SUMA 39
febrero 2002, pp. 27-32

Programación lineal y diccionarios

C. González Martín
G. Herrera Rodríguez

ARTÍCULOS

Por la importancia que tiene, por las aplicaciones prácticas y por su sencillez, dentro de los contenidos básicos de las Matemáticas de Bachillerato sería obligado incluir una introducción a la Programación Lineal. Actualmente, dichos contenidos sólo se imparten en los Bachilleratos de Ciencias Sociales, resolviendo algunos problemas sencillos con la ayuda del método gráfico. En este trabajo se propone un método alternativo consistente en la utilización de una herramienta sencilla y eficaz (los denominados diccionarios) para resolver problemas de Programación Lineal sin explicar el Método del Simplex y sin utilizar operaciones matriciales. Esencialmente, el procedimiento introducido (ver, por ejemplo, Chvàtal (1983) o Vanderbei (1996)) consiste en resolver un sistema de ecuaciones lineales por un método de sustitución dirigido.

ES INDUDABLE que la Programación Lineal es una de las partes de más interés y utilidad de la Investigación Operativa. Además, desde el punto de vista histórico, ha servido para iniciar el gran desarrollo posterior de esta nueva ciencia. Es conocido que la aparición del Método del Simplex en 1947, debido al matemático y estadístico G. B. Dantzig, constituye uno de los hitos de la ciencia del siglo XX y marca el comienzo de la expansión de un nuevo campo científico de gran importancia en la actualidad. El Método del Simplex es, esencialmente, un procedimiento de resolución de un sistema de ecuaciones lineales de acuerdo con un determinado criterio de búsqueda. Dantzig, para intentar resolver los problemas de optimización catalogados más tarde como de Programación Lineal, estudió formas eficientes de resolver sistemas de ecuaciones lineales (entre otros, los provenientes de las tablas Input-Output introducidas por Leontief para explicar determinados fenómenos de la economía de Norteamérica ocurridos a finales del primer cuarto del siglo veinte). El análisis de los diferentes problemas desde una vertiente económica posibilitó una búsqueda eficaz de soluciones con atributos de optimalidad. La visión exclusiva desde las Matemáticas de los mismos problemas, había sido incapaz, hasta entonces, de proponer un método que los resolviera adecuadamente.

El Método del Simplex se ha desarrollado y enriquecido hasta la actualidad con aportaciones de un número importante de grandes científicos que han extendido sus aplicaciones a multitud de problemas de la economía, ingenierías, ciencias de la gestión, administraciones públicas y privadas, etc. Su aplicación se ve favorecida por una cantidad importante de paquetes de programas de ordenador que incorporan distintas adaptaciones a la especificidad de los problemas que se intentan resolver.

Después de la reducción del problema de optimización a un sistema de ecuaciones, la actuación del Método del

Simplex en cada una de sus iteraciones, tiene un eje central constituido por el cálculo de la inversa de una matriz denominada *base* y la transformación del sistema a través de la multiplicación por dicha inversa. Sin embargo, desde la perspectiva didáctica, existen maneras alternativas de explicar su desarrollo sin la necesidad explícita de manejo de inversas de matrices. Una de estas formas es el uso de la herramienta que Chvàtal (1983) o Vanderbei (1996) denominan *diccionarios.*

Los diccionarios funcionan, esencialmente, como la resolución de un sistema de ecuaciones lineales por el método de sustitución, fijando un criterio para seleccionar la variable que hay que despejar y la ecuación sobre la que se ha de ejecutar. Luego se sustituye en el resto de ecuaciones y, en su caso, se itera despejando y sustituyendo. En cada iteración se tiene, de una manera clara, una *solución básica* del sistema de ecuaciones, la cual, cuando corresponda, se constituirá en solución óptima del problema planteado originalmente.

Por la forma de trabajo que exigen, los diccionarios pueden ser considerados en la enseñanza del Bachillerato como alternativa a la simple utilización del método gráfico para resolver problemas sencillos de Programación Lineal. Estamos convencidos de la necesidad de que todos los alumnos que cursan Matemáticas en Bachillerato deberían conocer los elementos básicos de la Programación Lineal y de algunas de las problemáticas más sencillas planteadas sobre Grafos y Redes. Estos conocimientos presentan el denominador común de la facilidad de motivación desde distintas situaciones reales y de la sencillez de su planteamiento como problemas de Matemáticas. También de su estudio se derivan métodos sencillos de resolución que se pueden desarrollar desde un planteamiento exclusivamente práctico.

En el presente trabajo hacemos una explicación de cómo se pueden usar diccionarios para desarrollar las ideas del Método del Simplex.

Fundamentos básicos del Método del Simplex

El Método del Simplex resuelve problemas de Programación lineal, es decir, problemas de optimización de una función objetivo lineal en un contexto definido por restricciones (ecuaciones o inecuaciones) también de tipo lineal. Para fijar las líneas básicas de la aplicación de este método, consideremos el siguiente caso particular:

> Una empresa dispone de seis millones de pesetas para repartir entre dos actividades productivas (I y II). La cantidad destinada a la primera actividad no debe sobrepasar cuatro millones, mientras que el dinero dedicado a la segunda actividad debe ser menor o igual que cinco millones. El beneficio obtenido por cada unidad de actividad tipo I es igual a dos millones, mientras que el correspondiente a cada unidad tipo II es igual a un millón. Si la empresa quiere maximizar los beneficios globales de su actividad productiva, ¿cuáles son los correspondientes niveles óptimos de las dos actividades?

Los diccionarios funcionan, esencialmente, como la resolución de un sistema de ecuaciones lineales por el método de sustitución, fijando un criterio para seleccionar la variable que hay que despejar y la ecuación sobre la que se ha de ejecutar.

Para afrontar la resolución de este problema, es fundamental formalizar un modelo adecuado. Si representamos por x_1 (*variable de decisión* asociada a la primera actividad) al nivel que ha de alcanzar la actividad I y por x_2 al correspondiente nivel de la actividad II, el criterio que gobierna la búsqueda de soluciones es el de maximizar la expresión (función objetivo):

$$2x_1 + x_2$$

Por otro lado, las condiciones expresadas más arriba (*restricciones*) imponen que:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\text{″ } 6 \\ x_1 \quad &\text{″ } 4 \\ x_2 &\text{″ } 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

La resolución gráfica de este problema (figura 1) indica que los niveles óptimos para las actividades I y II son, respectivamente, 4 y 2 con un beneficio máximo de 10 millones.

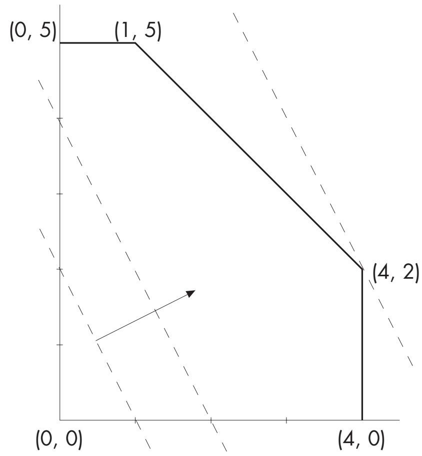


Figura 1

¿Cómo encuentra esta solución el Método del Simplex?

En primer lugar, expresando el anterior problema como un sistema de ecuaciones. Para ello se hace necesario considerar *variables de holgura* que conviertan en ecuaciones cada una de las tres inecuaciones planteadas anteriormente, de forma que todas las variables de decisión sean no negativas. Esto nos permite obtener:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 6 \\ x_1 \qquad\quad + x_4 \qquad &= 4 \\ x_2 \qquad\quad + x_5 &= 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Las variables de holgura se incorporan a la función objetivo multiplicadas por cero.

En segundo lugar, es necesario identificar, para cada una de las ecuaciones, una *variable básica*; es decir una variable que tenga coeficiente igual a 1 y que aparezca en una sola de las ecuaciones (existen casos en los que la búsqueda de variables básicas iniciales exige desarrollar métodos auxiliares específicos). En este caso, es fácil señalar a x_3, x_4 y x_5 como variables básicas iniciales. Si las variables que restan, que denominaremos *no básicas,* toman valores iguales a cero, tenemos entonces una *solución básica* del anterior sistema. Dicha solución es:

$$x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = 6,\ x_4 = 4,\ x_5 = 5$$

siendo el valor de la función objetivo igual a cero. En dimensión dos, esta solución se corresponde con (0,0) (figura 2).

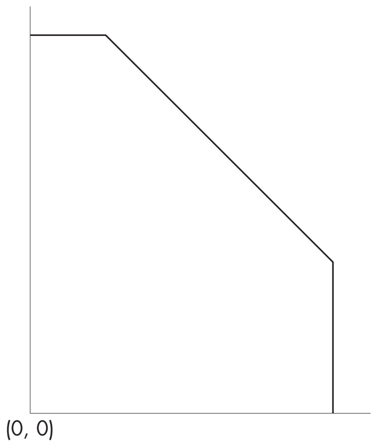


Figura 2

Una vez establecido el concepto y realizados los cálculos de los costos relativos de las variables no básicas en la solución básica actual, podemos concretar si ésta es óptima o es necesario encontrar otra mejor.

Propiedad Fundamental

> Se demuestra que si un problema de Programación Lineal, como el anteriormente planteado, tiene solución óptima finita, esta se alcanza en una solución básica. Además, el número de soluciones básicas de un problema de Programación Lineal es siempre finito.

Por ello, es válido plantear un esquema de búsqueda de soluciones que, si no detecta la no acotación del problema, cambie iterativamente de una solución básica a otra mejor. De esta forma, el proceso de búsqueda acaba indefectiblemente en un número finito de iteraciones.

¿Cómo se busca una solución básica mejor que la actual?

Respecto a la solución básica actual introducida previamente, es posible concretar si es óptima o puede existir otra mejor (con mayor valor de la función objetivo) utilizando el concepto de *costo relativo*. Los costos relativos, asociados a cada una de las variables no básicas en la solución básica actual, representan *el incremento que se produce en el valor objetivo, respecto al alcanzado en dicha solución básica, cuando se utiliza una solución factible en la que la correspondiente variable no básica es incrementada en una unidad, manteniendo el resto de variables no básicas a nivel cero y haciendo que las variables básicas adapten sus valores para que se satisfagan las ecuaciones del sistema*. Se puede entender entonces que el costo relativo representa el incremento en el valor de la función objetivo por unidad incrementada a la correspondiente variable no básica.

En el ejemplo que hemos manejado anteriormente, para la solución básica:

$$x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = 6,\ x_4 = 4,\ x_5 = 5$$

Si $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 5$, $x_4 = 3$, $x_5 = 5$, obtenemos una solución factible con valor objetivo igual a 2. Por tanto, el costo relativo asociado a x_1, representado por $\bar{c}_1$ es igual a $2 - 0 = 2$ (valor objetivo de la nueva solución factible – valor objetivo de la solución básica actual). Con un razonamiento similar llegaríamos a la conclusión de que $\bar{c}_2 = 1$.

Una vez establecido el concepto y realizados los cálculos de los costos relativos de las variables no básicas en la solución básica actual, podemos concretar si ésta es óptima o es necesario encontrar otra mejor. Si, como en el caso que estamos resolviendo, el problema planteado es de máximo, la optimalidad de una solución básica se establece cuando todos los costos relativos de las variables no básicas son menores o iguales que cero (el incremento de una unidad en el valor actual de una variable no básica no representa una mejora en el valor de la función objetivo).

¿Cuál es la nueva solución básica?

Como $\bar{c}_1 = 2$, parece lógico incrementar el valor actual de x_1. Sabemos que el valor que debe tomar esta variable debe ser mayor o igual que cero y que por cada unidad que se incremente el valor actual (igual a cero), el valor de la función objetivo aumenta en 2 unidades. Por esta razón nos planteamos encontrar el valor mayor posible para x_1. Si $x_1 = \lambda \geq 0$ y $x_2 = 0$, para tener una solución factible es necesario que $x_3 = 6 - \lambda \geq 0$, $x_4 = 4 - \lambda \geq 0$ y $x_5 = 5$. Por tanto, el mayor valor posible para λ es igual a 4. Si $\lambda = 4$, entonces la solución factible que resulta es:

$$x_1 = 4,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ x_4 = 4,\ x_5 = 5$$

Esta solución se corresponde, en dimensión dos, con (4,0) (figura 3).

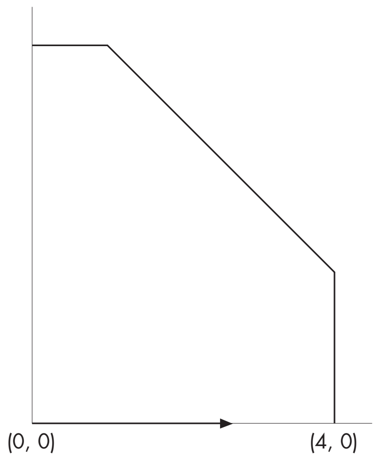


Figura 3

Esta solución es también básica y tiene asociado un valor objetivo igual a 8 (2 veces el valor que toma λ). Para esta nueva solución básica se calcularían los costos relativos de las variables no básicas y se repetiría el razonamiento que acabamos de efectuar.

Hay que señalar que si, al llevar a cabo la tarea anterior, resulta que el valor que puede tomar λ no está acotado superiormente, entonces el problema que estamos resolviendo resulta no acotado.

Las ideas anteriores merecen un desarrollo más amplio, pero dicho estudio, contenido en cualquier buen libro sobre Programación Lineal, no es el objeto de este trabajo. Trataremos a continuación de aplicar las referidas ideas sobre los diccionarios.

Esta representación del problema anterior es lo que se denomina (por similitud) diccionario.

Diccionarios y su aplicación

Dado el problema anterior:

$$\begin{array}{rl} \text{máx} & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

añadiendo variables de holgura y llamando z al valor de la función objetivo, podemos escribir:

$$\begin{array}{rcl} z & = & 0 + 2x_1 + x_2 \\ \hline x_3 & = & 6 - x_1 - x_2 \\ x_4 & = & 4 - x_1 \\ x_5 & = & 5 - x_2 \end{array}$$

Esta representación del problema anterior es lo que se denomina (por similitud) *diccionario.* Se observa que si $x_1 = x_2 = 0$, en las tres últimas líneas se puede leer directamente la solución básica inicial que se señaló anteriormente. En la primera fila aparece el correspondiente valor de la función objetivo y los costos relativos. Según razonamos previamente, interesa incrementar el valor actual de x_1, manteniendo $x_2 = 0$ y haciendo que el resto de las variables sigan tomando valores mayores o iguales que cero.

Se observa que si $\lambda \geq 0$ es el valor que se le asigna a x_1, siempre que $x_2 = 0$, los valores que toman el resto de las variables son:

$$x_3 = 6 - \lambda \geq 0,\ x_4 = 4 - \lambda \geq 0,\ x_5 = 5$$

Tenemos entonces que el valor mayor posible para x_1 es igual a 4 (coincide con el mayor valor que puede tomar λ). Como esta conclusión se saca a partir de la tercera ecuación, despejamos de ella x_1 y sustituimos en el resto de las ecuaciones. Obtenemos el diccionario:

$$\begin{array}{rcl} z & = & 8 + x_2 - 2x_4 \\ \hline x_3 & = & 2 - x_2 + x_4 \\ x_1 & = & 4 - x_4 \\ x_5 & = & 5 - x_2 \end{array}$$

Donde, de nuevo se lee la solución básica:

$$x_1 = 4,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ x_4 = 0,\ x_5 = 5$$

con valor objetivo igual a 8.

Se observa que el nuevo costo relativo de x_2 es $\bar{c}_2 = 1$, mientras que $\bar{c}_4 = -2$. Por ello, la solución básica actual no es óptima y cada unidad que incrementemos a x_2 produce un aumento de una unidad en el valor actual de la función objetivo. Si $x_2 = \lambda \geq 0$ y $x_4 = 0$, el valor mayor posible para λ es igual a 2 y se obtiene de la segunda ecuación. Despejando x_2 de esa ecuación y sustituyendo en el resto, obtenemos:

$$\begin{array}{rcl} z & = & 10 - x_3 - x_4 \\ \hline x_2 & = & 2 - x_3 + x_4 \\ x_1 & = & 4 \qquad\;\; - x_4 \\ x_5 & = & 3 + x_3 - x_4 \end{array}$$

La solución básica que se lee ahora es:

$$x_1 = 4,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 3$$

y el valor correspondiente de la función objetivo es $z = 10$.

En la figura 4 se completa el recorrido realizado por el procedimiento sobre la correspondiente región factible de dimensión dos.

Como los costos relativos de las variables no básicas (x_3 y x_4) son, respectivamente, iguales a –1 y –1, concluimos que la actual solución básica es óptima y, por ello, la resolución del problema planteado anteriormente ha concluido.

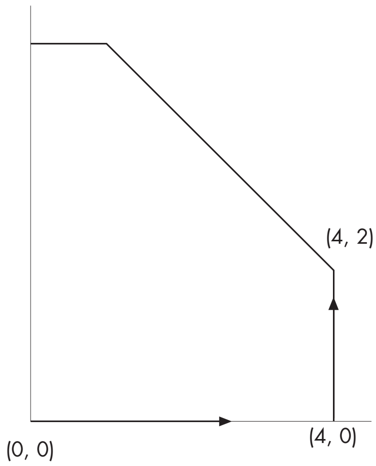


Figura 4

Dificultades que se pueden presentar

Fundamentalmente se concretan en el cálculo de la solución básica inicial. Puede suceder que no podamos encontrar directamente dicha solución como lo hemos hecho en el anterior ejemplo (esto ocurre cuando las restricciones iniciales son ecuaciones o cuando alguna de dichas restricciones son inecuaciones de la forma ″ pero los correspondientes términos independientes son negativos). En estos casos podemos utilizar variables artificiales (mayores o iguales que cero y colocadas convenientemente) jugando el papel de las variables básicas no disponibles inicialmente. Estas variables artificiales se tratarán de eliminar utilizando de forma adecuada el método previamente desarrollado. Para conseguirlo se puede utilizar, en una primera fase, un problema auxiliar en el que se minimice la suma de variables artificiales añadidas sobre la región factible del problema en la que se han incluido dichas variables. La resolución correspondiente concluirá con que la suma de las variables artificiales no se puede anular (en este caso, el problema original no tiene solución) o que dicha suma es igual a cero. En este último caso, eliminando en el diccionario resultante las variables artificiales y la fila de la función objetivo considerada hasta ahora y poniendo en su lugar (expresada convenientemente) la función objetivo original, se afronta la segunda fase en la que se concluye la resolución del problema.

Ejemplo

Sea el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{máx} & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a:} & x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

Resolución

Fase I

En esta fase se resolverá el problema auxiliar en el que se minimizará la suma de las dos variables artificiales que es necesario añadir, es decir:

$$\begin{array}{rl} \text{mín} & x_4 + x_5 \\ \text{s.a:} & x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \qquad\;\; = 4 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad + x_5 = 6 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0 \end{array}$$

Por tanto, el primer diccionario de la fase I es :

$$\begin{array}{rcl} w & = & 10 - x_2 \qquad - 2x_3 \\ \hline x_4 & = & 4 - x_1 + x_2 - x_3 \\ x_5 & = & 2 + x_1 - 2x_2 - x_3 \end{array}$$

Es claro que x_3 pasa a ser básica en sustitución de x_4. Por tanto, se despeja x_3 en la segunda ecuación del diccionario anterior y se sustituye en el resto de las ecuaciones. El nuevo diccionario es:

…podemos utilizar variables artificiales (mayores o iguales que cero y colocadas convenientemente) jugando el papel de las variables básicas no disponibles inicialmente.

$$\begin{array}{l} w = 2 + 2x_1 - 3x_2 + 2x_4 \\ \hline x_3 = 4 - x_1 + x_2 - x_4 \\ x_5 = 2 + 2x_1 - 3x_2 + x_4 \end{array}$$

Ahora pasa x_2 a ser básica sustituyendo a x_5. Después de despejar x_2 en la tercera ecuación y sustituir en el resto, obtenemos el diccionario:

$$\begin{array}{l} w = 0 + x_4 + x_5 \\ \hline x_3 = (14/3) - (1/3)x_1 - (2/3)x_4 - (1/3)x_5 \\ x_2 = (2/3) + (2/3)x_1 + (1/3)x_4 - (1/3)x_5 \end{array}$$

Como el valor de la función objetivo del problema auxiliar de la fase I es igual a cero, podemos iniciar la fase II.

Fase II

Planteamos el problema:

$$\begin{array}{llcl} \textit{máx} & 4x_1 + 3x_2 & & \\ \textit{s.a:} & (1/3)x_1 + \quad + x_3 & = & 14/3 \\ & (-2/3)x_1 + x_2 & = & 2/3 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 & & \end{array}$$

El correspondiente diccionario es:

$$\begin{array}{l} z = 2 + 6x_1 \\ \hline x_3 = (14/3) - (1/3)x_1 \\ x_2 = (2/3) + (2/3)x_1 \end{array}$$

Como ahora tenemos un problema de máximo, x_1 debe ser básica sustituyendo a x_3. Por tanto, despejando x_1 en la segunda de las anteriores ecuaciones y sustituyendo en el resto se obtiene:

$$\begin{array}{l} z = 86 - 18x_3 \\ \hline x_1 = 14 - 3x_3 \\ x_2 = 10 - 2x_3 \end{array}$$

Este diccionario es óptimo, siendo la solución óptima la dada por $x_1 = 14$, $x_2 = 10$, $x_3 = 0$, con valor objetivo igual a 86.

C. González
Departamento de Estadística, Investigación Operativa y Computación.
Universidad de La Laguna

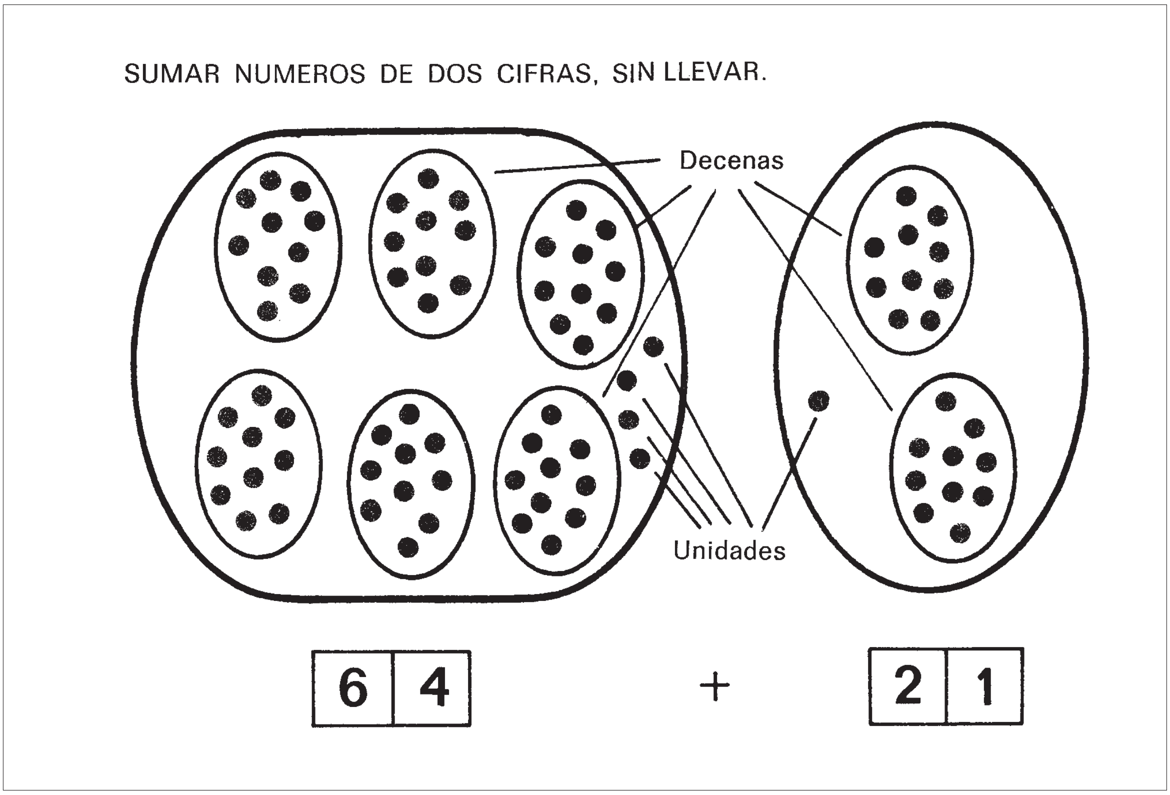
G. Herrera
IES San Matías.
La Laguna.
Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»

Referencias bibliográficas

CHVÁTAL, V. (1983): *Linear programming*, Freeman.

DANTZIG, G. B. y M. N. THAPA (1997): *Linear programming. 1: Introduction*, Springer.

VANDERVEI, R. J. (1996). *Linear programming. Foundations and extensions*, Kluwer.



Preescolar