 1980, se hizo cargo de esta actividad en el Distrito Universitario de Zaragoza, en la que han participado cerca de tres mil estudiantes durante este periodo.

Junto a su tenacidad por sacar adelante la Olimpiada, Guillermo Dorda posee una cualidad como es la de guardar lo que él considera interesante, que le ha llevado a disponer de un archivo con listas, problemas propuestos, soluciones a los mismos, etc. y lo cual le ha permitido escribir el libro que estamos comentando.

Se trata de una recopilación de la resolución de todos los problemas propuestos en el Distrito Universitario de Zaragoza durante estos últimos veinte años, en total cerca de un centenar y medio de problemas. En la mayoría de los casos, las soluciones son de los propios alumnos y alumnas participantes, con lo cual se presentan una gran variedad de enfoques y de estilos de «pensamiento matemático». En algunos problemas se reproducen las soluciones de dos o más alumnos. Por supuesto, algún problema no era resuelto por ningún estudiante o la solución no era excesivamente elegante; en estos casos los problemas son resueltos por el propio autor.

El libro se acompaña de un CD, realizado por el profesor José Luis García Rodrigo, que incorpora apartados como el titulado Cabri, en el que se resuelven dinámicamente muchos de los problemas geométricos planteados, utilizando el programa Cabri Geométre II.

La aparición tanto del libro como del CD será recibida de forma muy satisfactoria, no sólo por profesores y estudiantes que piensen en una preparación futura de esta olimpiada, sino por todos aquellos que gustan enfrentarse a problemas nada obvios con un cierto grado de dificultad.

Emilio Palacián

LAS MATEMÁTICAS DE LOS CUENTOS Y LAS CANCIONES
María Dolores Saá Rojo
Editorial EOS
Madrid, 2002
398 páginas

La autora, profesora de la Facultad de Educación de la Universidad de Murcia, nos presenta un minucioso trabajo destinado a los profesores de Educación Infantil. El libro está dividido en dos partes, la primera dedicada al «Interés matemático de cuentos y canciones» y la segunda a «Los cuentos y las canciones en el aula», completando con un anexo de las canciones y poemas utilizados en esta parte.

La profesora Saá en su presentación indica la finalidad de la primera parte de su libro y dice «pretendemos concienciar al profesor del gran potencial matemático que tienen los relatos, mostrándole múltiples situaciones de carácter matemático que subyacen en ellos», mientras que en la segunda plantea «un esquema de trabajo de los relatos en el aula en general aplicándolo después a un cuento y una canción».

El primer capítulo lo dedica al «tiempo como sucesión de acontecimientos» deteniéndose en su identificación, localización de sucesos, sucesos ordenados de acontecimientos, descripción de posiciones temporales mediante ordinales y los ciclos del tiempo.

En el segundo capítulo detalla la autora «propiedades y relaciones de objetos y colecciones», comenzando su identificación, pasando por decir lo que es una colección, relacionando después objetos y colecciones así como su transformación y situaciones de intercambio. En la organización interna de una colección menciona las relaciones binarias, la ordenación, la partición y las diversas formas de organizar una misma colección. Cuando describe relaciones entre colecciones menciona las correspondencias especificando los conjuntos que intervienen, los tipos de correspondencias, composición de correspondencias entre conjuntos ordenados; todo ello con ejemplos de citas de cuentos donde se dan tales correspondencias. También los conceptos de subconjunto, la intersección de conjuntos y el conjunto complementario, completando este capítulo con las aplicaciones de los cuantificadores.

El tercer capítulo lo dedica a «cantidades discretas» comentando la autora cómo se trata en los relatos la evaluación, comparación, composición y descomposición de cantidades, aclarando con ejemplos de cuentos una serie de consideraciones que previamente ha establecido. Así, cuando trata distintas formas de evaluación acude a citas de *Los bostezos de Pablo*, *El patito feo*, *Los siete cabritillos*, etc., y desarrolla las formas de expresar la cantidad y otro tanto hace en la ordenación de cantidades aportando citas de cuentos tan conocidos como *En alta mar, La gallina Picoreta, La flauta de Bartolo*, etc. y de canciones como *La gallina Turuleta*. Completa este capítulo con los números ordinales y la composición y descomposición de cantidades.

El cuarto capítulo está dedicado a «cantidades continuas» y se centra en las propiedades de los objetos y de los acontecimientos relacionados con las magnitudes medibles como longitud, tiempo, superficie, volumen o capacidad, diferenciando dos partes, una prenumérica y otra numérica. En la comparación de cantidades cita relatos de comparación directa e indirecta de cantidades y en la medida de cantidades continuas la profesora Saá dice «la comparación de cantidades de magnitudes no determinadas numéricamente sirve para aclarar la propia noción de magnitud pero también es la base de la medida» y por ello comienza con el proceso de medir utilizando unidades arbitrarias (*Hansel y Gretel, Alí Babá y los cuarenta ladrones*...), para a continuación pasar al uso de unidades convencionales (*Pulgarcito, La ratita presumida*...), etc.

En el quinto capítulo dedicado a «el espacio y las formas» menciona los términos relacionados con la exploración espacial relativos a la verticalidad, frontalidad, lateralidad, a relaciones de separación, de inclusión y otras, relativos a la disposición en línea y a desplazamientos. Las referencias en «La exploración del espacio» están tan documentadas que la autora menciona en *Rosalinda*: «Rosalinda se levantó de la cama con el pie izquierdo» o en *El conductor*: «El conductor va marcha adelante, luego va marcha atrás, gira a la derecha y gira a la izquierda» o en *La boda del cerdito*: «Un cerdito aplaude con las patas delanteras». En «Los trayectos o recorridos» menciona a *El flautista de Hamelín*, a *Los tres cerditos*, a *Cabellos de oro*, a *Patatita*, a *La casita de chocolate*, etc., para aclarar distintos tipos de trayectos tanto simples como compuestos o abiertos y cerrados, cíclicos o laberintos. En «Forma de los objetos» la autora menciona que los relatos ilustrados con viñetas «facilitan el proceso de identificación y denominación de algunas de las formas manejadas en el texto» y especifica que la forma de los objetos se puede trabajar desde los relatos si se escenifican y de esta experimentación con objetos concretos el niño va descubriendo aspectos de la forma, al tiempo que los relaciona, agrupa, clasifica, etc.

La segunda parte la dedica Saá Rojo a «Los cuentos y las canciones en el aula» comenzando con el sexto capítulo: «Una forma de trabajar los cuentos y las canciones» en el que aporta las tareas que se pueden realizar para trabajar en el aula las matemáticas de los relatos mencionando que el niño conoce un relato cuando es capaz de nombrar sus personajes y elementos principales y establecer entre ellos las relaciones destacadas, manejarlos en el orden del relato, narrar escenas puntuales, localizar escenas anteriores y posteriores, etc.

Dedica un amplio apartado a las secuencias gráficas del relato aportando las de varios cuentos (*Los tres cerditos, La ratita presumida, Los músicos de Bremen*, etc.) y otro a analizar la lógica del relato e inventar nuevos relatos y destina 75 páginas a situaciones de interés matemático de cuentos y canciones.

En el capítulo séptimo titulado «Un cuento y una canción» como ejemplos desarrolla el cuento *Majo el rinoceronte* y la canción popular *Yo tenía diez perritos*. En ambos casos los describe, menciona los recursos necesarios, las motivaciones, la dramatización, la escenificación, las secuencias gráficas, el análisis de la lógica del relato y el invento de nuevas historias y por último situaciones de interés matemático.

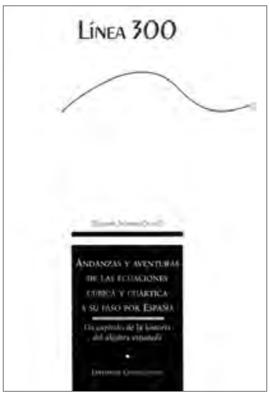
Completa con un anexo por orden cronológico con 61 textos de canciones, retahílas y poemas manejados en la segunda parte del libro. Por último la autora aporta una bibliografía compuesta por 428 referencias que van desde cuentos populares a trabajos de psicólogos, matemáticos y pedagogos.

En definitiva un libro muy detallado, actualizado y en donde analiza con profundidad los contenidos matemáticos de los cuentos y de las canciones. Este trabajo de investigación realizado por la autora a lo largo de varios años complementa su actividad docente como profesora de Didáctica de la Matemática en la especialidad de Maestro de Educación Infantil.

Auguramos un éxito en esta incursión de la profesora Saá en el mundo editorial educativo de la Enseñanza Infantil y la animamos a seguir y a ampliar este trabajo para beneficio de las nuevas generaciones de alumnos infantiles.

Andrés Nortes Checa

ANDANZAS Y AVENTURAS DE LAS ECUACIONES CÚBICA Y CUÁRTICA A SU PASO POR ESPAÑA. UN CAPÍTULO DE LA HISTORIA DEL ÁLGEBRA ESPAÑOLA
Ricardo Moreno Castillo
Editorial Complutense
Colección Línea 300
Madrid, 2001
ISBN: 84-7491-632-1
100 páginas



La editorial de la Universidad Complutense ha publicado un libro titulado *Andanzas y aventuras de las ecuaciones cúbica y cuártica a su paso por España. Un capítulo de la Historia del álgebra española*, asequible para alumnos de Educación Secundaria, lo que no suele ser su costumbre, ya que la colección Línea 300, trata de publicar trabajos de investigación, que por su especificidad son difíciles de editar en las condiciones habituales del ámbito editorial, y que sin embargo así pueden ser dados a conocer tanto en España como internacionalmente, en el terreno científico y universitario. Se trata de una obra del profesor Ricardo Moreno Castillo, que al mismo tiempo que es profesor de la Universidad Complutense, explica Matemáticas en un Instituto de Educación Secundaria. Es evidente que la colaboración entre los IES y la Universidad siempre puede ofrecer investigaciones fructíferas que son bienvenidas por ambos colectivos. En este caso y como indica Miguel de Guzmán en el prólogo, los requisitos matemáticos necesarios para poder degustar esta obra son mínimos, tanto que un estudiante de secundaria podría seguir el libro sin problemas técnicos, pero también es cierto que tendría que tener «suficiente motivación», lo que dudamos de la mayoría de ellos, en estos tiempos difíciles para la matemática, y también para la historia.

Está claro que el autor de este libro ha dedicado mucho tiempo a indagar por bibliotecas y archivos de fondos diversos para poder hacer esta puesta en escena que como dice en su prólogo Miguel de Guzmán: «el resultado es esta excursión, bien documentada aunque sin pretensión de exhaustividad». El libro nos muestra todo un paseo por la literatura matemática investigada por el autor, y partiendo del siglo XV, aunque se hace referencia a épocas anteriores, y llega a nuestro recién terminado siglo XX, con mención especial a matemáticos españoles, que sin duda han contribuido al desarrollo y mejora de los procedimientos de resolución. Siempre hay que agradecer la afición por la historia de las matemáticas, y en esta ocasión hay que felicitar al autor por realizar un trabajo pesado y prolongado en el tiempo para que al lector le sea fácil experimentar el placer de seguir históricamente un proceso matemático. Hay que lamentar que la misma editorial Complutense facilite con el libro una fe de erratas, donde se enumeran treinta y nueve detectadas. Creo que se debería cuidar un poco más la corrección de éstas en el texto, antes de imprimirlo, ya que en la actualidad contamos con software y equipos informáticos de impresión que facilitan estas labores, al mismo tiempo que minimizan el tiempo de edición e impresión.

El libro está dividido en diecisiete capítulos, junto con la introducción, el prólogo y la bibliografía. El prólogo como ya hemos comentado está realizado por nuestro internacionalmente conocido Miguel de Guzmán, profesor catedrático de Análisis Matemático de la Universidad Complutense de Madrid, que expone su opinión sobre la necesidad de trabajos como éste, para favorecer el progreso de la cultura matemática en España.

En la introducción, Ricardo Moreno explica su concepción de un libro de historia de la matemática como una narración, dejando a un lado el ambiente intelectual y la política científica de cada época, y profundizando en el relato de los procedimientos de resolución, tanto los nuevos como los que cada autor propone como novedad, con sus casos particulares y las relaciones con la geometría del triángulo. Así mismo indica que los métodos aproximados o de tanteo se dejan fuera del libro, por estar fuera del álgebra, aunque se citan en la bibliografía. Por último, realiza una nómina de todas las personas a las que agradece sus sugerencias e indicaciones, así como de las instituciones donde ha consultado los fondos de sus bibliotecas, archivos y hemerotecas.

En la introducción, Ricardo Moreno explica su concepción de un libro de historia de la matemática como una narración, dejando a un lado el ambiente intelectual y la política científica de cada época…

En cada uno de los diecisiete capítulos se explica el procedimiento de resolución de un autor o de varios. En el primero titulado «De cómo empezó la cosa en Italia», se cuenta cómo Luca Pacioli pensaba que nunca se podrían resolver las ecuaciones de tercer grado algebraicamente y cómo Gerolamo Cardano las comienza a divulgar en 1545 con su obra *Ars magna…*, donde cita a Tartaglia de quien las habría aprendido. En el capítulo segundo «…Y continuó en Francia», se refiere al procedimiento de Viète diferente al del *Ars Manga*, para llegar a la misma fórmula. En el tercero «El Álgebra de Pedro Núñez», se cita el primer libro (1567) editado en lengua castellana, aunque de autor lusitano, que habla de las ecuaciones de tercer y cuarto grado. En el cuarto «*La Arithmética especulativa* de Andrés Puig», autor catalán del segundo libro en español publicado en 1672, se cuenta cómo éste aprendió un nuevo procedimiento de resolución de ecuaciones cúbicas y cuárticas de su profesor Juan Serrano, en Valencia. En el capítulo V «Los tratados del siglo XVIII» nos cuenta el autor las aportaciones de Thomás Cerdá (jesuita tarraconense), Benito Bails (catalán y profesor de la Real Academia de San Fernando) y Pedro Giannini (italiano y profesor del Colegio de Artillería de Segovia). En el capítulo VI «Los tratados del siglo XIX», se cita a José Mariano Vallejo (granadino y catedrático de matemáticas del Real Seminario de Nobles) con su estudio exhaustivo de las ecuaciones de grado tres y cuatro, y las que de grado superior se pueden reducir a ellas, y Alberto Lista (sacerdote sevillano) que además de su resolución algebraica realiza una resolución gráfica mediante intersección de cónicas. El capítulo VII «Una mejora de los métodos de tanteo de Bézout» se dedica a la aportación que realiza el coronel de Infantería Miguel de Alvear en el año 1814. En el capítulo VIII «Un nuevo procedimiento para resolver la ecuación cúbica» se expone el nuevo procedimiento publicado por el teniente de Ingenieros Luis Sánchez en la *Revista de los Progresos de las Ciencias Exactas Físicas y Naturales*. El capítulo IX «Algunos casos sencillos de ecuaciones cúbicas y cuárticas» se dedica a la descripción de cuatro trabajos publicados en el año 1903, en la *Gaceta de Matemáticas Elementales* por tres autores extranjeros (el italiano Christoforo Alasia de Quesada, y los franceses Ernesto Napoleón Barisien y Ernesto Lebón), para la resolución elemental de casos particulares de ecuaciones de grado tres y cuatro. El capítulo X «Un nuevo procedimiento par resolver la ecuación cuártica» se dedica al método publicado en la *Revista Trimestral de Matemáticas* por el profesor sevillano José Ruiz Castizo Ariza en el año 1904. Este procedimiento es, en realidad, una forma diferente de presentar el método de Bézout para las ecuaciones cuárticas, mediante determinantes y partiendo de las ecuaciones cúbicas. El capítulo XI «La ecuación cúbica y la geometría del triángulo» se dedica a desarrollar la relación existente entre las ecuaciones cúbicas y algunos puntos notables del triángulo determinado por los afijos de las raíces, mediante un artículo del sevillano Augusto Krahe de 1905, en la revista *Mathesis*. En el capítulo XII «Una aportación de Rey Pastor» se narra la solución, aportada por D. Julio Rey Pastor, que en aquella época era aún principiante, a un problema de ecuaciones cúbicas propuesto por la revista *Anales de la Facultad de Ciencias* de la Universidad de Zaragoza en 1908; así como la propuesta de D. Julio de un problema sobre la ecuación cúbica en la *Revista Hispano-Americana*, en el año 1919, cuyas soluciones geométrica y algebraica fueron realizadas por Chosini, además de la solución aportada por D.

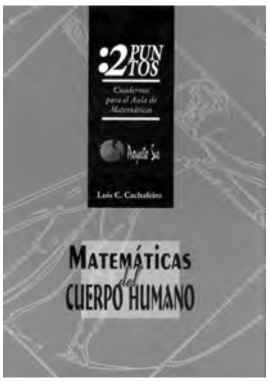
José Mª Orts. En 1914 Augusto Krahe entra a formar parte de la Real Academia de Ciencias, y aprovecha su discurso de entrada para hablar sobre las ecuaciones algebraicas, dando nuevas aportaciones a su anterior artículo en la revista *Mathesis*, siendo éste el contenido del capítulo XIII titulado «De cómo se resuelve una ecuación cuártica convirtiéndola en recíproca». El capítulo XIV «Un nuevo procedimiento, otro más, para resolver la ecuación cúbica» se dedica al trabajo de F. Candela aparecido en 1930 en la *Revista Hispano-Americana*. En el capítulo XV «Sobre lo que sucede cuando las soluciones están en progresión aritmética o geométrica» se tratan los trabajos del catedrático del Instituto San Isidro de Madrid, D. Rogelio Masip Pueyo, publicados en la *Revista Matemática Elemental* en 1947 y 1948. En los dos últimos capítulos, el XVI «La ecuación cúbica y las funciones hiperbólicas», y el XVII «Sobre la resolución de la ecuación cuártica mediante un procedimiento geométrico», se estudian sendos trabajos aparecidos en la *Revista Gaceta Matemática*, de la Real Sociedad Matemática Española, de 1957 y 1958, del catedrático de Instituto Juan Torres Noguera.

La bibliografía se divide en dos grandes apartados, en el primero se encuentran las treinta y una fuentes utilizadas para la investigación, y en el segundo, se dan citan un total de treinta y cuatro obras que explican y detallan las biografías de los autores citados, además de algunos otros libros de referencia para posible consulta.

Un libro interesante tanto para quienes se dediquen a la historia del álgebra –para los cuales no sólo será interesante sino también de obligada lectura y consulta–, como para los profanos que gusten del álgebra y las ecuaciones en particular, como también para todos aquellos interesados en la historia de las matemáticas en general, y en particular de las aportaciones de los españoles.

Mª Carmen Escribano

MATEMÁTICAS DEL CUERPO HUMANO
Luis Cachafeiro
Proyecto Sur de Ediciones, S.A
Colección 2 puntos
Granada, 1999
ISBN: 84-8254-306-7
140 páginas



En estos tiempos en los que parece que vuelve a ser importante para la administración que la enseñanza de las matemáticas se centre en el desarrollo de destrezas que por sí mismas no proporcionan ningún tipo de conocimiento, es conveniente recordar y traer a la luz textos como el que aquí reseñamos que parten de una perspectiva totalmente opuesta. Se trata de una colección de problemas de matemáticas planteados en el contexto del cuerpo humano, de forma que su resolución proporciona la oportunidad de emplear las matemáticas que se desea que conozcan los alumnos de secundaria y bachillerato.

Cada actividad del libro está precedida de una explicación de los procesos biológicos sobre los que se asienta. El propósito del autor es evitar que, profesores o alumnos que usen el material, deban buscar esa información con un esfuerzo suplementario, pero también conseguir que los modelos matemáticos que se empleen sean aproximaciones que se ajusten en lo posible a los procesos biológicos implicados y a los conocimientos matemáticos de los alumnos a los que van dirigidos.

Luis Cachafeiro da una serie de buenas razones para elegir el tema del cuerpo humano como contexto significativo:

- lo llamativo y sorprendente de las cuestiones tratadas;
- el hecho de que proporciona buenos modelos para las matemáticas del currículo de secundaria;
- que permite el desarrollo de un currículo completo de educación secundaria desde el punto de vista de una matemática realista;
- el hecho de que la base de nuestro razonamiento se desarrolla a partir, en buena parte, de nuestras propias percepciones;
- la importancia que han tenido los métodos cuantitativos en la mejora general de la esperanza de vida.

Pero hay que recalcar, además, que la elección del contexto y el planteamiento de las actividades no se ha hecho con el único propósito de introducir los conceptos o procedimientos matemáticos que se desea luego formalizar (abandonando el contexto una vez dado este salto teórico, como suele ser usual). Ésta no es más que una de las posibilidades que se le pueden dar a esta colección de problemas contextualizados. También es posible escoger algunas de las situaciones para explorar con mayor detalle un tema matemático concreto. Por ejemplo, como se sugiere en el texto, con las actividades relacionadas con los genes y las enfermedades hereditarias es posible el tratamiento de muchas de las nociones de la probabilidad.

Más ambiciosa es la utilización del material como inicio de un verdadero problema, que primero debe identificarse, organizando la información relativa a él. Luego deben emplearse matemáticas conocidas o desarrollarse nuevas matemáticas para obtener una solución al problema. Por último, la solución debe interpretarse y contrastarse con la realidad, introduciendo los ajustes precisos para su mejora… En definitiva, la realización de un proceso de modelización de una situación real, relacionada con nuestro cuerpo.

Otra posibilidad que permiten estos materiales consiste en la realización de proyectos interdisciplinares relacionados con los temas transversales o con otras áreas del currículo: alimentación, drogas, percepción, sonido, herencia genética…

El libro consta de dos partes. En la primera se agrupan las distintas actividades, agrupadas en tres grandes bloques: el cuerpo, los sentidos y los órganos. Todas ellas aparecen comentadas y resueltas en el último apartado de la segunda parte. Además, esta segunda parte del texto contiene una justificación muy acertada del proyecto, con una descripción de las características de las actividades, de las opciones metodológicas o de las conexiones con otros currículos.

Todo lo expuesto hace que el libro sea un material que puede resultar de gran utilidad para los profesores ya que en él podrán elegir, entre la gran cantidad de actividades propuestas, tanto situaciones que sirvan para ilustrar contenidos, consolidar destrezas o aplicar conocimientos adquiridos, y también problemas que posibiliten la realización de trabajos de modelización matemática, o proyectos interdisciplinares.

Julio Sancho

INVESTIGACIÓN EN EL AULA DE MATEMÁTICAS. ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD
José Mª Cardeñoso, Antonio J. Moreno, Juana Mª Navas y Francisco Ruiz (Editores)
Facultad de Ciencias de la Educación
Granada, 2001
ISBN: 84-699-6874-2
229 páginas

En esta publicación se recogen las actas de las Jornadas de Investigación en el Aula, organizadas conjuntamente por el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada y el equipo granadino de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales». En esta ocasión las Jornadas han abordado el tema de la atención a la diversidad en la enseñanza de las Matemáticas.

En la presentación, Salvador Guerrero, Presidente de la Thales, formula de forma admirable, en un par de páginas, el problema de la diversidad curricular en matemáticas que constituye uno de los retos más importantes que actualmente tiene el profesorado de nuestra disciplina.

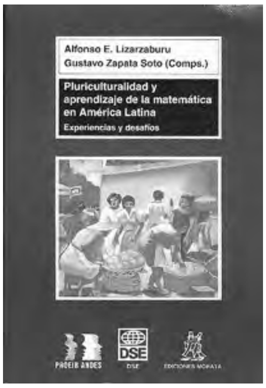
En las actas se recogen los textos de las conferencias, mesa redonda, talleres y comunicaciones presentados en las Jornadas. Las conferencias plenarias fueron.

- «Comprensividad, atención a la diversidad y convivencia», por Pedro Iguaz de Miguel.
- «Atención a la diversidad y Proyecto de Centro», por Antonio Mª López y Manuel Zafra.
- «El profesor de matemáticas en secundaria y el desafío de la diversidad», por Pedro Nieto Nieto.
- «Etnomatemáticas», por Mª Luisa Oliveras Contreras.

«Educación en la diversidad» es el título de la Mesa Redonda coordinada por Juana María Navas y en la que intervinieron José G. González, Jorge Jiménez, Antonio Miñán y Mª Carmen Prados.

Las actas se completan con cuatro talleres y diecisiete comunicaciones, algunos de cuyos títulos son: «Las ideas estocásticas de los alumnos y la diversidad en el aula de formación», «Resolución de problemas matemáticos y detección de la diversidad en un aula conceptual», «Enseñanza de la probabilidad y atención a la diversidad de creencias y razonamiento proporcional», «Evaluación ideal en el aula de matemáticas: ¿es utópica?», «Factores que condicionan la integración del invidente en el aula de matemáticas», «Internet y la atención a la diversidad en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas», «Atención a la diversidad y Matemáticas. Desarrollo legislativo en Educación Secundaria Obligatoria», «La asociación estadística en la Educación Secundaria Obligatoria»,…

PLURICULTURALIDAD Y APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN AMÉRICA LATINA EXPERIENCIAS Y DESAFÍOS
Alfonso L. Lizarzaburu
y Gustavo Zapata Soto (Comps.)
Ediciones Morata
Madrid, 2001
ISBN: 84-7112-465-3
271 páginas



Este libro es el fruto de una iniciativa impulsada desde hace varios años por muy diversos actores con el fin de efectuar un balance de la situación educativa de los pueblos indígenas de América Latina y encontrar salidas conceptuales y pedagógicas con los propios sujetos de los programas educativos desarrollados en áreas indígenas y zonas populares de América Latina, entre los cuales se encuentran también investigadores y especialistas en la materia. Después de dos actividades centradas en el tema del aprendizaje y el desarrollo de las lenguas indígenas y el castellano como segunda lengua, en 1997 se realizó en Cuzco (Perú) el seminario sobre «El aprendizaje de la matemática en los pueblos indígenas de América Latina», en el cual participantes provenientes de todo el continente presentaron estudios de caso, así como resultados de sus investigaciones.

Este seminario forma parte de una seie de seminarios sobre la Educación Intercultural Bilingüe cuyos resultados se presentan en la colección «Educación, culturas y lenguas en América Latina» que se inició con el libro *Sobre las huellas de la voz. Sociolingüística de la oralidad y la escritura en su relación con la educación*, publicado en 1998. Estas actividades de reflexión sobre la Educación Intercultural Bilingüe en América Latina son auspiciadas y organizadas por la Fundación Alemana para el Desarrollo Internacional (DSE) y la Deutsche Gesellschaft für Technische Zusammenarbeit (GTZ), por intermedio del PROPEIB Andes, en cooperación con la Oficina Regional de la UNESCO para América Latina y el Caribe (OREALC).

Alfonso Lizarzaburu y Gustavo Zapata, editores de esta publicación, recopilan algunas de las ponencias presentadas en el seminario de Cuzco, así como artículos de autores especializados en el tema. Los títulos y autores de los diferentes capítulos son:

- Matemática y lenguajes. ¿Cómo seguir siendo amerindio y aprender la matemática de la que se tiene y se tendrá necesidad en la vida? (André Cauty).
- La matemática en América Central y del Sur: Una visión panorámica (Ubiratan D'Ambrosio).
- Nuevos enfoques en la enseñanza de la matemática y la formación de profesores indígenas (Kleber Gesteira e Matos).
- Matemática andina: Abordaje psicogenético (Ruperto Romero y Gustavo Gottret).
- La enseñanza de la matemática a educandos quechuas en el marco de la reforma educativa (Adan Pari Rodríguez).
- El aprendizjae de las matemáticas en el Proyecto Experimental de Educación Bilingüe de Puno y en el Proyecto de Educación Bilingüe Intercultural del Ecuador: Reflexiones sobre la práctica y experiencias relacionadas (Martha Villavicencio).
- Hacia una didáctica intercultural de las matemáticas (Joachim Schroeder).
- Aportaciones a la discusión sobre la enseñanza de las matemáticas a partir de la didáctica y la etnomatemática (Isabel Soto Cornejo).
- La matemática en la vida y en la escuela: Dos décadas de investigación (Terezinha Nunes).
- Algunas consideraciones fundamentales sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática en relación con los pueblos indígenas de América Latina (Alfonso E. Lizarzaburu).

SUMA 39
febrero 2002

XII Olimpiada (problemas), Didáctica y perfiles profesionales, Jornadas Nacionales de la APMEP

CRÓNICAS

XII OLIMPIADA Matemática Nacional

Prueba individual

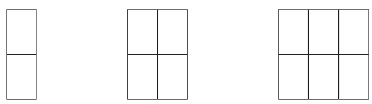
Problema n.° 1. Si la Tierra fuese una naranja

Rodea una naranja muy redonda con una cinta roja. Alarga después la cinta, de modo que rodee la naranja quedando a un metro de su superficie. Supón que pudieras hacer ahora lo mismo con la Tierra (supuesta esférica) con una cinta azul y luego la alargas de manera que rodee la Tierra quedando también a un metro de su superficie.

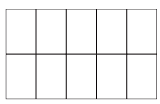
¿Cuál es el más grande de los alargamientos, el de la cinta roja alrededor de la naranja, o el de la cinta azul alrededor de la Tierra? Explica cómo has llegado a esa conclusión.

Problema n.° 2. Contando rectángulos

En las siguientes figuras hay tres, nueve y dieciocho rectángulos respectivamente:



¿Cuántos rectángulos hay en esta otra figura?



Encuentra un procedimiento para poder contar el número de rectángulos que habría en las figuras resultantes, con seis, siete… columnas.

Problema n.° 3. La partición astuta

Se trata de dividir esta esfera de reloj en seis partes, de forma que en cada una de ellas la suma de los números sea la misma.

Problema n.° 4. Tanteo y paciencia

4.1.- Con atención, paciencia y con las cifras del 1 al 9, se pueden formar números de tres cifras cada uno. Desde luego puedes formar muchos, pero tienes que encontrar tres de ellos, de manera que, utilizando todas las cifras sin que se repita ninguna, cumplan que: el segundo número sea el doble del primero y el tercero el triple del primero.

¿De qué números se trata?

1.er Número	2.° Número	3.er Número

4.2.- Recuerda que un número primo es aquel número natural mayor que 1 que no tiene más divisores positivos que él mismo y el uno. Existen unos números primos muy curiosos ya que su valor es igual a una potencia de 2 menos 1.

Ejemplo: $3 = 2^2 - 1$; $7 = 2^3 - 1$; $31 = 2^5 - 1$; $127 = 2^7 - 1$ ...

Estos números primos se llaman números de MERSENNE. En 1994 el último número de MERSENNE encontrado era $2^{859433} - 1$, que tiene un total de 258.716 cifras. Gracias al avance de las tecnologías se han descubierto números de MERSENNE mucho mayores. El último encontrado es $2^{6972593} - 1$, que tiene 2.098.960 cifras.

¿Sabrías cuál es la cifra de las unidades de este último número primo? Explica el procedimiento que has seguido

Problema n.° 5. ¿Confías en el azar?

5.1.- Se tienen once galgos con dorsales numerados del 2 al 12, ambos inclusive.

Se lanzan dos dados y la suma de las caras superiores de ambos indica el galgo elegido, que avanza una FILA. Gana la carrera el galgo que llega primero a la FILA número 10.

a) Si tuvieras que elegir un galgo, ¿qué dorsal prefieres? ¿Por qué?

b) Haz una clasificación de cómo crees que llegarán a la meta los distintos galgos. Explícalo.

5.2.- Rafael y Noemí realizan un juego que consiste en lanzar al aire dos dados. Calculan el producto de los números que aparecen en las caras superiores. Si el producto sale par gana Rafael y si sale impar gana Noemí.

a) ¿Te parece justo el juego? ¿Por qué?

b) Si se repitiera el juego 360 veces, ¿cuántas veces crees que ganaría cada uno?

El recorrido por la península va a ser lúdico-matemático

Prueba por equipos

Recorrido turístico-matemático por la península de La Magdalena

Esta mañana vais a conocer uno de los lugares más bonitos de Santander. El recorrido por la península va a ser lúdico-matemático, ya que para localizar el Palacio, el Paraninfo, el mini Zoo, etc., tendréis que resolver algunas cuestiones que se os plantean a continuación.

a) Observad el mapa cuadriculado que tenéis entre los materiales que se os han entregado y encaminaros hacia el punto de coordenadas (0, 0).

   Os encontráis en el ....

   (Leed la información sobre este edificio en la guía)

b) Para localizar en el mapa el punto hacia el que debéis dirigiros a continuación, tenéis que resolver el siguiente problema que os dará sus coordenadas:

   PRIMERA COORDENADA: Un frío día de invierno en Reinosa (Cantabria), la temperatura a las 12 a.m. era de 2 °C y descendió a lo largo de la tarde 7 °C. ¿Qué temperatura había al anochecer?

   SEGUNDA COORDENADA: Es un número primo menor que 10 y que se obtiene como la suma de un cuadrado perfecto más 1.

Os encontráis en ....

(Contemplad el paisaje y anotad lo que observéis). ....

c) A continuación, leed detenidamente las cinco definiciones siguientes, que corresponden a términos matemáticos. *Con la primera letra* de cada término, ordenadas convenientemente, encontraréis la palabra que indica el sitio al que debéis dirigiros.

DEFINICIÓN 1.- Parte de las Matemáticas que estudia los cuerpos geométricos.

DEFINICIÓN 2.- Triángulo cuyos lados y ángulos son iguales.

DEFINICIÓN 3.- Palabra cuyo significado es el mismo que superficie de una figura.

DEFINICIÓN 4.- Cada uno de los segmentos que limita un polígono.

DEFINICIÓN 5.- Números que sirven para contar.

DEFINICIÓN 6.- Nombre del ángulo cuya medida es mayor que la de un ángulo recto.

¡Admirad los .... de VITAL ALSAR!

(Leed en la guía la información sobre Vital Alsar)

d) Desde este lugar vais a dirigiros al punto de coordenadas (6, 2) en el plano que se os ha entregado. En el trayecto, recoged varias hojas de los distintos árboles que encontréis y guardadlas en el sobre, para que cuando estéis en la residencia hagáis una actividad con ellas.

b) Ya estáis en el PALACIO DE LA MAGDALENA, miradlo con detenimiento e identificad y anotad las formas y figuras geométricas que veáis.

Este V Simposio fue un auténtico foro de debate sobre las diversas necesidades que plantea tanto la docencia como la investigación…

Finalmente, buscad en la guía las respuestas a las siguientes preguntas y anotadlas.

- ¿Para quién se construyó el Palacio?
- ¿En qué año comenzó su construcción?
- ¿En qué año se terminó?
- ¿Qué arquitectos lo diseñaron?
- ¿Cuánto costó y quién lo pagó?
- ¿A qué estilo pertenece?
- ¿Con qué materiales está construido?
- ¿A quién pertenece actualmente?
- Medid la altura del Palacio (aproximadamente) y explicad el método que habéis utilizado.
- Como final de este recorrido, dibujad el Palacio o el entorno en la lámina que se os ha dado.

V Simposio sobre Aportaciones de la Didáctica de la Matemática a diferentes perfiles profesionales

Los días 7, 8 y 9 de febrero de 2002 se celebró en la Universidad de Alicante el «V Simposio sobre Aportaciones de la Didáctica de la Matemática a diferentes Perfiles Profesionales». Este V Simposio fue un auténtico foro de debate sobre las diversas necesidades que plantea tanto la docencia como la investigación, así como sobre los aprendizajes de los diferentes tópicos matemáticos y de didáctica de la matemática que configuran o deberían configurar el currículo universitario de diferentes perfiles profesionales. Con este propósito, se reunieron matemáticos, profesores de matemáticas de educación secundaria, psicopedagogos, maestros, ingenieros, estadísticos y economistas, entre otros. Se cumplieron, pues, las expectativas del Comité Organizador que asumió el relevo del IV Simposio celebrado en febrero de 2000 en la Universidad de Oviedo.

Ocho preguntas clave organizaron los diversos debates: epistemología e historia; tanteo y creatividad; imaginación y percepción; experiencia y teoría; afectividad y matemáticas; carácter multicultural de las matemáticas; aprendizaje de conceptos/nociones matemáticas; y, por último, aprendizaje de conceptos/nociones de didáctica de la matemática. Las Actas del Simposio contienen una importante variedad de trabajos, ya sean de investigación, de innovación o de reflexión, que certifican la multiplicidad de focos de atención representados por los profesionales dedicados a la Didáctica de la Matemática. Algunos de estos trabajos suponen una muestra de los debates coexistentes que están teniendo lugar en muchas universidades españolas acerca de las necesidades en la formación del profesorado de los diferentes niveles educativos. En este sentido, las reflexiones sobre qué puede aportar la Didáctica de la Matemática a la formación de matemáticos para sus diversas salidas profesionales fueron, tal vez, las que centraron en mayor medida el interés de los participantes. Cabe destacar la presentación del estado actual del proyecto Edumat-Maestros realizada por el profesor Juan Díaz Godino, artífice junto con su equipo de la Universidad de Granada de dicho proyecto.

Hubo otros ámbitos de atención también con una fuerte representación, tales como la importancia del campo afectivo en la Educación Matemática. Fueron analizadas diferentes investigaciones centradas en aspectos de tipo afectivo desde una perspectiva sociocultural. Se reflexionó sobre cómo los alumnos desarrollan su identidad como aprendices de matemáticas en simultáneas comunidades de prácticas. Por otra parte, se analizaron cuestiones de comunicación desde un doble enfoque: como un recurso social usado en el proceso de compartir significados y como un vehículo en la construcción del conocimiento matemático. Uniendo la preocupación por las competencias básicas que se deben desarrollar y el dominio afectivo, se habló de la implicación de la Educación Matemática en la formación de profesionales para una sociedad democrática. El debate en torno a lo fundamental de la competencia matemática en tanto que competencia democrática puso de manifiesto el interés incipiente por la dimensión social de los diferentes contextos de práctica matemática.

Se debe destacar también el espacio que en este simposio se dedicó al debate sobre dos documentos relativos a la formación matemática y en didáctica de la matemática de los profesores de Educación Primaria y Secundaria. Estos documentos fueron elaborados por profesores de las Universidades de Barcelona, Valladolid, Granada y Sevilla, bajo la coordinación del profesor Lorenzo Blanco, de la Universidad de Extremadura. En el mes de septiembre se difundió un primer borrador entre los diferentes colectivos profesionales, recibiéndose aportaciones durante los meses precedentes, hasta llegar a una redacción final a la que se dará la máxima publicidad.

En estos textos, los profesores implicados en la formación del profesorado muestran su preocupación por la deficiente o inapropiada formación inicial en matemáticas o en didáctica de las matemáticas, que tienen los maestros y los profesores de secundaria. Estas deficiencias son debidas, en el caso de la formación inicial de maestros, a la escasez de materias específicas de matemáticas y didáctica de las matemáticas que existen en los planes de estudio, con una media del 6,4 % de los créditos totales en la especialidad de Educación Primaria, llegándose en el caso de alguna titulación a no existir ninguna materia de matemáticas ni su didáctica. En cuanto a la formación inicial de los profesores de secundaria, se constata una falta de orientación profesional en las Facultades de Matemáticas. Los futuros profesores de secundaria son instruidos para aprender, no para enseñar, por lo que no bastaría con añadir en su carrera una formación científica en didáctica de la matemática, sino que se necesitaría, además, un cambio en el conocimiento del contenido.

Las Actas del Simposio contienen una importante variedad de trabajos, ya sean de investigación, de innovación o de reflexión, que certifican la multiplicidad de focos de atención representados por los profesionales dedicados a la Didáctica de la Matemática.

Enrique de la Torre y Núria Planas

Jornadas Nacionales de la APMEP

Los días 29, 30 y 31 de octubre de 2001 se celebraron en Lille (Nord Pas de Calais) las Jornadas Nacionales de la APMEP (Asociación de Profesores de Matemáticas de la Enseñanza Pública de Francia), bajo el epígrafe «Las matemáticas en el carrefour de Europa».

Estas Jornadas se celebran anualmente, con escasas interrupciones desde la creación de la Asociación en 1910.

El programa de las Jornadas era el siguiente:

- ***Lunes 29***, a las 9 h 30 m sesión oficial de apertura con la intervención de Jean Paul Bardoulat, presidente de la APMEP, Pierre Stephan, presidente de la regional local organizadora, y de las autoridades: representantes del Consejo Regional, Consejo General, Alcaldía de Lille, el Rector de la Universidad, y el

Decano de la Inspección Nacional.

- A las 10 h 30 m. Conferencia inaugural plenaria impartida por Nico Hirtt, profesor de Secundaria Superior en Bélgica, y fundador de la Aped (Asociación para el progreso de la educación democrática), sobre «Los sistemas educativos en Europa» con un subtítulo «En la hora de la globalización liberal: hacia una escuela sometida al mercado».
- Dos periodos horarios en la tarde del lunes de 14 a 15:30 y de 17:15 a 18:30 para Talleres. Entre ambos, reunión de las comisiones regionales de la APMEP.
- A las 18:30 se presentaron los stands de los expositores de libros y material didáctico, con un aperitivo.
- A las 20 Concierto, de la orquesta dirigida por Ernesto Martínez Izquierdo.
- ***Martes 30***, a las 8:30, conferencia de Miguel de Guzmán, profesor de la Universidad Complutense de Madrid, y ex-presidente del ICME: titulada «La enseñanza de las matemáticas en Europa».
- A las 10:30 conferencia de Jean Pierre Bourgignon, profesor del IHES, y ex-presidente de la SMF (Sociedad Matemática de Francia).
- A las 14 hasta las 15:30 de nuevo Talleres.
- Una hora para la reunión de las Comisiones Nacionales y de 17:15 a 18:45 dos conferencias en paralelo, una a cargo de M.J. Durand-Richard, de la Universidad de París-VIII, «La influencia de la escuela algebraica inglesa en Europa» y la otra de Jeanne Peiffer, Investigadora en el CNRS: «Durero, los senderos de la perspectiva».
- A las 20:30 cena oficial de las Jornadas.
- ***Miércoles, 31*** de 8:15 a 9:30, Mesa redonda para debatir sobre la enseñanza de las matemáticas, con la intervención de J.P. Bardoulat, C. Ruget, C. Robert, M. Legrand y J.P. Kahane, moderada por A.M. Marmier.
- A las 9:45 conferencia de clausura a cargo de Jean Paul Delahaye profesor de informática en el USTL, «Demostraciones con ordenador...».
- A las 11 h 15 m asamblea general, clausura de las Jornadas y presentación de las Jornadas del 2002.

Entre las actividades y trabajos presentados destaca BraMaNet, un programa de traducción de las matemáticas al Braille, desarrollado por la Universidad de Lyon I.

Había también una importante presencia de exposiciones:

– «Los objetos matemáticos» de la APMEP de Lorena.

– «Imágenes de Chryzodos», presentada por la asociación Résonance Transdisciplinaire.

– «De la idea de una lengua universal a la realización de la lengua internacional».

– «Pitágoras,... más que un teorema», presentada por el Athénée Royal de Mons (Bélgica)

– Proyecto «2001 Odisea de las matemáticas», del Athénée Royal de Mouscron.

– «Mujeres en maths... ¿Por qué no tú?», de la Asociación Femmes et Mathématiques.

– «Geometría Mudéjar en Aragón: Patrimonio de la Humanidad», presentada por mí, unida a un taller.

Para la celebración de estas Jornadas la APMEP ha contado con la ayuda del Consejo Regional de Nord Pas de Calais, el ayuntamiento de Lille, el IREM de Lille, la Universidad de Ciencias y Tecnología de Lille, el IUFM de Nord Pas de Calais, la MGEN, la MAIF, CASIO, TEXAS Instruments.

La asistencia a las Jornadas fue bastante numerosa, teniendo en cuenta que las jornadas se celebran durante las vacaciones de Todos los Santos. Además de asistir profesores de las diferentes regiones francesas, había algunos asistentes de Andorra (1), Argelia (4), Bélgica (15), Gran Bretaña (1), Lituania (1), Noruega (2), Rumanía (1), Suiza (1) y España (2). En total unos 600 profesores de todos los niveles educativos.

Entre las actividades y trabajos presentados destaca BraMaNet, un programa de traducción de las matemáticas al Braille, desarrollado por la Universidad de Lyon I (para los que deseen más información sobre este importante proyecto, la dirección de Bramanet en la Red es http://handy.univ-lyon1-fr/projets/bramanet).

Como en casi todas las jornadas, hubo una densidad de actividades importante, baste señalar que en cada uno de los tiempos destinados a Talleres había más de 20 simultáneos. Los talleres son en realidad comunicaciones de una hora de duración con discusión posterior.

En uno de ellos tuve ocasión de intervenir presentando mi trabajo sobre Geometría Mudéjar, ligado a la exposición fotográfica. El tema fue seguido con bastante interés, pues en la inscripción previa a las Jornadas se superó el máximo de asistentes. Creo que el interés se debió sobre todo a la presentación de un tema que fusiona, matemáticas, arte y cultura, relacionado además con el mundo musulmán que tan presente está en estos momentos en Francia.

Quiero destacar algunas palabras del discurso inaugural del presidente de la APMEP, y también presidente de la FEAPM (Federación Europea de Asociaciones de Profesores de Matemáticas), y de la conferencia de Nico Hirtt:

El prof. Bardoulat insistió, una vez más, en el papel de la enseñanza de las matemáticas, pues emergen de todas las ciencias y las alimentan, desarrollan a la vez la imaginación y el rigor. Por ello la APMEP asume la extensión de la enseñanza de las matemáticas, aunque ello conlleve su masificación: querer dar el mejor nivel posible al mayor número posible. Pese a los problemas que implica: ¿Cómo conciliar una democratización de las enseñanzas científicas con la reducción de horarios? ¿Por qué se pone en marcha un sistema que no incita al esfuerzo, que hace pensar a los alumnos que sus estudios no son prioritarios? ¿Por qué, quizá, no se tiene suficiente confianza en los enseñantes, (Enseñantes que emplean sus vacaciones y su dinero en asistir, por ejemplo, a estas jornadas)? Terminó diciendo solemnemente al Sr. Ministro: «la enseñanza de las matemáticas, y por tanto sus profesores, merecen consideración».

Nico Hirtt hizo una exposición histórica de la evolución de los sistemas educativos, en los últimos años, y del dinero público empleado en ello, así como de las directrices que la OCDE señala como necesidades educativas del futuro. Y concluía «la adecuación de la enseñanza con los objetivos nuevos de las potencias industriales y financieras tiene dos consecuencias dramáticas: la instrumentalización de la Escuela al servicio de la competencia económica y el agravamiento de las desigualdades sociales en el acceso al saber» […] «la evolución actual de los sistemas de enseñanza se realiza en detrimento del acceso a los saberes que permiten comprender el mundo. Precisamente, los más explotados se ven así privados de las armas intelectuales que necesitan para luchar con el objetivo de lograr su emancipación colectiva». «Se baja el nivel de exigencia para unos (aquéllos que constituirán la masa de la mano de obra poco cualificada exigida por la "nueva economía"), incitando a otros pocos a buscar "ofertas educativas innovadoras" que los harán puntas de lanza de la competencia internacional. Así las desigualdades de clase se transformarán, con mayor eficacia incluso que hoy, en desigualdades de acceso al saber. La escuela pública, lo señala incluso la OCDE, sólo servirá para asegurar el aprendizaje de los que jamás constituirán un mercado rentable y cuya exclusión de la sociedad en general se acentuará a medida que otros continúen progresando […] pero todo ello puede suscitar reacciones, resistencias, lucha.

Esperemos que el Foro Mundial contra la globalización contribuya al desarrollo de una lucha mundial para la conquista de una enseñanza pública, democrática y de alto nivel, capaz de dotar a los ciudadanos de mañana de los saberes y capacidades que les hagan militantes de una sociedad más justa».

Los textos completos de las conferencias, la intervención de Bardoulat y algunos de los talleres pueden leerse (en francés) en la dirección

http://www2.ac-lille.fr/apmep/

o también accediendo directamente a la página de la APMEP

http://www.apmep.asso.fr

Las próximas jornadas se celebrarán en Rennes (Bretaña). Los días 26 al 28 de octubre de 2002 bajo el título «Imagen de las Matemáticas, matemáticas de las imágenes».

Florencio Villarroya

SUMA 39
febrero 2002

Concurso de material didáctico, Simposio de la SEIEM, Jornadas Regionales de Murcia...

CONVOCATORIAS

CONCURSO de material didáctico para la enseñanza de las Matemáticas

La Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales viene realizando un esfuerzo sostenido por apoyar y promover el intercambio de información y experiencias entre el profesorado que imparte Matemáticas con actuaciones como la edición de la revista *Épsilon*, la celebración de Jornadas, Cursos, Olimpíadas, etc. Dentro de este marco, la SAEM Thales, consciente de la importancia que tiene la utilización de material en la enseñanza y con el fin de dar a conocer el material existente y facilitar su uso a todo el profesorado, convoca un concurso de material didáctico con los siguientes

Objetivos

- Divulgar y acercar el material existente para difundirlo y hacerlo asequible a centros y profesorado.
- Potenciar el papel de los recursos materiales en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y animar a su utilización.

Bases

1. Podrá presentar trabajos en este concurso el profesorado vinculado a Centros de Enseñanza andaluces de todos los niveles y el que, no prestando sus servicios en Andalucía, sea miembro de alguna sociedad perteneciente a la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Los trabajos podrán ser presentados individual o colectivamente.
2. Se establece una única modalidad a la que se podrán presentar trabajos de cualquier índole: material manipulativo, material audiovisual, software educativo,

desarrollo de actividades con material existente, páginas Web, etc.

3. Todos los trabajos deberán ser inéditos, se presentarán en lengua castellana y acompañados de una guía didáctica para su utilización, una descripción del material y, en su caso, un prototipo para su elaboración.

4. La guía didáctica deberá contener una indicación de los niveles en los que se puede usar, objetivos, contenidos matemáticos, propuestas de actividades, observaciones sobre la utilización del material, etc. y se deberá adjuntar: a) soporte informático correspondiente, con indicación del procesador utilizado; b) los dibujos originales con indicación del lugar preciso en el que deben figurar.

5. Acompañará al trabajo una plica en sobre cerrado, en cuyo exterior figurará un lema o seudónimo y modalidad por la que se concursa. En su interior se expresarán los datos completos sobre su autoría: autor o autores, domicilio, teléfono, NIF y correo electrónico (si lo tuviera).

6. Los trabajos se remitirán a: SAEM THALES. Centro de Documentación THALES Departamento de Matemáticas. C. A. S. E. M. Campus del Río San Pedro 11510 PUERTO REAL (Cádiz). El plazo de entrega finalizará el 30 de abril del año 2002.

7. La Junta Directiva de la SAEM Thales nombrará un jurado que evaluará los trabajos presentados y resolverá cualquier eventualidad que pudiera surgir. Ningún concursante podrá formar parte de este jurado.

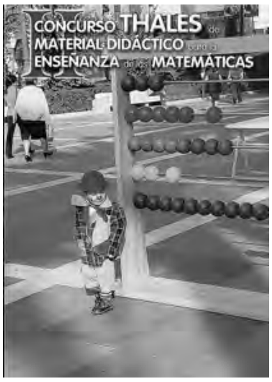
8. El jurado seleccionará los trabajos atendiendo a criterios de calidad, y sus decisiones serán inapelables.

9. Se otorgarán TRES premios, más un número indeterminado de accésits, a fijar por el jurado. Los premios consistirán en una dotación económica de 2.000, 1.000 y 500 €, respectivamente. Los premios podrán ser declarados desiertos.

10. Los autores que obtengan premio o accésit se comprometen a ceder a la SAEM THALES los derechos de la obra presentada, de acuerdo con la «Base de Cesión de Obra» que se encuentra depositada en la sede de la Sociedad a disposición de los concursantes.

11. La participación en este concurso supone la aceptación de las presentes bases.

12. El fallo del jurado se hará público en el X Congreso sobre Enseñanza y Aprendizaje de la Matemáticas THALES que se celebrará en El Ejido (Almería) del 12 al 15 de septiembre de 2002.



El fallo del jurado se hará público en el X Congreso sobre Enseñanza y Aprendizaje de la Matemáticas THALES que se celebrará en El Ejido

XX Concurso de Resolución de Problemas

Está convocado por la Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas y el Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras.

Bases del Concurso

Primera: Los alumnos podrán participar en el Concurso en tres niveles:

a) Primer nivel: alumnos de 3.° de ESO.

b) Segundo nivel: alumnos de 4.° de ESO.

c) Tercer nivel: alumnos de 1.° Bachillerato (3.° BUP y 2.° y 3.° de FP II).

Segunda: Las pruebas consistirán en la resolución de Problemas de Matemáticas (los mismos para todos los concursantes de un mismo nivel) y se realizarán en la mañana del sábado 22 de junio de 2002 a partir de las 10 horas en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

Tercera: A los mejores de cada nivel, se concederán diplomas y premios.

Cuarta: Los Centros que deseen presentar alumnos (hasta un máximo de seis) deberán realizar la preinscripción antes del dia 21 de mayo de 2002, dirigiéndose por carta al presidente de nuestra sociedad:

Prof. Javier Etayo Gordejuela
Departamento de Álgebra
Facultad de Ciencias Matemáticas
28040-Madrid

En la preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados. Si algún centro desea presentar más de seis alumnos, debe solicitarlo antes de la fecha mencionada anteriormente.

Quinta: Los centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales individuales en las que se haga constar que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas, así como el curso en que están matriculados en el año académico 2001-2002.

Nota importante: Los dos primeros clasificados de cada nivel son invitados a participar en la Olimpiada Rioplatense de Argentina, en diciembre de 2002 (en el supuesto de que se consigan becas para pagar los billetes hasta Buenos Aires).

VI Simposio de la SEIEM

La Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática celebrará su VI Simposio en la Universidad de La Rioja desde el 11 hasta el 14 de septiembre de 2002.

El programa científico incluye las siguientes actividades:

- Investigación sobre la actividad matemática en el aula.
- Presentación y discusión de Informes de Investigación.
- Reuniones de Grupos de Investigación.

Más información en:

VI Simposio de la SEIEM
Secretaría del Departamento de Matemáticas y Computación
Universidad de La Rioja
Edificio VIVES
Luis de Ulloa s/n
26004 Logroño
Página web: www.ugr.es/local/seiem

III Jornadas Regionales sobre Educación Matemática

Convocadas por la Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia (SEMRM), se celebrarán en Murcia los días 11, 12 y 13 de abril de 2002.

Las conferencias plenarias las impartirán los profesores Claudi Alsina, Antonio Pérez Sanz y Nuria Rosich Sala. Además están previstas una serie de comunicaciones y talleres y una mesa redonda que girará en torno al currículo de matemáticas.

Más información:

III Jornadas Regionales sobre Educación Matemática
(A la atención de Manuela Moreno Gil)
CPR II de Murcia
c/ Reina Sofía, 1
30003 Murcia
e-mail: manuela@semrm.com
Página web: www.semrm.com

X Congreso sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas Thales

Se celebrará en El Ejido-Adra (Almería), los días 12 al 15 de septiembre de 2002.

Cada dos años en la SAEM Thales organizamos nuestro Congreso buscando ofrecer un marco donde los participantes intercambien experiencias e investigaciones y difundan sus trabajos contribuyendo al desarrollo profesional de los demás compañeros. Se trata, en suma, de aprender cosas nuevas, de discutir, de relacionarse. Nuestros objetivos fundamentales son: consolidar los lazos científicos y culturales entre los profesionales de la docencia e investigación en matemáticas, coordinar esfuerzos de personas, grupos y movimientos de renovación pedagógica y sociedades relacionadas con la Educación Matemática, promover la investigación, analizar el tipo de matemáticas que deben enseñarse, mostrar a toda la sociedad la cara lúdica, atractiva e interesante de las matemáticas, analizar las aportaciones que las diversas culturas han ido haciendo a la construcción del contenido matemático a lo largo de la historia...

Los temas prioritarios del Congreso serán:

1. Materiales y recursos.
2. La diversidad cultural y las Matemáticas.
3. Las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TICs) en la Educación Matemática.
4. Experiencias matemáticas dentro y fuera del aula.
5. El profesorado de Matemáticas en los cambios educativos.

Entre las actividades programadas figuran: conferencias plenarias, ponencias, comunicaciones, talleres, mesa redonda «El día a día de la Educación Matemática», talleres, paneles, vídeos, programas matemáticos de ordenador, exposiciones (Fotografía y Matemáticas, chistes matemáticos, Matemáticas en la calle, materiales didácticos, divulgación, sellos matemáticos). Habrá un concurso de

Fotografía Matemática entre los asistentes y se editará un boletín informativo diario.

Habrá también actos sociales y actividades lúdico-recreativas, así como un programa para acompañantes.

Más información:

XCEAM
IES Murgi; Avda. Principes de España, 17
04700-El Ejido (Almería)
Tfnos.: 950269326; 699334023
Fax: 956016050
Por correo-e: xceam@thales.cica.es
Web del Congreso: http://thales.cica.es/xceam

VIII Congreso SEHCYT

La Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas anuncia que su VIII Congreso se celebrará en Logroño, del 16 al 20 de septiembre de 2002, en el marco del Décimo Aniversario de la Universidad de La Rioja.

Se celebrarán conferencias plenarias, además de ponencias y comunicaciones agrupadas por secciones, mesas redondas, exposiciones, etc. Está prevista una actividad turístico-cultural seguida de una cena, además de otros actos sociales breves y un programa para acompañantes.

Están previstas inicialmente las siguientes secciones:

- Ciencia y Técnica en las Universidades.
- Historia de la Química y sus conexiones con la Ciencia y la Técnica.
- Patrimonio Científico.
- Ciencia y Técnica en torno a La Rioja.
- Tema libre.

Más información:

Secretaría VIII Congreso SHCYT
Dep. de Matemáticas y Computación.
Universidad de La Rioja
Edificio Vives. C/ Luis de Ulloa, s/n
26006 Logroño
Tfno.: 941 299 445
Fax: 941 299 460
E-mail: presidente@sehcyt.unirioja.es
Página web: www.unirioja.es/sehcyt

VII Seminario Castellano-Leonés de Educación Matemática

Organizado por la Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas, sección provincial de León, se celebrará los días 13, 14 y 15 de septiembre de 2002 en Ponferrada (León).

Conferencias plenarias:

a) *Historias de Problemas con Historia*. Antonio Pérez Sanz

b) *El currículo de Matemáticas en Castilla y León*. Jose Angel Hermida Alonso.

c) *Historia de la introducción al cálculo infinitesimal en Castilla y León*. Luis Ángel Saiz Montes.

d) *Matemáticas y Literatura ¿Saben los escritores Matemáticas?* José del Río Sánchez.

Núcleos temáticos:

1. Matemáticas en Educación Infantil y Primaria.
2. Atención a la diversidad desde las Matemáticas en la ESO.
3. Matemáticas en Bachillerato.
4. Las Tecnologías de la Información en Matemáticas.
5. Relación entre las matemáticas y otras ciencias.
6. Investigación en didáctica de matemáticas.
7. Otros temas ligados a la Educación Matemática.

Mesas redondas

1. ¿Qué sabe un alumno al terminar primaria? ¿Qué debería saber?
2. ¿Qué sabe un alumno al terminar bachillerato? ¿Qué debería saber?

Se celebrarán además talleres, exposiciones de matemáticas, rutas matemáticas por la ciudad, actividades culturales, etc.

Más información actualizada en

http://semimate.f2g.net

o en la página de la sociedad

http://euclides.usal.es

o bien dirigiendose a sede del comité organizador:

CPR. DE PONFERRADA
Avda. Huertas del sacramento, 10
24400 Ponferrada (León)
Tel:987427967- Fax 987419822
E-Mail jarran2@roble.pntic.mec.es

NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, ICE de Universidad de Zaragoza, C./ Pedro Cerbuna 12, 50009 Zaragoza), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.
2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos en ningún caso serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.
3. Los gráficos, diagramas y figuras se enviarán en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. Así mismo, podrán incluirse fotografías. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.
4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de entre cinco y diez líneas, que no necesariamente tiene que coincidir con la Introducción al artículo. Debe ir escrito en hoja aparte. En ese mismo folio aparecerán los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede).
5. Si se usa procesador de texto, agradeceremos que además se envíe un disquette con el archivo de texto que contenga el artículo, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quiera incluir. La etiqueta del disquette debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda MS-Word (hasta versión 5.0) en Macintosh, o WordPerfect (hasta versión 5.1) en PC. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF.
6. En cualquier caso, tanto un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.
7. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.
8. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo.
9. La bibliografía se dispondrá al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:

   TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma,* n.° 20, 91-98.

   En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas,* Labor, Barcelona.

   En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2,* ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.
10. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: …supone un gran avance (Hernández, 1992).

    Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: …según Rico (1993).
11. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como —en caso afirmativo– la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

BOLETÍN DE SUSCRIPCIÓN

Tarifa

	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	21 €	10 €
Centros	30 €	10 €
Europa	38,5 €	13,5 €
América y resto del mundo	$50 USA	$17 USA

Fotocopiar y enviar a: Revista SUMA. ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Deseo suscribirme a la revista SUMA:
Nombre y apellidos:. . . . .
Dirección:. . . . . Tno.: . . . .
Población: . . . . CP: . . . .
Provincia/país . . . . CIF/NIF: . . . .

Importe

☐ Suscripción a partir del n.º______ (3 números)

☐ N.os sueltos:________________________

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto).

☐ Transferencia bancaria (Ibercaja: 2085-0168-50-03-000415-98).

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista Suma. Firma y fecha:

☐ Giro postal dirigido a Revista Suma.

Nombre y apellidos: . . . .
Código Cuenta Cliente
Entidad ☐☐☐☐ Oficina ☐☐☐☐ DC ☐☐ Cuenta ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

Banco/Caja . . . .
Agencia n.º: . . . . Dirección: . . . .
Población: . . . . Provincia: . . . .

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que periódicamente les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (Fecha y firma):

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

FESPM