SUMA 39
febrero 2002, pp. 33-36

Distinas formas de deducción de las fórmulas trigonométricas de suma o resta de ángulos

Jaume Munné i Munné

Se pretende desarrollar las diferentes formas demostrativas que los autores de los libros de texto de matemática básica (bachillerato,...) nos aportan para deducir las fórmulas trigonométricas de suma o resta de ángulos, y presentar tres nuevas formas no detectadas en la bibliografía consultada.
El objetivo final es mostrar qué distintos caminos pueden llevarnos a un mismo resultado. Es el profesional de la enseñanza el que ha de adoptar uno u otro camino, o simultanear varios para que el alumno llegue a tener más recursos deductivos.

LA BIBLIOGRAFÍA nos ofrece un abanico de posibilidades para enfrentarnos al problema cotidiano de razonar, coherente y deductivamente, las fórmulas trigonométricas típicas de adicción o sustracción de ángulos.

Sabido es que cuando se ha deducido una sola, sea $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$, $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, o bien $\cos(\alpha-\beta)$ para dos ángulos α y β cualesquiera, las demás se obtienen por simple aplicación de las relaciones trigonométricas de ángulos complementarios y de ángulos opuestos.

Como un buen referente histórico cabe citar a Johann Werner (1468-1528) que estableció el cálculo prostaferético para convertir productos en sumas o restas, aplicando expresiones del tipo

$$\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$$

al objeto de facilitar cálculos astronómicos de la época, hasta que el escocés John Neper (1550-1617) generó el cálculo logarítmico.

No es de extrañar que, tal como desarrolla Campbell (1956) en *La trigonométrie*, usando proyecciones llegue a deducir las expresiones de Werner, y combinándolas obtenga el $\cos(\alpha+\beta)$ y el $\cos(\alpha-\beta)$.

Se pretende dar aquí las diferentes alternativas que en la actualidad aplican los escritores de los libros de texto, indicando en cada caso los conocimientos previos necesarios y presentar tres nuevas formas distintas de enfocar el problema para llegar a las mismas expresiones.

1

La mayoría de los textos actuales de Bachillerato deducen el seno (y el coseno) de una suma de ángulos haciendo

ARTÍCULOS

intervenir cuatro triángulos rectángulos y aplicando conceptos de semejanza tal como queda patente en la figura 1.

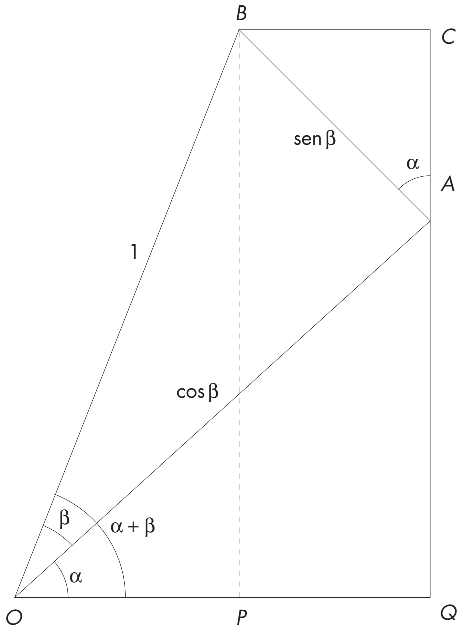

Figura 1

Esbozo deductivo

- Del triángulo *OAB*, $\overline{OB} = 1$, $\cos\beta = \overline{OA}$ y $\operatorname{sen}\beta = \overline{AB}$.
- Del triángulo *OPB*,

$$\cos(a + b) = \frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} = \overline{OP}$$

- Como $\overline{PB} = \overline{QA} + \overline{AC}$, dado que $\overline{QA} = \overline{OA} \cdot \operatorname{sen}\alpha = \cos\beta \cdot \operatorname{sen}\alpha$ y $\overline{AC} = \overline{AB}\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha$, se deduce $\overline{PB}$ igual

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta \qquad [1]$$

Análogamente,

- Del triángulo *OPB*,

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} = \overline{OP}$$

- Dado que $\overline{OP} = \overline{OQ} - \overline{PQ}$, $\overline{OQ} = \overline{OA} \cdot \cos\alpha = \cos\beta \cdot \cos\alpha$ y $\overline{PQ} = \overline{BC} = \overline{AB}\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\alpha$, resulta ser $\overline{OP}$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

2

El libro de Besora (1998) presenta una deducción atractiva partiendo como concepto conocido el producto escalar de dos vectores unitarios. El único inconveniente es la forma de desarrollar el currículo que obliga a analizar primero los vectores en el plano antes que la trigonometría en estudio.

Esbozo deductivo:

Tal como presenta la figura 2, si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores unitarios (módulo 1) de componentes $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\beta)$ y $(\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$ respectivamente, su producto escalar resulta:

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta = \\ = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha + \beta)$$

o sea

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta \qquad [2]$$

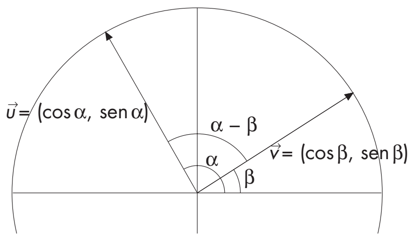

Figura 2

3

Otros autores usando la circunferencia de radio unidad, construyen un triángulo con ángulo central $\alpha - \beta$, para luego trasladarlo al origen de ángulos. Con cálculos de distancias entre puntos obtienen el $\cos(\alpha - \beta)$. Eso sí, hacen intervenir la fórmula fundamental de trigonometría $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ para cualquier α.

Esbozo deductivo

En la figura 3 se consideran los puntos de la circunferencia de radio unidad $A(\cos\alpha,\ \operatorname{sen}\alpha)$ y $B(\cos\beta,\ \operatorname{sen}\beta)$. Apicando la distancia entre los puntos $\overline{AB}$ queda

$$\overline{AB}^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)^2 = \\ = \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2 + \operatorname{sen}^2\alpha + \\ + \operatorname{sen}^2\beta - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \\ 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta) \qquad [3]$$

Al girar el triángulo, haciendo coincidir el punto *B* con el *C*(0, 1), el punto *A* se traslada al *D* con las componentes (cos

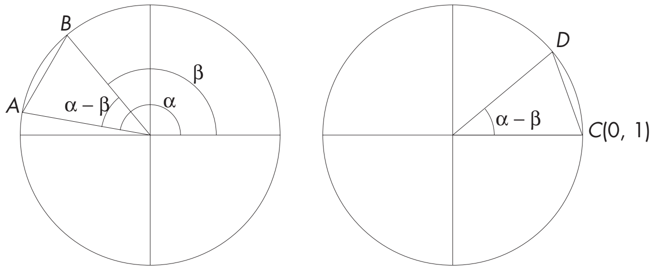

Figura 3

$(\alpha - \beta)$, sen $(\alpha - \beta)$); como la distancia $\overline{AB}$ igual a la $\overline{DC}$, y

$$\overline{DC}^2 = [\cos(\alpha - \beta) - 1]^2 + [\operatorname{sen}(\alpha - \beta) - 0]^2 = \\ = 2 - 2\cos(\alpha - \beta) \qquad [4]$$

Por igualación de las dos se deduce [2].

4

Thomas-Finney (1984) utilizan un proceso análogo al anterior, con la única variante de hacer intervenir el teorema de los cosenos.

Esbozo deductivo

La figura 4 es muy parecida a la figura 3. $\overline{AB}^2$ es el dado en [3], pero luego lo recalcula aplicando el teorema de los cosenos según

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2 \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OB} \cdot \cos(\alpha - \beta) = \\ = 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$$

idéntica a $\overline{DC}^2$ de [4].

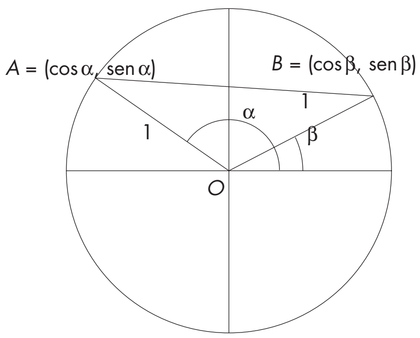

Figura 4

5

Visto el estado actual en que tratan el tema en cuestión los autores de los libros consultados, se presentan ahora tres alternativas que parten de la aplicación de los teoremas del seno y del coseno (haciendo intervenir cuando conviene propiedades fundamentales de trigonometría).

5.1

Según el triángulo oblicángulo de la figura 5, que tiene un gran parecido al que se emplea para deducir los teoremas del cateto y de la hipotenusa de los triángulos rectángulos, si proyectamos los lados a y b sobre c se obtiene con facilidad la relación

$$c = b \cdot \cos\alpha + a \cdot \cos\beta \qquad [5]$$

Al aplicar, acto seguido, el teorema de los senos tenemos

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\mathsf{a}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\mathsf{b}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\left[180 - (\mathsf{a} + \mathsf{b})\right]}$$

Como sen (180 – x) = sen x para cualquier x, aislando a y b queda

$$a = \frac{c \cdot \operatorname{sen}\mathsf{a}}{\operatorname{sen}(\mathsf{a} + \mathsf{b})};\ b = \frac{c \cdot \operatorname{sen}\mathsf{b}}{\operatorname{sen}(\mathsf{a} + \mathsf{b})}$$

sustituyendolos en [5] queda

$$c = \frac{c \cdot \operatorname{sen}\mathsf{a}}{\operatorname{sen}(\mathsf{a} + \mathsf{b})}\cos\mathsf{b} + \frac{c \cdot \operatorname{sen}\mathsf{b}}{\operatorname{sen}(\mathsf{a} + \mathsf{b})}\cos\mathsf{a}$$

multiplicando toda la igualdad por $\cos(\alpha + \beta)/c$ queda demostrada [1].

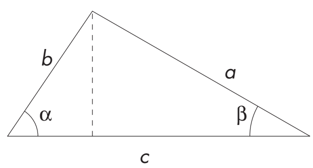

Figura 6

5.2

En la figura 6 se presenta un trozo de circumferencia de radio unidad OCB, lo que genera un triángulo rectángulo OAB de ángulo β en O. Acto seguido, se ha trazado la recta tangente a la circunferencia en C y otra nueva recta desde O formando un ángulo α con el segmento $\overline{OC}$, incidiendo las dos en el punto E. Por tanto, se tiene dibujado un nuevo triángulo rectángulo OCE. Finalmente la prolongación del segmento $\overline{AB}$ hasta $\overline{CE}$ termina de completar el triángulo oblicángulo ODE con el que se pretende trabajar.

Por tratarse de circunferencias de radio unidad $\overline{DC} = \tan\beta$ y $\overline{EC} = \tan\alpha$. Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos ODC y OEC obtenemos que $\overline{OD} = 1/\cos\beta$ y $\overline{OE} = 1/\cos\alpha$ pues $1 + \tan^2 x = 1/\cos^2 x$ para cualquier ángulo x. El ángulo en D se obtiene como 180 – (90 – β) y el ángulo en O por construcción es α –β.

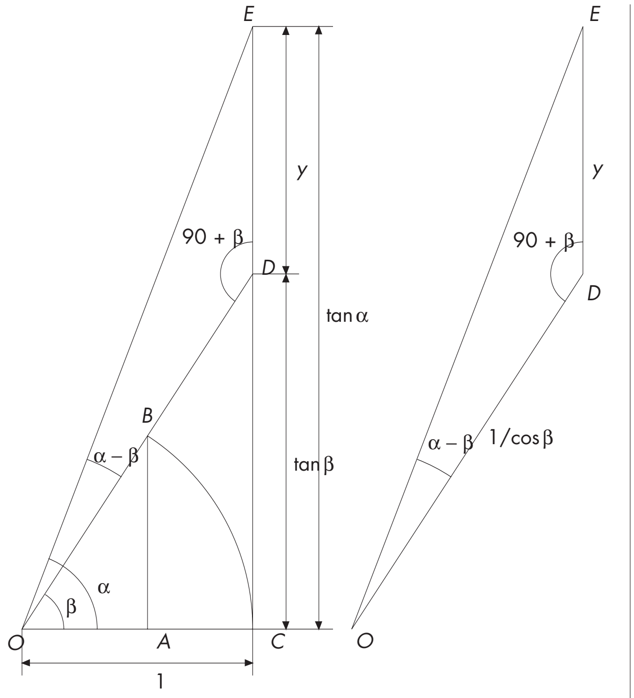

Figura 6

5.2.1

Aplicando el teorema de los senos al triangulo *ODE* queda

$$\frac{y}{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}=\frac{1/\cos\alpha}{\operatorname{sen}(90+\beta)}$$

dado que $\operatorname{sen}(90+\beta)=\cos\beta$ e $y=\tan\alpha-\tan\beta$,

$$\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}=\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}$$

resultando

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta(\tan\alpha-\tan\beta)=\cos\alpha\cos\beta\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}\right)$$

de donde $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha$

5.2.2

Aplicando al mismo triángulo *OEC* el teorema de los cosenos, se tiene

$$(\tan\alpha-\tan\beta)^2=(1/\cos\alpha)^2+(1/\cos\beta)^2-$$
$$-2(1/\cos\alpha)(1/\cos\beta)\cos(\alpha-\beta)$$

desarrollándola queda

$$\tan^2\alpha+\tan^2\beta-2\tan\alpha\tan\beta=1+\tan^2\alpha+1+\tan^2\beta-\frac{2\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

o bien

$$-2-2\tan\alpha\tan\beta=-\frac{2}{\cos\alpha\cos\beta}\cos(\alpha-\beta)$$

dividiendo por –2 y aislando queda

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta(1+\tan\alpha\tan\beta)=\cos\alpha\cos\beta\left(1+\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}\right)$$

resultando la expresión [2].

Jaume Munné
EUPVG
Departamento de Matemática Aplicada
IES Francesc X. Lluch Rafecas
Vilanova i la Geltrú
Societat d'enseyants de matemàtiques del Garraf

Conclusiones

Si bien cada forma de deducción tiene sus atractivos, se ha pretendido ofrecer las distintas posibilidades deductivas que pueden ser empleadas, tanto para seleccionar una única manera de proceder, como para verificar que distintos caminos pueden llevarnos a unas mismas expresiones.

Bibliografía

ALFA NAUTA (Programa Educativo Temático) (1998): *Ciencias Matemáticas I ESO-LOGSE*, Alfa, Barcelona.

ARA, L. T. y M.ª E. RIOS (1960): *Matemáticas Tomo II (Geometría y trigonometría)*, Santander.

AYRES, F. (1970): *Teoria y problemas de trigonometría plana y esférica*, McGraw-Hill, Colombia.

BESORA, J., A. JANE y J. M. GUITERAS (1998): *Matemàtiques (Batxillerat)*, McGraw-Hill, Barcelona.

BIOSCA, A, M. J. ESPINET, M. J. FANDOS y M. JIMENO (1998): *Matemàtiques I (Batxillerat)*, Edebé, Barcelona.

CAMPBELL, R. (1956): *La trigonométrie*, Press Universitaires de France, Paris.

CÓLERA, J., M. DE GUZMAN, M.ª J. OLIVEIRA y S. FERNÁNDEZ (1996): *Matemáticas I (Bachillerato Logse)*, Anaya, Madrid.

GALDOS, L. (1998): *Matemáticas Galdós*, Cultural, Madrid.

GARCIA, F. (1952): *Curso práctico de trigonometria rectilínea y esférica*, Dossat, Madrid.

GOMA, A., C. BAILO, J. TUDURI y R. CASALS (1997): *Matemàtiques (1 batxillerat)*, Teide, Barcelona.

GUÍA ESCOLAR VOX (1993): *Matemáticas*, Bibliograf, Barcelona.

LANG, S. (1990): *Cálculo*, Addison-Wesley iberoamericana, EUA.

SOBEL, M. A. y N. LERNER (1995): *Algebra and Trigonometry*, Printice Hall, London.

SWOKOWSKY, E. W. (1988): *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*, Iberoamericana, México.

THOMAS, G. B. y R. L. FINNEY (1984): *Cálculo con geometría analítica*, Addison-Wesley iberoamericana, USA.

VILA, A. (1993): *Elements de trigonometria esfèrica*, Col. Aula UPC, Barcelona.

VIZMANOS, J. R., M. ANZOLA (1997): *Matemàtiques (Ciències de la naturalesa i la salut-Tecnologia) Batxillerat*, Cruïlla, Barcelona.