SUMA

REVISTA SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

n.º 38

NOVIEMBRE
2001

SUMA 38

noviembre 2001

Índice

Directores
Emilio Palacián Gil
Julio Sancho Rocher

Administrador
José Javier Pola Gracia

Consejo de redacción
Jesús Antolín Sancho
Eva Cid Castro
Bienvenido Cuartero Ruiz
Faustino Navarro Cirugeda
Rosa Pérez García
Daniel Sierra Ruiz

Consejo Editorial
José Luis Aguiar Benítez
Javier Brihuega Nieto
M.ª Dolores Eraso Erro
Ricardo Luengo González
Luis Puig Espinosa

Edita
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Diseño portada
Pablo Cano
Diseño interior
Concha Relancio y M.ª José Lisa
Maquetación
E. Palacián, J. Sancho, D. Sierra

Revista SUMA
ICE Universidad de Zaragoza
C. Pedro Cerbuna,12
50009-ZARAGOZA

Tirada: 7.000 ejemplares
Depósito Legal: Gr. 752-1988
ISSN: 1130-488X
Impresión: INO Reproducciones. Zaragoza

Asesores

Pilar Acosta Sosa
Claudi Aguadé Bruix
Alberto Aizpún López
José Luis Álvarez García
Carmen Azcárate Giménez
Manuel Luis de Armas Cruz
Antonio Bermejo Fuentes
Javier Bergasa Liberal
María Pilar Cancio León
Mercedes Casals Colldecarrera
Abilio Corchete González
Juan Carlos Cortés López
Carlos Duque Gómez
Francisco L. Esteban Arias
Francisco Javier Fernández
José María Gairín Sallán
Juan Gallardo Calderón
José Vicente García Sestafe
Horacio Gutiérrez Fernández
Fernando Hernández Guarch
Eduardo Lacasta Zabalza
Andrés Marcos García
Ángel Marín Martínez
Félix Matute Cañas
Onofre Monzo del Olmo
José A. Mora Sánchez
María José Oliveira González
Tomás Ortega del Rincón
Pascual Pérez Cuenca
Rafael Pérez Gómez
Antonio Pérez Sanz
Ana Pola Gracia
Ismael Roldán Castro
Modesto Sierra Vázquez
Vicent Teruel Marti
Carlos Usón Villalba

SUMA
no se identifica necesariamente
con las opiniones vertidas
en las colaboraciones firmadas

SUMA 38
noviembre 2001

Veinticinco años después

EDITORIAL

LA LEY GENERAL DE EDUCACIÓN de 1970, además de suponer una profunda transformación en el sistema educativo español –quizás la más significativa desde la Ley Moyano de mitad del siglo XIX–, supuso un cambio radical en los currículos de Matemáticas en los niveles anteriores a la Universidad.

Por influencia de las teorías psicológicas de Piaget y el enfoque bourbaquista de la matemática, el estructuralismo más radical invade los currículos de nuestra materia. El lenguaje conjuntista impregna todos los contenidos, desde el concepto de número natural, hasta la definición de triángulo, pasando por la demostración de la propiedad asociativa de cualquier operación que apareciese con cualquier objeto matemático (naturalmente siempre que fuese asociativa, que casi siempre lo era).

No pasaron muchos años sin que una parte del profesorado, minoritaria, pero inquieta y, como se ha demostrado con posterioridad, sumamente valiosa, apostase de forma decidida por una forma distinta de encarar la enseñanza de las matemáticas, cuestionando bastantes de los contenidos curriculares vigentes y experimentando metodologías alternativas, que ponían el acento en el «hacer matemáticas» por parte del estudiante, más que en el papel del profesor como transmisor de conocimientos.

Inicialmente (las sociedades de profesores serían algo posteriores), estos profesores se organizaron en pequeños grupos de trabajo, y a través de publicaciones, artículos en revistas, cursos, congresos, jornadas… fueron transmitiendo una nueva filosofía sobre cómo se podía aprender y enseñar mejor las matemáticas.

Aunque este movimiento de «grupos» se produjo en otras materias, fue en Matemáticas (y, quizás, en Historia), donde *tuvo una significación más profunda. Así, fueron surgiendo el Grupo Cero en Valencia, el Grup Zero en Barcelona, el Colectivo de Didáctica de las Matemáticas de Sevilla, el Grupo Azarquiel de Madrid, el Grupo Beta de Badajoz, el Equipo Granada-Mats, el Grupo Aresta de Barcelona, y algún otro más que, sin duda, se queda en el tintero.*

SUMA desea rendir un pequeño homenaje a todas las personas que formaron estos colectivos, personalizándolo quizás en el grupo más paradigmático, el Grupo Cero de Valencia, dedicando la reseña «larga» de nuestra sección Recensiones a los manuales de primero y segundo de BUP, que supusieron en aquellos tiempos un contrapunto refrescante a tanto libro de texto monótono y aburrido. De estos manuales proceden también los motivos que sirven para ilustrar este número de nuestra revista.

SUMA 38

noviembre 2001, pp. 5-13

El lenguaje probabilístico en los libros de texto

Juan José Ortiz de Haro
Carmen Batanero Bernabeu
Luis Serrano Romero

ARTÍCULOS

En la actualidad ha adquirido gran importancia la enseñanza de la probabilidad, como se desprende del análisis de los diseños curriculares vigentes, indicando como un punto fundamental la adquisición de un lenguaje preciso en relación con el azar y la probabilidad. Por otro lado una preocupación fundamental del profesor de matemáticas es facilitar el aprendizaje de los alumnos, contando para ello con diversos recursos y materiales didácticos, entre los que destaca el libro de texto.
En este artículo presentamos un estudio empírico sobre el lenguaje relacionado con la probabilidad, utilizado en los libros de texto, en el que se observan diferencias significativas, que pueden tener una influencia en el aprendizaje de los alumnos y que consideramos de interés para el profesorado que imparte esta materia.

EN LOS NUEVOS DISEÑOS curriculares se sugiere adelantar la enseñanza de la probabilidad, y utilizar una metodología apoyada en la simulación y experimentación, indicando como un punto fundamental la adquisición de un lenguaje preciso en relación con el azar y la probabilidad Por ejemplo, en el diseño curricular del Ministerio de Educación y Ciencia para la enseñanza secundaria obligatoria, en el bloque 5, denominado *Tratamiento del azar* encontramos como concepto a presentar a los alumnos: «Fenómenos aleatorios y terminología para describirlos». Dentro de los procedimientos, se hace referencia a la «utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar». El currículo del MEC no es una excepción, ya que encontramos parecidos términos o expresiones en los diseños curriculares de las comunidades autónomas y en otros países, como Inglaterra o Estados Unidos, que han propuesto reformas recientes sobre el currículo de Matemáticas.

Por otro lado, cuando el alumno se inicia en probabilidad, ha usado con frecuencia términos y expresiones para referirse a los sucesos aleatorios, que con frecuencia no tienen el mismo sentido preciso que adquieren en la clase de matemáticas. En el lenguaje ordinario, tanto en las conversaciones, como en la prensa o literatura encontramos con frecuencia referencias al *azar* y lo *aleatorio*, aunque el significado que se da a estos términos no siempre coincide con el que tratamos de enseñar. Otros términos coloquiales se asocian a los fenómenos aleatorios que pueden presentar matices diferenciados según el contexto, como *casual*, *accidental*, *eventual*, *fortuito, impensado*, *imprevisible*, *inesperado*, *inopinado*, *ocasional*, *por suerte* o las expresiones tales como *por chiripa*, *por chamba*, *de rebote*, *de rechazo*, *sin querer*, *sin intención*, *sin plan*.

En este trabajo nos hemos interesado por el lenguaje específico, que en torno al azar y la probabilidad se presenta en los libros de texto, realizando un estudio empírico de los términos y expresiones en dos libros de primer curso del Bachillerato Unificado Polivalente, y es parte de un estudio más completo sobre el tratamiento de la probabilidad en los libros de texto (Ortiz, 1999). Una preocupación fundamental del profesor de matemáticas es facilitar el aprendizaje de los alumnos, contando para ello con diversos recursos y materiales didácticos, entre los que destaca el libro de texto. Como se afirma en el informe Cockcroft (1985: 114) «los libros de texto constituyen una ayuda inestimable para el profesor en el trabajo diario del aula». Y por su parte Rico (1990: 22) señala que: «el profesor conserva, mantiene y transmite el saber institucionalizado en los manuales, donde aparece seleccionado y adecuadamente estructurado».

Cuando queremos plasmar en un texto una ciencia como la Matemática, que está en continuo desarrollo y expansión, los imperativos didácticos nos obligan a realizar una transposición didáctica (Chevallard, 1985), para transformar el *saber sabio* en *saber escolar*, asequible a los alumnos. Este delicado proceso introduce a veces sesgos o carencias que pueden tener una influencia en el aprendizaje de los alumnos. El lenguaje de los libros de texto es un aspecto relevante en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, por lo que creemos suficientemente justificado muestro estudio.

Para llevarlo a cabo seleccionamos dos libros de texto, que designaremos como [A] y [B] en el resto del trabajo y que aparecen referenciados al final del artículo. Estos libros fueron seleccionados en nuestro estudio previo (Ortiz, 1999), entre los más utilizados por los profesores, por ser de los más completos en cuanto al tema de probabilidad. Corresponden, además, a dos editoriales distintas, uno de ellos correspondiente al año 1975 y otro al año 1991. Estos son los años de comienzo de la reforma correspondiente al período llamado de las Matemáticas Modernas y de la Reforma LOGSE, con lo que esperamos encontrar diferencias significativas entre ambos.

Para fundamentar nuestro estudio, hacemos un breve repaso a las implicaciones que el lenguaje tiene en el estudio de las matemáticas.

El lenguaje en matemáticas

Según Orton (1990) hay muchos aspectos del lenguaje que pueden afectar al aprendizaje de las matemáticas, ya que muchos chicos no entienden los términos que empleamos en clase como parte del vocabulario matemático. Puede que existan problemas incluso cuando el alumno parece emplear un vocabulario apropiado, porque a veces le atribuyen un significado no acorde con el que pretendemos darle en la clase de matemáticas. Lo que reviste un problema no son los términos en sí mismos, sino los conceptos y procesos subyacentes que se están comunicando y el significado que transmiten. Pimm (1987) también llama la atención sobre el uso de palabras del lenguaje cotidiano, con sentido matemático particular, lo cual puede ocurrir en el caso de los términos probabilísticos. Sin embargo, también considera que la analogía (metáfora) por medio de palabras cotidianas es muy importante para la construcción del significado matemático.

Una preocupación fundamental del profesor de matemáticas es facilitar el aprendizaje de los alumnos, contando para ello con diversos recursos y materiales didácticos, entre los que destaca el libro de texto.

Dickson y otros (1991) resumen diversas teorías que señalan la importancia del lenguaje en el desarrollo del pensamiento matemático, desde la tradición conductista americana que consideraba el pensamiento como «habla no vocalizada» hasta el constructivismo de Piaget quien consideraba el pensamiento como «acciones interiorizadas». Para él, el lenguaje sólo podrá reflejar y no determinar el desarrollo cognitivo y la adquisición del leguaje y los conceptos subyacentes no es en modo alguno pasivo. La comprensión del lenguaje y su uso por el niño depende de su implicación en las situaciones en que se utiliza. Por ello, considera esencial que el niño y el maestro analicen los diversos significados e interpretaciones de las palabras, de manera que cada uno sepa claramente lo que el otro quiere decir al usar determinadas formas lingüísticas.

Rotherry (1980) diferencia tres categorías de palabras usadas en la enseñanza de las matemáticas:

a) Palabras específicas de las matemáticas que, normalmente, no forman parte del lenguaje cotidiano. Una de las características distintivas del discurso sobre las matemáticas es el uso generalizado del vocabulario técnico. Los matemáticos han desarrollado una serie de términos específicos para comunicarse entre sí, que pueden causar problemas en las clases de matemáticas en caso de que los alumnos no lleguen a dominarlo (Pimm, 1987).

b) Palabras que aparecen en las matemáticas y en el lenguaje ordinario, aunque no siempre con el mismo significado en los dos contextos.

Pimm (1987) indica que la mayor parte de las clases de matemáticas se desarrollan en una mezcla de lenguaje corriente y lenguaje matemático (es decir usando términos ordinarios del lenguaje con un sentido matemático). A causa de interpretaciones lingüísticas diferentes se producen innumerables confusiones cuando el profesor emplea términos «del dialecto matemático» y los alumnos lo interpretan de acuerdo al lenguaje ordinario.

c) Palabras que tienen significados iguales o muy próximos en ambos contextos.

Como veremos en el caso de la probabilidad la mayoría de los vocablos pertenecen a las dos últimas categorías, aunque, si el niño no está muy familiarizado por el uso, muchas palabras de la categoría c) se convertirán en términos de la categoría b), lo que podrá crear dificultades de comunicación en el aula. Todas estas consideraciones nos han llevado a analizar el lenguaje empleado en los dos libros de texto seleccionados. Los objetivos concretos pretendidos son los siguientes:

a) Mostrar la riqueza de los medios expresivos probabilísticos en los libros de texto, incluso cuando se trata de unidades pensadas para una primera introducción al tema. Tras esta riqueza de medios expresivos subyace una riqueza conceptual que apunta, por un lado, a la complejidad de los significados de los conceptos matemáticos subyacentes, y por otro, a sus múltiples interrelaciones y a la rica fenomenología de lo aleatorio.

b) Mostrar las diferencias de medios expresivos en los textos analizados, para ejemplificar como, para un mismo nivel de enseñanza y unos mismos conceptos, es posible una gama de significados a presentar a los alumnos, en función del lenguaje empleado y el modo en que se usa este lenguaje.

A continuación presentamos nuestros resultados, clasificándolos en dos puntos: el lenguaje de lo aleatorio y el lenguaje de la probabilidad.

El lenguaje de lo aleatorio

Un primer punto analizado en nuestro estudio son las palabras y términos usados para hacer referencia al concepto de experimento aleatorio, la aleatoriedad, sus propiedades y ejemplos de situaciones aleatorias. En la tabla 1 recogemos este lenguaje, alfabetizado para cada uno de los dos libros analizados. Podemos clasificar estas palabras y expresiones en los siguientes grupos diferenciados:

a) Expresiones referidas a la aleatoriedad.

b) Expresiones referidas a la idea de experimento aleatorio o a sus resultados.

c) Vocablos relacionados con los dispositivos generadores de resultados aleatorios.

Texto [A]	*Texto [B]*
Aleatoria (experiencia)	Bolas en urnas
Azar, azaroso	Dado
Baraja, española, francesa	Experimento aleatorio
Bolsa (con bolas)	Fichas numeradas
Cargado, correcto (dado)	Impredecible
Carta	Juegos de azar
Chincheta	Lanzar (dados, moneda)
Dado (caras, trucado, irregular)	Moneda
Extraer (una bola)	Observar (un resultado)
Extracción	Obtener (un resultado)
Ficha	Predecir (un resultado)
Función Random	Proceso (define un)
Imprevisible	Resultado
Incertidumbre, incierto	Rifas (con números premiados)
Inseguridad	Sacar (una carta, una moneda, bolas de urnas)
Juegos de azar: ganar/ perder	Sucesión de elementos (permite obtener una)
Jugada	
Lanzar (un dado, moneda)	
Moneda	
Números aleatorios	
Resultado	
Ruleta	
Sacar (una carta)	
Secuencia (de resultados aleatorios)	
Simétrica (simetría)	
Sondeo	
Suerte	
Tirar (un dado, moneda)	

Tabla 1. Lenguaje utilizado en relación con el experimento aleatorio

Expresiones referidas a la aleatoriedad

Son las que evocan este concepto, sirven para definirlo o precisar sus características. Hemos encontrado entre ellas substantivos como azar:

> El azar es considerado como lo más opuesto al orden, cualquier regla, a toda previsión. ¿Cómo poner leyes a algo imprevisible?» (Texto [A]: 234)

Sin embargo, aunque es cierto que cada resultado aislado de un experimento es imprevisible, cuando consideramos un gran número de experimentos aparecen leyes de probabilidad. En este sentido la afirmación del texto no es del todo precisa.

Otros vocablos utilizados para caracterizar estas situaciones aleatorias son *incertidumbre*, *inseguridad*:

> Estos ejemplos te dan la clave fundamental para empezar a poner números a la incertidumbre; para manejarte bien a pesar de la inseguridad. (Texto [A]: 223)

Asimismo se hace referencia a que «No se puede predecir el resultado» (texto [B]: 40). Esta es una característica que sirve para discriminar experimentos aleatorios y no aleatorios:

> Fíjate en que cada vez que realizas los experimentos a), b) y d) no puedes predecir el resultado, ya que en a) puede ser cara o cruz; en b) puede salir 1, 2, 3, 4, 5 o 6, etc. En cambio, en el experimento c) si puedes predecir el resultado: el trozo de plomo no flota en el agua. Por ello decimos que los experimentos a), b) y d) son aleatorios y que el experimento c) no es aleatorio. (Texto [B]: 40)

A veces encontramos adjetivos que se emplean para calificar este tipo de experiencias, resultados o situaciones y para describir sus características, como en el siguiente ejemplo en las que se consideran sinónimos *azaroso* e *imprevisible*:

> La palabra azaroso se utiliza como sinónimo de imprevisible. (Texto [A]: 234)

Otro término más técnico es el de *aleatoria*, *aleatorio*:

> Los acontecimientos cuya realización depende del azar se llaman sucesos aleatorios. (Texto [A]: 227)

Sin embargo, en otras ocasiones la palabra *azar* no se emplea como sustantivo, sino como adjetivo para calificar una situación, especialmente, en lo referido a los juegos:

> Se empezó con juegos de azar. (Texto [A]: 222)

Estos juegos se describen en la siguiente forma en el texto [B]:

> Una de las características de los llamados «juegos de azar» consiste en que sus resultados están substancialmente de acuerdo con las probabilidades «a priori» (Texto[B]: 39).

Con una connotación de control del azar o bien de resultado inesperado, aparece a veces la idea de *suerte*. De este modo, y coincidiendo con lo expuesto por Hawkins y otros (1992), se diferencia entre aleatoriedad que es no controlable y la suerte que podría ser controlable o podría favorecer o perjudicar a una persona:

> Tuve una tarde de suerte: tiré el dado 180 veces y salió el 6 en 84 ocasiones. (Texto [A]: 234)

Como indica Rescher (1995) la suerte solo tiene sentido si existe aleatoriedad o inseguridad y si el suceso, en cuestión favorece o perjudica a una persona determinada y ocurre, a pesar de no ser previsible su ocurrencia.

La introducción de la idea de aleatoriedad se hace preferentemente de un modo descriptivo y por ello los matices del lenguaje cobran un papel primordial en tal descripción.

Expresiones referidas a la idea de experimento aleatorio o a sus resultados

En general, en estos libros son pocas las ocasiones en que se sugiere a los alumnos realizar experimentos aleatorios y observar sus resultados. La introducción de la idea de aleatoriedad se hace preferentemente de un modo descriptivo y por ello los matices del lenguaje cobran un papel primordial en tal descripción. Las características atribuidas a los resultados de estos experimentos se realizan con palabras tales como *imprevisible*, *incierto*, con las que se pretende que el alumno evoque las propiedades de tales fenómenos, pero cuyo significado no suele clarificarse, quedando abierta la posibilidad de una interpretación ambigua. También la palabra *aleatorio* se usa como calificativo, por ejemplo *número aleatorio* (Texto [A]: 230), a pesar de no haberse dado una definición explícita de dicho término.

Algunos verbos evocan tipos característicos de experimentos considerados aleatorios, como *extraer* (una bola), *lanzar* (un dado, una moneda), *sacar* (una carta), *tirar* (un dado, una moneda). Asimismo encontramos referencias a «obtener un resultado» y «observar un resultado»:

> Lanzar una moneda al aire y observar el resultado. (Texto [B]: 40)

Estos verbos evocan una serie de acciones familiares a la experiencia del niño con los juegos que están presentes en su cultura, a la vez que generalmente les recuerdan unos convenios implícitos en los mismos. Por ejemplo, tiramos o lanzamos un dado, para estudiar el número que resulta en la cara superior, pero no nos preocupamos de su color y suponemos que el dado no cae de canto. Sacamos o extraemos una carta de la baraja, habiendo barajado ésta previamente y sin hacer trampas, suponiendo que la baraja está completa, etc. Sólo hemos encontrado en el texto [B], una mención a la posibilidad de no considerar algunos de los resultados:

> Lanzar al aire el dado de la figura 11 y observar el resultado. Supongamos que hay sólo seis resultados posibles (prescindimos de la posibilidad de que el dado quede apoyado en una arista o en un vértice). (Texto [B]: 46)

Suponemos que el alumno comprende bien todos estos convenios, pero no solemos comprobarlos en la clase, por falta de tiempo y algunos investigadores han mostrado como los niños tienen ideas subjetivas respecto a los experimentos aleatorios, por ejemplo, pueden pensar que si se concentran pueden conseguir un tipo dado de resultados, esto es, controlar los experimentos aleatorios.

Otro caso en que aparecen convenios implícitos en los libros de texto es cuando se hace una referencia a la palabra sondeo:

> Hacen un sondeo y averiguan que el 40% de los hombres y el 30% de las mujeres estaría dispuesto a ser trasladado. (Texto [A]: 251)

Esta palabra implica la idea de una población subyacente de la que se ha tomado una muestra, de modo que ésta sea representativa de dicha población, es decir, donde se supone que los elementos de la muestra han sido elegidos de alguna forma aleatoria que impide la inclusión de sesgos respecto a los resultados obtenidos. Aunque «sondeo» es un término técnico, su uso se está incorporando progresivamente al lenguaje ordinario, debido al uso creciente de encuestas y *sondeos de opinión*, especialmente por parte de la prensa, por lo que creemos debe resultar familiar a los alumnos a los que van dirigidos los libros.

Al analizar el concepto de aleatoriedad desde un punto de vista teórico, podemos separar dos componentes: los resultados o secuencias de resultados, y el experimento en sí mismo…

En el caso de los *juegos de azar* nos referimos a juegos en los que interviene un elemento aleatorio que nos impide tener la seguridad de ganar siguiendo una estrategia dada y también encontramos vocablos específicos asociados a este tipo de juegos, como *ganar*, *perder*, *jugada*.

Otra expresión característica es la de *secuencia* (de resultados aleatorios) que evoca una serie de resultados obtenidos al repetir en las mismas condiciones un experimento aleatorio un número dado de veces y que potencialmente podemos continuar en las mismas condiciones iniciales:

> Con un programa adecuado se pueden obtener en muy pocos minutos los resultados de una supuesta secuencia de miles de tiradas de dado con la misma eficacia que si, realmente, se efectuaran los lanzamientos. (Texto [A]: 230)

También hemos encontrado para referirse a los resultados de un experimento aleatorio, la palabra sucesión, utilizada en el mismo sentido que la de secuencia:

> En el capítulo anterior has estudiado los fenómenos aleatorios. Cada uno de éstos define un proceso que permite obtener una sucesión de elementos. (Texto [B]: 58)

Vocablos relacionados con los dispositivos generadores de resultados aleatorios

Al analizar el concepto de aleatoriedad desde un punto de vista teórico, podemos separar dos componentes: los resultados o secuencias de resultados, y el experimento en sí mismo o bien del dispositivo experimental que produce los resultados aleatorios. En los libros hemos encontrado gran variedad de vocablos que se refieren a los dispositivos que generan resultados aleatorios. La riqueza de este tipo de vocabulario implica la consideración de ejemplos variados de experimentos aleatorios, que no siempre son isomorfos y que, según Truran (1994*a*), pueden ser considerados como no equivalentes por los niños, incluso en el caso de ser isomorfos.

En primer lugar, nos encontramos con los dispositivos físicos productores de resultados aleatorios, que son suficientemente conocidos por los alumnos a través de sus experiencias con juegos de azar, muy extendidos en nuestra cultura. Entre otros, en los textos se hace referencia a la *baraja (española y francesa), bolsa (con bolas), chincheta, dado, ficha, moneda, ruleta*. Una moneda o un dado pueden ser similares para el alumno, con la diferencia del número de sucesos del espacio muestral implicado, puesto que en ambos casos hay un conjunto discreto de resultados determinados por la posición física del objeto (moneda o dado) al caer después de un lanzamiento. En estos casos, tanto como en la extracción de bolas en urnas, es más fácil visualizar la relación parte-parte en el cálculo de probabilidades, lo que hace que en ocasiones los alumnos no lleguen a usar fracciones sino a comparar los valores absolutos de casos favorables y desfavorables para asignar probabilidades.

Una ruleta visualiza mejor la relación parte-todo y por tanto la regla de Laplace y, además, permite al alumno utilizar consideraciones de tipo geométrico. Tanto este caso como la chincheta permite proponer ejemplos de sucesos no equiprobables. La baraja o la bolsa con bolas permite trabajar situaciones de muestreo sin reemplazamiento que no es fácil ejemplificar con los dispositivos anteriores.

Otras veces se usan contextos de tipo cotidiano para ejemplificar experimentos aleatorios como «sacar una moneda de un bolso que contiene una moneda de 5 pesetas, una moneda de 25 pesetas y una moneda de 50 pesetas» (texto [B]: 54), o problemas relacionados con el tráfico, como en el ejemplo siguiente:

> Los expertos de tráfico, sin conocer las intenciones personales de cada conductor, prevén con mucha precisión qué flujo de coches va a haber en cada carretera a cada hora de la semana. Y lo que es más sorprendente, vaticinan con tino el número de accidentes que se van a producir. Estos no son más que algunos de los muchísimos ejemplos que se pueden dar sobre regularidades en situaciones completamente aleatorias. (Texto [A]: 234)

Incluso se menciona la *función random* de un microordenador, que es un dispositivo determinista que permite obtener resultados que a efectos prácticos pueden ser tomados como aleatorios:

> Los microordenadores tienen una función (RANDOM) con la que se pueden conseguir números aleatorios. Con un programa adecuado se pueden obtener en muy pocos minutos los resultados de una supuesta secuencia de miles de tiradas de un dado. (Texto [A]: 230)

En ocasiones se especifican las condiciones que deben seguir estos generadores para ser considerados como aleatorios, introduciendo, por ejemplo, la idea de *dado correcto* o *moneda indistinguible* que hace referencia implícita a la equiprobabilidad de sus diferentes resultados, aunque explícitamente no se analizan estas propiedades:

> Hemos calculado y representado en los siguientes diagramas, las frecuencias relativas de los resultados de lanzar un dado correcto. (Texto [A]: 229)
>
> El espacio muestral asociado al experimento aleatorio «lanzar al aire dos monedas indistinguibles y observar el resultado» es: $E = \{(c, c), (c, f), (f, c), (f, f)\}$. (Texto [B]: 41)

La equiprobabilidad de los distintos resultados se conceptualiza también mediante el término *simétrico* (*simetría*), que implica que es posible aplicar el principio de indiferencia, debido a las propiedades físicas del objeto. O, por el contrario, se introducen adjetivos como *cargado* para indicar los dispositivos que no cumplen estos requisitos. Estas palabras del lenguaje ordinario adquieren así un significado específico dentro del tema de probabilidad.

> Un dado es una figura muy simétrica, a menos que esté preparado (cargado). Hay las mismas razones para esperar que, al lanzarlo al aire, salga el 5 que el 4. (Texto [A]: 222)

A veces este término es sustituido por irregular, como en el siguiente ejemplo:

> Vamos a jugar con un dado, pero sospechamos que es irregular. (Texto [A]: 252)

…el vocabulario usado con relación a la idea de aleatoriedad sirve para precisar las características atribuidas a este concepto, así como a la idea de experimento aleatorio y para describir diferentes generadores de resultados aleatorios.

En consecuencia, el vocabulario usado con relación a la idea de aleatoriedad sirve para precisar las características atribuidas a este concepto, así como a la idea de experimento aleatorio y para describir diferentes generadores de resultados aleatorios.

Del análisis detallado de la tabla 1 observamos una mayor riqueza del lenguaje empleado para referirse a la aleatoriedad en el texto [A]. Por un lado, es mucho más variada la gama de adjetivos y expresiones usadas para describir este concepto. Por otro aparecen ejemplos de generadores aleatorios, como la chincheta, para cuyos resultados no puede aplicarse la regla de Laplace y que están, por tanto, asociados a una concepción frecuencial de la probabilidad. Aunque en ninguno de los dos libros se introducen tablas de números aleatorios, el texto [A] hace referencia a este concepto y se habla de la función random de los microordenadores. Todo ello apunta a un mayor énfasis en este libro del concepto de aleatoriedad y experimento aleatorio, así como por la fenomenología del azar que en el texto [B].

El lenguaje de la probabilidad

Hemos encontrado, asimismo, una gran variedad en el vocabulario usado para referirse a la idea de probabilidad y su asignación a los sucesos, para graduar las probabilidades de distintos sucesos o para referirse a diferentes tipos de probabilidades. Este vocabulario se presenta en la tabla 2, que también podemos agrupar en diferentes apartados.

Concepto, interpretación, tipos de probabilidad, concepciones

Un primer grupo de vocablos y expresiones se refiere al concepto de *probabilidad* y a su interpretación, que reviste diversos matices que indican la con-

Texto [A]	*Texto [B]*
«A priori»	Aplicación
Asignar (probabilidad)	«A priori»
Apuestas (acertar)	Asignamos (probabilidad)
Cálculo (de la probabilidad)	Cálculo matemático (de la probabilidad)
Casi seguro	Ganar (probabilidad de)
Chances	Grado de confianza
Combinatoria, combinatorio	Igualmente posibles
Confianza	Igual probabilidad
Grado de incertidumbre	Juicio de credibilidad
Grado de inseguridad	Juicio de probabilidad
Equiprobable	Número no negativo
Estimar	Posible (resultado)
Igualmente probables	Probabilidad
Imposible (casi imposible)	Probable
Ley de Laplace	
Medir (la probabilidad)	
Odds	
Permutación	
Probable (muy, muy poco, poco, medianamente)	
Probabilidad	
Probabilidad teórica/experimental	
Probabilístico (conocimiento, estudio)	
Posibilidad (mayor, menor)	
Seguro, asegurarnos	
Simetría	
Suceso raro (muy)	
Triángulo combinatorio	

Tabla 2. Lenguaje utilizado en relación con la probabilidad

cepción de probabilidad subyacente, que puede ser laplaciana, frecuencial, subjetiva o formal.

Por ejemplo, en la acepción subjetiva, se considera la probabilidad como el grado de creencia personal en la realización de un suceso. Como tal grado de creencia, diferentes personas podrían asignar diversas probabilidades al mismo suceso. Hemos encontrado esta acepción de probabilidad cuando se habla de *confianza* personal en la realización de un suceso, como en el siguiente ejemplo:

> Si el hombre del tiempo nos dijera que la probabilidad de que mañana esté despejado es del 80 por ciento, querría significar que, de 100 días con las circunstancias meteorológicas observadas hoy, el día siguiente, en 80 de los 100 casos, se ha presentado despejado. Como ves, no te quita las dudas de lo que vaya a pasar mañana, pero no por eso la información deja de serte útil. Puedes preparar tu excursión con bastante confianza de que no será pasada por agua. (Texto[A]: 222)

Una acepción parecida, aunque no totalmente equivalente es cuando la probabilidad se interpreta como *grado de incertidumbre o inseguridad*. En el ejemplo que sigue no queda claro si este es un grado subjetivo (dependiente de cada persona en particular) u objetivo (asociado al suceso en cuestión): «El grado de incertidumbre es mayor o menor en cada caso» (texto [A]: 227) o grado de inseguridad:

> La probabilidad es la parte de las matemáticas que trata de manejar con números la incertidumbre (grado de inseguridad). (Texto [A]: 223).

En la definición anterior se hace referencia al carácter numérico de la probabilidad. El texto [B], al introducir la definición axiomática de la probabilidad, utiliza los *números* para definirla de la siguiente forma:

> A cualquier suceso $S \in B$ se le puede asociar un número no negativo $p(S)$ que se llama probabilidad de dicho suceso. (Texto [B]: 47)

En esta acepción no se dota de un significado intuitivo a la probabilidad, sino sólo de unas reglas formales que debe cumplir para satisfacer unos axiomas.

La palabra probabilidad se toma en algunos libros como sinónimo de *posibilidad* (*mayor*, *menor*), aunque matemáticamente estos dos términos no son estrictamente equivalentes:

> ¿Cómo se mide la mayor o menor posibilidad de que ocurra algo que no es seguro? (Texto [A]: 227)

Por otro lado, se diferencia entre *probabilidad teórica* o «a priori», que es la que viene dada por el cálculo matemático de probabilidades siguiendo la regla de Laplace y *probabilidad experimental*, que es la obtenida a partir de las frecuencias relativas de resultados experimentales, es decir, donde la probabilidad se presenta en su acepción frecuencial:

> Podrás decir que la probabilidad experimental de que la chincheta quede con la punta hacia arriba es 30/100. (Texto [A]: 241)

En el texto [B] incluso se menciona explícitamente estas diversas interpretaciones del término «probabilidad»:

> Sin embargo, en cada caso nos referimos a un tipo diferente de juicios de «probabilidad». Así, el primero es un ejemplo de lo que podríamos llamar juicio de probabilidades «a priori» y está relacionado con el cálculo matemático de probabilidades; el segundo es un ejemplo de lo que, a falta de mejor expresión, llamaríamos un juicio de credibilidad, y es una medida del grado de confianza que tenemos en la verdad de una cierta afirmación o en el acaecimiento de determinado suceso. (Texto [B]: 39)

Otro término introducido en el texto [A] que guarda relación con el concepto de probabilidad es el de *odds* o *chances*, que no suele ser muy utilizado en los libros de texto, por lo que posiblemente el autor ha preferido no traducir esta palabra al castellano, donde podría usarse «posibilidades» para estos términos:

> En el mundo anglosajón, tal vez por la afición de las apuestas, en lugar de hablar de la probabilidad de un suceso A, hablan muy a menudo de las «odss in favour of A», que expresaremos en castellano, para evitar confusiones con probabilidad, aunque tal vez de un modo no muy ortodoxo, las chances a favor de A. (Texto [A]: 254)

En el texto [B], hemos encontrado un ejercicio donde se propone un juego y se pregunta cuál es la probabilidad que tiene un jugador de ganar:

> A y B juegan a cara y cruz con las siguientes condiciones: si la primera vez sale cara gana A; mas si esto no sucede, se juegan otras dos, y si en las dos sale cara, gana A también. ¿Cuál es la probabilidad que tiene B de ganar? (Texto [B]: 54)

Por último, los textos emplean también el adjetivo *probabilístico* para calificar las situaciones en que se emplea el cálculo de probabilidades:

> Pero incluso el conocimiento físico de los últimos elementos constituyentes de la materia es también probabilístico. (Texto [A]: 224)

La probabilidad como función y asignación de sus valores

En el apartado anterior hemos analizado los términos que aluden a la probabilidad como valor numérico, como medida, con diversas variantes. Donde aparece claramente el concepto de probabilidad como función es en el texto [B], que concluye la definición axiomática de la probabilidad así:

> El conjunto formado por el espacio muestral *E*, el conjunto de sucesos y la aplicación p se llama espacio probabilístico y se representa por (*E*, *B*, *p*). (Texto [B]: 47)

Además de los términos que se refieren al concepto, hemos encontrado un vocabulario bastante variado en lo que se refiere a la forma de asignar o calcular probabilidades. Se usan a veces como sinónimos palabras que podrían tener un significado diferenciado, como asignar (probabilidad), *calcular* o *medir*. Por otro lado este último término tiene un carácter ambiguo que podría llevar al alumno a confusión, debido a la diferencia que toma respecto al significado de «medir» en otros contextos, donde implica una acción física empleando instrumentos de medida: «Asigna tú mismo la probabilidad» (texto [A]: 241), *cálculo* (de la probabilidad), *medir* (la probabilidad):

> Vamos a intentar medir la probabilidad de algunos sucesos al lanzar un dado. (Texto [A]: 243)

El procedimiento empleado para realizar estos cálculos puede basarse en la *combinatoria*, o ser de tipo *combinatorio*, o emplear el *triángulo combinatorio*. Se hace también referencia, como método de cálculo a la *ley de Laplace*:

> Esta fórmula de cálculo, llamada «Ley de Laplace» se suele expresar así. (Texto [A]: 244)

Para poder aplicar esta fórmula se exigen condiciones de *simetría* que se refiere a que no hay más razones a favor de uno u otro resultado, pero que no se suele clarificar:

> En el dado, en la moneda, en la ruleta, ..., la simetría de la situación nos conduce a un cálculo directo de la probabilidad teórica de los sucesos correspondientes. (Texto [A]: 241)

Todos estos vocablos evocan el enfoque clásico de la probabilidad. En otros casos se alude a que los sucesos son «igualmente posibles»:

> Enumerar los casos igualmente posibles del experimento aleatorio que consiste en tirar dos dados a la vez. (Texto [B]: 54)

En caso de emplear una aproximación frecuencial, se habla de *estimar* la probabilidad:

> Al final estimamos que la probabilidad de cada suceso elemental es… (Texto [A]: 252)

Finalmente el término *apuestas* puede evocar una asignación de tipo subjetiva:

> Las primeras consideraciones matemáticas profundas a propósito de los juegos de azar y de las apuestas. (Texto [A]: 223)

Los libros de texto emplean diferentes vocablos para expresar de modo cualitativo una graduación de la probabilidad de los diferentes sucesos.

Graduación de probabilidades

Los libros de texto emplean diferentes vocablos para expresar de modo cualitativo una graduación de la probabilidad de los diferentes sucesos. De este modo, hemos encontrado los siguientes vocablos, que hemos ordenado según la mayor o menor probabilidad implicada: *seguro, asegurarnos, casi seguro, probable (muy, muy poco, poco, medianamente), equiprobable, igualmente probables, suceso raro (muy), imposible (casi imposible)*:

> La probabilidad es el número de resultados favorables *m*, dividido por el número de resultados posibles *n*, supuesto que éstos sean equiprobables. (Texto [A]: 222)

La única mención que hemos encontrado en el texto [B] sobre este aspecto la realiza en la introducción, donde afirma:

> En el lenguaje ordinario se usan palabras como probabilidad, probables, ..., al referirnos a determinados sucesos. Así, por ejemplo, se habla de la probabilidad de obtener dos seises al lanzar sobre una mesa dos dados. De que es probable que determinado país consiga la medalla de oro en la prueba de los 100 metros masculinos, en las próximas Olimpiadas. (Texto [B]: 39)

De nuevo la riqueza de vocabulario es mucho mayor en el texto [A]. En el texto [B] no aparecen gradaciones cualitativas de las probabilidades de los sucesos, sino simplemente valores numéricos de las mismas. Se aisla así el trabajo de probabilidades realizado en el aula del uso del mismo en la vida diaria donde con frecuencias hacemos valoraciones del tipo «muy probable», «bastante posible», etc., para referirnos a la verosimilitud de un cierto suceso aleatorio.

No hay tampoco alusión a modos diferentes de obtener los valores de probabilidad, diferentes del «cálculo matemático», puesto que las concepciones subjetivas y frecuencial de la probabilidad no se presentan en el texto. Por consiguiente, no hay referencia a la «estimación» o «asignación subjetiva» de probabilidades. Tampoco se presenta la distinción entre «probabilidades teóricas» y «experimentales», confirmando la falta de conexión entre este tema y el estudio de la estadística. Finalmente, no hemos encontrado tampoco conexión con el tema de combinatoria, puesto que, a pesar de que la mayor parte de los problemas se deben resolver usando conceptos combinatorios, no hay referencias explícitas ni vocabulario o notación que indique esta conexión.

Implicaciones didácticas

En este estudio hemos intentado destacar la importancia del libro de texto como recurso didáctico, que como hemos visto es uno de los más utilizados por el profesorado, así como las posibles limitaciones que pueden existir. Ha quedado igualmente de manifiesto la relevancia que tiene el lenguaje en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, y especialmente el lenguaje utilizado en las nociones de experimento aleatorio y de probabilidad, conceptos muy complejos y que nos ha permitido mostrar la gran riqueza y diversidad de términos existentes en los dos textos analizados. Aunque nuestro análisis se ha llevado a cabo en los libros de bachillerato, anterior al actual plan de estudios, sus resultados y metodología son aplicables al análisis de los libros vigentes en el marco de la LOGSE. También nos ha mostrado la variabilidad de expresiones que con relación a la aleatoriedad y probabilidad pueden aparecer en dos libros que han sido escritos para el mismo nivel de enseñanza.

Estos dos puntos sirven de nuevo para mostrar el importante papel de los escritores de libros de texto que marcan un nuevo nivel en la transposición didáctica del tema, al fijar y concretar lo establecido en los diseños curriculares, así como del profesor que, finalmente, en el aula decide no sólo el libro de texto que recomienda a sus alumnos sino las partes de éste a usar en la enseñanza y los recursos con que debe ser complementado. Esperamos con este trabajo contribuir a la mejora de la enseñanza de las matemáticas, en particular de la aleatoriedad y la probabilidad, en los niveles de la Educación Secundaria, así como facilitar la labor del profesorado en el aula.

Juan Jesús Ortiz
Facultad de Educación
y Humanidades de Melilla.
Universidad de Granada.
Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
«Thales»
Carmen Batanero
Facultad de Ciencias
de la Educación de Granada.
Universidad de Granada.
Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
«Thales»
Luis Serrano
Facultad de Educación y
Humanidades de Melilla.
Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
«Thales»

Referencias bibliográficas

CHEVALLARD, Y. (1985): *La transposition didactique*, La Pensée sauvage, Grénoble.

COCKCROFT, W. H. (1985): *Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid.

DICKSON, L., M. BROWN y O. GIBSON (1991): *El aprendizaje de las matemáticas*, Labor, Madrid.

HAWKINS, A., F. JOLLIFFE y L. GLICKMAN (1992): *Teaching statistical concepts*, Longman, London.

ORTIZ, J. J. (1999): *Significado de conceptos probabilísticos en los textos de Bachillerato*, Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

ORTON, A. (1990): *Didáctica de las matemáticas*, MEC y Morata, Madrid.

PIMM, D. (1987): *Speaking Mathematically*, Routledge and Kegan Paul, New York.

RESCHER, N. (1995): *Luck. The brilliant ransomness of everyday life*, Harper Collins, Canada.

RICO, L. (1990): «Diseño curricular en Educación Matemática: Una perspectiva cultural», en S. LLINARES y V. SÁNCHEZ (eds): *Teoría y Práctica en Educación Matemática*, Alfar, Sevilla, 17-62.

ROTHERY, A. (1980): *Children reading mathematics*, College of Higher Education, Worcester.

TRURAN, K. (1994 a): «Children's understanding of random generators. Short oral communication», *Proceeding of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, University of Lisbon.

Libros de texto analizados

[A]: GUZMÁN, M., J. COLERA y A. SALVADOR (1988): *Matemáticas, Bachillerato 1.°*, Anaya, Madrid.

[B]: VALDÉS, J. y S. MARSINYACH (1975): *Matemáticas, Bachillerato 1.°*, Bruño, Madrid.

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Comisión Ejecutiva

Presidenta: María Jesús Luelmo
Secretario General: José Luis Álvarez García
Vicepresidente: Serapio García
Tesorera: Claudia Lázaro

Secretariados:
Prensa: Antonio Pérez Sanz
Revista SUMA: Emilio Palacián/Julio Sancho
Relaciones internacionales: Luis Balbuena/Florencio Villarroya
Actividades: Xavier Vilella Miró
Publicaciones: Ricardo Luengo González

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidente: Marta Berini López-Lara
Apartado de Correos 1306. 43200-REUS (Tarragona)

Organización Española para la Coeducación Matemática «Ada Byron»
Presidenta: Xaro Nomdedeu Moreno
Almagro, 28. 28010-MADRID

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»
Presidente: Salvador Guerrero Hidalgo
Apartado 1160. 41080-SEVILLA

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo»
Presidente: Florencio Villarroya Bullido
ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12.
50009-ZARAGOZA

Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»
Presidente: José Joaquín Arrieta Gallastegui
Apartado de Correos 830. 33400- AVILÉS (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»
Presidenta: Dolores de la Coba
Apartado de Correos 329. 38201-LA LAGUNA (Tenerife)

Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas
Presidente: Santiago Pascual
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Villalar, s/n.
09006-BURGOS

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García
Avda. España, 14, 5ª planta. 02006-ALBACETE

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidenta: Remedios Peña Quintana
IES Francisco de Goya. C./ Caravaca, s/n.
30500-MOLINA DE SEGURA (Murcia)

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Francisco Manuel Rodríguez Mayo
Apartado de Correos 103.
SANTIAGO DE COMPOSTELA

Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»
Presidente: Ricardo Luengo González
Apartado 590. 06080-BADAJOZ

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»
Presidenta: María Jesús Luelmo
C/ Limonero, 28
28020-MADRID

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidente: Ángela Núñez
CPR de Santander. C./ Peña Herbosa, 29.
39003-SANTANDER

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidenta: Luis Serrano Romero
Facultad de Educación y HUmanidades
Ctra. Alfonso XIII, s/n. 52005-MELILLA

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea Tornamira
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.
Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra.
31006-PAMPLONA

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Despacho 305. Facultad de Educación.
Universidad Complutense. 28040-MADRID

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas
Presidente: Javier Galarreta Espinosa
C.P.R. Avda. de la Paz, 9. 26004-LOGROÑO

Sociedade Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)
Presidente:Manuel Díaz Regueiro
Apartado 4188. 15080-A CORUÑA

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departament de Didàctica de la Matemàtica.
Apartado 22045. 46071-VALENCIA

SUMA 38
noviembre 2001, pp. 15-22

2001: el año Cournot

Gabriel Ruiz Garzón

ARTÍCULOS

Con este artículo se quiere conmemorar en este año 2001, el doscientos aniversario del nacimiento del insigne matemático Antoine Agustin Cournot. Analizaremos, utilizando la Teoría de Juegos, el trasfondo matemático existente en la estructura de los oligopolios, tran presentes hoy en los medios de comunicación como en tiempos de Cournot.

DURANTE LA NOCHE del día 23 de noviembre de 1654, aproximadamente entre las diez y media y las doce y media de la noche, experimentó Pascal una especie de éxtasis religioso que lo impulsó a abandonar la matemática para dedicarse a la teología. Afortunadamente, una noche de 1658 en que un dolor de muelas u otra dolencia le impedía dormir, decidió dedicarse al estudio de la cicloide. Milagrosamente el dolor cesó, lo que interpretó Pascal como un signo de que el estudio de la Matemática agradaba a Dios.

Cito esta anécdota porque este artículo también es fruto del dolor.

Dolor que siente todo ciudadano cuando todas las semanas llena el depósito de la gasolina en «cualquier» estación de servicio: ¡Qué más da, vaya a la que vaya en todas vale lo mismo el litro de gasolina! Enfado que sentimos cuando decidimos acudir a una gran superficie comercial: ¿la de capital español o la de capital francés? Malestar que puede ir en aumento cuando pagamos el recibo de la luz y comprobamos la imposibilidad de escoger otra empresa suministradora, o pagamos el recibo del gas, o acudimos a una sucursal bancaria, etc. A estas alturas les aseguro que no padezco un dolor de muelas, pero sí algo parecido a ello.

En gran medida, los sectores que he citado: energía, alimentación, bancario, etc. son *oligopolios*. Etimológicamente, la palabra oligopolio significa «pocos vendedores». El oligopolio es un mercado en el que existen pocas empresas vendedoras y además la actividad de cada empresa afecta a las demás. El oligopolio es una situación intermedia entre el *monopolio*, cuando sólo hay un vendedor, y la *competencia perfecta*, en la que el número de vendedores es lo suficientemente grande, lo que hace que el precio lo fije el mercado cualquiera que sea el volumen de producción de las empresas. Entre estos dos casos extremos se encuentran los oligopolios, en los que las empresas tienen cierto margen para fijar precios o cantidades de producción.

En aras a la globalización y al objeto de competir en ese mercado global, en España se han producido y se están produciendo, multitud de fusiones entre empresas, cuyo resultado práctico está siendo la conversión de una serie de sectores en oligopolios.

Alumnos y profesores de Matemáticas, pero consumidores todos, podemos utilizar como excusa los recortes de prensa que sobre el tema aparecen en los medios de comunicación (figura 1), para adentrarnos en los conceptos matemáticos que explican los comportamientos de los oligopolios, y en una rama de la Estadística, la Teoría de Juegos, con importantes aplicaciones a las ciencias políticas, a la Economía o a la Biología.

Nuestras clases de Matemáticas pueden convertirse en un foro donde se analicen temas de la actualidad que nos preocupan a la mayoría, y todo esto, sin un complicado aparataje matemático o económico. Debemos traer la calle a nuestras aulas.

Uno de los matemáticos que han contribuido a analizar la estructura de los oligopolios ha sido Antoine Augustin Cournot, del que este año 2001, se cumplirán doscientos años de su nacimiento.

Se nos ha ido el año 2000: *Año Mundial de las Matemáticas*. A lo largo del cual, desde nuestras aulas, sociedades de matemáticas, etc. hemos intentando acercar ésta nuestra ciencia a la calle y que se conozca nuestra labor. En la medida de lo posible, en el 2001, debemos continuar con dicho afán. Y nada mejor como recurso que, un tema de actualidad, los oligopolios, y un histórico matemático francés, Cournot, para continuar en nuestro empeño.

EL PAÍS, domingo 31 de diciembre de 2000

Las contradicciones de la fusión eléctrica

El informe que ha elaborado la Comisión Nacional de la Energía (CNE) sobre la fusión de Iberdrola y Endesa desvela las contradicciones y las dudas que existen sobre el hecho de que esta operación aumente la competencia en el sector eléctrico español.

El informe tiene dos votos particulares que se oponen a la fusión, y uno de ellos, el del consejero Ruscalleda, refleja con claridad cuál es el problema de fondo: cualquier cuota de mercado por encima del 30% implicaría una posición de dominio y, por tanto, no debería autorizarse, y como cualquier cuota de mercado por debajo del 40% eliminaría la rentabilidad de la operación, la unión debería rechazarse.

Este informe es el preludio del que debe elaborar, de forma preceptiva, el Tribunal de Defensa de la Competencia (TDC) sobre la operación. Página 11

Figura 1

Nuestras clases de Matemáticas pueden convertirse en un foro donde se analicen temas de la actualidad que nos preocupan a la mayoría, y todo esto, sin un complicado aparataje matemático o económico.

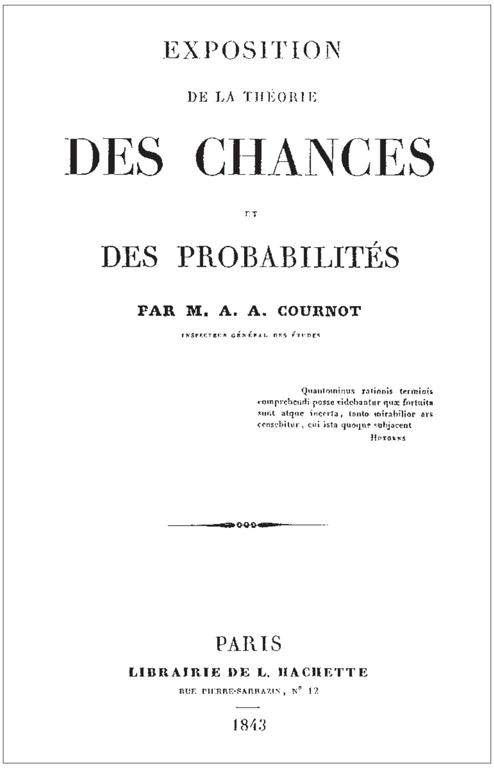
Hace 200 años

El 28 de agosto de 1801 en la ciudad francesa de Gray, Alta Sajonia, nace Antoine Augustin Cournot, matemático, filósofo, educador y el primer economista que incorporó los instrumentos matemáticos al análisis económico. En el año 1823 se licenció en Matemáticas, siendo alumno de Lacroix en la Sorbona y en el año 1827 consiguió la licenciatura en Derecho.

Toda una serie de artículos y trabajos matemáticos culminan en el año 1829 con su doctorado y atraen la atención de Poisson, quien le propone para la cátedra de Análisis de Lyon (1834), gracias a lo cual acaba también con un período de relativa pobreza en el que fue secretario de uno de los generales de Napoleón, el mariscal Gouvion Saint-Cyr. En 1841, plasmará en el manual titulado *Traité Elémentaire de la Théorie des Fonctions du Calcul Infinitésimal*, sus clases de Lyon. El Análisis Diferencial e Integral son tratados con exquisita elegancia en dos tomos dedicados a su mentor, Poisson.

Entre 1838 y 1854 fue funcionario público del Ministerio francés de Educación Nacional, concretamente Inspector General de Educación, puesto en el que sucedió a Ampère, al que todos los estudiantes de secundaria que estudien electricidad conocen. También fue rector en Grenoble (1835-1838) y en Dijon (1854-1862). Durante su vida fue más reconocido por su faceta de su actividad pública y docente, que como investigador en el mundo de la Estadística y de la Economía.

Fue un competente matemático puro. Importante fue su distinción entre probabilidad objetiva y subjetiva. En la *Exposition de la Théorie des Chances et des Probabilités* (figura 2), formula claramente la definición frecuencialista de probabilidad y propone trabajar con


EXPOSITION

DE LA THÉORIE

DES CHANCES

ET

DES PROBABILITÉS

PAR M. A. A. COURNOT

INSPECTEUR GÉNÉRAL DES ÉTUDES

Quantominus rationis terminis comprehendi posse videbantur quæ fortuita sunt atque incerta, tanto mirabilior ars censebitur, cui ista quoque subjacent

HUYGENS

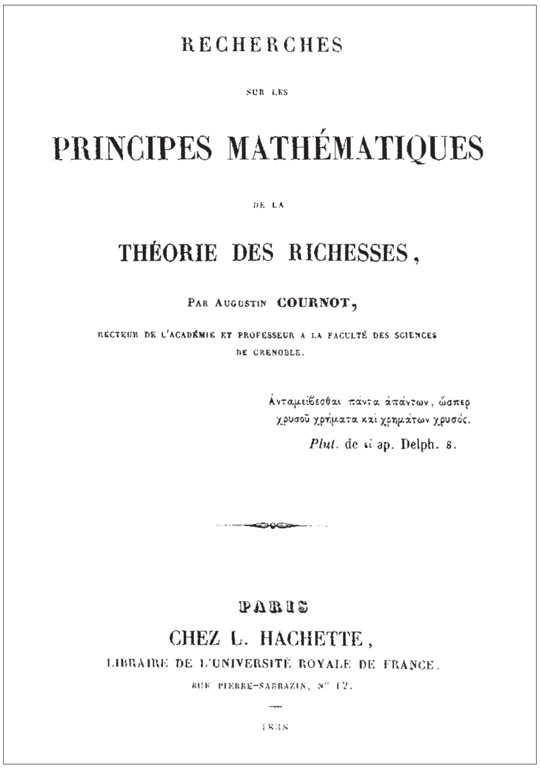
PARIS

LIBRAIRIE DE L. HACHETTE

RUE PIERRE-SARRAZIN, N° 12

1843

Figura 2


RECHERCHES

SUR LES

PRINCIPES MATHÉMATIQUES

DE LA

THÉORIE DES RICHESSES,

PAR AUGUSTIN COURNOT,

RECTEUR DE L'ACADÉMIE ET PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE GRENOBLE.

Ἀνταμείβεσθαι πάντα ἁπάντων, ὥσπερ χρυσοῦ χρήματα καὶ χρημάτων χρυσός.

Plut. de ει ap. Delph. 8.

PARIS

CHEZ L. HACHETTE,

LIBRAIRE DE L'UNIVERSITÉ ROYALE DE FRANCE,

RUE PIERRE-SARRAZIN, N° 12.

1838

Figura 3

intervalos de confianza como un método de estimación. Al igual que Condorcet, Laplace o Poisson, Cournot estaba también interesado en la aplicación de la probabilidad a los procesos judiciales y en este libro le dedica un par de capítulos. Concretamente, estaba interesado en calcular la probabilidad de dar un veredicto correcto y en la influencia que sobre el mismo tenía el número de personas que forma un tribunal. También hay un capítulo donde confecciona tablas de mortalidad, con objeto de que puedan servir para calcular primas de seguros. En resumen, estamos ante una obra maestra, que sitúa a su autor al nivel de los citados Poisson, Condorcet, etc.

Como economista, Cournot fue fundador de la Economía Matemática. En 1838, Cournot publicó una obra titulada *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* (figura 3) (*Investigación sobre los principios matemáticos de la teoría de las riquezas*). Se trata de un estudio completo sobre el monopolio y el equilibrio del mercado. En él aparece la definición de la elasticidad de la demanda.

Cournot estaba también interesado en la aplicación de la probabilidad a los procesos judiciales

La fórmula de la *elasticidad de la demanda* se define como la relación entre porcentajes infinitesimales de la cantidad demandada y el precio *dq/dp*, por una parte, y, por otra, como relación entre la cantidad demandada media y el precio mismo *q/p*, o sea, que es:

$$E = \frac{dq}{dp}\,\frac{p}{q}$$

El primer factor

$$\frac{dq}{dp} = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta p}$$

no deja de ser otra cosa que una derivada, y mide la pendiente de la *curva de demanda*, curva que relaciona precios y cantidades. Lo que expresado económicamente nos da una información muy valiosa pues, nos indica la sensibilidad de la demanda ante una variación en los precios. Existen productos como los farmacéuticos o las gasolinas cuya demanda es *inelástica* ($E < 1$), es decir, un aumento en el precio no conlleva un descenso del consumo, o por lo menos no muy acusado. Al revés ocurrirá, si al vendedor de naranjas de un mercado, en donde hay muchos competidores, se le ocurre subir el precio de las naranjas. El señor García, diligente amo de casa, puede optar por no comprarle, es decir, estaríamos ante una curva de demanda *elástica* ($E > 1$).

Cournot fue un lector empedernido, durante toda su vida arrastró problemas en la vista. Casi ciego, falleció el 31 de marzo de 1877. Como observamos, su vida y obra, merecen la efeméride.

Una estructura de mercado: el duopolio

Dentro del oligopolio, el *duopolio* es una estructura de mercado caracterizada por la existencia de dos únicas empresas vendedoras. La característica esencial de la teoría del duopolio reside en que «ninguno de los vendedores puede ignorar las reacciones del otro», un cambio en el precio o en el nivel de producción de uno afectará al del otro y las reacciones del segundo, a su vez, influirán en el primero. La suerte de las dos empresas no es independiente; ninguno de los dos puede considerar como dada la política que seguirá el otro, ya que en parte está determinada por su propia política.

Hay diversos modelos que explican la determinación del precio y la producción de equilibrio en el duopolio.

El modelo de Cournot

Seguidamente expondremos el modelo de duopolio que expuso Cournot. En la medida de lo posible utilizaremos ejemplos numéricos para facilitar la comprensión. Un profesor, de cuyo nombre no quiero acordarme, partidario de largas y tediosas demostraciones que poco aportaban, manifestaba que el poner ejemplos era un acto de cobardía. Bueno, desde ya, reconozco mi cobardía.

Partimos de un supuesto de una empresa que, en principio, es ella la única que se encuentra en el mercado. Supondremos además la inexistencia de costes de producción, (esto no es tan irreal, si se supone que la mercancía es agua mineral y los compradores llevan sus propios envases, siendo por tanto el coste de producción para el empresario nulo). Con esta hipótesis igualaremos ingresos y beneficios. Esto no supone pérdida de generalidad, con costes de producción los resultados serían similares.

El número de unidades que una empresa puede vender a cada precio pueden representarse mediante una curva de demanda. Nosotros supondremos curvas de demanda rectilíneas, con lo que el nivel de ventas que maximiza las ganancias para cada empresa, operando en solitario, ocurre en su punto medio. En este ejemplo, en el punto *E*(600, 6), donde la empresa primera vende 600 unidades al precio de 6. Como se observa, queda todavía un margen de 600 por vender de la producción máxima vendible del bien, cifrada en 1200 unidades (figura 4).

En este momento, llega al mercado otra empresa rival, que supone que la empresa inicial va a *mantener constante su nivel de producción* y, por tanto, se acomoda a esta realidad, explotando lo que le queda del mercado. La curva de demanda de D_2 esta segunda empresa será, pues, la de la primera empresa D_1 menos 600 unidades.

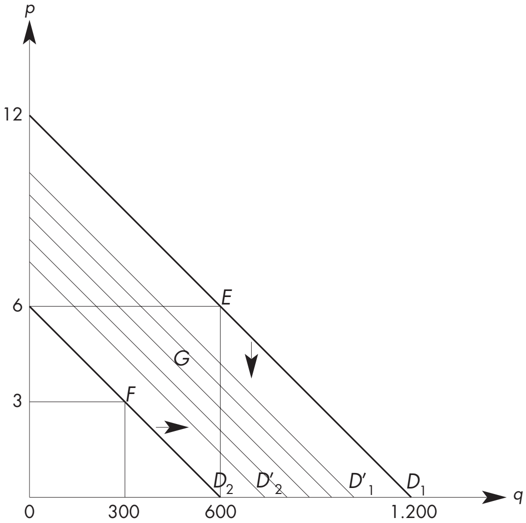


Figura 4

Partimos de un supuesto de una empresa que, en principio, es ella la única que se encuentra en el mercado. Supondremos además a inexistencia de costes de producción…

Esta segunda empresa maximiza sus ganancias sobre D_2, en el punto *F*(300, 3), es decir, vendiendo 300 unidades al precio de 3.

La empresa inicial reacciona y supone que la producción de la segunda en llegar *permanecerá constante* en esas 300 unidades. La nueva curva de demanda para la primera empresa, D'_1, será la inicial menos 300 unidades y sobre ella maximizará sus ganancias.

De igual manera, la segunda empresa reacciona vendiendo su producción sobre lo que le queda de la demanda, moviéndose hacia la recta D'_2.

El supuesto de comportamiento básico que hace Cournot es que cada oferente, al tratar de maximizar su beneficio, o lo que es lo mismo, los ingresos totales, piensa que el otro oferente va a mantener constante su producción. Ante este supuesto, habrá una serie de movimientos y contramovimientos convergentes al punto *G*, llamado *punto de equilibrio de Cournot* o *punto de equilibrio de Nash*.

Cournot y, más tarde, el matemático norteamericano Nash, dirán que un duopolio se encuentra en equilibrio, si la producción óptima de cada empresa es aquella determinada a partir de una previsión de la producción de la empresa rival que asimismo es óptima. Si se mantienen los supuestos sobre las conductas de las empresas establecidos por Cournot, es evidente que en una situación de este tipo ninguna de las empresas deseará modificar su producción.

A título de anécdota, recordemos que a John Nash se le detectó, en sus primeros años en la universidad de Princeton, una esquizofrenia paranoide. Este hecho le impidió hasta 1994 recibir el premio Nobel de Economía, cuando contaba con 66 años y estaba totalmente recuperado.

¿Pero qué coordenadas tiene ese buscado punto G, punto de equilibrio de Cournot o de Nash, en el caso del duopolio? Hagamos el desarrollo de una manera general y después lo particularizaremos a este ejemplo concreto.

Supongamos que la función de demanda lineal es

$$p = A - aq \qquad [1]$$

Donde p y q son el precio y la cantidad demandada, respectivamente, y A y $a > 0$ son constantes.

Supongamos que q_1 y q_2 son las cantidades vendidas por las empresas 1 y 2, respectivamente. Por definición

$$q = q_1 + q_2 \qquad [2]$$

Sustituyendo en [1], la función de demanda queda como

$$p = A - a(q_1 + q_2) \qquad [3]$$

El ingreso total de la primera empresa I_1 es igual al precio p multiplicado por q_1, esto es,

$$I_1 = pq_1 = Aq_1 - aq_1^2 - aq_1q_2 \qquad [4]$$

Del mismo modo, el ingreso de la segunda empresa I_2 es igual a

$$I_2 = pq_2 = Aq_2 - aq_2^2 - aq_1q_2 \qquad [5]$$

Como hemos supuesto, al no existir costes de producción, esos ingresos coinciden con los respectivos beneficios de las empresas. Conseguiremos nuestro objetivo de encontrar las cantidades de

…un duopolio se encuentra en equilibrio, si la producción óptima de cada empresa es aquella determinada a partir de una previsión de la producción de la empresa rival que asimismo es óptima.

equilibrio donde se produce el máximo beneficio de las dos empresas, resolviendo el sistema de ecuaciones simultáneas siguiente

$$\frac{\partial I_1}{\partial q_1} = A - 2aq_1 - aq_2 = 0 \qquad [6]$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial q_2} = A - 2aq_2 - aq_1 = 0 \qquad [7]$$

nos dan las cantidades de equilibrio

$$q_1 = q_2 = \frac{A}{3a} \qquad [8]$$

Podemos comprobar que efectivamente esos valores producen un beneficio máximo ya que se verifica que

$$\frac{\partial^2 I_1}{\partial^2 q_1^2} = -2a < 0 \qquad [9]$$

$$\frac{\partial^2 I_2}{\partial^2 q_2^2} = -2a < 0 \qquad [10]$$

El precio de equilibrio se consigue sustituyendo las cantidades de equilibrio [8] en [3]

$$p = \frac{A}{3} \qquad [11]$$

En nuestro ejemplo particular, como $A = 12$ y, $A/a = 1200$, las cantidades y precio de equilibrio son $q_1 = q_2 = 400$ y $p^* = 4$.

Lo que nos da un punto de equilibrio de Nash, $G = (400,4)$, con unos beneficios de 1600.

Este modelo permite ser generalizado para cualquier número de empresas vendedoras k:

a) Si $k = 1$, estaríamos ante un monopolio,

$$q = \frac{A}{2a}, \quad p = \frac{A}{2}$$

b) Si $k = 2$, estaríamos ante un duopolio, cuyas soluciones hemos visto que son

$$q_1 = q_2 = \frac{A}{3a}, \quad p = \frac{A}{3}$$

c) Si $k = 3$, de igual manera obtendríamos un sistema de tres ecuaciones, que resuelto nos daría

$$q_1 = q_2 = q_3 = \frac{A}{4a}, \quad p = \frac{A}{4}$$

d) Si $k = n$, obtendríamos por inducción que

$$q_k = \frac{A}{(n+1)a}, \quad p = \frac{A}{(n+1)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

e) Si $k \to \infty$, estaríamos ante el caso de una competencia perfecta y $p \to 0$.

El modelo de Edgeworth

Casi setenta años de la publicación del trabajo de Cournot, F. Y. Edgeworth aceptó la sugerencia que le había hecho el también matemático Joseph Bertrand (1822-1900) a Cournot. Si se desarrolla un modelo de duopolio en que en vez de mantener ambas empresas las cantidades producidas, se mantienen los precios de las mismas, los resultados del modelo no coincidirían con los de Cournot.

El modelo de Edgeworth se basa en los siguientes supuestos, más restrictivos que los de Cournot:

1. Hay dos empresas que producen un bien homogéneo con un costo de producción igual a cero.
2. Cada empresa tiene un límite en su capacidad productiva.
3. En su camino de maximización de beneficios, cada empresa cree que el precio de la otra permanecerá constante.

El resultado final será una oscilación continua del precio del artículo, entre el precio del monopolio y el máximo precio de producción de cada empresa (figura 5).

Veámoslo con los datos de nuestro ejemplo, siendo 500 la capacidad máxima de producción de cada empresa, ocurrirá el siguiente proceso:

1. La primera empresa maximiza sus beneficios vendiendo 300 unidades al precio de 3.
2. Entra la segunda empresa y piensa que si la primera *mantiene constante el precio* en 3, fijando ella un precio ligeramente inferior a 3 puede vender su producción máxima de 500, quedándose con la mayor parte del mercado de la primera.
3. A continuación, la empresa número uno reaccionará y suponiendo que la segunda va a *mantener constante su precio*, la primera podrá vender su producción total a un precio ligeramente inferior al de la segunda.
4. Este proceso continuará hasta que cada empresa venda su producción máxima, 500, al precio de 1.

Pero este resultado no es estable, ya que uno de ellos puede darse cuenta, que *manteniendo el otro el precio* en 1, él puede vender 300 unidades a un precio de 3, aumentando de esta forma sus beneficios. Ante esta situación la otra empresa reaccionará y el proceso continúa indefinidamente. Aunque el modelo de Edgeworth da lugar a una situación inestable, la fluctuación de precios tendrá un límite superior e inferior. Esta situación de «guerra de precios» es similar a la que se produce en la competencia perfecta.

Aunque el modelo de Edgeworth da lugar a una situación inestable, a fluctuación de precios tendrá un límite superior e inferior. Esta situación de «guerra de precios» es similar a la que se produce en la competencia perfecta.

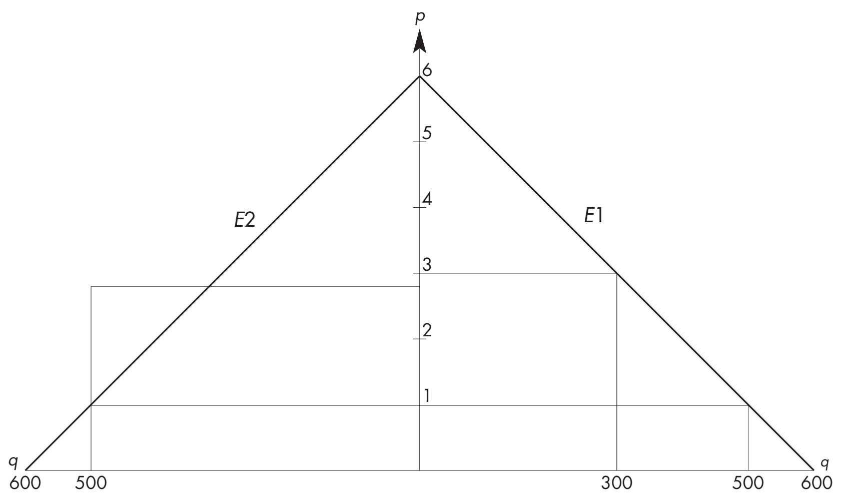


Figura 5

Por cierto que el estadístico y economista británico, Francis Ysidro Edgeworth, era hijo de madre española, (como se vislumbra en el segundo nombre que honra al patrono de Madrid). Nació el 8 de febrero de 1845, en el condado de Londford, en Irlanda.

En Estadística destacan sus contribuciones a los números índices, la teoría de la estimación, bondad de ajuste y teoría de la probabilidad. Se mostraba firmemente convencido de la prevalencia de la ley normal en la naturaleza, aunque hoy sepamos que la ley normal no es tan «normal» como él se pensaba. En 1892, publica un trabajo donde define el concepto de *correlación múltiple*.

En Economía, halló entre otros descubrimientos, las *curvas de indiferencia*, en las cuales aplicó los números índices. Las curvas de indiferencia se encuentran formadas por un conjunto infinito de puntos que reflejan combinaciones de bienes, los cuales poseen un mismo nivel de utilidad o de satisfacción para el consumidor.

También utilizó con eficacia el cálculo diferencial en Economía. Edgeworth fue profesor de Lógica y de Economía Política (lo que hoy sería Estadística), en el King's College, en la Universidad de Londres, y de Oxford, los años 1891-1921. También fue presidente de la Royal Statistical Society de 1912 a 1914.

Se cuenta que Edgeworth era una persona muy tímida y extremadamente roñosa, por no tener, no tenía ni libros, prefería conseguirlos en las bibliotecas públicas. Keynes refería que, unos folios y una goma, eran los dos únicos objetos personales que tenía.

Murió en Londres, el 13 de febrero de 1926.

Si cooperamos ganamos más

Tanto el modelo de Cournot como el de Edgeworth no admiten la interdependencia entre los duopolistas. El modelo del economista norteamericano E. D. Chamberlin es como el de Cournot pero en el que se admite la interdependencia entre las empresas (algo que desgraciadamente se asemeja más a la realidad), fijan así precios idénticos y venden cantidades idénticas, maximizando de esta forma su ganancia conjunta. El acuerdo puede hacerse sin que haya comunicación formal entre las empresas. La experiencia proporciona información con la que llegar a un acuerdo tácito. Eso sí, el resultado del acuerdo es una solución estable.

En nuestro ejemplo del modelo de Cournot (figura 4), una vez que la primera empresa maximiza sus beneficios vendiendo 600 unidades a 6 pesetas, obteniendo $600 \times 6 = 3600$ de beneficio y la segunda empresa vende 300 unidades a 3 pesetas, copando la demanda que la primitiva empresa le dejó, las empresas se dan cuenta de que en lugar de embarcarse en una carrera fratricida de precios y producción, les conviene *repartirse el pastel* de esas ganancias de 3600. Cada empresa producirá la mitad de esas 600 unidades, es decir, 300 unidades, a precio de monopolio 6, obteniendo un beneficio de $300 \times 6 = 1800$, mayor que los 1600 obtenidos en el modelo de Cournot anterior, siendo ese punto $G = (300, 6)$, el punto de equilibrio de Nash buscado. En resumen, el modelo de Chamberlin supone que los duopolistas aprenden con la experiencia, es decir, concluyen que será mejor a sus intereses si tratan de maximizar sus beneficios conjuntos.

La solución del modelo de Chamberlin es idéntica a la de monopolio ($k = 1$) de Cournot, pero donde las dos empresas deciden repartirse el beneficio del monopolio, teniendo la misma cuota de mercado a precio de monopolio, es decir,

$$q_1 = q_2 = \frac{A}{4a}, \quad p = \frac{A}{2}$$

...la Teoría de Juegos proporciona el marco adecuado para tratar rigurosamente este tipo de situaciones, aportando un conjunto de técnicas cuya finalidad última no es otra que obtener para el juego planteado una posible solución.

Todo es un juego

Ya dijimos que la característica fundamental del duopolio era la interdependencia estratégica entre las empresas, de forma que en la toma de decisiones, cada empresa consideraba explícitamente cierta conjetura sobre el comportamiento de las empresas rivales. Veremos, en esta sección, que la Teoría de Juegos proporciona el marco adecuado para tratar rigurosamente este tipo de situaciones, aportando un conjunto de técnicas cuya finalidad última no es otra que obtener para el juego planteado una posible solución.

Nos centraremos en dos empresas que han de elegir entre un conjunto de estrategias finito. En concreto supongamos que la interdependencia se establece entre CEPSA y REPSOL y las estrategias son dos niveles de precios: 150 pts. o 140 pts. La interdependencia entre las empresas se manifiesta en que el beneficio que obtiene una empresa seleccionando una determinada estrategia depende de cual sea la estrategia elegida por la empresa rival. La representación conjunta de todas las posibles combinaciones de estrategias, así como los resultados que de ellas se derivan para ambas empresas se denomina matriz de pagos.

Un ejemplo de matriz de pagos se presenta en la siguiente tabla:

		REPSOL	
		150 pts.	140 pts.
CEPSA	150 pts.	(60, 40)	(20, 20)
	140 pts.	(20, 30)	(10, 10)

Las cifras que aparecen en cada una de las casillas representan, para cada combinación de estrategias, los resultados de la empresa CEPSA y REPSOL respectivamente.

Nuestro objetivo sería encontrar aquella combinación de estrategias que constituye una solución del juego, en el sentido de que las decisiones de ambas empresas sean compatibles y, por tanto, no desean modificarlas. Si obviamente la empresa elige la estrategia que le reporte mayor beneficio, dada la matriz de pagos anterior, la empresa CEPSA elegirá el nivel de precios 150 cualquiera que sea el nivel de precios elegido por REPSOL, ya que los posibles resultados, 60 y 20, serían mayores que los del nivel de precios a 140 pts., 20 y 10; por otra parte, la empresa REPSOL también elegirá como nivel de precios 150 pts. ya que los resultados, 40 y 30, superan a los del otro, 20 y 10.

Por tanto, las estrategias 150 pts. para CEPSA y 150 pts. para REPSOL, son *estrategias dominantes*, ya que serán seleccionadas por las respectivas empresas independientemente de cual sea la estrategia de la empresa rival. Así pues, la solución a este juego vendrá dada por la combinación de estrategias dominantes (150, 150).

Algunas veces no es posible encontrar una solución del juego que satisfaga el criterio de estrategias dominantes, tal como ocurre en la siguiente matriz de pagos:

		REPSOL	
		150 pts.	140 pts.
CEPSA	150 pts.	(60, 40)	(20, 20)
	140 pts.	(20, 30)	(40, 50)

En este caso, la combinación de estrategias, o el punto (150, 150), es el punto de equilibrio de Nash, definido como la combinación de estrategias tal que la estrategia de cada empresa es la mejor que puede elegir, dada la que elige la otra. En la matriz anterior, la estrategia 150 es la mejor que puede seleccionar CEPSA, cuando REPSOL prevé que elegirá también como nivel de precios 150 pts. Al mismo tiempo, dicha estrategia también es óptima para REPSOL, si espera que CEPSA elija 150 pts. como nivel de precios. Así pues, el punto (150, 150) es un punto de equilibrio de Nash, ya que si se alcanza, ninguna empresa querrá modificar su comportamiento. Cuando una empresa tiene una estrategia dominante, el resultado es un punto de equilibrio de Nash. Pero al revés puede no darse, como acabamos de ver.

Como hemos visto ya, si ambas empresas deciden establecer un acuerdo de cooperación, un punto de equilibrio de Nash puede no constituir una solución eficiente del juego.

En la siguiente matriz de pagos podemos ver que el punto (150, 150) es un punto de equilibrio de Nash y, sin embargo, si ambos llegaran al acuerdo de cooperar con objeto de alcanzar la combinación (140, 140), los beneficios de ambas empresas mejorarían.

		REPSOL	
		150 pts.	140 pts.
CEPSA	150 ptas.	(50, 40)	(70, 10)
	140 pts.	(10, 70)	(60, 50)

Se trataría de un ejemplo de una situación intrínsecamente inestable, ya que cualquiera de las dos empresas tendría la tentación de romper el acuerdo, CEPSA eligiendo el nivel de producción 150 y REPSOL lo mismo. Esta situación inestable se corresponde con lo que se denomina un *cártel*, es decir, un conjunto de empresas que optan por hacer explícito un acuerdo con objeto de actuar conjuntamente como un monopolio frente a las demandas del mercado.

Obviamente, las situaciones reales de los oligopolios son más complicadas que las que aquí hemos mostrado. No olvidemos que lo que aquí hemos expuesto son modelos, es decir, representaciones simplificadas de la realidad, pero como unas primeras aproximaciones no dejan de ser válidas.

…lo que aquí hemos expuesto son modelos, es decir, representaciones simplificadas de la realidad, pero como unas primeras aproximaciones no dejan de ser válidas.

Gabriel Ruiz
Escuela Universitaria
de Estudios Empresariales.
Universida de Cádiz.
Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
«Thales»

Conclusiones

Llegada la hora de hacer balance, se puede decir que con este artículo hemos pretendido:

a) Acercar a nuestras clases un asunto de actualidad, los oligopolios, y analizar el trasfondo matemático de los comportamientos de los mismos, utilizando como recurso cualquier recorte de prensa relacionado con el tema.

b) Introducir una parte de la Estadística, la Teoría de Juegos, poco frecuente en nuestro currículo, pero que capta rápidamente la atención del alumnado, por la diversidad de ejemplos y la sencillez de sus enunciados.

c) Conmemorar este año 2001, el 200 aniversario del nacimiento de un matemático insigne, Antoine Augustin Cournot. Mostrar los protagonistas de la Historia de la Matemática a través de su obra, vida y anécdotas es siempre, para alumnos y profesores, atrayente y gratificante.

Por cierto, el doloroso enfado del principio que motivó este trabajo, ha desaparecido. El conocimiento de las reglas que rigen el mercado y me atrevo a decir que de cualquier problema, ha actuado como un buen medicamento genérico. Bueno, quizás cuando vuelva a llenar el depósito…

Bibliografía

COURNOT, A. A. (1838): *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, Libraire de L. Hachette, París.

COURNOT, A. A. (1841): *Traité Élémentaire de la Théorie des Fonctions et du Calcul Infinitésimal, tomos I y II*, Libraire de L. Hachette, París.

COURNOT, A. A. (1843): *Exposition de la Théorie des Chances et des Probabilités*, Libraire de L. Hachette, París.

MOCHÓN, F. y A. PAJUELO (1991): *Microeconomía*, McGraw-Hill, Madrid.

STIGLER, S. M. (1978): «Francis Ysidro Edgeworth, Statistician», *Journal Royal Statistical Society*, serie A, Parte 3, 287-322.

SUMA 38
noviembre 2001, pp. 23-29

El juego en el aula: una experiencia de perfeccionamiento docente en Matemática a nivel institucional

Mónica de Torres Curth

Aquellos que se toman el juego como un simple juego y el trabajo con excesiva seriedad, no han comprendido mucho ni de lo uno ni de lo otro

H. Heine

El presente trabajo cuenta una experiencia de perfeccionamiento docente en matemática, basada en la puesta en práctica de una propuesta de trabajo, sustentada en la incorporación del juego en la tarea docente como una herramienta didáctica. Se presenta al juego como motivador de situaciones de aprendizaje, tanto como desencadenante de situaciones problemáticas cargadas de significado desde la actividad lúdica, que más que ser «problemas de la vida real» sean una continuación necesaria del juego. Se discute la finalidad de los juegos en el aula y se mencionan las dificultades que esta forma de trabajo puede presentar. Se presentan también algunas consideraciones y comentarios acerca de la experiencia, llevada a cabo en una escuela primaria como proyecto institucional, involucrando a todos los docentes de la misma y al equipo directivo.

ARTÍCULOS

EL TEMOR o el disgusto por la matemática tiene como uno de sus pilares un mito: el de la materia aburrida, difícil y reservada para unos pocos. El gusto por esta actividad aparece de la posibilidad de hacer, crear, entender, solucionar, aplicar, saber quién fue el que inventó todo esto y por qué tuvo la necesidad de inventarlo. Descubrir a la matemática como una ciencia maravillosa es un trabajo difícil porque es necesario terminar con esos mitos, tanto sociales como personales.

El razonamiento matemático es, sin duda, una fuerte herramienta en el desarrollo de la capacidad de pensar, reflexionar y resolver problemas. El mundo que nos toca vivir, requiere de cada uno estar preparado para resolver problemas permanentemente y, tal vez, resolverlos lo mejor y más rápido posible. Estos problemas de la vida cotidiana no son, en general, de «regla de tres» ni son todos iguales, ni tampoco son muy simples. Por ello, es necesario generar otros recursos de solución que los mecanismos estereotipados y deben ser algo tan básico y general que sea posible aplicarlos a cualquier situación. Un niño que adquiere hábitos de «razonador», que puede formularse preguntas, hipotetizar, probar, evaluar, contrastar, es un niño que tiene allanada la mitad del camino.

Estas ideas son prácticamente indiscutidas entre los docentes y directivos de las escuelas, y la gran mayoría realizan esfuerzos tendentes a lograr estos objetivos.

Pero, aunque es común que los docentes accedan individualmente a cursos de perfeccionamiento, muchas veces les resulta difícil llevar a la práctica lo aprendido sin un estímulo que los motive a hacerlo y sin un seguimiento que les permita adquirir seguridad en sus cambios, corregir errores, etc.

El perfeccionamiento docente no puede ser pensado como un proyecto de capacitación personal exclusivamente, dado que un verdadero cambio en la práctica docente sólo es posible si se entiende como un proyecto en el que se encuentre involucrada toda la institución en la que se trabaja. La puesta en práctica de proyectos institucionales permite aunar esfuerzos y evita que se diluyan los intentos individuales por mejorar la práctica en el aula.

Dentro de este marco, se propuso un trabajo institucional con una metodología consistente en la incorporación del juego en el aula como una herramienta didáctica en la enseñanza de la matemática, tanto como motivador de situaciones de aprendizaje, como desencadenante de situaciones problemáticas cargadas de significado desde la actividad lúdica que, más que ser «problemas de la vida real», sean una continuación necesaria del juego.

Descripción de la experiencia

Durante 1998 se llevó a cabo en una escuela primaria pública de gestión estatal de San Carlos de Bariloche, Argentina, un proyecto de trabajo (denominado Proyecto Institucional) con el objeto de introducir a todos los docentes en el uso de una metodología que se sustenta en la idea de la incorporación del juego en la clase de matemática. La escuela tiene aproximadamente 600 alumnos repartidos en dos turnos con 22 maestros de grado, tres directivos y 5 maestros especiales. El proyecto fue elaborado y dirigido por la autora de este trabajo, quien coordinó los encuentros, los talleres y las reuniones periódicas, dentro del marco de un proyecto de extensión universitaria del Centro Regional Universitario Bariloche de la Universidad Nacional del Comahue.

El Proyecto Institucional (PI) se organizó de acuerdo a varias instancias:

- Presentación y fundamentación de la propuesta, que se realizó en forma intensiva durante una semana previa al inicio de las clases, a cargo de la coordinadora.
- Un encuentro mensual con la modalidad de taller, de la coordinadora con todos los docentes de la escuela y el Equipo Directivo, con el objeto de: desarrollar propuestas de trabajo en el aula, discutir posibilidades, dar apoyo teórico, compartir experiencias individuales, desarrollar actividades prácticas especialmente elaboradas para los docentes, discutir materiales de lectura, etc.
- Encuentros periódicos del Equipo Directivo de la escuela con la coordinadora del proyecto, con el objeto de evaluar y corregir la marcha del mismo.

Las tareas que desarrollaron los docentes consistieron en la planificación y puesta en práctica de actividades siguiendo la propuesta metodológica, para los contenidos que cada uno considerara adecuados.

…un verdadero cambio en la práctica docente sólo es posible si se entiende como un proyecto en el que se encuentre involucrada toda la institución en la que se trabaja. La puesta en práctica de proyectos institucionales permite aunar esfuerzos y evita que se diluyan los intentos individuales por mejorar la práctica en el aula.

El seguimiento se programó a cargo del Equipo Directivo de la escuela, el que realizó observaciones y devolución de las mismas a los docentes.

Los propósitos que se persiguieron con el desarrollo del Proyecto Institucional fueron los siguientes:

- Ofrecer a los docentes un espacio para la reflexión teórica, didáctica y metodológica de la matemática de la escuela primaria.
- Reflexionar sobre el uso del problema y del juego como modalidades continuas de trabajo en el aula.
- Desarrollar una propuesta de trabajo que permita a los docentes generar sus propias actividades para ser llevadas al aula.
- Promover la elaboración cooperativa de materiales necesarios para el desarrollo de los juegos y actividades elaboradas por los docentes.
- Fomentar la creatividad en la búsqueda de actividades para el aula.
- Dar lugar al desarrollo de conceptos teóricos que ofrezcan al docente la claridad y rigor necesarios para afrontar correctamente la enseñanza de los mismos.
- Permitir la apropiación por parte del docente de una metodología de trabajo en el aula, generando una secuencia metodológica.
- Fomentar la transferencia de esta metodología al aula.
- Promover la reflexión crítica de la propia práctica a través de la observación entre pares.
- Brindar un espacio para compartir experiencias

Dentro de la provincia de Río Negro (Argentina), existe un régimen de Jornadas Institucionales mensuales donde los docentes y el equipo directivo disponen de todo el turno de trabajo para discusión de problemáticas institucionales, trabajos de perfeccionamiento, etc. En vista de la existencia de este espacio, se organizaron los encuentros mensuales antes mencionados en forma de curso-taller utilizando dos horas cátedra dentro de cada jornada institucional. De estos encuentros, coordinados por la autora, participaron los docentes del turno respectivo y el equipo directivo de la escuela. Los objetivos de cada encuentro se orientaron hacia los siguientes puntos:

- Búsqueda, selección, creación y adaptación de juegos y otras actividades que requieran o involucren distintas temáticas, estrategias de resolución, etc., o bien que simplemente resulten interesantes para su análisis.
- Revisión de bibliografía disponible y búsqueda de nuevos materiales.
- Análisis en el grupo de cada actividad con el objetivo de:
    - — ubicar el o los grupos (grados o niveles) con los que esta actividad podría ser desarrollada;
    - — señalar contenidos previos necesarios para su puesta en práctica;
    - — indicar con qué objetivos se puede proponer la actividad, (en cada caso, si es que está indicada para más de un nivel);
    - — preparar materiales, si son necesarios;
    - — hacer un detalle de sugerencias para su desarrollo, cuando sea posible y necesario, es decir, acompañar la actividad de una reflexión didáctica acerca de su uso.
- Planificación de puestas en práctica de algunas actividades, de modo de poder realizar evaluaciones críticas de las mismas *a posteriori* de su aplicación en el aula.
- Creación de propuestas alternativas a las actividades encontradas, como búsqueda de la retroalimentación entre teoría y práctica.
- Creación de nuevas actividades focalizando la atención en algunos conceptos de interés general.
- Creación de una juegoteca de matemática con los materiales necesarios, disponibles a toda la comunidad escolar en la biblioteca del establecimiento.

También es posible que un juego propuesto con algún objetivo en particular derive en situaciones muy ricas más allá de lo esperado o planificado. El docente deberá estar atento a estas posibilidades, explotando al máximo el potencial del material.

La propuesta metodológica y su fundamentación

Los juegos en el aula

Varios autores (Guzmán, 1984; 1986; Martínez Recio y otros, 1989; Corbalán, 1994) se han ocupado de la utilización del juego en la clase de matemática y, sin embargo, en nuestra realidad es una práctica no muy difundida. Por ello, y como primer punto, es interesante discutir brevemente acerca del uso del juego como una herramienta metodológica de gran importancia en el aula. Martínez Recio y otros (1989), señalan:

> La metodología tradicional no contempla este aspecto de la enseñanza por considerar al juego como una actividad poco seria, de recreo y que tiene sentido en horario extraescolar. Es obvio que el juego es una forma especial de relación entre los niños, y que tiene un claro valor educativo. Sin embargo, el juego por sí solo no lo es todo. Produce una motivación inicial, origina situaciones didácticamente aprovechables, pero posterior a la fase del juego tiene que haber otra de aprendizaje, una fase de reflexión teórica inducida por el juego. Para que esta reflexión teórica pueda interesar realmente a los alumnos debe tener un sentido para ellos, sentido que se intenta suscitar desde el juego. E inversamente para que el juego no se convierta en una finalidad en sí mismo, debe estar orientado por los objetivos de aprendizaje; debe ser un elemento motivador de la reflexión teórica sobre lo que se pretende enseñar. Es necesario, pues, planificar algún instrumento de reflexión teórica, dando una continuidad a las actividades de carácter lúdico.

También es posible que un juego propuesto con algún objetivo en particular derive en situaciones muy ricas más allá de lo esperado o planificado. El docente deberá estar atento a estas posibilidades, explotando al máximo el potencial del material.

Aunque una definición precisa resulte difícil de construir, no puede dejar de asociarse la palabra juego al divertimento, la alegría, el disfrute y el tiempo libre. ¿Cómo es entonces que se piensa en el juego como una herramienta metodológica? Corbalán (1994) señala las siguientes como características de las actividades que denominamos «juegos»:

1. Es una ocupación voluntaria a la que dedicarse libremente.
2. Es un desafío contra una tarea u oponente.
3. Viene controlado por un conjunto definido de reglas que abarcan todas las maneras de jugarlo.
4. Representa una situación arbitraria claramente delimitada en el tiempo y en el espacio, desde la actividad de la vida real.

5. Socialmente son situaciones que se consideran de importancia mínima.
6. Tiene una clara delimitación en el espacio y el tiempo. El estado exacto que se alcanza durante el juego no se conoce *a priori* al comenzar el mismo.
7. Termina después de un número finito de movimientos en el espacio-tiempo.

Excepto tal vez el punto 5, las actividades a las que nos referimos como «juegos para el aula» deben de tener todas las características aquí mencionadas.

Pero hay también algo que no se menciona en esta definición pero que merece especial atención. Es claro que quien se dispone a jugar, se enfrenta a la actividad con una actitud positiva, donde no tienen lugar preconceptos respecto de la propia capacidad, contra lo que sucede frente a las actividades clásicas de matemática. Señala Guzmán (1985):

> Es un hecho frecuente que muchas personas que se declaran incapaces de toda la vida para la matemática, disfrutan intensamente de puzzles y juegos cuya estructura en poco difiere de la matemática. Existen en ellas claros bloqueos psicológicos que nublan su mente cuando se percatan de que la cuestión que se les propone, mucho más sencilla tal vez que el juego que practican, tiene que ver con el Teorema de Pitágoras.

Las expectativas, de quien se enfrenta a actividades lúdicas son de placer y divertimento. ¡Y qué mejor, si esto va acompañado de aprendizaje! Si podemos transformar el aula en un lugar (no sólo en la clase de matemática) donde prime un ambiente lúdico, y dado el interés, la curiosidad y la expectativa que generan este tipo de actividades, podemos generar en los niños aquellas actitudes que son fundamentales para cargar de sentido a la enseñanza.

Dice Alsina Catalá (1991):

> Enseñar y aprender Matemáticas puede y debe ser una experiencia feliz. Curiosamente casi nunca se cita a la felicidad dentro de los objetivos educativos, pero es bastante evidente que sólo podremos hablar de una labor docente bien hecha cuando todos alcancemos un grado de felicidad satisfactorio.

Un ambiente lúdico redunda en una actitud abierta hacia el conocimiento, y el placer por aprender y descubrir, retroalimenta este tipo de tareas.

Dice Martín Gardner (*Carnaval Matemático*, prólogo, citado en Guzmán, 1998):

> Con seguridad el mejor camino para despertar a un estudiante consiste en ofrecerle un intrigante juego, puzzle, truco de magia, chiste, paradoja, pareado de naturaleza matemática o cualquiera de entre una veintena de cosas que los profesores aburridos tienden a evitar porque les parecen frívolas.

En el Diseño Curricular del Consejo Provincial de Educación de la Provincia de Río Negro, Argentina (1991), se

Si podemos transformar el aula en un lugar (no sólo en la clase de matemática) donde prime un ambiente lúdico, y dado el interés, la curiosidad y la expectativa que generan este tipo de actividades, podemos generar en los niños aquellas actitudes que son fundamentales para cargar de sentido a la enseñanza.

menciona al juego en el aula como una importante herramienta para ser tenida en cuenta, de la siguiente manera:

> Una consideración especial merece el papel del juego en el aprendizaje de la matemática. La matemática misma puede ser presentada al alumno como un gran desafío que admite reglas particulares, promoviendo la apropiación de técnicas y la gestación de estrategias personales, que pueden dar lugar a nuevos caminos o formas innovadores de jugar. Justamente su enseñanza basada en problemas deberá ser hecha bajo esa caracterización. Por otra parte, existen juegos en la vida diaria incorporables a la enseñanza de la matemática en la escuela, ya que encierran conocimientos o procedimientos propios de esta disciplina o pueden ser adaptados a tal fin. Ejemplos de ellos lo constituyen:
>
> - los juegos de procedimientos conocidos, pero que pueden ser enriquecidos y variados para profundizar los contenidos matemáticos (dominó, lotería, escoba, bingo, Oca, generala, Trivial, Carrera de Mente, pictionary, batalla naval, etc.);
> - los juegos que impliquen la creación de estrategias por parte de los alumnos como son muchos juegos bipersonales de tablero en los que puede determinarse una estrategia ganadora (Ta-te-ti, Nim, llegar a 10, Ludo, etc.);
> - los rompecabezas geométricos (Cubo Rubik, Cubo Soma, Tangram, etc.) que agudizan las percepciones espaciales a la vez que promueven el descubrimiento de propiedades geométricas;
> - los dados y ruletas que despiertan el interés en las probabilidades;
> - los crucigramas, cuadrados mágicos, juegos de ingenio, que aparecen en diarios y revistas, etc.

El juego, igual que en la edad infantil es una herramienta de aprendizaje, poco a poco es más organizado, incluye reglas y presenta problemas que es necesario resolver. Así como todos los niños y niñas pueden jugar, también todos pueden hacer matemática (Alsina y otros, 1996). El docente ha de ser consciente de que su experiencia, creencias y actitudes hacia la matemática y en especial hacia la resolución de problemas, aunque no las explicite, quedan transparentadas en su actuación en el aula y de ellas depende mucho de lo que los alumnos gusten, se interesen y se sientan capaces de hacer en esta disciplina (Consejo Provincial de Educación, 1995)

Por otro lado, es cierto que pueden presentarse dificultades para la puesta en práctica de juegos. Están las de carácter ambiental, como lo son el poco espacio, los muchos alumnos, la escasez de materiales, etc., aunque opino que es posible idear diferentes juegos para distintas realidades. También es cierto que las clases donde los niños hacen y juegan son clases desordenadas, bulliciosas y de mucho movimiento. Es necesario adoptar una actitud abierta ante esta forma de trabajar en el aula. Un ambiente de trabajo distendido no significa necesariamente menos aprendizaje e, inversamente, un aula silenciosa y ordenada no garantiza el éxito del proceso de enseñanza-aprendizaje.

La propuesta metodológica

Para el trabajo en el aula se propuso planificar las actividades de modo que tuvieran lugar tres etapas bien diferenciadas que denominamos de juego, de reflexión y de confrontación y que a continuación se describen brevemente.

Primera etapa: juego

En esta etapa, que incluye el desarrollo del juego en sí mismo, como actividad motivadora, tienen lugar la comprensión de la tarea, de las reglas de juego, los registros de puntuaciones, etc. Es posible que esta etapa sea bastante prolongada, siendo que en el mismo juego puede ser interesante considerar algunas variantes, o aún repetir varias veces el mismo juego.

Segunda etapa: reflexión

Aquí nos detendremos para señalar que en este tipo de trabajo es importante prever tanto instancias de trabajo individual como en pequeños grupos. Esto se fundamenta básicamente en los siguientes puntos: en primer lugar, la comprensión de un concepto y la incorporación del mismo dentro de los esquemas existentes de ideas y pensamientos son procesos de carácter individual. En segundo lugar, el trabajo en pequeños grupos favorece, a través de la interacción con los pares, el razonamiento, la comunicación, el desarrollo personal y social, como objetivos generales.

Un ambiente de trabajo distendido no significa necesariamente menos aprendizaje e, inversamente, un aula silenciosa y ordenada no garantiza el éxito del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Estos puntos no son hoy en día motivo de discusión por parte de los docentes, y abunda la bibliografía que sostiene desde lo teórico y desde la experiencia en el aula, la riqueza de estas formas de trabajo como necesarias y complementarias. Es por esto que las actividades que se programen deben estar planteadas de manera que atiendan a ambas instancias como igualmente importantes.

Esta etapa estará compuesta por actividades (instancias de reflexión teórica y aplicación de conceptos) que se desprenden naturalmente de la actividad lúdica. En particular, podría pensarse como una serie de situaciones (planteadas como problemas) que deriven del mismo juego.

Tercera etapa: confrontación

Especial atención merece el trabajo con el grupo total después de que se han desarrollado actividades individuales o en pequeños grupos. La confrontación de resultados es la modalidad de cierre de las actividades que parece más enriquecedora para los niños.

Esta forma de trabajo si bien lleva tiempo y requiere de un trabajo especial por parte del docente, permite simultáneamente el cumplimiento de varios objetivos:

- Promueve la adecuada verbalización de las actividades de cada uno (o del grupo), de manera de hacerlas comprensibles para los demás. Esto conlleva un trabajo con el uso apropiado del lenguaje, terminología, enriquecimiento del vocabulario, propiedad de las expresiones, etc.
- Pone en evidencia las distintas estrategias de trabajo, permitiendo su evaluación por parte de los niños quienes podrán darse cuenta de que hay otras estrategias más adecuadas, más sencillas o simplemente distintas de la propia.
- Permite valorar como formas de aprendizaje los hábitos de seguir, entender y valorar el razonamiento ajeno, fundamentar los desarrollos, justificar el razonamiento propio, realizar conjeturas, como así también promover el desarrollo de otros hábitos como escuchar al otro, admitir los propios errores y aprender de ellos, aprender a trabajar en grupos, entre otros.

Esta etapa, fundamentalmente consiste en disponer de un tiempo en la organización de la clase, posterior a la actividad individual o en pequeños grupos para que los alumnos, organizados por el docente, presenten y discutan las resoluciones de sus actividades (Saiz, 1995)

Para que esta forma de trabajo sea verdaderamente enriquecedora, es necesario que las actividades a presentar sean fértiles en cuanto a admitir varias estrategias posibles de solución como así también varias soluciones distintas.

Esta forma de trabajo apunta también a un objetivo que es muchas veces descuidado, particularmente en matemática: la necesidad del rigor y la precisión. En la práctica de justificar los propios razonamientos los alumnos empiezan con una explicación informal de sus procedimientos, llegando paulatinamente a la expresión más formal de sus ideas. La institucionalización de contenidos, tanto conceptuales como procedimentales tiene lugar en esta etapa y apunta particularmente a estos objetivos.

En la figura 1 puede verse un esquema que resume la forma en que se conectan las tres etapas descritas de la metodología propuesta.

Resultados de la experiencia con docentes y alumnos

Hay varios aspectos importantes para señalar de esta experiencia, por una parte en relación al trabajo de y con los docentes, y por otra en relación al trabajo con los alumnos

En cuanto al trabajo con los docentes, se presentan varias ventajas, que se detallan a continuación:

1. *Continuidad*: las características de los talleres, que tuvieron continuidad a lo largo del año realizándose dentro del ámbito de la escuela, propiciaron un clima de participación continua de los docentes y el equipo directivo, generando también una motivación especial, dado que el compartir las experiencias favorece una comunicación más fluida de ideas y permite una búsqueda de apoyo en el grupo de pares. Los juegos matemáticos deberían ser introducidos ya desde el preescolar, y tener una continuidad a lo largo de toda la enseñanza primaria. Esta modalidad de trabajo dará lugar al tratamiento de la diversidad en distintas situaciones, de modo que permitirá no sólo el trabajo con los contenidos sino también la detección y tratamiento de errores.
2. *Observación entre pares*: durante el desarrollo del Proyecto Institucional se consideró el registro y observación de las clases como un elemento fundamental para un análisis crítico de la propia práctica y para la realización de informes de cada actividad llevada a cabo. La modalidad elegida, y que se llevó a la práctica para cumplir con este objetivo, fue la observación entre pares que, por una parte dio lugar a una mayor comunicación entre los docentes, y por otra facilitó la «apertura de las aulas», de modo que el trabajo dentro del aula se abriera a la observación y análisis por parte de otros docentes.
3. *Compartir experiencias*: la existencia de un espacio común de trabajo permitió discutir y analizar las problemáticas comunes, comunicándose y compartiendo las experiencias entre todos los docentes de la escuela y el equipo directivo.

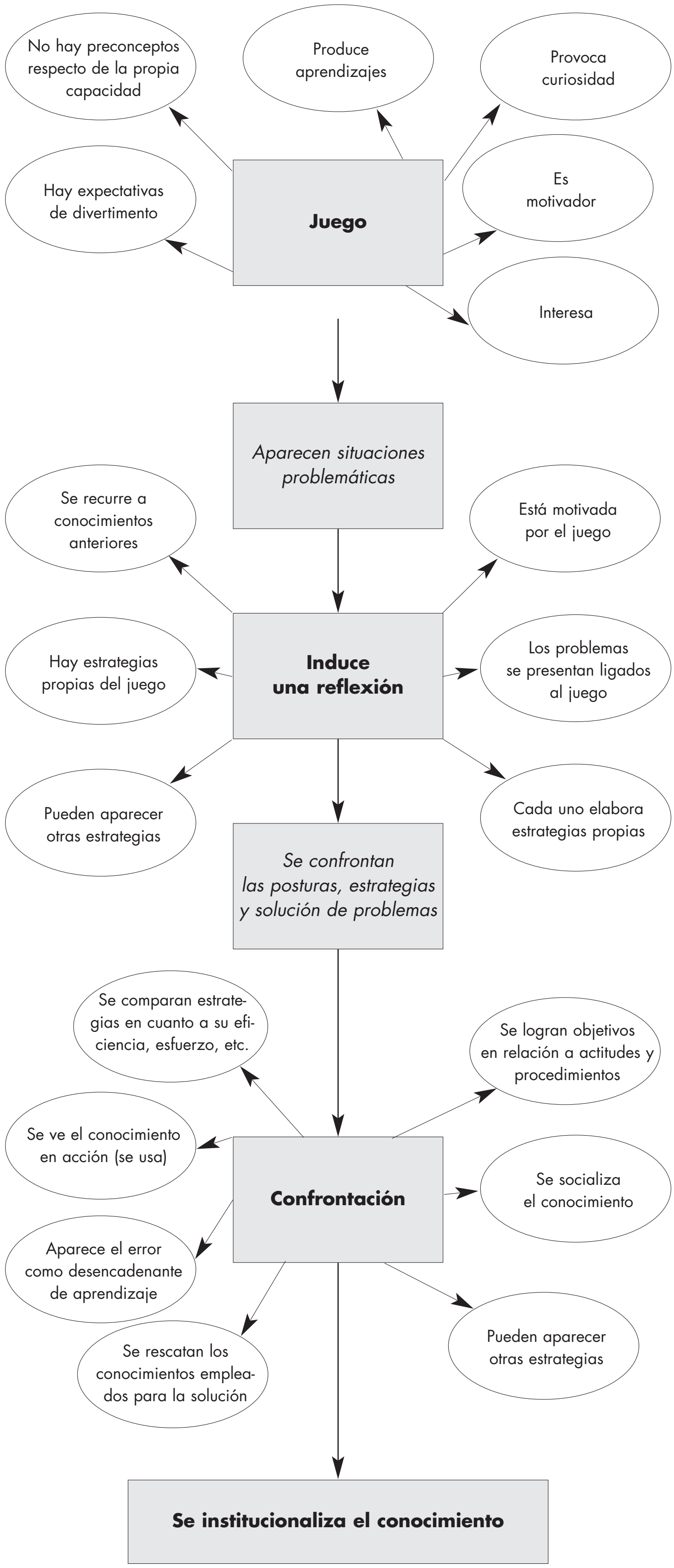


Figura 1

4. *Trabajo cooperativo en la producción de tareas y materiales*: una realidad es la dificultad para procurarse juegos, que es un problema que pretendió salvar esta experiencia, haciendo una serie de propuestas generales que más que mostrar actividades dieran a los docentes algunas pistas de cómo trabajar con esta metodología y los impulsaran a crear sus propias propuestas. La forma de trabajo en talleres mensuales, permitió así la creación conjunta de tareas y elaboración cooperativa de materiales y, por otra parte, facilitó la gestación de una base de datos donde todos los docentes pueden acceder tanto a los distintos tipos de tareas ideadas para distintos contenidos, como a los materiales necesarios para llevar a cabo las experiencias en el aula. En la continuidad de este proyecto, se pretende construir una juegoteca de matemática en la escuela.
5. *Integración de áreas*: hubo lugar a integración de áreas en dos sentidos. Por una parte, fundamentalmente en el tercer ciclo, donde los alumnos trabajan con maestros por áreas, se realizó una serie de actividades orientadas a integrar la matemática con las ciencias sociales, las ciencias naturales y lengua. Otro tipo de integración, tal vez menos usual, fue la presentación de actividades que vinculaban la matemática con música, las artes plásticas y educación física.

En relación al trabajo con los alumnos, se observó que esta metodología de trabajo en el aula genera en ellos un cambio favorable de actitud ante la matemática tanto como un aumento del placer que proporciona el quehacer matemático. La gran mayoría participó activamente de las propuestas lúdicas y se mostró interesada en las tareas que relacionadas con ellas se planteaban a continuación. La puesta en práctica continua de las puestas en común permitió que las discusiones, justificaciones y argumentaciones fueran enriqueciéndose paulatinamente, en la medida que los alumnos empezaron a fortalecer su confianza y a aprender de los errores propios y de los de sus compañeros. Aún aquellos que poseen más dificultades en matemática pudieron participar aportando opiniones y procedimientos. Los docentes que participaron de esta experiencia están seguros de percibir un cambio actitudinal en sus alumnos, y también en cuando al aprendizaje de la matemática ya sea en los conceptos como en los procedimientos. En una continuación de este proyecto sería fundamental evaluar sistemáticamente los avances de los alumnos que trabajan con una metodología lúdica en la clase de matemática.

En relación al trabajo con los alumnos, se observó que esta metodología de trabajo en el aula genera en ellos un cambio favorable de actitud ante la matemática tanto como un aumento del placer ue proporciona el quehacer matemático.

Mónica de Torres
Departamento de Matemática.
Centro Regional Universitario Bariloche.
Universidad Nacional del Comahue.
Bariloche. ARGENTINA

Agradecimientos

Deseo agradecer al equipo directivo, docentes y alumnos de la Escuela n.° 71, «General don José de San Martín», de San Carlos de Bariloche por su apoyo y colaboración. Es en sus aulas donde esta propuesta está siendo puesta en práctica y son sus alumnos los que dan sentido a esta tarea. También a las Profesoras Virginia Montoro y Cristina Ferraris por comentarios a la lectura del manuscrito.

Bibliografía

ALSINA, C. (1991): «Los 90 son nuestros. Ideas didácticas para una matemática feliz», en: *Memorias del Primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, UNESCO, París.

ALSINA, C., C. BURGUÉS, J. M. FORTUNY, J. GIMÉNEZ y M. TORRA (1996): *Enseñar Matemáticas*, Graó, Barcelona.

ALSINA, C., J. M. FORTUNY y C. BURGUÉS (1992): *Invitación a la Didáctica de la Geometría,* Colección: Matemáticas: Cultura y Aprendizaje, Vol. 12, Síntesis, Madrid.

CONSEJO PROVINCIAL DE EDUCACIÓN PROVINCIAL DE RÍO NEGRO (1995): *Diseño Curricular para EGB 1 y 2. Versión 1.1. Proyecto Curricular de Educación Elemental para el Nivel Primario*.

CORBALÁN, F. (1994): *Juegos Matemáticos para Secundaria y Bachillerato,* Educación Matemática Secundria, Síntesis, Madrid.

GUZMÁN, M. DE (1985): «Juegos matemáticos en la enseñanza». en *Actas de las IV Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de la Matemática, IV JAEM 1984*, Sociedad Canaria de Profesores de Matemática «Isaac Newton», 49-85

GUZMÁN, M. DE (1998): *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*, Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura.

MARTÍNEZ RECIO A. y F. J. RIVAYA (1989): *Una metodología activa y lúdica de enseñanza de la Geometría elemental,* Colección Matemáticas. Cultura y Aprendizaje, Vol. 16, Síntesis, Madrid.

MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACIÓN DE LA NACIÓN (1995): *Contenidos Básicos Comunes para la Educación General Básica*, Consejo Federal de Cultura y Educación, Buenos Aires.

SAIZ, I. (1995): «¿Confrontación o corrección?», *La educación en Nuestras Manos. Matemática*, n.° 4 (32), 3-7.

SUMA 38
noviembre 2001, pp. 31-38

La formación matemática del profesorado de primaria

Lorenzo J. Blanco Nieto

En los últimos años se han producido importantes cambios en el sistema educativo español que han llevado parejo modificaciones en la formación inicial de los profesores de primaria. Este trabajo analiza algunos dilemas tradicionales en la formación del profesorado, así como la influencia que los sucesivos planes de estudio han tenido en las asignaturas relacionadas con la educación matemática, donde se constata una reiterada pérdida de horas lectivas.
Al compás de este análisis se realizan algunas sugerencias que se consideran pudieran ayudar a mejorar la formación matemática de los futuros maestros.

En las últimas décadas del pasado siglo, fruto de los avatares sociales y políticos, hemos asistido a importantes cambios en el sistema educativo español, que han llevado parejo modificaciones en los sistemas de formación de profesores. No obstante, a través de los tiempos, se han mantenido algunos problemas en la formación inicial del profesorado como son la tensión no resuelta de las relaciones entre teoría y práctica, la disyuntiva siempre presente entre planes culturalistas y planes profesionales, y el estatus académico y social de los Centros de Formación Inicial y de sus alumnos (Sierra y Rico, 1996). A ellos, habría que añadir el distanciamiento, administrativo y académico, de la formación inicial respecto del trabajo desarrollado en los centros de infantil y primaria. Todos ellos constituyen la referencia básica de este trabajo que los analiza desde la perspectiva de la educación matemática.

Algunas referencias históricas

La formación inicial en España en las décadas de los setenta y ochenta

Diferentes autores como Balbuena (1991); Armendariz, Azcárate y Delofeu (1993); Rico (1994); Rico y Sierra (1994) señalan la década de los setenta como el período a partir del cual se han producido importantes cambios en la Educación Matemática, en general, y en la formación de los profesores de Matemáticas, en particular.

En esta época, al compás de la promulgación de la Ley General de Educación, la implantación de un nuevo sistema educativo, y nuevas propuestas curriculares se aprueba la incorporación formal a la universidad de la formación inicial del profesorado de Educación General Básica pasando las Escuelas Normales a integrarse en la Universidad como Escuelas Universitarias. Simultáneamente, se desarrollan nuevos planes de estudios y programas que reflejan un mayor interés por los problemas de enseñanza/aprendizaje de los contenidos escolares.

Con el Plan de 1971 se eleva la categoría del título de maestro al nivel de diplomado universitario, aumentándose el nivel de exigencia académica para ingresar en estos centros, y aunque amplios sectores educativos y sociales pedían el título de licenciado, éste no se concede por motivos de índole económica (Sierra y Rico, 1996).

El reconocimiento institucional del área de conocimiento de Didáctica de la Matemática en 1984, a raíz de la promulgación de la Ley de Reforma Universitaria, supone un paso cualitativo importante en la docencia e investigación relacionada con la formación inicial en matemáticas de los maestros. Aun cuando las soluciones administrativas que se le dieron fueron muy diversas (Rico, 1994), muchos profesores optamos por este área de conocimiento produciéndose la incorporación real a los departamentos universitarios, en algunos de los cuales el área de conocimiento tiene un papel predominante.

Este paso es para la Didáctica de la Matemática y, en general, para la formación inicial del profesorado en España un salto cualitativo notable, ya que a partir de este momento, un número importante de profesores, dirigimos nuestra actividad docente hacia los problemas de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas escolares, empezamos a formar grupos de investigación dentro de la Universidad, e intensificamos la búsqueda de canales para la realización de tesis doctorales y proyectos de investigación sobre problemas propios de la educación y de la formación de profesores de Matemáticas.

Los planes de estudio del setenta, donde existían títulos de maestros especialistas en Ciencias Humanas, Ciencias, Preescolar y Lengua Española y Extranjera, reflejaban el dominio de la formación científica sobre la didáctica específica, que apenas ocupaba una pequeña parte en algunas asignaturas y siempre dependiendo de la voluntad de los profesores.

Sierra (1987) realiza un interesante estudio acerca de los Planes de Estudios de 1971 de las Escuelas de Formación del Profesorado de EGB, vigentes hasta principio de los noventa, donde se reflejan los contenidos científicos y didácticos en relación a las Matemáticas a principio de la pasada década. En ellos, se distinguía entre las asignaturas de contenido científico y «la» de Didáctica de la Matemática, para los alumnos de la especialidad de Ciencias. En el trabajo se señala, que «la Didáctica de la Matemática ocupa aproximadamente un 25% del currículo de los alumnos de las Escuelas referido a su formación matemática global» (p. 105). Para las demás especialidades aparece, solamente, una asignatura llamada «Matemáticas y su Didáctica» donde el temario nos volvía a demostrar la escasa o nula referencia a la Didáctica de la Matemática.

El reconocimiento institucional del área de conocimiento de Didáctica de la Matemática en 1984, a raíz de la promulgación de la Ley de Reforma Universitaria, supone un paso cualitativo importante en la docencia e investigación relacionada con la formación inicial en matemáticas de los maestros.

Por nuestra parte, recordamos que los programas de las asignaturas evidenciaban el predominio del contenido sobre los aspectos didácticos (E.U.F.P., 1982, 1984), y que la bibliografía utilizada era de carácter general y de contenido teórico. El cálculo infinitesimal y las estructuras algebraicas formaban parte del currículo del futuro maestro. Sólo al final de algunos capítulos o al final del libro, aparecían apartados sobre Didáctica de la Matemática, pero siempre como un apéndice del contenido y, fundamentalmente, sobre recursos y materiales, pero casi nunca sobre teorías, más o menos elaboradas, sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Incluso, la expresión «Matemáticas y su Didáctica», que es elocuente de una determinada forma de pensamiento sobre el contenido de las asignaturas en estos Centros, no era aún frecuentemente utilizada, y todavía es mayoritaria en los planes de estudio actuales (Abraira y cols, 1997). Subyacía la idea de que primeramente había que «darles» Matemáticas y que prácticamente con eso era suficiente. La formación culturalista se imponía sobre el carácter profesional que debe tener la formación de profesores.

Esta situación era, así mismo, común en otros paises como nos recuerda Cooney (1994):

> En 1960 y 1970 el *modus operandi* de la mayor parte de los programas de educación de profesores era intentar que los profesores fueran matemáticos competentes y, de paso, introducir alguna pequeña parte de pedagogía (p. 225).

No obstante, asumimos la reflexión de Llinares (1998) cuando señala que en esta época se empieza a hacer patente la preocupación por determinar el contenido de Didáctica de la Matemática que debieran tener las asignaturas, o la relación entre contenido matemático y sobre didáctica de la matemática, o conocer la naturaleza del contenido matemático propio de la formación de maestros:

> La didáctica de la matemática empezaba a ampliar su 'conocimiento teórico' desde las investigaciones cognitivas, las reflexiones teóricas, etc. de manera creciente y esto planteaba cuestiones relativas a cómo incorporar dicho conocimiento teórico en las asignaturas que estaban dirigidas a formar profesores (Llinares, 1998, 26)

En esta época, todos los colectivos que participábamos en la formación del profesorado (formadores, profesores en activo, estudiantes y administración) manifestábamos la preocupación al estimar que la formación que recibían los profesores en formación no era adecuada a la exigencia de la profesión, y observar el distanciamiento (docente y administrativo) que se producía entre los centros de formación inicial y los centros de enseñanza obligatoria.

La formación inicial en España en la década de los noventa

A principios de los noventa se publica el Real Decreto por el que se establecen las directrices generales del Título de Maestro donde se especifican siete títulos: Educación Infantil, Educación Primaria, Educación Física, Lengua Extranjera, Educación Musical, Educación Especial y Audición y Lenguaje, en consonancia con el sistema educativo que se señala en la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE) aprobada en 1990.

Con posterioridad, pero en esta misma década, se produce la transformación de algunas Escuelas Universitarias en Facultades de Educación en las que se integran con otras titulaciones afines como Psicopedagogía o Pedagogía. Todo lo anterior provoca nuevos planes de estudio en la formación de profesores donde algunos formadores propusimos, no con mucho éxito, seguir profundizando en su carácter profesional e insistir en la importancia de las didácticas específicas para que tuvieran un protagonismo esencial.

Aun cuando la Didáctica de la Matemática ha avanzado en su consideración dentro de los programas de diferentes asignaturas y en los planes de estudio desde la década de los setenta, observamos algunos aspectos que se deberían corregir y manifestamos nuestra preocupación por la escasa importancia que la educación matemática sigue teniendo en la formación inicial de los maestros…

Tampoco en esta ocasión se concede la titulación de licenciado para los futuros maestros, y se obvia analizar el nivel académico y social de los estudiantes que acceden a estos centros, así como evaluar el desarrollo de la titulación de maestro para conocer si nuestro trabajo docente como formadores de profesores estaba cumpliendo con los objetivos previstos.

Un avance significativo de esta época es que

> después de siglo y medio de la existencia de las Normales, por fin se ha reconocido legalmente (Art. 16 de la LOGSE) que solamente puedan trabajar profesionalmente como Maestros los Diplomados que han cursado alguna de las titulaciones de maestro (Sierra y Rico, 1996, p. 50).

Aun cuando la Didáctica de la Matemática ha avanzado en su consideración dentro de los programas de diferentes asignaturas y en los planes de estudio desde la década de los setenta, observamos algunos aspectos que se deberían corregir y manifestamos nuestra preocupación por la escasa importancia que la educación matemática sigue teniendo en la formación inicial de los maestros como reflejan en los nuevos planes de estudio aprobados en los últimos años de la década pasada.

A pesar de «la dificultad que presenta la realización de un estudio comparativo en cuanto a la homogeneidad o heterogeneidad de los contenidos de los programas propuestos por las diferentes universidades» (Ruiz, 1998*a*, p. 49), el análisis de los actuales Planes de Estudio para la formación de los Maestros y programas de las asignaturas nos indica una gran diversidad en cuanto a denominación, número de créditos y contenidos de las asignaturas, que se orientan en unos casos al dominio exclusivo del contenido matemático y en otros hacia una orientación didáctica y profesional (Abraira y cols., 1997; Ruiz, 1998*a*). Afortunadamente, pero en un proceso todavía muy lento, son cada vez más los que asumen este último enfoque en un intento de adaptar dichos programas a la visión de la matemática y de su enseñanza-aprendizaje que subyace en el actual currículo de Primaria, pero teniendo en cuenta las conclusiones e implicaciones de las, cada vez más numerosas, publicaciones que tratan sobre la formación del profesorado de Matemáticas en primaria (Giménez, Llinares y Sánchez, 1996; Blanco y Cruz, 1997; Abraira y De Francisco, 1998; Murillo, Escolano y Gairín, 1998; Carrillo y Climent, 1999; Contreras y Climent, (eds.), 1999; Corral y Zurbano, 2000; etc.).

Abraira y cols (1997) analizaron los planes de estudio de sesenta y nueve Centros de Formación Inicial de Maestros. En los planes de la especialidad de Educación Primaria se calculó una media de 13,5 créditos troncales y obligatorios en asignaturas relacionadas con las Matemáticas, lo que resulta un 6,4% de los créditos totales. Pero si consideramos las demás especialidades podemos encontrarnos con apenas un 3% de créditos dedicados a la Didáctica de las Matemáticas o como caso inaudito observar que en algunos planes de estudio de la especialidad de Educación Especial no existe asignatura de Didáctica de las Matemáticas. Es decir, el número de créditos de Didáctica de las Matemáticas, como materia troncal u obligatoria, que deben cursar los futuros maestros de Educación Especial en algunos centros es cero. Lo anterior trasluce, entre otras cuestiones, una discriminación hacia los alumnos con necesidades educativas especiales (sordos, ciegos, límites…) y una mentalidad de que estos alumnos no debieran tener una preparación matemática en relación con las operaciones aritméticas, orientación espacial o geometría que constituyen el núcleo del contenido matemático en primaria. Lo que contradice todas las orientaciones que, sobre la integración escolar, emanan de la LOGSE.

Rico y Carrillo (1999) en una revisión posterior, señalaban que «en la especialidad de Maestro de Primaria, la formación en matemática y su didáctica apenas alcanza el 8% de la carga lectiva total; en el resto de las especialidades sólo es del 2%» (Rico, 2000, p. 50). Lo que muestra la progresiva desaparición de la educación matemática en los planes de formación inicial del profesorado de primaria.

La situación actual en los Planes de Estudio de la Facultad de Educación en Badajoz, por encima de la media, es bien explícita de las afirmaciones anteriores (Tabla 1) y muestra de forma clara la poca importancia que la formación específica en Didáctica de las Matemáticas tiene en la formación inicial de los futuros maestros.

…los planes de estudios y el sistema de acceso a la profesión evidencian el distanciamiento entre la formación inicial de los profesores y la realidad educativa desarrollada en los centros de enseñanza infantil y primaria.

Especialidad	*Total de créditos troncales y oblig.*	*Créditos de Educa. Matem.*	*Porcentaje de créditos*
Primaria	163,5	15	9,1
Infantil	162	7,5	4,6
Lengua Extranjera	166	4,5	2,7
Educación Física	166,5	4,5	2,7
Educación Especial	166,5	4,5	2,7
Audición y Lenguaje	166,5	3,5	2,1

Tabla 1. Créditos de las asignaturas de Educación Matemática en los Planes de Estudio de formación de Maestros en la Facultad de Educación en la Universidad de Extremadura

En 1997 los asistentes al «II Simposio sobre el currículum en la formación inicial de los profesores de Primaria y Secundaria en el área de Didáctica de las Matemáticas» (Abraira y De Francisco 1998) «manifestaron su insatisfacción por el número de créditos asignados por los nuevos Planes de Estudio al Área de Didáctica de la Matemática, ya que en alguna especialidad la carga lectiva se ha reducido en más del 50% en relación con los Planes del 1971» (Ruiz, 1998*b*).

La escasa importancia dada a la educación matemática en las diferentes especialidades es una contradicción evidente con lo que marca el sistema educativo para las diferentes materias en la educación infantil y primaria. Así, en los tres ciclos de Primaria se marcan el 16% de horas para Matemáticas, teniendo una consideración muy superior a la que se programa durante el proceso de formación inicial. Solamente, la consideración de este dato debiera llevarnos a pensar en la necesidad de una mayor consideración de las asignaturas de Didáctica de la Matemática dentro de los planes de estudios.

Pero esto resulta aún más alarmante por cuanto la dinámica de implantación de la LOGSE y el actual sistema de oposiciones, donde no se contemplan plazas para los maestros de la especialidad de Primaria, está potenciando que los maestros especialistas, es decir, los que menos han estudiado Didáctica de la Matemática, se conviertan en maestros generalistas y, por tanto, encargados de la educación matemática en los colegios de Primaria. Esta situación ya fue denunciada en el simposium reseñado anteriormente, por los profesores del área, sin que se haya tomado ninguna medida al respecto (Ruiz, 1998*b*, p. 166).

Una vez más los planes de estudios y el sistema de acceso a la profesión evidencian el distanciamiento entre la formación inicial de los profesores y la realidad educativa desarrollada en los centros de enseñanza infantil y primaria.

Y lo que es redundante, también en esta época, todos los colectivos que participamos en la formación del profesorado (formadores, profesores en activo, estudiantes y administración) manifestamos nuestra preocupación al estimar que la formación inicial que reciben los profesores no es adecuada a la exigencia de la profesión, y seguimos observando el distanciamiento (docente y administrativo) que se produce entre los centros de formación inicial y los centros de enseñanza obligatoria.

Esta situación nos lleva a asumir que «la formación del profesorado para una educación de calidad y con problemas nuevos no ha sido considerada seriamente» (Camps, 2000, p. 83) como se indica en el documento elaborado por la Fundación Alternativas sobre los problemas de la educación actual. Rico (2000), va más allá al considerar

> críticamente la situación actual y denuncia el panorama desolador que se percibe, lo cual hace inteligible la preocupación social que se viene manifestando sobre la degradación de la enseñanza de las matemáticas en primaria, una de cuyas causas principales es la escasa y deficiente preparación del profesorado (p. 50).

Tensión entre teoría y práctica. Nuevas referencias

Uno de los problemas señalados en la introducción hacía referencia a la tensión entre la teoría y la práctica. Las aportaciones realizadas sobre la educación matemática en los últimos años debe llevarnos a su reconsideración desde nuevas referencias. Así, aparecen recientes aportaciones que conexionan el conocimiento matemático, el conocimiento de didáctica de la Matemática y el conocimiento pedagógico; interesantes conclusiones e implicación de las investigaciones en educación matemática, especialmente aquellas que analizan el conocimiento de los maestros en formación, noveles, y expertos; y se intesifica la búsqueda de nexos de unión entre la formación inicial y permanente (Rico y Carrillo, 1999).

También, son numerosas e importantes las contribuciones españolas que, desde la educación matemática, han tratado acerca de la caracterización del conocimiento base, teórico y práctico, a considerar en la formación matemática de los maestros (Llinares, 1994; Blanco, Mellado y Ruiz, 1995; Carrillo y Climent, 1999; Contreras y Climent, (eds.), 1999; Corral y Zurbano, 2000) y que van permitiendo diseñar nuevos proyectos docentes en este campo. En todas ellas se parte de considerar que el proceso de aprender a enseñar tiene lugar a partir de procesos activos que se desarrollan en un contexto específico caracterizado por tiempo, lugar y los protagonistas.

…el bajo nivel de conocimiento matemático de los estudiantes para profesores de las materias concretas no implica que debamos volver a dar los mismos contenidos siguiendo normalmente procedimientos transmisivos.

Estas aportaciones asumen que los profesores en formación dotan de significado a toda su acción tomando como referencia su experiencia escolar previa, que les ha llevado a unos conocimientos y concepciones fuertemente asentadas sobre las Matemáticas, sobre su enseñanza/aprendizaje y sobre el ejercicio de la profesión de profesores de Matemáticas.

Por otra parte, nuestra experiencia docente, así como los resultados de numerosas investigaciones muestran el deficiente nivel de conocimiento que los estudiantes para maestro tienen respecto de contenidos matemáticos básicos. Igualmente, muestran que el dominio del contenido es directamente proporcional a la capacidad de gestión de clase y a la habilidad para crear y sostener un discurso productivo en el aula (Mellado, Ruiz y Blanco, 1997).

Estos resultados refuerzan el debate permanente acerca de la relación entre los contenidos matemáticos y la Didáctica de la Matemática en la formación del profesorado, y se utilizan como justificación para mantener asignaturas de contenidos matemáticos en los planes de estudio de formación inicial. En mi opinión, el bajo nivel de conocimiento matemático de los estudiantes para profesores de las materias concretas no implica que debamos volver a dar los mismos contenidos siguiendo normalmente procedimientos transmisivos.

La repetición de contenidos estudiados en la enseñanza primaria, secundaria y bachillerato, siguiendo en la mayoría de las ocasiones modelos similares, contribuye a reforzar y consolidar las concepciones de los estudiantes sobre las Matemáticas y sobre su enseñanza/aprendizaje que, en la mayoría de las ocasiones, encuentran desajustes y contradicciones significativas con las propuestas curriculares actuales. Esta reiteración, de contenidos y metodología, no garantiza un mayor conocimiento matemático de los estudiantes y sirve, en la mayoría de las ocasiones, para reforzar las ideas acerca de las dificultades de las matemáticas y su animadversión hacia esta materia. Obviamente, todo ello, repercute muy negativamente en su formación y actividad futura como profesores de matemáticas.

Como señala Fortuny (1995):

> debemos tener muy presente que la elección de las maneras de trabajar influyen, si se quieren, indirectamente en la formación de concepciones y hábitos en los estudiantes para profesores. Estos hábitos ocultos condicionan fuertemente las concepciones y las actuaciones docentes de nuestros estudiantes. Se han integrado en los esquemas de acción docente a modo de 'currículum oculto' que sin explicitar sus intenciones se va aprendiendo mediante las vivencias, a menudo no consciente de los profesores forma-

dores. A veces este proceso de enculturación transmite tácticas no deseadas o en contradicción con el currículum explícito de la asignatura (p. 45).

El problema no es que tengan que estudiar más Matemáticas, sino que hay que trasladar la atención a otras variables. Y ello tiene que ser así porque el conocimiento de los profesores es diferente del de un especialista, puesto que está relacionado con el contexto escolar y con el propio proceso de enseñanza/aprendizaje. Y, consecuentemente, deberá tener en cuenta de manera simultánea y coherente las matemáticas escolares y los problemas de su enseñanza y aprendizaje, los conocimients y concepciones que sobre ellos tienen los estudiantes y las aportaciones sobre enseñanza/aprendizaje de las Matemáticas y todo ello en relación a la práctica de la enseñanza concreta.

Finamente, señalaríamos que la tensión entre teoría y práctica alcanza una nueva dimensión si consideramos los resultados acerca la caracterización del conocimiento práctico de los estudiantes para profesores que indican que las estrategias didácticas de los profesores son diferentes según la materia que enseñan, y sus actividades y prácticas pedagógicas dependen de la asignatura (Mellado, Ruiz y Blanco, 1997). En consecuencia, creemos que, además del análisis global del conocimiento práctico propio de las materias psicopedagógicas, es necesaria la intervención diferenciada de la Didáctica de la Matemática durante las prácticas de enseñanza en el proceso de aprender a enseñar.

Y esto es así porque los estudiantes para Maestro no poseen los suficientes esquemas cognitivos para aprender efectivamente de sus experiencias y observaciones de clase. Lo que consecuentemente debe llevarnos a introducir en los programas de formación inicial actividades para ayudar a nuestros estudiantes para profesores a aprender a enseñar matemáticas a través de la observación y de la práctica, mediante procesos de reflexión en y sobre la acción. Tales actividades deberían estar estructuradas y secuenciadas teniendo en cuenta el nivel de preparación de los estudiantes y los períodos de antes, durante y con posterioridad a las prácticas de enseñanza.

Todo lo anterior debería llevarnos a establecer un nuevo marco curricular para la formación matemática de los profesores de primaria donde tengamos en cuenta la recomendación de Ruiz (1988*a*, p.51) cuando indica que:

las materias adscritas a nuestra área de conocimiento deben aportar al estudiante para Maestro aquellos conocimientos de Didáctica de la Matemática que les serán útiles para comprender, diseñar, gestionar y evaluar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Ahora bien, los contenidos de una asignatura deben seleccionarse teniendo en cuenta su instrumentalidad para el ejercicio de la profesión docente y no limitarse a una serie de nociones teóricas cuyo interés corresponde esencialmente al trabajo del investigador.

…debe llevarnos a introducir en los programas de formación inicial actividades para ayudar a nuestros estudiantes para profesores a aprender a enseñar matemáticas a través de la observación y de la práctica, mediante procesos de reflexión en y sobre la acción.

Y siempre desde la perspectiva de formar profesionales reflexivos y autónomos capaces de afrontar situaciones singulares, ambiguas e inciertas que supone la vida en el aula, y de diseñar y construir en cada momento las estrategias didácticas adecuadas, cuya eficacia sea capaz de experimentar y evaluar (Blázquez, 1995).

Conclusiones

Partiendo de la reflexión realizada sobre diferentes cuestiones relativas a la formación inicial de los maestros en el área de matemática, quisiera, a modo de reivindicación, señalar algunas cuestiones que debemos afrontar en un futuro inmediato. Es de justicia recordar que muchas de estas cuestiones han sido planteadas como conclusión en los diferentes simposium celebrados al respecto (Blanco y Cruz, 1997; Abraira y de Francisco, 1998; Murillo, Escolano y Gairín, 1998; Corral y Zurbano, 2000), así como en Rico (2000).

- El nivel universitario para la Formación Inicial de los maestros debe ser el de Licenciado que permita una homologación con los países europeos donde la duración normal es de cuatro o cinco años.
- Esta ampliación implicaría el diseño de unos planes de estudios más profesionales, con un tronco curricular común que permita, en primer lugar, formar maestros y, posteriormente, especialistas según las diferentes especialidades de la LOGSE. «El paso al nivel de licenciatura permitiría conjugar una formación sólida común para todos los profesores de primaria con un inicio de especialización, que contemplase de manera diferenciada todas las áreas del currículo» (Rico, 2000, p. 51).
- En todas las modificaciones curriculares futuras debe subyacer la perspectiva de considerar al profesor como un profesional reflexivo y autónomo que debe saber tomar

decisiones y diseñar y construir estrategias de enseñanza adecuadas a los contenidos matemáticos escolares y a los contextos concretos donde puedan suscitarse.

- Ello implica potenciar la investigación en formación de profesores en el área de Matemática para profundizar en el análisis de problemas de enseñanza/aprendizaje sobre tópicos concretos de la Matemática escolar partiendo de situaciones de aula y favoreciendo la construcción y desarrollo del conocimiento didáctico del contenido matemático de los futuros maestros.
- E, igualmente, implica considerar una renovación curricular de la formación inicial formulando objetivos, contenidos, metodología y criterios de evaluación en función de los conocimientos que los maestros necesitarán para desarrollar su profesión desde la perspectiva anterior. Pero este intento debería exigir, como señala Llinares (1998) una respuesta coherente y colectiva para conseguir que asignaturas con el mismo nombre y en el mismo título universitario, pero en universidades distintas tuvieran referencias comunes. «La búsqueda de un terreno común dentro del cual dar respuesta a los desafíos que los nuevos cambios en los planes de estudio están planteando es una tarea complicada» (Llinares, 1998, p. 27).
- Debemos procurar una mayor implicación de la Didáctica de la matemática en las prácticas de enseñanza como contexto necesario para aprender a enseñar matemática. La reflexión en y sobre la acción docente en matemática debe ser dirigida por especialista del área.
- Establecer un marco institucional estable, riguroso y coherente, entre las instituciones universitarias y no universitarias implicadas en la formación inicial y permanente que permita abordar con seriedad y rigor los problemas sobre los que hemos reflexionado.

…la necesidad de efectuar importantes transformaciones en la preparación del profesorado de primaria en lo que respecta a la formación relacionada con la Matemática y su Didáctica a fin de que nuestro sistema educativo pueda hacer frente con competencia a los cambios necesarios (Díaz, Fernández, Martinón y Riera, 2000).

Finalmente, y a modo de conclusión, asumimos y difundimos una de las conclusiones de las Jornadas Matemáticas celebradas en el Congreso de los Diputados en enero de 2000, con motivo de la celebración del año 2000 como año de la Matemática, cuando recordaban

> la necesidad de efectuar importantes transformaciones en la preparación del profesorado de primaria en lo que respecta a la formación relacionada con la Matemática y su Didáctica a fin de que nuestro sistema educativo pueda hacer frente con competencia a los cambios necesarios (Díaz, Fernández, Martinón y Riera, 2000, p. 127).

Bibliografía

ABRAIRA, C., M.D. GÓMEZ, L.J. BLANCO y M.C. MARTÍN (1997): «Análisis de los planes de estudio del título de maestro de la especialidad de Educación Primaria», en ABRAIRA y DE FRANCISCO: *II Simposio. El currículum en la formación inicial de los profesores de Primaria y Secundaria en el área de Didáctica de las Matemáticas*, Facultad de Educación de la Universidad de León, 15-24.

ABRAIRA, C. y A. DE FRANCISCO (1998): *La formación inicial de los profesores de primaria y secundaria en el área de Didáctica de las Matemáticas*, Universidad de León.

ARMENDÁRIZ, M.V., C. AZCÁRATE y J. DEULOFEU (1993): «Didáctica de la Matemática y psicología», *Infancia y Aprendizaje*, 62-63, 77-99.

BALBUENA, L. (1991): «La educación matemática y sus protagonistas», *Rev. Interuniversitaria de Formación del profesorado*, 21, 23-31.

BLANCO, L.J., V. MELLADO y C. RUIZ (1995): «Conocimiento Didáctico del Contenido de Ciencias y Matemáticas y Formación de Profesores», *Revista de Educación*, 307, 427-446.

BLANCO, L.J. y C. CRUZ (eds.) (1997): *Aportaciones al currículum en la formación de los profesores de primaria en el área de Matemáticas*, ICE de la Universidad de León.

BLÁZQUEZ, F. (1995): «Formación inicial de maestros y profesores. Teoría y práctica de enseñanza», en AGUADED, J.I. y V. REIA: *Educar sin fronteras. Educar sem fronteira*, Universidad de Huelva, 41-62.

CAMPS, V. y cols. (2000): *La educación a Debate*, Fundación Alternativas.

CARRILLO, J. y N. CLIMENT (eds.) (1999): *Modelos de formación de maestros en Matemáticas*, Universidad de Huelva.

CONTRERAS, L.C. y N. CLIMENT (eds.) (1999): *La formación de profesores de Matemáticas*, Universidad de Huelva.

COONEY, T.J. (1994): «Conceptualizing teacher education as field of inquiry: theoretical and practical implications», en *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the psychology of Mathematics education*, Vol. II. University of Lisbon (Portugal), 225-232.

CORRAL, C. y E. ZURBANO (2000): *ACTAS. IV Simposio sobre Propuestas metodológicas y de evaluación en la formación Inicial de los profesores del área de Didáctica de la Matemática*, Universidad de Oviedo.

DÍAZ, J., J.L. FERNÁNDEZ, A. MARTINÓN y T. RIERA (2000): *Jornadas Matemáticas*, Congreso de los Diputados.

E.U. DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO (1982): *Memoria. Curso 1981-82*, Servicio de reprografía de la E.U. de F.P., Badajoz.

E.U. DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO (1984): *Memoria. Curso 1983-84*, Servicio de Reprografía de la E.U. de F.P., Badajoz.

FORTUNY, J.M. (1995): *Proyecto Docente de Didáctica de la Matemática*, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad Autónoma de Barcelona. (inédito).

GIMÉNEZ, J., S. LLINARES y M.V. SÁNCHEZ (eds.) (1996): *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática*, Comares, Granada.

LLINARES, S. (1994): «El profesor de matemáticas. Conocimiento base para la enseñanza y desarrollo profesional», en *El profesor de matemáticas. Conocimiento base para la enseñanza y desarrollo profesional*, Rialp, 296-337.

LLINARES, S. (1998): «Área de Conocimiento Didáctica de la Matemática. Ampliando responsabilidades Docentes», en ABRAIRA, C. y A. DE FRANCISCO: *La formación inicial de los profesores de primaria y secundaria en el área de Didáctica de las Matemáticas*, Universidad de León, 25-28.

MELLADO, V., C. RUIZ y L.J. BLANCO (1997): «Aprender a enseñar Ciencias Experimentales en la Formación Inicial de Maestros», *Bordón*, 49 (3), 275-288.

MURILLO, J., R. ESCOLANO y J.M. GAIRÍN (1998): *Actas del III Simposio sobre el currículum en la formación inicial de los profesores de primaria y secundaria. Área Didáctica de las Matemáticas*, Universidad de la Rioja, Editada en CD.

RICO, L. (1994): «Mitos y realidades de la Educación Matemática en España», en BLANCO, L. y L. CASAS (Coords.): *Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas*, SEEM, Badajoz, 41-62.

RICO, L. (2000): «Formación y desempeño práctico en educación matemática de los profesores de primaria», *Suma*, 34, FESPM, 45-51.

RICO, L. y J. CARRILLO (1999): «The training and performance of primary teachers in Mathematics education. The case of Spain», Ponencia presentada en el Seminario *The training and performance of primary teachers in Mathematics education*, celebrado en Madrid, y organizado por la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

RICO, L. y M. SIERRA (1994): «Educación matemática en la España del Siglo XX», en KILPATRICK, J., L. RICO y M. SIERRA: *Educación Matemática e investigación*, Síntesis, Madrid, 97-207.

RUIZ, M.L. (1998*a*): «Análisis de los temarios de las asignaturas troncales y obligatorias de didáctica de la matemática en la formación de educación infantil y primaria», en ABRAIRA, C. y A. DE FRANCISCO: *La formación inicial de los profesores de primaria y secundaria en el área de Didáctica de las Matemáticas*, Universidad de León, 35-54.

RUIZ, M.L. (1998*b*): «Conclusiones de la mesa: Las asignaturas del Area de Didáctica de la Matemática en los títulos de maestro», en ABRAIRA, C. y A. DE FRANCISCO: *La formación inicial de los profesores de primaria y secundaria en el área de Didáctica de las Matemáticas*, Universidad de León, 165-166.

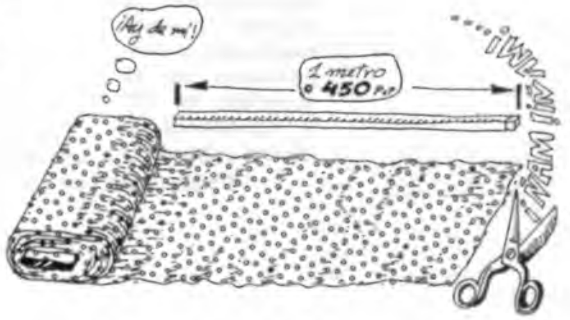
SIERRA, M. (1987): «El currículum de Matemáticas y su didáctica en las Escuelas Universitarias de Formación del Profesorado de EGB», *Studia Pedagógica*, 19, 101-114.

SIERRA, M. y L. RICO (1996): «Contexto y evolución histórica de la formación en matemáticas y su didáctica de los profesores de primaria», en GIMÉNEZ, J., S. LLINARES y M.V. SÁNCHEZ (eds.): *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática*, Comares, 39-62.

Lorenzo J. Blanco
Universidad de Extremadura.
Sociedad Extremeña
de Educación Matemática
«Ventura Reyes Prósper»

● Dibuja la gráfica de la función $x \mapsto 0$. ¿Cuál es el coeficiente angular de la recta que se obtiene? ¿Qué ángulo forma dicha recta con el eje de abscisas? Idem para la función $x \mapsto x$. Idem para $x \mapsto -x$.

● Un metro de cierto tejido cuesta 450 pesetas. ¿Cuánto cuestan 5 metros? ¿Y 10 metros? ¿Y 13,2 m.? ¿Cuánto cuestan x metros de tela? Escribe la función $x \mapsto c$ (x, en metros; c, precio en pesetas).



SUMA 38
noviembre 2001, pp. 39-46

El seminario de problemas: un espacio para la alfabetización en resolución de problemas

Roberto Núñez Malherbe
Concepción Valdés Castro
Mayra Solana Sagarduy

ARTÍCULOS

En el currículo del primer año de la carrera de Matemática en la Universidad de La Habana aparece la asignatura «Seminario de Problemas», cuyo objetivo general es introducir a los estudiantes en la *resolución de problemas matemáticos*. Los autores consideran que el poco tiempo de esta asignatura puede ser utilizado teniendo en cuenta la unidad dialéctica entre lo afectivo y cognitivo, de forma que contribuya a la iniciación de los estudiantes en una concepción de la Matemática como un cuerpo dinámico en constante desarrollo y enriquecimiento, en el papel que la actividad colectiva juega dentro del proceso de resolución y validación de los problemas matemáticos e, incluso, en la propia apreciación del término «problema matemático». El presente trabajo tiene el propósito de compartir nuestras experiencias y reflexiones acerca de cuál puede ser el diseño de este tipo de asignatura, a fin de crear un *espacio vivencial* que garantice una *alfabetización* de los estudiantes en la resolución de problemas.

ES UN HECHO universalmente reconocido que el comienzo del estudio de la matemática en el nivel superior presenta serias dificultades para la mayoría de los estudiantes, muy especialmente para aquellos que inician carreras con un alto grado de profundización en esta disciplina, como ocurre con la carrera de Matemática (ver, por ejemplo Guzmán y otros, 1998). Estas dificultades pueden ser de diversos tipos. En particular, la abstracción que presenta esta disciplina en el nivel superior, la densidad de la materia a cubrir en cada clase, así como la incertidumbre creada por las nuevas concepciones del rigor y de lo que es un problema en matemáticas conlleva a un considerable aumento en las exigencias en cuanto al conocimiento y las habilidades de tipo metamatemático de los estudiantes.

Entre las posibles acciones que se pueden realizar, con el fin de amortiguar esta situación, se proponen diferentes tipos de cursos propedéuticos que promuevan la realización con los estudiantes de actividades de repaso y orientación. Sin embargo, para que estos cursos sean verdaderamente efectivos deben propender al desarrollo en los estudiantes de habilidades de tipo metacognitivo que les permitan, por ejemplo, el autodiagnóstico de sus dificultades y cómo superarlas, optimizar sus recursos personales, organizar sus conocimientos. Para ello es necesario que los profesores expliciten a los estudiantes la aparición de estas nuevas habilidades, dentro de la actividad matemática y en su aprendizaje.

En el currículo de la carrera de Matemática en la Universidad de La Habana aparece la asignatura «Seminario de Problemas», situada en el primer año de la carrera. Se trata de una asignatura para cuyo desarrollo se dispone de relativamente poco tiempo (32 horas lectivas), cuyo objetivo general es introducir a los estudiantes, desde el primer año, en una de las actividades más importantes de la labor del profesional matemático: la resolución de problemas.

En su existencia, esta asignatura ha transitado por diferentes formas de organización. En una primera etapa se adoptó la forma de tutoría individual, en la cual cada alumno trabajaba durante todo un semestre del año académico, asesorado por un profesor, en la resolución de algún problema matemático a su alcance. Varias son las razones por lo que esta forma organizativa no produjo los frutos esperados: en primer lugar, el espectro de estrategias a las que se enfrentaba el estudiante dependía del problema seleccionado y, por tanto, en la mayoría de los casos resultaba reducido; en segundo lugar, la multiplicidad de tutores, cada uno con sus propios puntos de vista en relación con el problema que planteaba, no facilitó una acción pedagógica uniforme sobre estudiantes con casi ninguna experiencia en la resolución de problemas matemáticos y finalmente, pero no menos importante, faltaba la influencia que la interacción grupal podía ejercer en cada uno de los estudiantes.

Estas dificultades determinaron la necesidad de modificar el trabajo docente en esta asignatura de modo que su contribución al desarrollo de habilidades propias de la resolución de problemas resultara más efectiva. Concebimos, entonces, nuestra acción educativa en el marco del planteamiento, la resolución y discusión de problemas variados en el aula y la utilización de métodos grupales. Las experiencias acumuladas en el desarrollo de esta asignatura durante 4 cursos académicos nos han permitido reelaborar y adecuar progresivamente las ideas iniciales. Compartir tales reflexiones es el propósito de este trabajo.

La estrategia didáctica: fundamentos y concepciones

Hoy en día, las teorías pedagógicas más avanzadas reconocen la significación de la resolución de problemas en el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Las diferencias esenciales se establecen al construir los modelos teóricos fundamentales a través de los cuales puede dirigirse este proceso.

Kilpatrick (1985, citado por Puig y Cerdán, 1996) sintetiza las diferentes opciones utilizadas generalmente en la instrucción de la resolución de problemas, en dependencia de la forma en que en las mismas se producen y relacionan la actividad del instructor y de los aprendices. Esta síntesis abarca:

- la concepción del carácter implícito del aprendizaje de la resolución de problemas a través del propio ejercicio de esta actividad;
- la enseñanza explícita de instrucciones o algoritmos procedimentales que faciliten la interiorización en el aprendiz de las estrategias heurísticas que se aplican en la resolución de problemas;
- la concepción del aprendizaje por análisis y comparación de la actuación propia del sujeto (el alumno) con la de expertos competentes (los profesores), preferiblemente en los casos en que ésta se lleva a cabo siguiendo las ideas de los propios estudiantes o cuando se resuelven problemas cuya solución no se ha preparado previamente;
- el aprendizaje derivado de la explotación de la comunicación y el análisis crítico de las ideas entre los propios aprendices en la resolución de un determinado problema;
- el aprendizaje como producto de la reflexión en torno a los aspectos de carácter metacognitivo cuya manifestación ha determinado aceleraciones o retardos en el proceso resolutivo.

Hoy en día, las teorías pedagógicas más avanzadas reconocen la significación de la resolución de problemas en el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Las diferencias esenciales se establecen al construir los modelos teóricos fundamentales a través de los cuales puede dirigirse este proceso.

Cada uno de estos modos de concebir el proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas enfatiza direcciones esenciales a través de las cuales transcurre el tránsito de *aprendiz* a *experto* en resolver problemas. Argumentaremos por qué estimamos que esta competencia generalmente se alcanza cuando, en la *actividad sistemática de resolución de problemas concretos*, el individuo, *simultáneamente*, *recibe instrucciones específicas sobre formas ya establecidas de atacar ciertas clases de problemas, intercambia ideas con sus colegas, imita el comportamiento de modelos ya reconocidos y evalúa críticamente comportamientos propios o ajenos.*

La multiplicidad de enfoques, señalada antes, es generada por la función que se asigna a la resolución de problemas en la enseñanza de la Matemática y depende, por una parte, del modelo epistemológico implícito que sostiene la noción de *problema matemático* y, por otra, de la creencia que se tenga de lo que significa *enseñar y aprender matemática*.

Se entenderá aquí por *problema matemático toda situación vinculada al universo de la Matemática que, a través de un enunciado coherente, exprese la necesidad de la búsqueda de respuestas a interrogantes cognitivas, para la cual no se dispone, a priori, de un procedimiento predeterminado.*

Como es bien conocido, los trabajos de Polya (1974, 1962-65) constituyeron el primer intento de un análisis sistemático de la actividad de resolución de problemas matemáticos y, además, al considerar que esta actividad podía ser objeto de instrucción, llamaron la atención de los investigadores en Educación Matemática en la problemática de la enseñanza y aprendizaje de este tipo de actividad.

Las concepciones iniciales sobre el entrenamiento en la resolución de problemas estaban enfocadas básicamente hacia la instrucción explícita de las estrategias generales identificadas por Polya. Al tratar de llevar a la práctica estas concepciones, se presentaron serias dificultades que motivaron la aparición de enfoques alternativos que incorporaron otros elementos cuya significación en el proceso de resolución de problemas ha sido suficientemente demostrada (Lester, 1994).

Este desplazamiento, sin embargo, no siempre ha subrayado explícitamente la necesidad, más que de la instrucción, de la *educación* de los estudiantes en la resolución de problemas, entendida no sólo como la consecución de mejores índices en su desempeño –en tanto que «comportamiento cognoscitivo integral» (Delgado, 1999)– al llevar a cabo esta actividad en situaciones concretas, sino como el logro de transformaciones perdurables en el sujeto, tanto en lo que se refiere a su motivación y actitud hacia la misma como a la formación de carácter axiológico que de ella pueda derivarse.

La matemática, como actividad humana, incluye no sólo un universo de problemas, conceptos, formalismos y construcciones, sino también un *punto de vista* sobre este universo. El proceso de enseñanza-aprendizaje de esta ciencia va a verse fuertemente influido por los puntos de vista que sobre este universo tengan tanto el profesor como los alumnos. Lo que los estudiantes puedan aprender o no y la solidez de este conocimiento estará relacionado directamente con la forma en cómo ellos aprenden. El *ambiente sociocultural* en el cual se desarrolla este aprendizaje va a depender y a afectar sus creencias de lo que es la matemática, de cómo ella se produce y se asimila y, lo que resulta especialmente importante, de la valoración de sí mismos como aprendices de la matemática. (Schoenfeld, 1989).

Las concepciones iniciales sobre el entrenamiento en la resolución de problemas estaban enfocadas básicamente hacia la instrucción explícita de las estrategias generales identificadas por Polya.

D'Amore y Zan (1995), siguiendo a Kilpatrick y Kulm, han identificado tres variables, fuertemente interrelacionadas, que intervienen en la actividad de resolución de problemas y que deben ser tomadas en consideración en el diseño de cualquier acción didáctica dirigida a la educación de los estudiantes en la misma, a saber: el *sujeto que resuelve*, el *espacio problémico* en que debe desenvolverse su acción y el *entorno* (físico, psicológico y social) en medio del cual se desarrolla el proceso de resolución.

El comportamiento de estas variables, a su vez, aparece condicionado por el alcance que se establezca para la acción a desarrollar y por la concepción didáctica bajo la cual se lleve a cabo la misma.

La concepción didáctica basada en el enfoque histórico-cultural de Vigotsky centra su atención, principalmente, en el desarrollo integral de la personalidad y pretende superar aquellas tendencias que han dirigido su interés sobre todo a la esfera cognitiva del hombre. Según este punto de vista el punto nodal del proceso de desarrollo social y humano lo constituye el concepto de actividad, con su atributo esencial: ser actividad productiva, transformadora. Por otra parte, la actividad humana transcurre en un medio social en activa interacción con otras personas, a través de variadas formas de colaboración y comunicación. La actividad de aprendizaje, entendida como el proceso que mediatiza la relación entre el hombre (el sujeto de aprendizaje) y los objetos de la realidad que lo circunda (el objeto de aprendizaje) se concibe aquí en dos planos:

- el interpsicológico, como actividad de carácter esencialmente social, que se manifiesta en las interrelaciones de carácter diverso que se establecen entre el profesor y sus alumnos y entre éstos entre sí, y
- el intrapsicológico, como actividad de construcción y reconstrucción interior (y no sólo de registro y observación), por parte del sujeto que aprende, de conocimientos, formas de comportamiento, actitudes, valores, afectos y sus formas de expresión, dependiente de su nivel de desarrollo en un momento histórico concreto en cada uno de estos aspectos.

En su libro *Pensamiento y Lenguaje*, Vigotsky señala:

> El análisis que divide al todo complejo en unidades... muestra que existe un sistema dinámico de sentido que representa la unidad de los procesos afectivos e intelectuales. Muestra que en toda idea se contiene, reelaborada, una relación afectiva del hombre hacia la realidad representada en esa idea. (Citado en Colectivo de Autores, 1991).

Esta unidad dialéctica entre lo afectivo y lo cognitivo significa la necesidad de interrelacionar las acciones de instruir y educar. Se trata de aprovechar al máximo todas aquellas posibilidades educativas que brindan las diferentes situaciones de instrucción, en especial cuando estas son concebidas en estrecha relación con las actividades propias de la profesión y en el contexto socio-histórico en que vive el estudiante.

Salvo en los casos de aquellos estudiantes (la minoría) que han recibido preparación específica para participar en competencias a diferentes niveles, el entrenamiento del estudiante promedio que ingresa a la Facultad de Matemática y Computación en la Universidad de La Habana en la actividad de resolución de problemas matemáticos gira, en esencia, alrededor de los denominados *problemas con texto*, caracterizados por un enunciado, relacionado con un área generalmente no matemática, que puede ser modelado a través de ecuaciones o sistemas de ecuaciones algebraicas, fundamentalmente de primero y segundo grado. Las insuficiencias de esta preparación se ponen de manifiesto en algunas de las creencias acerca de la resolución de problemas matemáticos que con más frecuencia se han podido detectar en los alumnos durante más de 20 años de práctica docente[1], las cuales coinciden con las reportadas en otros trabajos (Pozo y otros, 1994), a saber:

- Los problemas matemáticos deben involucrar ecuaciones, números y deben realizarse cálculos para resolverlos.
- Los problemas matemáticos generalmente tienen una única solución correcta que se obtiene por un método que el profesor conoce bien y deben ser resueltos como máximo en 10 minutos. (Prácticamente todos los problemas a los que los alumnos se enfrentan en su tránsito por la escuela están perfectamente definidos, las soluciones están bien determinadas, el método de resolución sigue un algoritmo conocido y lo que se requiere es dominar este algoritmo).
- Mientras más conocimientos matemáticos se tengan mas fácilmente será la resolución de problemas matemáticos. (Existe una identificación entre resolución de un problema y conocimiento del algoritmo idóneo).
- Para resolver un problema matemático se requiere de gran práctica en la resolución de este tipo de problemas. (O sea se refiere al entrenamiento en la aplicación del o de los algoritmos necesarios).
- Equivocarse es muy lamentable y además esto puede influir en la opinión que el profesor se forma del estudiante lo que redundará en la calificación posterior.

En particular, esta última creencia, firmemente arraigada en la mayoría de los estudiantes que ingresan en la enseñanza universitaria, es una de las que ejercen un efecto más nocivo en el buen desenvolvimiento de una clase en la que se quiera utilizar un método productivo, donde los errores son *absolutamente* inevitables, tal y como ocurre en el proceso de investigación científica. Una enseñanza (como es la tradicional) que previene a toda costa la equivocación conduce necesariamente a esta creencia. Concordamos plenamente con Baruk (1985) cuando expresa que «no sólo no es grave para el público conocer que los matemáticos se equivocan, sino que al contrario, sería conveniente que lo supieran. Hacerlos saltar de su posición de superhombres para convertirlos en hombres, con las debilidades propias de la escala humana. Pero más interesante que la descalificación del hombre es la calificación del error, ni infamante ni humillante, sino constituido por el movimiento normal del espíritu».

…no sólo no es grave para el público conocer que los matemáticos se equivocan, sino que al contrario, sería conveniente que lo supieran.

Schoenfeld (1992, citado por Santos, 1997), por otra parte, subraya la importancia que reviste en el proceso de aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos que los estudiantes se desenvuelvan en un ambiente similar al que viven los matemáticos al trabajar o desarrollar las ideas en esta disciplina. Ello implica la creación de un «clima de resolución de problemas» en el salón de clase que facilite el desarrollo de actividades que propicien la formulación, el intercambio y la evaluación de preguntas y conjeturas, argumentos y explicaciones, que, de algún modo, resulten representativas del quehacer cotidiano de cualquier comunidad matemática.

Si se toma en consideración que en el seno de la comunidad matemática la resolución de problemas se vincula, de un modo u otro, a la actividad investigativa, resulta importante tener también en cuenta las características generales inherentes al desarrollo de las tareas propias de la investigación matemática. Núñez (1999) ha identificado como tales tareas: el análisis de existencia y unicidad, la caracterización, representación, clasificación y comparación de objetos, la generalización de relaciones, la optimización de procesos y la inversión de problemas. Núñez discute, además, otras acciones que se ponen de manifiesto en la resolución de los problemas científicos dentro de la Matemática, como son, por ejemplo, la formulación y validación de conjeturas, la demostración, la experimentación, la inducción, la estimación, por sólo citar algunas.

1 Como parte de la experiencia que se reporta, se intentó, a través de la aplicación de un cuestionario exploratorio (adaptado de Callejo, 1996), una caracterización del estado inicial de este sistema de creencias en los estudiantes con los cuales se trabajaría.

Las respuestas a este cuestionario mostró que los resultados obtenidos no correspondían al comportamiento real de los estudiantes en las sesiones de trabajo, reafirmándose de este modo las consideraciones que sobre la efectividad de este tipo de instrumentos han sido expuestas por otros autores (Callejo, 1996).

En consecuencia, el diseño de actividades educacionales *desarrolladoras* (entendido en el sentido *vigotskiano*) y conducentes a establecer un primer encuentro del estudiante con la actividad de resolución de problemas en Matemática (como es el caso de la que nos ocupa) deberá evidenciar, ante todo, esta diversidad de las actividades y la multiplicidad en sus manifestaciones.

El sistema de acciones antes mencionado proporciona una orientación para la concepción y puesta en práctica de este diseño. Por otra parte, el hecho de que en el programa de la asignatura no aparecen predeterminados los contenidos específicos y que tampoco esté prevista una evaluación mediante examen, permite que el profesor, liberado de la presión de tener que recorrer una cierta cantidad de materia estrictamente matemática, y los alumnos, libres de la tentación de modelar su aprendizaje sobre la base de las respuestas que tendrán que dar en el examen, tienen la oportunidad de conocerse mejor, manifestar sus opiniones relativas a lo que significa hacer matemática, al rigor de las construcciones matemáticas, acerca de las diversas estrategias que existen para enfrentar la resolución de los problemas. De esta manera, es factible conocer y tratar de modificar las creencias y actitudes que poseen los estudiantes.

Ejecución

Como se señaló antes, la experiencia fue realizada en el marco de la asignatura «Seminario de Problemas I», durante las primeras cinco semanas del curso, a razón de tres sesiones de trabajo semanales, de una hora y media cada una. Como es fácil comprender, las condiciones referidas y la complejidad propia de la actividad de resolución de problemas no permiten, en general, que en tan corto período de tiempo puedan lograrse progresos significativos en el desarrollo de habilidades, en el estudiante promedio, que lo capaciten para la ejecución de esta actividad con un cierto grado de efectividad, más aún si se pretenden trascender los objetivos de carácter meramente instructivo.

Sin embargo, este tiempo disponible puede ser utilizado (y así fue concebido el alcance de la experiencia que nos ocupa) para crear *espacios vivenciales* que contribuyan, en una primera instancia, a la percepción por los estudiantes de la Matemática como un cuerpo dinámico en constante desarrollo y enriquecimiento y del papel de la actividad colectiva en el proceso de resolución y validación de los problemas matemáticos e incluso a la reconsideración del término «problema matemático».

Se trata de *alfabetizar* al estudiante en la resolución de problemas, entendiendo bajo esta denominación la realización de actividades de iniciación que, tomando como base la resolución de problemas, logren que se manifiesten y se discutan en la sala de clase un conjunto de creencias y emociones de los alumnos sobre la matemática y la resolución de problemas matemáticos, así como el papel que los alumnos y el profesor pueden jugar en el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de esta disciplina.

Estas creencias y actitudes, aunque no siempre de forma explícita, dirigen el aprendizaje y el comportamiento matemático del alumno, ya que establecen el contexto individual dentro del cual funcionan los recursos, las heurísticas y el control al resolver problemas matemáticos. Tener conciencia de esta influencia y actuar con ella, y no contra ella, significa ejercer un dominio sobre las propias emociones y saber comprender y respetar las ajenas. Esto es lo que Gómez-Chacón ha denominado *alfabetización emocional* y que engloba aspectos tan diversos como el control de impulsos y fobias en relación a la asignatura (lo que permite desarrollar la atención necesaria), la autoconciencia, la motivación, el entusiasmo, la perseverancia, la empatía, etc.

Cuando un alumno comprende que la resolución de problemas involucra interrupciones y bloqueos, puede percibir su frustración como una parte habitual en el proceso de resolución y no como una señal que induzca el abandono del problema. Del mismo modo, los estudiantes pueden aprender que la alegría que les produce el descubrimiento de una solución no debe provocar el relax, sino más bien el incentivo para revisar críticamente las soluciones encontradas, buscar otras soluciones más elegantes o bien enfoques alternativos (Gómez Chacón, 1998).

Se describirán a continuación algunas de las incidencias ocurridas en el desarrollo de la experiencia como una vía para evaluar el logro de los objetivos vivenciales perseguidos.

a) El primer problema planteado por el profesor (De Guzmán, 1991), fue el siguiente:

> ¿De qué forma es posible dividir en dos partes el conjunto de los números naturales comprendidos entre 1 y 26 (ambos inclusive) de manera que ninguno de los números de una parte aparezca también en la otra, y de modo que la suma de los números incluidos en cada una de las partes sea la misma?

Estas creencias y actitudes, aunque no siempre de forma explícita, dirigen el aprendizaje y el comportamiento matemático del alumno, ya que establecen el contexto individual dentro del cual funcionan los recursos, las heurísticas y el control al resolver problemas matemáticos.

El trabajo individual de los estudiantes sobre este problema permitió, bajo diferentes formas, poner en evidencia la creencia generalizada acerca de la «respuesta positiva» que debe asociarse a la interrogante cognitiva cuya búsqueda el problema plantea: algunos estudiantes encontraron formas (naturalmente, erróneas) de hacer la subdivisión, otros, aun ante los intentos fallidos de realizar tal división, no fueron capaces de considerar la posibilidad de la imposibilidad, y, sólo una minoría, aceptó y argumentó rigurosamente que tal subdivisión es imposible.

Esta dinámica de trabajo en el grupo no sólo proporcionó a los estudiantes una vivencia concreta que contribuyera al proceso de modificación de un convencimiento erróneo, sino que, además, permitió introducir las fases elaboradas por Polya para el proceso de resolución de problemas relacionadas con la posibilidad de una comprensión inicial incorrecta del problema (cuando asumieron que la división del conjunto inicial debía ser «equitativa» en cuanto al número de elementos de cada subconjunto), así como con la violación de la fase de la verificación (cuando se proporcionaron formas de hacer la subdivisión).

Las características del problema facilitaron la acción educativa en dos direcciones fundamentales: la relacionada con el análisis sobre la generalización o aplicación contenida en la última fase y la discusión de algunas de las vías de problematización a través de las cuales la comunidad matemática construye su espacio problémico (ver Núñez, 1999), a saber:

- Por existencia (¿es posible realizar tal división para algún natural n?).
- Por caracterización (¿para qué número natural n tal división es posible?).

Estos nuevos problemas permitieron enfrentar al estudiante a algo apenas asociado a su sistema de creencias: el papel que la experimentación puede desempeñar en el proceso de resolución de un problema matemático. También ellos propiciaron la vinculación de los resultados de esta actividad experimental con la formulación y reformulación de conjeturas (primeramente se conjeturó que la división era posible sólo para los números naturales n de la forma $n = 4k$, modificándose en el transcurso del proceso resolutivo a través de la inclusión adicional de los números de la forma $n = 4k - 1$).

El tránsito de la resolución de estos problemas por la vía de la conjeturación permitió, a su vez, confrontar el punto de vista existente entre los estudiantes en cuanto a la suficiencia de la base experimental sobre la cual se apoya una conjetura para la validación de la misma con la necesidad de una argumentación demostrativa, entendida como conjunto de acciones dirigidas al establecimiento de la veracidad o falsedad de una determinada proposición matemática (Núñez, 1999).

Las distintas formas en que es posible realizar la división del conjunto, cumpliendo con las exigencias que el texto plantea, permitieron contrarrestar, nuevamente, la concepción relacionada con la unicidad en la forma de la solución a un problema.

Finalmente, el cuestionamiento acerca de la posibilidad de hacer una subdivisión del conjunto, con iguales condiciones, pero en un número mayor de partes, posibilitó el anticipar la idea de que los verdaderos problemas deben siempre permitir derivar preguntas nuevas (Bouvier, 1981, citado por Parra, 1990).

b) La diferencia de actitud de los estudiantes cuando se enfrentan a problemas que consideran «matemáticos» y a aquellos que clasifican como «juegos» o «de lógica» se puso de manifiesto cuando se les planteó la siguiente situación (modificada de De Guzmán, 1991):

> Al terminar una carrera, sus participantes manifestaron lo siguiente:
>
> *Antonio:* «Yo no fui cuarto»
>
> *Bernardo:* «Carlos llegó tercero»
>
> *Carlos:* «Antonio llegó inmediatamente después de Ernesto»
>
> *Daniel:* «Tres llegaron antes que yo»
>
> *Ernesto:* «Daniel no ganó»
>
> Si se sabe que, por alguna extraña razón, los dos primeros clasificados (y sólo ellos) mintieron, determinar la posición en que los corredores llegaron a la meta.

Estos nuevos problemas permitieron enfrentar al estudiante a algo apenas asociado a su sistema de creencias: el papel que la experimentación puede desempeñar en el proceso de resolución de un problema matemático.

El nivel de intercambio de ideas y de participación de los estudiantes en la resolución de este problema en comparación con el primero, resultó considerablemente mayor, lo cual no impidió que el análisis resultara errático e incompleto. Sin embargo, ello no fue advertido por los estudiantes. En particular, cuando varios llegaron a una misma distribución en la posición de los corredores que era compatible con las condiciones del problema, asumieron esta coincidencia como una forma de comprobación de la pertinencia de la solución encontrada. Esto explica las muestras de perplejidad que se manifestaron en el grupo cuando un estudiante mostró una distribución de posiciones diferente a la que antes había aparecido. Fue precisamente, en el momento en que los estudiantes defendieron ante el colectivo sus respectivas soluciones, que se pusieron en evidencia las insuficiencias en el proceso de razonamiento, fundamentalmente por la incompletitud del análisis casuístico realizado.

La observación de cómo los estudiantes se resistían a aceptar la diversidad de posibilidades en la distribución final de posiciones de los corredores nos sirvió para corroborar lo arraigada que pueden estar en los estudiantes ciertas convicciones sobre la resolución de problemas matemáticos. Llegaron al punto de considerar que el problema debía considerarse mal planteado debido a la no unicidad de su solución.

La vivencia resultó todavía más impactante cuando se exhibieron nuevas soluciones bajo la interpretación, en términos estrictamente lógicos, de la afirmación «Tres llegaron antes que yo», también válida para el corredor que llegó en quinto lugar. Algunos estudiantes manifestaron, incluso, sentirse insatisfechos ante lo «primitivo» de la forma de realizar el análisis, «sin la utilización de ecuaciones o algo similar, más matemático».

c) Diversos autores (Puig y Cerdán, 1996; Santos, 1997) reconocen la conveniencia de que, en ocasiones, el maestro intente resolver, frente a sus alumnos, problemas que sean nuevos para él, como una forma realista de ilustración de la trayectoria cognoscitiva que recorre el experto al llevar a cabo la actividad de resolución de un problema.

En el desarrollo de la experiencia esta ocasión se presentó cuando un alumno planteó al profesor el siguiente problema, totalmente desconocido para él:

> Encontrar todos los números enteros a, b, c y d, con $a < b < c < d$, tales que
>
> $$\frac{abc}{(a-1)(b-1)(c-1)} = d$$

Se decidió posponer la discusión de la resolución del problema en el aula para la siguiente sesión de trabajo, dejando propuesta la tarea a la totalidad del colectivo (incluido el profesor). Aun así, esta situación, ya desde este momento inicial, permitió la reflexión en torno al papel del docente en este tipo de actividad y a las valoraciones que sobre el mismo generalmente poseen los estudiantes.

Cuando en la próxima sesión se discutieron las vías de solución propuestas por los estudiantes, pudo constatarse que sólo aquellos que poseían una experiencia previa en la resolución de problemas matemáticos (por haber sido entrenados para su participación en competencias a diferentes niveles) pudieron aportar alguna alternativa promisoria que condujera a la solución del problema planteado. Ello permitió poner de manifiesto ante el grupo la dependencia del éxito en el desempeño de esta actividad de la especificidad del entrenamiento recibido.

Sin embargo, posiblemente la vivencia más rica se obtuvo cuando uno de los estudiantes, con particular predilección y destreza en el uso de las computadoras, planteó haber elaborado un programa de experimentación numérica cuya aplicación le había aportado infinidad de cuádruplos (a, b, c, d) que daban solución al problema. La discusión de la solución aportada por el docente, en la que sólo aparecía un número finito de tales cuádruplos, puso en evidencia dos aspectos de suma importancia y con una fuerte interrelación dialéctica: el trascendental apoyo que los dispositivos computacionales pueden brindar al desarrollo de la actividad de experimentación en Matemática y, al mismo tiempo, la necesidad del control de los resultados obtenidos con estas formas de experimentación a través de otras vías.

Conclusiones

Las conocidas etapas en el proceso de resolución de problemas identificadas por Polya presuponen implícitamente, en el sujeto, un cierto acondicionamiento que actúa como catalizador en el desarrollo de dicho proceso.

El acondicionamiento adecuado para la resolución de problemas matemáticos contempla, en su concepción más abarcadora, no solamente un conocimiento matemático debidamente estructurado, sino también un buen desarrollo de habilidades metacognitivas propias del trabajo en Matemática y de la actividad específica de resolución de problemas, lo que incluye una disposición intelectual y emocional que permita al individuo enfrentar y superar los múltiples escollos que, por lo general, tal actividad implica.

La experiencia que se aporta en el presente trabajo proporciona una alternativa de acción didáctica sobre esta importante componente de la actividad de resolución de problemas en períodos de tiempo relativamente cortos y grupos de estudiantes con un sistema de creencias no siempre acordes con lo que significa resolver problemas en Matemática.

El desarrollo de la experiencia mostró que se producen cambios significativos en la actitud de los estudiantes (y de los profesores), cuando la actividad de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas se lleva a cabo bajo

La experiencia que se aporta en el presente trabajo proporciona una alternativa de acción didáctica sobre esta importante componente de la actividad de resolución de problemas en períodos de tiempo relativamente cortos y grupos de estudiantes con un sistema de creencias no siempre acordes con lo que significa resolver problemas en Matemática.

«reglas del juego» diferentes de aquellas en que habitualmente se desarrollan las asignaturas tradicionales, a saber:

- la ausencia de exámenes en el sentido acostumbrado del término;
- la amplia posibilidad de discusión y emisión de opiniones por parte de los estudiantes y los profesores;
- el trabajo con problemas no enmarcados en una teoría determinada y, por tanto, no sujetos a una «enseñanza» previa (esto impide «culpar» a la ausencia de conocimientos de los pobres desempeños en el proceso resolutivo);
- el enfrentamiento del error sin sensación de «culpa» para el estudiante y de «ofensa» para el profesor.

Estos cambios de actitud se manifiestan en:

- una revelación más espontánea de los bloqueos y creencias de los estudiantes en relación con lo que significa «hacer matemática» y «resolver problemas matemáticos»;
- la creación de un clima de colaboración e integración que trasciende el distanciamiento acostumbrado entre estudiantes y profesor;
- mayor receptividad de los estudiantes a los consejos y recomendaciones.

Los autores consideran que el «Seminario de Problemas» provee de un espacio vivencial apropiado para crear en los estudiantes las aptitudes básicas, sobre todo desde el punto de vista emocional y afectivo, necesarias para afrontar la resolución de problemas matemáticos. Pero, como todo proceso de alfabetización, éste no es más que el inicio del desarrollo educativo del estudiante en relación con esta actividad. Se ha comprobado que el entrenamiento del uso de las estrategias determinadas en la resolución de problemas está fuertemente condicionado por el contenido específico y que este conocimiento no se transfiere con facilidad de unos dominios a otros (Schoenfeld, 1985). Por ello el entrenamiento en estas estrategias debe ser objeto de estudio en cada una de las disciplinas matemáticas particulares. Las asignaturas tradicionales del currículo pueden ser desarrolladas trabajando en un ambiente problemático, mediante un uso sistémico de diferentes tipos de problemas (Núñez, 1999; Sánchez y Valdés, 1999). En términos generales, ello significa una reconceptualización del papel que la resolución de problemas debe desempeñar en cada una de estas asignaturas.

Se ha comprobado que el entrenamiento del uso de las estrategias determinadas en la resolución de problemas está fuertemente condicionado por el contenido específico y que este conocimiento no se transfiere con facilidad de unos dominios a otros.

Roberto Núñez
Concepción Valdés
Mayra Solana
Universidad de la Habana

Bibliografía

BARUK, S. (1985): *L'Age du Capitaine*, Éditions du Seuil.

CALLEJO, M.L. (1996): «Evaluación de procesos y progresos del alumnado en la resolución de problemas», *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, n.° 8.

COLECTIVO DE AUTORES (1991): *Tendencias Pedagógicas Contemporáneas*, CEPES, Habana.

D'AMORE, B. y R. ZAN (1995): «Mathematical Problem Solving», *Italian Research in Mathematics Education: 1988–1995*.

DE GUZMÁN M., B. R. HODGSON, A. ROBERT y V. VILLANI (1998): «Difficulties in the Passage from Secondary to Tertiary Education», en: *Proceedings of the international Congress of Mathematicians*, Berlin.

DE GUZMÁN, M. (1991): *Para Pensar Mejor*, Editorial Labor, Madrid.

DELGADO, R. (1999): *La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Dos elementos fundamentales para lograr su eficacia: la estructuración sistémica del contenido de estudio y el desarrollo de las habilidades generales matemáticas*, Tesis en opción al grado de Doctor en Ciencias Pedagógicas, Instituto Superior Politécnico «José Antonio Echeverría».

GÓMEZ-CHACÓN, I.M. (1998): «¿Es la actividad matemática algo emocional?», *La Gaceta,* vol. 1, n.° 3

LESTER, F. K. Jr. (1994): «Musing About Research on Mathematical Problem Solving: 1970-1994», *Journal for Research in Math*. vol. 25, 660-675.

NOIRFALISE, R.(1991): «Connaissances ou capacites?», *REPERES IREM*, n.° 5.

NÚÑEZ R. (1999), *La Problematización del Contenido en el Proceso de Formación del Licenciado en Matemática en Cuba*, Tesis Doctoral, Universidad de la Habana.

PARRA, B. M. (1990): «Dos concepciones de resolución de problemas de matemáticas», *Educación Matemática*, vol. 2, n.° 3.

POLYA, G. (1962-65): *Mathematical Discovery, vol I y II,* Wiley & Sons.

POLYA, G. (1974): *Como plantear y resolver problemas*, Trillas, Mexico.

POZO MUNICIO, J. I. (coordinador) (1994): *La Solución de Problemas*, Santillana.

PUIG, L. y F. CERDÁN (1996): «Un curso de heurística matemática para la formación del profesorado», *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, n.° 8.

SÁNCHEZ C. y C. VALDÉS (1999): «Por un enfoque histórico-problémico en la Educación Matemática», *Ciencias Matemáticas*, vol. 17, n.° 2.

SÁNCHEZ C. y C. VALDÉS (1997): «Ilustración del uso de la Historia de la Matemática en una enseñanza centrada en problemas», *Educación Matemática,* vol. 9, n.° 3.

SANTOS TRIGO, L. M. (1997): *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*, Grupo Editorial Iberoamericana.

SCHOENFELD, A. H. (1985): *Mathematical Problem Solving*, Academic Press.

SCHOENFELD, A.H. (1989): «Problem Solving in Context(s)», en R. I. Charles y E. A. Silver (ed.): *The Teaching and Assesing of Math. Prob. Solving,* vol. 3, NCTM.

SUMA 38

noviembre 2001, pp. 47-52

Sumas de Riemann con Sistemas de Cálculo Simbólico

Lorenzo Javier Martín García
Juan Antonio Velasco Mate

En este trabajo se utiliza el Sistema de Cálculo Simbólico *Maple* para ilustrar el concepto de límite de las sumas de *Riemann* de una función real y continua en un intervalo compacto, resaltando que aunque la interpretación geométrica sea muy clara, el cálculo mediante la propia definición es prácticamente imposible en la mayoría de los casos aunque se disponga de una potente herramienta.

ARTÍCULOS

La integral definida

$$\int_a^b f(x)dx$$

de una función real, continua y no negativa, *f*, en un intervalo cerrado y acotado, $[a, b]$, coincide con el área del recinto limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas paralelas al eje de ordenadas que pasan por los extremos del intervalo considerado. Sin embargo, la definición de la integral como límite de las correspondientes sumas de *Riemann* presenta serios problemas conceptuales puesto que, al no ser numerable el número de particiones de un intervalo no se habla exactamente del límite de una sucesión ni tampoco del de una función, porque para cada partición se pueden realizar sumas diferentes sin más que variar el punto escogido en cada subintervalo generado por ella.

En este trabajo se utiliza el Sistema de Cálculo Simbólico *Maple* para ilustrar el concepto de límite de las sumas de *Riemann* de una función real y continua en un intervalo compacto, resaltando que aunque la interpretación geométrica sea muy clara, el cálculo mediante la propia definición es prácticamente imposible en la mayoría de los casos aunque se disponga de una potente herramienta. Por ello, no se puede prescindir de las propiedades teóricas, como la integrabilidad de funciones continuas, que aseguren parcialmente el éxito de los cálculos realizados o, en su defecto, permitan una interpretación lo más ajustada posible a la realidad.

Integral de Riemann

Dado un intervalo compacto $[a, b]$, se llama *partición* de $[a, b]$ a una secuencia finita de puntos, $P = \{x_i: i = 0, 1, \dots, n\}$, que verifican $a = x_0 < x_1 \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

Evidentemente, dos puntos consecutivos, x_i y x_{i+1}, de una partición generan un subintervalo de longitud $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. A la mayor de las longitudes de los subintervalos de una partición P se le llama *malla* de P y se denota

$$\|P\| = \max\{\Delta x_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$$

En la figura 1 se representa la partición $P = \{-2, -0{,}5, 0{,}7, 1{,}5, 2, 2{,}3, 3\}$ del intervalo $[-2, 3]$, observándose inmediatamente que su malla es $||P|| = 1{,}5$.

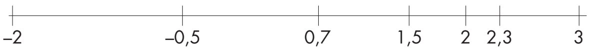


Figura 1. Una partición del intervalo $I = [-2, 3]$

Si f es una función real definida en el intervalo $[a, b]$ y $P = \{x_i, i=0, 1, \ldots, n\}$, es una partición de dicho intervalo, se llama *suma de Riemann de f* relativa a la partición P a toda suma del tipo

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

donde cada c_i es un elemento cualquiera del intervalo $[x_i, x_{i+1}]$.

El poder elegir libremente los puntos de evaluación, c_i, permite construir diversas sumas de *Riemann* una vez fijadas la función, el intervalo y la partición. Una posibilidad consiste en tomar como puntos de evaluación a todos los elementos de la partición menos el último. Así pues, si consideramos la función $f(x) = xe^x$, el intervalo $[0,1]$, la partición $P = \{x_i = i/16 : i = 0, 1, \ldots, 16\}$, que origina la división de $[0, 1]$ en 16 subintervalos de igual longitud, y los puntos de evaluación $c_i = x_i$ con $i = 0, 1, \ldots, 15$, la suma de *Riemann* correspondiente es

$$\frac{1}{15}\sum_{i=0}^{14}\frac{1}{15}\, i e^{\frac{1}{15}i} = 0{,}91103356147763949960$$

La representación gráfica de la figura 2 proporciona una interpretación geométrica de esta suma: se aproxima al valor del área, A, de la región plana comprendida entre la función $f(x)$ y el intervalo $[0, 1]$; para ello, se adosan rectángulos cuyo área puede calcularse fácilmente. En este caso, además, puede deducirse que $S(f, P) < A$ y que se ha calculado –y representado– la menor de las sumas asociadas a P porque la función f es creciente y está evaluada en los extremos inferiores de los subintervalos.

La pregunta que surge de forma natural es: ¿se puede obtener el área A considerando particiones muy pequeñas? De forma visual, las utilidades gráficas de los Sistemas de Cálculo Simbólico permiten realizar animaciones que aclaran todo tipo de dudas. Sin embargo, para poder responder matemáticamente a esta pregunta, se necesita fijar sin ambigüedades el significado exacto de «particiones muy pequeñas». Por ello se introduce el concepto de límite de sumas de *Riemann*.

De forma visual, las utilidades gráficas de los Sistemas de Cálculo Simbólico permiten realizar animaciones que aclaran todo tipo de dudas.

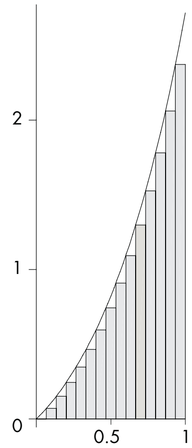


Figura 2. Una de las muchas sumas de *Riemann* de $f(x) = xe^x$

Se dice que el número real I es el *límite* –cuando la malla de P tiende a 0– de las sumas de Riemann de la función f en el intervalo $[a, b]$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que cualquier partición de $[a, b]$, P, cuya malla sea menor que δ verifica $|S(f, P) - I| < \varepsilon$, independientemente de los puntos de evaluación que se escojan para $S(f, P)$. Cuando esto sucede,

$$I = \lim_{\|P\| \to 0} S(f, P) = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Cuando existe el límite de sus sumas de *Riemann* se dice que la función es *integrable* en el intervalo considerado en el sentido de *Riemann* y al límite de las sumas se le llama *integral definida* de f en el intervalo $[a, b]$. La notación habitual es

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Si, además, la función f es no negativa, la integral coincide con el área comprendido entre la función y el eje de abscisas.

Cálculo exacto de sumas de Riemann

Aunque para dilucidar si una función es integrable o para demostrar los resultados teóricos resulta necesaria e imprescindible, la definición dada de integral de *Riemann* es un ejemplo no infrecuente en las Matemáticas de descripción completamente inútil desde el punto de vista operacional. El cálculo de integrales definidas siempre se realiza mediante la regla de *Barrow* –cuando es posible encontrar una función primitiva–, mediante referencia a funciones conocidas –como la función Γ– o mediante métodos numéricos. En muy raros casos se calculan las sumas de *Riemann* y mucho menos su límite, ni siquiera para encontrar una aproximación numérica razonable.

Es cierto que la definición dada remite a la comprobación de ciertas propiedades sin proporcionar ningún mecanismo de cálculo. Sin embargo, habiendo asegurado la integrabilidad de la función, si se tiene la suerte de encontrar una sucesión de particiones cuya malla tendiera a 0 para la que se pudieran calcular tanto las sumas de *Riemann* como el límite de la sucesión numérica que originan, se habría calculado la integral debido a la unicidad de este valor.

Los Sistemas de Cálculo Simbólico pueden utilizarse como herramienta para la realización de cálculos de este tipo. En particular, *Maple* dispone de comandos específicos que calculan simbólica y numéricamente algunas sumas de *Riemann*. Concretamente leftsum, middlesum y rightsum proporcionan el valor de las sumas de *Riemann* obtenidas al considerar respectivamente como punto de evaluación el extremo inferior, el punto central y el extremo superior de cada subintervalo originado por una partición formada por puntos equiespaciados.

Aplicando estas utilidades a la función anteriormente considerada, $f(x) = xe^x$ en el intervalo [0, 1], calculando su valor y simplificando[1], se obtienen las siguientes expresiones:

$$\mathrm{SuIz}(m) = \frac{1}{m^2}\sum_{i=0}^{m-1} i e^{i/m} = \frac{e^{(1+m)/m}m + e^{1/m} - em - e^{(1+m)/m}}{\left(e^{1/m}-1\right)^2 m^2}$$

$$\mathrm{SuCe}(m) = \frac{1}{m^2}\sum_{i=0}^{m-1}\left(i+\frac{1}{2}\right)e^{(2i+1)/2m} = \frac{e^{3/2m} - e^{(3+2m)/2m} + 2e^{(3+2m)/2m}m + e^{1/2m} - 2e^{(1+2m)/2m}m - e^{(1+2m)/2m}}{2\left(e^{1/m}-1\right)^2 m^2}$$

$$\mathrm{SuDe}(m) = \frac{1}{m^2}\sum_{i=0}^{m} i e^{i/m} = \frac{e^{(2+m)/m}m + e^{1/m} - 2e^{(1+m)/m}m - e^{(1+m)/m}}{\left(e^{1/m}-1\right)^2 m^2}$$

Afortunadamente en esta situación, *Maple* ha sido capaz de desarrollar los sumatorios y encontrar una expresión genérica que sólo depende del número de subintervalos asociados a la partición. Es evidente que esto no sucede en todos los casos; la respuesta habitual del programa es la notación simbólica de la suma, como sucede con la función

$$g(x) = \frac{1}{3+2\cos x}$$

en el intervalo [–π/2, π/2] donde la respuesta ofrecida para la suma lateral izquierda no es otra que

$$\frac{\pi}{m}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{1}{3+2\,\mathrm{sen}(i\pi/m)}$$

Puesto que la función $f(x)$ es continua, también es integrable en el sentido de *Riemann* en cualquier intervalo compacto de la recta real. Por tanto, parece razonable pensar que si se puede calcular el límite cuando m tiende a infinito de SuIz, SuCe o SuDe, éste tiene que coincidir con la integral de la función f entre 0 y 1. De nuevo *Maple* resulta una ayuda eficaz porque es capaz de calcular exactamente el límite de estas tres expresiones[2]

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m^2}\sum_{i=0}^{m-1} i e^{i/m} = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m^2}\sum_{i=0}^{m-1}\left(i+\frac{1}{2}\right)e^{(2i+1)/2m} = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m^2}\sum_{i=0}^{m} i e^{i/m} = 1$$

Obviamente, como la función f es no negativa, se ha calculado tanto el valor de la integral como el área comprendido entre la función y el eje de abscisas. La comprobación del resultado es inmediata porque mediante cálculo directo[3]

$$\int_0^1 xe^x\,dx = 1$$

Cálculo numérico de sumas de Riemann

Debido a la dificultad de encontrar sucesiones cuyo término general pueda manejarse con relativa facilidad, lo que permitiría calcular su límite con posterioridad, surge la idea de considerar el valor numérico de la sucesión de números reales asociada a una determinada partición e intentar establecer una tendencia hacia algún valor concreto.

Para comprobar el alcance de esta estrategia y aprovechando que *Maple* maneja las tablas con relativa facilidad,

1 La sentencia *Maple* que calcula la suma lateral izquierda es Sulz:=simplify(value(student[leftsum](x*exp(x), x=0..1,m)));

2 La sentencia *Maple* empleada para el límite de la suma lateral izquierda es limit(Sulz,m=infinity);

3 La sentencia *Maple* que origina exactamente esta igualdad es Int(x*exp(x),x=0..1)=int(x*exp(x),x=0..1);

se ha construido la tabla donde –en sus columnas 2, 3 y 4– se han calculado con diez dígitos significativos los valores de las sumas de *Riemann* laterales y centradas[4] de la función $f(x) = xe^x$ en el intervalo [0, 1] para $m = 100, 200, \ldots, 2000$ subintervalos, representados en la primera columna. Asimismo, se ha diseñado una función no disponible como comando *Maple* y se le ha asignado el nombre SumaAleatoria. Esta función, que toma como argumentos la función, los extremos de un intervalo y el número natural que representa el número de subintervalos deseados, evalúa una suma de *Riemann* aleatoria basándose en una partición equiespaciada y eligiendo aleatoriamente los puntos de evaluación[5]. Los resultados de aplicar SumaAleatoria aparecen en la última columna de la tabla 1.

A la vista de estos datos pueden aventurarse que el límite buscado es 1. Sin embargo, el número de elementos de la sucesión es muy alto ya que, salvo para las sumas centrales –donde la aproximación se realiza pronto y rápidamente–, las otras sucesiones convergen lentamente, téngase en cuenta que en el término 2000 la diferencia entre el valor exacto y el aproximado es superior a 10^{-4}.

También queda palpablemente reflejado que, por tratarse de una función creciente en el intervalo de integración, las sumas que consideran el extremo inferior del intervalo proporcionan un valor menor que cualquier otra elección de puntos de evaluación y las sumas que consideran el extremo superior proporcionan el mayor valor posible para una partición dada. Obviamente las sumas por la izquierda crecen a medida que aumenta el número de subintervalos mientras que las sumas por la derecha decrecen hasta converger ambas en un mismo punto. Las sumas centrales y las obtenidas aleatoriamente se encuentran entre las anteriores; las centrales van creciendo, mientras que las aleatorias oscilan de forma no controlada.

Llama la atención la importancia de escoger buenos puntos de evaluación. En este caso, la elección de los puntos intermedios es manifiestamente mejor que las otras aunque –o tal vez por eso– su expresión exacta es más complicada. Esta fragilidad supone una importante limitación a la hora de comparar esta técnica con las habitualmente empleadas para la evaluación numérica de integrales definidas ya que las interpolatorias o las fórmulas de cuadratura son mucho más robustas, sencillas y eficaces.

Las diferencias existentes entre los cálculos realizados tienen su clara interpretación geométrica. En la figura 3 aparecen los 6 rectángulos[6] asociados a la función $f(x) = xe^x$ y originados por una partición de 7 elementos equiespaciados del intervalo [0, 1] cuando se escogen de forma diferente los puntos de evaluación. Conviene resaltar que las cuatro gráficas son exactas, queriendo decir con ello que no tienen ningún tipo de deformación ni de variación de escala, salvo las originadas por los mecanismos de impresión, y que se ha escogido el intervalo [0, 1] y el número 6 para que las representaciones reales puedan verse tal como son y no como aproximaciones trucadas de lo que se quiere reflejar. Si se escoge un intervalo más amplio o se aumenta considerablemente el número de elementos de la partición, los dibujos que se obtienen no son significativos. Queda patente que la sumas de las área de los rectángulos de la gráfica de la izquierda es inferior al área buscada y lo será siempre que escojamos como puntos de evaluación los extremos inferiores de los subintervalos; lo contrario ocurre en la tercera gráfica, donde se calcula el área por exceso. Como ya se dijo, esto ocurre porque la función f es creciente. En las dos gráficas restantes se produce un cierto equilibrio entre las partes que sobrepasan al área y las que no la

4 El comando *Maple* utilizado para la primera suma lateral izquierda es evalf(student[leftsum](x*exp(x), x=0..1, A1));

5 Su código *Maple* es

```
SumaAleatoria:=(f,a,b,n)->
sum(f(a+(b-a)
/n*(j+evalf(rand()/10^ 12)))
*(b-a)/n,j=O..n-1);
```

6 Alguno no aparece porque su altura es 0.

Subint.	*Sumas Izquierda*	*Sumas Centro*	*Sumas Derecha*	*Sumas Aleatorias*
100	0,9864455621	0,9999815144	1,013628380	1,006670401
200	0,9932135385	0,9999953785	1,006804948	0,9974160425
300	0,9954736382	0,9999979459	1,004534578	0,9958276244
400	0,9966044585	0,9999988448	1,003400163	1,003131199
500	0,9972831970	0,9999992606	1,002719761	0,9997478216
600	0,9977357924	0,9999994867	1,002266262	1,001906206
700	0,9980591249	0,9999996230	1,001942385	0,9986274028
800	0,9983016515	0,9999997111	1,001699504	0,9997598156
900	0,9984902998	0,9999997717	1,001510613	0,9993130967
1000	0,9986412288	0,9999998151	1,001359511	1,000605482
1100	0,9987647227	0,9999998473	1,001235888	0,998995799
1200	0,9988676391	0,9999998716	1,001132874	1,000614129
1300	0,9989547253	0,9999998907	1,001045711	0,998641143
1400	0,9990293736	0,9999999057	1,000971004	1,002057526
1500	0,9990940707	0,9999999180	1,000906258	1,001261332
1600	0,9991506812	0,9999999275	1,000849608	1,001342628
1700	0,9992006335	0,9999999359	1,000799622	0,998336620
1800	0,9992450356	0,9999999429	1,000755192	1,001074974
1900	0,9992847653	0,9999999490	1,000715440	0,998644493
2000	0,9993205220	0,9999999540	1,000679663	0,999282447

Tabla 1. Valores de algunas sumas de Riemann de $f(x) = xe^x$ en [0, 1]

cubren; siendo menos ajustado en la gráfica de la derecha y más ponderado cuando se toma como referencia el punto central de cada subintervalo.

Situaciones desfavorables

Los resultados anteriores podrían hacer pensar que con una fuerte herramienta de cálculo, se obtendrían buenas aproximaciones. Sin embargo, si se realiza un pequeño cambio en las hipótesis, la situación puede variar considerablemente.

En la tabla 2 se han realizado los mismos cálculos que en la tabla 1 manteniendo la función, $f(x) = xe^x$, pero tomando el intervalo [0, 3] en lugar del [0, 1]. Como se sabe, por los resultados anteriores, que las sumas centrales proporcionan una buena aproximación de

$$\int_0^3 xe^x\,dx$$

si hubiera que escoger entre los datos de la tabla, se elegiría

$$\int_0^3 xe^x\,dx \approx 41{,}17106642$$

aunque ninguna de las cuatro sucesiones numéricas da pistas sobre el posible valor de la integral. En el caso anterior se iba buscando un número natural, pero en este caso es posible que el valor sea un número irracional, lo que dificulta su localización.

El valor de la diferencia

$$\text{SumaDerecha}_{2000} - \text{SumaIzquierda}_{2000} = 0{,}09038491,$$

es una cota del error cometido al tomar como valor de la integral el elemento 2000 de cualquiera de las sucesiones asociadas a las sumas de *Riemann*. Aunque esta magnitud pueda reducirse a la mitad escogiendo la media entre los valores extremos de las dos sucesiones, hay que calificarla de «elevada» con relación al recorrido realizado en las sucesiones. En consecuencia, no resulta aconsejable seguir este procedimiento para el cálculo aproximado de la integral.

Sin embargo, la búsqueda del valor exacto mediante el establecimiento del término general de las sucesiones, que a priori pudiera parecer menos aconsejable que el cálculo numérico, proporciona, en esta situación, mejores resultados.

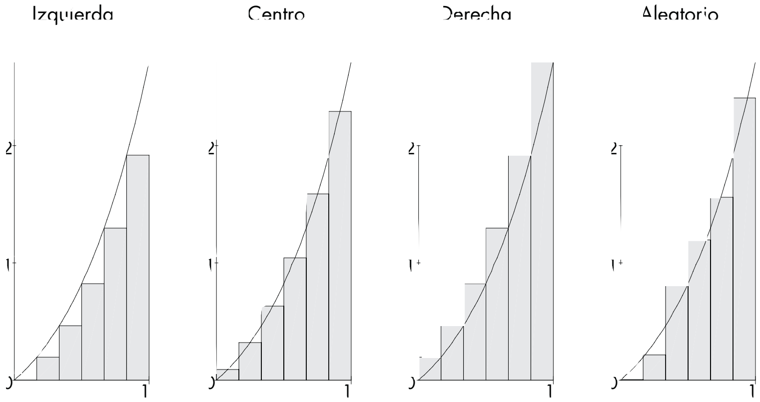


Figura 3. Representación gráfica de las diferentes sumas de Riemann empleadas

Subint.	Sumas Izquierda	Sumas Centro	Sumas Derecha	Sumas Aleatorias
100	40,27317522	41,16809862	42,08087355	41,48819931
200	40,72063692	41,17033002	41,62448608	41,43546319
300	40,87045198	41,17074326	41,47301808	41,24815555
400	40,94548347	41,17088788	41,39740805	40,94811994
500	40,99054204	41,17095484	41,35208170	41,22298900
600	41,02059762	41,17099120	41,32188067	41,22286389
700	41,04207398	41,17101313	41,30031660	41,29815116
800	41,05818566	41,17102736	41,28414799	41,22593895
900	41,07071963	41,17103710	41,27157500	41,11063036
1000	41,08074843	41,17104408	41,26151826	41,20275751
1100	41,08895492	41,17104924	41,25329113	41,13427644
1200	41,09579440	41,17105318	41,24643592	41,20997463
1300	41,10158221	41,17105625	41,24063592	41,14606081
1400	41,10654356	41,17105867	41,23566487	41,11747368
1500	41,11084368	41,17106062	41,23135690	41,12668747
1600	41,11460651	41,17106222	41,22758766	41,12868656
1700	41,11792683	41,17106355	41,22426202	41,16792869
1800	41,12087837	41,17106467	41,22130606	41,16850592
1900	41,12351931	41,17106560	41,21866133	41,20188985
2000	41,12589627	41,17106642	41,21628118	41,19908337

Tabla 2. Valores de algunas sumas de Riemann de $f(x) = xe^x$ en [0, 3]

Para particiones del intervalo [0, 3] con $m + 1$ elementos equiespaciados y para la función $f(x) = xe^x$, *Maple* proporciona directamente los siguientes valores

$$\text{SuIz}(m) = \frac{9}{m^2}\sum_{i=0}^{m-1} ie^{3i/m} = \frac{9}{m^2}\,\frac{-e^{3\frac{1+m}{m}}m + e^{3\frac{1}{m}} + e^{3}m - e^{3\frac{1+m}{m}}}{-e^{6\frac{1}{m}} + 2e^{3\frac{1}{m}} - 1}$$

$$\mathrm{SuCe}(m)=\frac{9}{m^2}\sum_{i=0}^{m-1}\left(\frac{2i+1}{2}\right)e^{(6i+3)/2m}=$$

$$=-\frac{9\cdot\left(e^{9/2m}-e^{(9+6m)/2m}+2e^{(9+6m)/2m}m+e^{3/2m}-2e^{(3+6m)/2m}m-e^{(3+6m)/2m}\right)}{2m^2\left(-e^{6/m}+2e^{3/m}-1\right)}$$

$$\mathrm{SuDe}(m)=\frac{9}{m^2}\sum_{i=0}^{m} ie^{3i/m}=\frac{9}{m^2}\,\frac{e^{3\frac{2+m}{m}}m+e^{3\frac{1}{m}}-e^{3\frac{1+m}{m}}m-e^{3\frac{1+m}{m}}}{e^{6/m}-2e^{3/m}+1}$$

Aunque estas expresiones puedan parecer largas y complicadas, puede calcularse su límite cuando el número de subintervalos, m, tiende a infinito:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{9}{m^2}\sum_{i=0}^{m-1} ie^{3i/m}=\lim_{m\to\infty}\frac{9}{m^2}\sum_{i=0}^{m-1}\left(\frac{2i+1}{2}\right)e^{(6i+3)/2m}=\lim_{m\to\infty}\frac{9}{m^2}\sum_{i=0}^{m} ie^{3i/m}=1+2e^3$$

Como era de esperar, el resultado es un número irracional. Su valor expresado con 10 dígitos significativos es

$$1+2e^3=41{,}17107384$$

Si se hubiera pedido a *Maple* que proporcionara el valor exacto y numérico de la integral, resultaría[7]

$$\int_0^3 xe^x\,dx=1+2e^3\approx 41{,}17107384$$

7 Las sentencias *Maple* utilizadas para la realización de estos cálculos son
Int(x*exp(x),x=0..3)=inte(x*exp(x),x=0..3);
y
Int(x*exp(x),x=0..3)=evalf(inte(x*exp(x),x=0..3));

Conclusiones

Dentro de unos límites razonables, el Sistema de Cálculo Simbólico *Maple* es capaz de calcular el valor numérico de cualquier suma de *Riemann* siempre que se especifique la función, el intervalo, la partición y los puntos de evaluación. Este hecho no es muy relevante porque, al fin y al cabo, se trata de realizar una suma finita –más o menos grande– de productos numéricos.

En el ejemplo presentado, también es capaz de encontrar la expresión del término general de algunas sucesiones obtenidas al tomar como puntos de evaluación los extremos o el centro de los subintervalos originados por particiones equiespaciadas y con malla tendiendo a cero. Este término general ha permitido calcular de forma simbólica el único valor posible del límite de las sumas de *Riemann*. Como la función escogida es continua y, por consiguiente, integrable, el valor obtenido es la integral definida de la función dada en el intervalo considerado. El cálculo directo de la integral sirve para corroborar el resultado. Es evidente que este proceso no siempre proporciona buenos resultados aunque se maneje una función integrable.

La evolución numérica de sucesiones de las sumas superior e inferior de *Riemann* proporciona siempre cotas del valor buscado, pero la convergencia es más bien lenta con relación al número de elementos que debe tener una partición para que la aproximación sea razonablemente buena. En cualquier caso, conocidas estas cotas, también se conoce una cota del error cometido al tomar como valor el punto entre medias de ambos.

Desde el punto de vista docente, las utilidades gráficas, numéricas y simbólicas de los Sistemas de Cálculo Simbólico representan una ayuda inestimable para explicar el concepto de integral de *Riemann*. La posibilidad de experimentar diferentes situaciones (modificar la función, considerar diferentes intervalos de integración y diferentes particiones para cada intervalo, cambiar los puntos de evaluación, calcular los valores numéricos de las sumas…) de una manera muy simple y sin necesidad de confeccionar programas específicos permite al alumno descubrir los puntos donde se encuentran las dificultades teóricas y de cálculo de la integral de *Riemann*.

Lorenzo J. Martín
ETS Ingenieros
de Telecomunicación.
Universidad Politécnica
de Madrid
Juan Antonio Velasco
IES Ángel del Alcázar
de Segovia.
Sociedad Castellano-Leonesa
de Profesores de Matemáticas

Bibliografía

AMILLO, F., R. BALLESTEROS, L. GUADALUPE y J. MARTÍN (1996): *Cálculo: Teoría, Problemas y Sistemas de Computación*, McGraw Hill, Madrid.

BALLESTEROS, L. y J. MARTÍN (2000) «Sistemas de Cálculo Simbólico y su docencia en el ámbito universitario», en *Conocimiento, método y tecnologías en la educación a distancia. Actas de las jornadas UNED-2000*, Universidad Nacional de Educación a Distancia, Palencia, 243-248.

BALLESTEROS, L. y J. MARTÍN (2000): «Sistemas de Cálculo Simbólico: ¿Herra-mienta de usuario final o sistema de ayuda en el aprendizaje?», en *VIII Congreso de Innovación educativa en Enseñanzas técnicas, Universidad del País Vasco», volumen 2*, San Sebastián, 357-368.

MARTÍN, J. y A. VELASCO (1999): «Los Sistemas de Computación Matemática como recurso didáctico de apoyo para la presentación del concepto de derivada», en *IX Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas, JAEM*, Matemáticas de ENCIGA, Septiembre, Lugo.

ROANES, L. y M. ROANES (1999): *Cálculos Matemáticos por ordenador con Maple V Release 5*, Rubiños, Madrid.

SUMA 38
noviembre 2001, pp. 53-67

El concepto de infinito actual

Una investigación acerca de las incoherencias que se evidencian en alumnos de bachillerato

Sabrina Garbin Dall'Alba
Carmen Azcárate

ARTÍCULOS

En este artículo presentamos parte de un trabajo de investigación acerca del concepto de infinito actual, realizado con estudiantes de 2.° de Bachillerato. Presentamos el trabajo realizado, resultados y conclusiones que parten del interés de: a) describir las limitaciones y explotar las oportunidades de comunicación que ofrecen los registros de representación presentes en los enunciados de los problemas planteados a los estudiantes; b) diseñar un instrumento que permita mostrar la coherencia en las respuestas de los estudiantes a los problemas; c) describir y distinguir los términos «inconsistencias» e «incoherencia» para describir y clasificar a los estudiantes según estos términos y d) describir lo que entendemos por «tarea de conexión»y reflexionar sobre su posible importancia en la actividad matemática.

CUANDO UTILIZAMOS la expresión «educación matemática» nos referimos principalmente a los fenómenos de enseñanza y aprendizaje que suceden en las aulas donde profesores y alumnos realizan actividades relacionadas con la disciplina «Matemáticas». En el marco de los departamentos universitarios del área de Didáctica de las Matemáticas se han desarrollado durante los últimos años diversas líneas de investigación que estudian diferentes aspectos de dichos fenómenos y que permiten abordarlos desde distintos enfoques.

El trabajo que presentamos a continuación es el resultado de una investigación[1] llevada a cabo durante el curso 1998-99 con los estudiantes de tres aulas de Segundo de Bachillerato de otros tantos institutos públicos ubicados en la provincia de Barcelona.

Marco teórico

El marco teórico de nuestro estudio tiene varias fuentes, de las que expondremos únicamente los rasgos esenciales de las más relacionadas con los aspectos que vamos a presentar en este artículo.

Cuando nos referimos al sistema educativo, es fácil delimitar la enseñanza primaria y la secundaria o el bachillerato apoyándonos en las edades y cursos establecidos en cada etapa. Sin embargo, cuando hablamos del pensamiento matemático es más difícil delimitar o establecer una separación significativa entre el pensamiento matemático elemental y el pensamiento matemático avanzado. Dos investigadores, David Tall y Tommy Dreyfus, han elaborado una teoría cognitiva con relación al desarrollo y crecimiento del pensamiento matemático avanzado y es el mismo Tall (1996) quien afirma que el lugar donde el pensamiento matemático elemental se convierte en avanzado no se ha definido con precisión. Sin embargo, se reconoce la existencia de una diferencia o discontinuidad entre ambos pensamientos, especialmente en cuanto a las características de su enseñanza y evaluación. Otros autores, como Aline y Schwarzenbergen (1991), comparan el pensamiento matemático avanzado con el elemental y señalan las siguientes tendencias:

- Enseñar una mayor cantidad de conceptos en menor tiempo.
- Enseñar con mayor frecuencia los contenidos del currículo de manera formal antes que el estudiante se haya familiarizado con ellos de manera informal.
- Enseñar conceptos que históricamente evolucionaron muy lentamente y, al mismo tiempo, exigir el aprendizaje de demostraciones estándar y la realización de construcciones mentales abstractas.
- Enseñar una mayor cantidad de conocimientos matemáticos y exigir la comunicación de los mismos y el aumento de estrategias de trabajo; esperar, además, que los estudiantes adquieran la habilidad de distinguir entre pensamiento matemático y metamatemático.

También se refieren a la dificultad de evaluar a los estudiantes en tiempos cortos y la de reducir las actividades a tareas elementales; de esta manera se debe facilitar una evaluación que tome en cuenta la comprensión, el análisis y la síntesis, y no sólo la reproducción de conocimientos por parte del estudiante.

Tall (1995) afirma que el paso del PME al PMA implica una transición significativa que requiere una reconstrucción cognitiva. Esta reconstrucción implica, por un lado, el paso de «describir» a «definir», y por otro, el paso de «convencer» a «demostrar». Se podría decir que los alumnos que se encuentran en la franja de edad de 16-20 años, aproximadamente, son los que están en esta época de transición; se trata de alumnos de Bachillerato y primeros cursos de Universidad. Los estudiantes a los cuales hemos planteado un cuestionario con cinco problemas se encuentran en la primera etapa de esta franja.

Es en la década de los años setenta y primeros años de los ochenta cuando se detecta la diferencia entre los conceptos concebidos y formulados por la matemática formal y las interpretaciones de los estudiantes. Tall y Vinner (1981) explicaron esta distinción y definieron los términos «concept image» y «concept definition» que nosotras llamamos *esquema conceptual* y *definición del concepto,* respectivamente (Azcárate, 1990). Inicialmente, Tall y Vinner describieron el esquema conceptual que tiene un alumno de un concepto matemático como toda la estructura cognitiva asociada al concepto, la cual incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos asociados a la noción matemática. También explican que el esquema conceptual no necesariamente es coherente en todo momento y que los alumnos pueden evocar imágenes contradictorias en momentos diferentes. Cuando hablan de la *definición del concepto* se refieren a una definición verbal, «una sucesión de palabras para especificar el concepto».

Tall y Vinner describieron el esquema conceptual que tiene un alumno de un concepto matemático como toda la estructura cognitiva asociada al concepto, la cual incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos asociados a la noción matemática.

Por otro lado, dada la naturaleza de los objetos matemáticos también es importante distinguir los objetos mentales y los objetos físicos. Los objetos matemáticos tienen un significado más abstracto y son de naturaleza distinta a los objetos visuales como percepciones de los objetos físicos del mundo exterior. Un ejemplo típico es el de los objetos matemáticos como punto y línea. En el mundo real, un punto es una marca de un lápiz no prolongada y con medida finita; sin embargo, en matemática, tal concepto es abstracto, tiene posición pero sin medida. Cuando nos referimos a la estructura cognitiva, decimos que el esquema conceptual usa el símbolo para conectar convenientemente procesos y relaciones; de esta manera, en la mente se tienen símbolos que se pueden manipular como objetos mentales, sin ser necesariamente objetos físicos.

Siguiendo el ejemplo anterior, se tiene entonces, que el punto y la línea, en sentido físico, son la representación semiótica de los objetos matemáticos punto y línea. En la actividad matemática es importante que se diferencie la representación del objeto del objeto matemático. El profesor Duval (1996, 1999) ha desarrollado una teoría cognitiva de las representaciones semióticas. Duval, al interrogarse sobre si los medios estructuralmente requeridos para que una persona pueda acceder a los objetos del conocimiento matemático, son diferentes o no, a los medios requeridos para acceder a los otros objetos de conocimiento (por ejemplo en botánica, astronomía, química, historia…), constata lo siguiente:

- La no accesibilidad de los objetos matemáticos fuera de un sistema semiótico aunque sea rudimentario. Los objetos matemáticos, no son

1 La investigación en cuestión es la tesis doctoral presentada por la profesora Sabrina Garbin en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Autónoma de Barcelona y dirigida por la profesora Carmen Azcárate, «Infinito actual: inconsistencias e incoherencias de estudiantes de 16-17 años», julio 2000.

objetos reales, como pueden ser los propios de las disciplinas como la biología o la física que pueden ser manipulables. «De aquí la necesidad de describir y aprender cómo funcionan ciertos sistemas de representación: representaciones de escritura decimal de los números, representaciones gráficas de formas (funciones o no), representaciones de la escritura literal y algebraica, representaciones que son las figuras en geometría…».

- La necesidad de no confundir nunca un objeto con su representación semiótica (un número y su escritura, un objeto geométrico y la figura que lo representa…).

Duval, considera dos características esenciales de la actividad matemática: el cambio y la coordinación de los registros de representación semiótica. Por ejemplo, si se consideran los registros de representación: lingüísticos (lenguaje natural, escritura algebraica, lenguaje formal) u otros registros (figuras geométricas, gráficos cartesianos, tablas, etc.) se entiende por cambio de registro de representación «a la conversión de la representación de alguna cosa en una representación de esta misma cosa en otro sistema semiótico». Por ejemplo, realizamos un cambio cuando al resolver un problema matemático usamos un gráfico cartesiano para representar una función y en el siguiente paso de la resolución, expresamos con una ecuación algebraica la misma función. Otro ejemplo es cuando trasformamos un enunciado en lengua natural a una ecuación (o viceversa). Por otro lado, como en el dominio del conocimiento matemático se movilizan diferentes registros de representación, también es necesario coordinarlos.

Ahora bien, así como se ha afirmado anteriormente que en el esquema conceptual asociado a un concepto matemático no siempre hay consistencia e incluso pueden aparecer conflictos al cambiar de registros, es decir al convertir una representación en otra, se pueden producir situaciones de congruencia o de incongruencia.

…surgió la necesidad de hablar de la naturaleza y el rol de la intuición en la actividad matemática y de determinar cuál debería ser la actitud de los profesores de matemática ante la relación existente entre el pensamiento intuitivo y analítico.

Con esto nos introducimos en el tema de las *inconsistencias*. Es evidente que la presencia de ideas inconsistentes en nuestros alumnos ha sido una situación que a ningún profesor de matemáticas ha dejado indiferente. El recurso a las inconsistencias detectadas en nuestros estudiantes, como medio para la mejor comprensión de algún concepto matemático, ha sido seguramente un motivo de alegría unas veces, pero otras muchas, ante los múltiples esfuerzos para erradicarlas nos habremos sentido frustrados e impotentes. Es probable que sepamos muy poco sobre ellas y sobre su rol en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, pero no podemos dudar de su importancia y tenemos que aprender a utilizarlas de la manera más eficaz.

En el año 1990, varios investigadores en Didáctica de la Matemática dedicaron un lugar especial al tema de las inconsistencias dedicando un volumen entero de la revista *Focus on Learning Problems in Mathematics*. No vamos a exponer aquí el conjunto de estas investigaciones que enriquecieron el conocimiento básico sobre este tema pero queremos resaltar el interés de la sinopsis y la clasificación presentadas por Tirosh (1990).

Finalmente, queremos hacer una breve referencia a la intuición matemática. Como profesores de matemáticas nos hemos ido acostumbrando a pensar en la intuición, dentro de la actividad matemática, como algo más que un sinónimo de *sentido común*. La importancia que ha tenido y tiene la noción de intuición en la Matemática, las Ciencias y la Educación Matemática, hizo que surgiera un gran interés por investigarla, especialmente considerando el conocimiento intuitivo como un camino básico, junto al analítico, en la actividad matemática. Debido a esta importancia surgió la necesidad de hablar de la naturaleza y el rol de la intuición en la actividad matemática y de determinar cuál debería ser la actitud de los profesores de matemática ante la relación existente entre el pensamiento intuitivo y analítico. Esto último ha sido el principal problema práctico que se planteó el profesor Fischbein (1982, 1998). Además de estas razones, a nosotras nos ha interesado la intuición por el tipo de problemas que hemos planteado a los estudiantes en que está presente el infinito actual, que no responde a una interpretación natural e intuitiva del infinito.

El concepto aristotélico de infinito es una noción potencial que dominó en la historia hasta la época cantoriana, habiendo tenido una gran influencia en el desarrollo de este concepto. Como ha explicado Fischbein (1982), este concepto potencial de infinito es el que responde a la interpretación natural intuitiva del infinito. «Un objeto potencialmente infinito (por ejemplo una línea que puede ser extendida indefinidamente) tiene un significado "conductual". Una operación potencialmente infinita también tiene un significado "conductual" (por ejemplo dividir indefinidamente un segmento). Un infinito actual no tiene un significado conductual, por tanto no es congruente con una interpretación intuitiva». En una palabra, el infinito actual es una noción contraintuitiva.

Objetivos del estudio

Los principales objetivos de la investigación que se presenta aquí se pueden resumir en los cuatro enunciados siguientes:

- Describir las «limitaciones y oportunidades» de los registros de representación presentes en los enunciados de los problemas planteados a los estudiantes.
- Diseñar un instrumento que permita mostrar la coherencia en las respuestas de los estudiantes a los problemas planteados y establecer lo que llamamos «líneas de coherencia».
- Describir y distinguir los términos «inconsistencia» e «incoherencia» para describir y clasificar a los estudiantes según estos términos.
- Describir lo que entendemos por «tarea de conexión» y reflexionar sobre su posible importancia en la actividad matemática y sus consecuencias didácticas.

Para poder abarcar estos objetivos decidimos explorar los esquemas conceptuales de los alumnos asociados a la noción de infinito actual contextualizado en los problemas que presentamos a continuación.

Los problemas seleccionados y aplicados a los alumnos

Para conocer las ideas de los alumnos y poner en evidencia el pensamiento más o menos consistente con respecto al concepto de infinito actual, elaboramos un cuestionario con cinco problemas cuya característica principal es que en todos está presente la misma noción matemática del infinito actual pero expresada en lenguajes matemáticos diferentes: geométrico, verbal, analítico, gráfico y algebraico.

Primer problema

Observa la figura 1.

Nos muestra un esquema en el que se biseca cada vez el segmento de la derecha, es decir los puntos M, N, O, P, son los puntos medios de los segmentos AB, MB, NB y OB respectivamente.

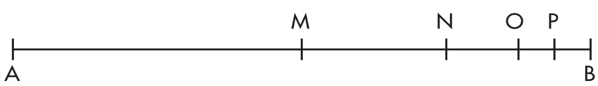


Figura 1

...el infinito actual es una noción contraintuitiva.

Si se siguen haciendo más y más bisecciones, ¿crees que es posible llegar a una situación en la que un punto de la bisección coincide con el punto B?

Explica tu respuesta.

Segundo problema

Se deja caer una pelota desde 2 metros de altura sobre una superficie horizontal. Cada vez que la pelota llega al suelo, tras caer desde una altura h, rebota hasta una altura h/2.

¿Podrías calcular la distancia total recorrida por la pelota? Explica tu respuesta.

¿Podrías decir cuántos rebotes hará la pelota? Explica tu respuesta.

Tercer problema

Considera la siguiente suma

$$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots + \ldots$$

¿Cuál crees que es el valor de esta suma? Explica tu respuesta.

Cuarto problema

La figura 2 representa la gráfica de una función

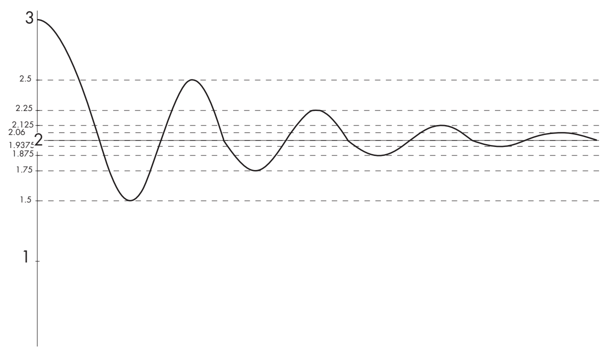


Figura 2

Describe lo que pasa con la función para valores muy grandes de x. *¿Podrías determinar el valor de la función cuando* x *se hace muy grande? Explica tu respuesta.*

Quinto problema

Considera la siguiente ecuación:

$$y = 1 + 1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + 1/2^4 + \ldots + 1/2^n + \ldots$$

¿Podrías decir para qué valor de n resulta y = 2? Explica tu respuesta.

Este cuestionario fue suministrado a 80 alumnos de 2.° de Bachillerato antes de que recibieran enseñanza sobre límites.

Al principio del artículo nos hemos referido a las representaciones semióticas. Podemos observar que cada problema, expresado en un lenguaje matemático distinto, presenta también un tipo de representación semiótica.

En el primer problema el lenguaje matemático usado es el geométrico y el registro de representación es una figura geométrica (segmento de recta).

En el segundo problema el lenguaje matemático usado es el verbal y el registro de representación semiótica es el lingüístico, la lengua natural.

En el tercer problema el lenguaje matemático usado es el analítico y el registro lingüístico es el numérico (suma infinita).

En el cuarto problema el lenguaje matemático usado es el gráfico y el registro de representación es el gráfico cartesiano (función cartesiana).

En el quinto problema el lenguaje matemático usado es el algebraico y el registro lingüístico es la escritura algebraica (ecuación con suma infinita).

Con relación a los problemas, podemos decir que los tres primeros son una versión actualizada de la primera paradoja de Zenón (diferenciada por el contexto), llamada *Paradoja de la dicotomía*. En la primera pregunta, la paradoja deriva de considerar que entre dos puntos cualesquiera de una recta siempre hay otro punto y entonces un segmento cualquiera contiene una sucesión de puntos decreciente. Numéricamente, sería la sucesión infinita (si consideramos el segmento [0,1]) 1, 1/2, 1/4, ..., que conforma la serie de la pregunta 3. Una respuesta correcta de esta pregunta 3 lleva implícita una respuesta correcta a la primera pregunta. La segunda pregunta, igual que la versión de la primera paradoja de Zenón, enfrenta al estudiante con una situación que, en nuestro mundo concreto y finito, es impensable: «la pelota hará un número infinito de rebotes». La quinta pregunta usa la misma suma de la pregunta 3 pero transformada en una ecuación y la gráfica de la cuarta pregunta, respeta la misma divisibilidad infinita en mitades de las preguntas 1, 2 y 3, originando la misma paradoja.

El conocer las limitaciones y cómo influyen las representaciones en las respuestas inconsistentes de los estudiantes, ayudará a proponer, en este nivel de enseñanza, las mejores maneras para tratar nociones tan complejas y contraintuitivas como es la noción de infinito actual.

Estas situaciones presentan subdivisiones y un infinito pequeño, lo cual implica una coordinación simultánea entre el creciente número de divisiones y el decreciente resultado parcial sobre el que se opera. El psicólogo Nuñez (1994) llamó a estas dos *tipos* de iteración: *divergente* y *convergente*.

En estos problemas se utiliza como método de resolución el modelo matemático del análisis estándar que se basa en el conocimiento de los números reales y las sumas infinitas. Como lo han demostrado otras investigaciones, muchas de las respuestas correctas a preguntas en que está involucrado el infinito actual resultan contraintuitivas; sabiendo que la intuición natural del infinito es el potencial, muchos estudiantes tienden a dar respuestas inconsistentes respecto al concepto involucrado. En esta etapa de su aprendizaje, resulta problemático que los estudiantes se enfrenten a problemas cuyas representaciones o modelos de resolución resultan contraintuitivos. El conocer las limitaciones, y cómo influyen las representaciones en las respuestas inconsistentes de los estudiantes, ayudará a proponer, en este nivel de enseñanza, las mejores maneras para tratar nociones tan complejas y contraintuitivas como es la noción de infinito actual.

Análisis de los datos recogidos con el cuestionario

El análisis descriptivo e interpretativo de las respuestas de los alumnos se realizó pregunta por pregunta. Las preguntas estaban planteadas de manera que requerían básicamente una respuesta afirmativa o positiva a los problemas; muchas respuestas eran las esperadas, pero también muchos alumnos no contestaron ni afirmativa ni positivamente, sino que expusieron sus criterios teóricos y/o prácticos para prever una posible solución o decantarse por la imposibilidad de una solución. Describir, interpretar y clasificar las respuestas nos permitió acercarnos a los esquemas conceptuales de los estudiantes poniendo en evidencia las limitaciones y oportunidades que ofrecían los registros de representación usados en los enunciados. Presentamos a continuación el resultado de este análisis, pregunta por pregunta:

Pregunta 1

- La representación del segmento que se hace el alumno puede ser física, es decir como un espacio finito y con medida, lo cual tiene como consecuencia un proceso finito de bisección.

- Cada segmento que resulta de cada bisección puede ser identificado por el estudiante como un espacio geométrico, una distancia numérica o como la cardinalidad de la bisección. Se ha observado que cada identificación puede llevar a un proceso finito o infinito de bisecciones.
- Los puntos que resultan de cada bisección, *M*, *N*, *O*, *P*, etc., pueden ser considerados como marcas físicas. El grosor del lápiz puede ser determinante para dar el número de bisecciones posibles (finitas).
- El segmento puede ser considerado como un conjunto con infinitos puntos, por tanto el proceso de bisección en este caso es infinito. La coincidencia del punto de bisección con el punto extremo *B* no es necesariamente aceptada.
- Para dar una respuesta no siempre se toma en cuenta el proceso infinito de bisección. Para algunos alumnos resulta relevante que *B* sea un punto extremo del segmento y, por tanto, geométricamente no puede ser un punto de bisección.
- El proceso geométrico de bisección, cálculo de *M*, *N*, *O*, *P*, etc. puede ser considerado como un proceso numérico, asignándole una medida a cada segmento.

Pregunta 2

- Puede percibirse el problema como parte del mundo físico, real y concreto. La experiencia es compatible con la experiencia real, dado que el objeto involucrado es una pelota. La infinitud no está presente en el proceso. Puede producir consideraciones en los estudiantes del tipo: fórmulas físicas, velocidad, gravedad, tiempo, presión, lugar, masa, elasticidad de la pelota, fuerza de rozamiento.
- Muchos estudiantes cambian de registro de representación para resolver el problema. Por ejemplo, hacen un dibujo de la situación o escriben una suma infinita. Las respuestas de los estudiantes son sensibles a este nuevo registro de representación al que optan. La finitud o infinitud del proceso dependerá de cada representación, y lo mismo si la infinitud es actual o potencial.
- Generalmente, los alumnos necesitan convertir la representación del enunciado del problema, la mayoría de las veces, a un dibujo de la situación descrita en el problema.

Pregunta 3

- No siempre es aceptada la cardinalidad infinita del conjunto de los sumandos. Puede haber omisión de los puntos suspensivos y calcularse la suma con los cinco sumandos.
- La suma es infinita no sólo por los puntos suspensivos, como expresión algebraica, sino como un proceso numérico; los estudiantes se refieren a la posibilidad de dividir el número 1 infinitamente.
- Cada uno de los sumandos puede no ser caracterizado como la mitad del anterior y, por tanto, no siempre se considera la cantidad numérica que se va sumando.
- Se considera que la expresión infinita de la suma indica que no es posible sumar una cantidad infinita de términos o que el resultado siempre es aproximado. En el primer caso no se toma en cuenta el tipo de sumandos.
- Se considera que la expresión infinita de la suma indica que el proceso no es acotado y que sugiere visualmente un infinito potencial, induciendo a una respuesta infinita pero no como número sino como indeterminación.
- Puede ser evadida la suma infinita, observando sólo el comportamiento de la sucesión $1/2^n$.

Pregunta 4

- El gráfico cartesiano induce a una respuesta infinita (actual o potencial) o finita, dependiendo de la concepción de función que el estudiante posee.
- La curva de la función puede ser considerada como una curva geométrica que en el infinito se transforma en una recta. También, se puede percibir el proceso como numérico: la variable y disminuye en la medida que la x aumenta numéricamente.
- La recta $y = 2$ puede ser confundida con el eje x.
- La representación gráfica de la curva puede considerarse de manera física, es decir con grosor y de longitud finita. En este caso la función toma el valor de 2 mediante un proceso finito.
- Pocas veces es tomada en cuenta el proceso de división por mitades en el eje y. Prevalece la observación

El segmento puede ser considerado como un conjunto con infinitos puntos, por tanto el proceso de bisección en este caso es infinito. La coincidencia del punto de bisección con el punto extremo B no es necesariamente aceptada.

del comportamiento de la función a partir del eje x, en el movimiento horizontal.

- La gráfica induce a una descripción de un proceso constante e infinito, en el sentido potencial.

Pregunta 5

- Al escribir la suma infinita como una ecuación se puede causar la evasión de la infinitud. La ecuación se transforma en una ecuación finita, donde se considera sólo el término n-ésimo.
- Aunque la suma sea infinita puede pensarse que el proceso no es necesariamente infinito para que resulte $y = 2$. Para un cierto valor de n, la suma no continúa y para ese valor la suma es 2. Los puntos suspensivos son despreciados.
- Observar que n es exponente de una fracción y deducir que el resultado de la ecuación debe ser un número entero puede inducir a considerar que el valor de la ecuación debe ser negativo. Se elude la infinitud.
- La incógnita de la ecuación es el exponente de un número; esto puede inducir a considerar que la solución viene dada por medio de logaritmos (conexión con conocimientos previos).

Hemos establecido, por cada pregunta, las respuestas más frecuentes que se podrán encontrar más adelante en las tablas de las figuras 3, 4, 5 y 6.

La construcción del instrumento

A partir de la clasificación, el análisis y la tabulación de las respuestas, pretendíamos construir un instrumento que pudiera mostrar a aquellos alumnos que dan respuestas incoherentes a los problemas del cuestionario. Nos dimos cuenta de que no era tan fácil hablar de coherencia entre las respuestas de las cinco preguntas, como, por ejemplo, afirmar que un alumno que ha mostrado ideas finitas en la primera, será coherente si se muestra finitista también en las demás preguntas (Garbin y Azcárate, 2000).

A partir de la clasificación, el análisis y la tabulación de las respuestas, pretendíamos construir un instrumento que pudiera mostrar a aquellos alumnos que dan respuestas incoherentes a los problemas del cuestionario.

El contexto de las preguntas, y sobre todo el lenguaje matemático utilizado, hace un tanto más compleja la situación. Por ejemplo, en la primera pregunta, un alumno se muestra finitista si contesta que el punto de bisección alcanza al punto extremo B con un número finito de bisecciones, o infinitista, si contesta que el punto de bisección alcanza, o no, al punto B pero con un número infinito de bisecciones.

Sin embargo, en la tercera pregunta, la infinitud está explícita, se presenta con un lenguaje algebraico y una representación numérica: una suma infinita; no cabe la posibilidad directa de hablar de finitud. El alumno pudo entonces mostrarse con una idea potencial del infinito, dejándose llevar por la expresión numérica que no acaba, o también, pudo reconocer que cada sumando representa la mitad del anterior, propiedad que permite la convergencia de la suma. Había que preguntarse, entonces, qué tipo de respuesta dada en esta pregunta puede considerarse coherente con la dada por un alumno que responde de manera finita en la primera pregunta.

Para cada problema nos hicimos esta última pregunta: qué tipo de respuestas dadas por los alumnos pueden considerarse coherentes (aunque éstas no sean las correctas). Respondiendo a esta pregunta pudimos establecer líneas de coherencias de respuestas a partir de las obtenidas por los estudiantes. Construimos tres líneas de coherencia, las cuales están representadas en las figuras 3, 4, 5 y 6. Estos gráficos están formados por tablas enlazadas entre ellas. En estas tablas podemos observar las distintas respuestas dadas por los alumnos. Si se siguen el orden dado por los enlaces, se pueden identificar a aquellos alumnos que no mantienen respuestas coherentes en las cinco preguntas del cuestionario. Por confidencialidad y discreción, identificamos a los alumnos con una codificación del 1 al 80.

La línea 1 la hemos llamado *línea finitista*. Está subdividida en dos sublíneas: 1.1 y 1.2. La línea 1.1 presenta un perfil de respuestas finitistas menos en las correspondientes a la pregunta 3, cuyas respuestas fueron dadas dejándose llevar visualmente por la expresión infinita de la suma.

La línea 1.2 presenta respuestas finitistas menos en las correspondientes a las preguntas 2, 2(b) y 3. Estas últimas son respuestas que son dadas por las siguientes razones: en la 3 por dejarse llevar visualmente por la expresión infinita de la suma y, en la 2(a) y 2(b), por considerar que el comportamiento descrito de la pelota no acaba.

Hemos llamado *respuestas finitistas* a las que fueron escritas con argumentos finitos.

PREGUNTA 1

Responde afirmativamente
El proceso de bisección es finito
4, 6, 13, 15, 16, 18, 21, 26, 27, 30, 54, 55, 56

PREGUNTA 3

El valor de la suma es infinito	El resultado corresponde a la suma de las 5 primeras fracciones	No se puede calcular o determinar		No indica valor alguno debido a la infinitud de la suma. Por faltar datos
		Por la infinitud	No se conoce la fórmula general	
5, 9, 13, 15, 22, 49, 53, 57, 68, 71	26, 53	16, 17, 18, 50, 63, 64, 65, 67, 79	7	40, 48, 69

PREGUNTA 2(a)

Responde afirmativamente	Se considera la necesidad de conocer el número de rebotes tanto para afirmar como para negar	Se considera que no hay datos suficientes para afirmar o negar	Responde afirmativamente	Responde negativamente	No contesta	
Indica una distancia			Se considera el comportamiento de la pelota. Alude a finitud.	La pelota tiene un solo movimiento vertical	La distancia depende de lo que haga la pelota	Escribe fórmulas físicas. No tiene datos suficientes
El proceso es finito						
11, 28, 33, 34, 35, 36, 39, 65, 73, 76	2, 3, 9, 16, 23, 31, 38, 56, 59, 72, 74	5, 6, 18, 22, 25, 27, 41, 45, 50, 51, 53, 55, 57, 64, 69, 70, 71	15, 40, 42, 53, 62, 67, 79, 80	1	4	8, 26

PREGUNTA 2(b)

Responde afirmativamente			Responde negativamente		No contesta	
Considera finitos rebotes	No indica una cantidad		No hay datos suficientes	Depende de cómo se tire la pelota	Alude a finitud	Escribe fórmulas físicas.
	Conociendo algunos datos	Alude a finitud				
10, 13, 16, 24, 28, 29, 34, 35, 36, 39, 42, 56, 61, 65, 68, 79	5, 15, 19, 41, 50, 57, 58, 62, 64, 71, 74	1, 4, 6, 7, 9, 14, 21, 23, 37, 40, 49, 67	18, 25, 26, 51, 55, 69, 70, 73	78	33, 45, 80	8

PREGUNTA 4

La función llegará a ser una recta. El valor de f es 2 o 0. Proceso finito	Considera que puede tener cualquier valor dependiendo del valor de x
1, 6, 7, 11, 13, 15, 20, 26, 27, 42, 56, 62, 69	49, 60, 76

PREGUNTA 5

Responde afirmativamente	Responde negativamente			
El valor de n es un número finito	Es un número tan grande que no saldría en la calculadora	La suma es infinita	Hay una infinidad de respuestas	1/2 es menor que 2
7, 8, 19, 20, 26, 30, 34, 35, 48, 61, 65, 68, 76, 78	14	18, 37, 50, 57, 58, 62, 66, 67	73	40, 55

Figura 3
Línea 1.1.

PREGUNTA 1

Responde afirmativamente
El proceso de bisección es finito
4, 6, 13, 15, 16, 18, 21, 26, 27, 30, 54, 55, 56

PREGUNTA 3

El valor de la suma es infinito	El resultado correspon-de a la suma de las 5 primeras fracciones	No se puede calcular o determinar		No indica valor alguno debido a la infinitud de la suma. Por faltar datos
		Por la infinitud	No se conoce la fórmula general	
5, 9, 13, 15, 22, 49, 53, 57, 68, 71	26, 53	16, 17, 18, 50, 63, 64, 65, 67, 79	7	40, 48, 69

PREGUNTA 2(a)

Responde negativamente	Responde afirmativamente		No contesta
Por el proceso infinito	Infinitos metros	No tiene co-nocimientos suficientes, el proceso es inacabable	Describe el proceo como
17, 21 24, 47, 63, 66, 77	12, 44, 61	49	10, 13, 19, 68

PREGUNTA 2(b)

Responde afirmativamente		Responde negativamente		No contesta	
Considera infinitos rebotes	Considera que tiende a infinito	La pelota no para de rebotar	La altura nunca puede ser 0	La observación alude a infinitud	Por parte (a) se interpretan infinitos rebotes
11, 12, 22, 43, 46, 54, 63, 76	27	3, 17, 31, 32, 38, 44, 47, 48, 52, 53, 59, 60	66, 67, 77	20	30

PREGUNTA 4

La función llegará a ser una recta. El valor de f es 2 o 0. Proceso finito	Considera que puede tener cualquier valor dependiendo del valor de x
1, 6, 7, 11, 13, 15, 20, 26, 27, 42, 56, 62, 69	49, 60, 76

PREGUNTA 5

Responde afirmativamente	Responde negativamente				n = –°
El valor de n es un número finito	Es un número tan grande que no saldría en la calculadora	La suma es infinita	Hay una infinidad de respuestas	1/2 es menor que 2	
7, 8, 19, 20, 26, 30, 34, 35, 48, 61, 65, 68, 76, 78	14	18, 37, 50, 57, 58, 62, 66, 67	73	40, 55	16

Figura 4
Línea 1.2.

PREGUNTA 1

Responde negativamente
Por la infinitud del proceso se aproxima, se acerca a B
3, 8, 9, 10, 17, 20, 22, 24, 33, 34, 35, 37, 38, 43, 44, 45, 49, 50, 52, 53, 58, 61, 62, 63, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 77, 78

PREGUNTA 3

El resultado de la suma es 1,99…; 2,99…	El máximo valor que puede llegar es 1,99…	No se puede calcular			El valor de la suma está entre 2 y 2,99…	El valor de la suma se aproxima a 2
		No se puede calcular un número exacto	Los sumandos cada vez se hacen más pequeños	El número está alrededor del 2		
4, 8, 23, 41, 42, 59	75	20	16, 63	73	74	1, 2, 3, 6, 14, 19, 21, 27, 28, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 39, 43, 44, 45, 52, 60, 61, 62, 66, 72, 77, 78, 80

PREGUNTA 2(a)

Responde afirmativamente
Es proceso es infinito y la distancia se aproxima a 6m o es 5,99…
14, 29, 32, 37, 43, 48

PREGUNTA 2(b)

Responde afirmativamente		Responde negativamente		No contesta	
Infinitos rebotes	No indica cantidad Tiende a °	La pelota nunca para de rebotar	La altura nunca puede ser 0	Observación alude a infinitud	Por parte (a) se interpretan ° rebotes
11, 12, 22, 43, 46, 54, 63, 76	27	3, 17, 31, 32, 38, 44, 47, 48, 52, 53, 59, 60	66, 67, 77	20	30

PREGUNTA 4

La función se aproxima a 2, al eje x, o a 0	No se puede determinar. Por la infinitud del proceso Nunca será 2
3, 4, 5, 8, 9, 10, 14, 17, 19, 23, 29, 31, 32, 33, 36, 37, 38, 41, 43, 48, 50, 52, 53, 55, 58, 59, 64, 66, 67, 70, 71, 72, 73, 77	16, 63

PREGUNTA 5

n = ° pero la suma no llegará a 2	Responde negativamente La suma nunca será 2
23, 24, 42, 45, 47, 59, 60	1, 3, 4, 6, 9, 17, 21, 31, 32, 33, 38, 41, 43, 53, 64, 71, 77, 80

Figura 5
Línea 2

PREGUNTA 1

Responde afirmativamente
El proceso de bisección es °
12, 29, 40, 42, 46, 47, 59

PREGUNTA 3

El resultado de la suma es 2	El resultado de la suma es 1, 0 o un número decimal
10, 12, 24, 29, 30, 46, 51, 54, 58, 76	11, 35, 47, 55

PREGUNTA 2(a)

Responde afirmativamente
Indica una distancia. El proceso es infinito.
30, 46, 54

PREGUNTA 2(b)

Responde afirmativamente	Responde afirmativamente	No contesta	
Infinitos rebotes	No indica cantidad. Tiende a infinito.	Observación alude a °	Por parte (a) se interpretan ° rebotes
11, 12, 22, 43, 44, 46, 54, 63, 76	27	20	30

PREGUNTA 4

La función llrgsrá a ser una recta. El valor de f es 2 o 0. El proceso es infinito
2, 12, 18, 21, 24, 28, 39, 44, 46, 47, 54

PREGUNTA 5

n = °	Responde negativamente
2, 12, 22, 24, 25, 28, 29, 36, 39, 42, 44, 45, 46, 54, 59, 69, 70, 75	Será un número ° que no conocemos
	49

Figura 6
Línea 3

La línea 2 la hemos llamado *línea actual*. Presenta un perfil de respuestas actualistas a las preguntas del cuestionario. Hemos llamado *respuestas actualistas* a aquellas respuestas que reflejan una concepción actual del infinito.

La línea 3 la hemos llamado *línea potencial*. Presenta un perfil de respuestas potenciales a las preguntas del cuestionario. Hemos llamado *respuestas potenciales* a aquellas respuestas que reflejan una concepción potencial del infinito.

Observación: hay 5 tipos de respuestas que no aparecen en las líneas anteriormente mencionadas.

1. Respuestas que a la vez son afirmativas y negativas a las preguntas. Estos alumnos deberían afirmar en forma paradójica a todas las preguntas.

   Podemos ilustrar este tipo de respuesta con la dada por el alumno 11 a la primera pregunta:

   A11: Sí, porque llegará un momento en que no se podrá dividir el segmento y la letra *B* será la bisección. Antes de esto deberá pasar mucho tiempo porque tenemos micros (*m*) o *mm* los cortes serán más pequeños.
   También podría ser que no porque si es una bisección siempre debe haber un final y un principio por muy pequeño que sea. Es decir siempre así: ____ __ _

2. Respuestas en que el alumno distingue entre una respuesta *teórica* o *práctica* a la misma pregunta. Estos alumnos para ser coherentes deberían distinguir entre una respuesta teórica y práctica en todas las preguntas.

   Es ilustrativa la siguiente respuesta a la primera pregunta:

   A57: En teoría siempre hay un punto medio entre dos puntos por muy pequeños que sean. Pero en la práctica no se puede no hacerlos coincidir, por lo tanto en un momento u otro termina coincidiendo.

3. Respuestas que distinguen en la pregunta 1, una interpretación numérica y una gráfica.

   Un ejemplo es la respuesta del alumno 76:

   A76: Gráficamente sí puede ser, numéricamente no. Gráficamente puede que el lápiz sea más grueso y que entonces la bisección se superponga a *B*.

4. La respuesta a la primera pregunta, donde se considera que el punto de bisección no alcanza al punto *B* por ser éste punto extremo del segmento.

   Ilustramos con la respuesta del alumno 25:

   A25: Detrás de *B* no hay nada, entonces no puede ser el centro de algo si es el final.

5. Los que no contestan.

Esto quiere decir que los alumnos que no aparecen en ninguna de las líneas es porque han dado como respuesta alguna de éstas.

Veamos algunos ejemplos. El alumno 26 está presente a lo largo de la línea 1.1, esto quiere decir que se mantiene coherente y es un alumno con una concepción finitista o evasiva de la infinitud. Si observamos el comportamiento del alumno 54, éste aparece en la línea 2, en las preguntas 3, 2(a), 2(b), 4 y 5. Sin embargo, podemos observar su situación de incoherencia en la pregunta 1. En la primera pregunta este alumno aparece en la línea 1. Es decir, este alumno muestra una concepción actual del infinito en todas las preguntas, menos en la primera, que se muestra finitista.

Cuando se habla de una idea o pensamiento inconsistente, es con relación al concepto matemático involucrado, o a contradicciones dentro de una teoría matemática dada.

Diferencia entre «inconsistencia» e «incoherencia»

Al principio hemos hablado de las ideas inconsistentes de los alumnos y al referirnos a la construcción del instrumento, hemos utilizado también el término de incoherencia. Esta distinción no ha sido casual ni se han usado ambas como palabras sinónimas. Trataremos de explicar seguidamente, en qué consiste la diferencia con que las dotamos.

Cuando se habla de una idea o pensamiento inconsistente, es con relación al concepto matemático involucrado, o a contradicciones dentro de una teoría matemática dada. Generalmente, aparecen durante la resolución de un problema o en una respuesta al mismo. Nuestros alumnos, por ejemplo, pueden mostrar inconsistencias al resolver uno de los problemas del cuestionario, y, como hemos visto, pueden presentar una concepción inconsistente respecto al concepto matemático involucrado en el problema. Por ejemplo, es el caso de un alumno que ha mostrado una idea potencial de la suma infinita en la pregunta 3, siendo inconsistente con respecto a la idea actual del infinito.

Ahora bien, se puede estar en una situación similar a la que se ha presentado en el cuestionario, en que haya que resolver un mismo problema expresado en diferentes lenguajes matemáticos; es decir, problemas que tienen representación semiótica distinta y lenguaje matemático diferente (por ejemplo, muchas veces el estudiante se enfrenta a esta situación en una guía de problemas o en un libro, al final de un tema, en una sección dedicada al aprendizaje de un concepto específico). Ante esta situación en que el estudiante tiene que resolver un mismo problema pero expresado de distintas maneras, se generan respuestas contradictorias entre sí (la de un problema con respecto a otro). Nosotros llamamos respuestas incoherentes a las respuestas contradictorias entre sí.

Las líneas de coherencia son las que permiten identificar este tipo de respuestas coherentes o incoherentes. En consecuencia, podemos tener un alumno cuyas ideas o respuestas sean inconsistentes con el concepto involucrado y, sin embargo, mostrarse coherente en su pensamiento (ideas o respuestas equivalentes en problemas diferentes).

Podemos hablar de tres tipos de alumnos:

1. *Alumno coherente y consistente.* Este tipo de alumno tiene todas sus respuestas en la línea 2. El alumno 46, por ejemplo, es un alumno que tiene una concepción actual del infinito independientemente del tipo de problema.
2. *Alumno coherente e inconsistente.* Este tipo de alumno tiene todas sus respuestas en la línea 1 o en la línea 3. Un ejemplo es el alumno 26 que es coherente en la línea 1. Es decir, este estudiante tiene una concepción finitista o evade la infinitud. Curiosamente, no hubo ningún alumno coherente en la línea 3.
3. *Alumno incoherente.* Este tipo de alumno, tiene respuestas que no son coherentes con la línea. En este caso se pueden hacer combinaciones. Puede haber, de 1 a 5 respuestas incoherentes con la línea, lo cual muestra que no todo alumno es incoherente de la misma manera ni con la misma profundidad.

Por otro lado, analizando la situaciones de coherencia de los estudiantes a través de sus respuestas y las líneas de coherencias hemos podido obtener unas conclusiones parciales de las cuales subrayamos las siguientes:

…podemos tener un alumno cuyas ideas o respuestas sean inconsistentes con el concepto involucrado y, sin embargo, mostrarse coherente en su pensamiento (ideas o respuestas equivalentes en problemas diferentes).

…llamamos respuestas incoherentes a las respuestas contradictorias entre sí.

- Aquellos alumnos que se muestran finitistas o que evaden la infinitud, en preguntas de tipo geométrico, algebraico o numérico, difícilmente contestan de manera infinitista (de manera actual o potencial) en preguntas en que la infinitud se presenta en situaciones de la vida real. Son alumnos en que la coherencia de su pensamiento reflejada en sus respuestas es inducida por una mirada a los espacios acotados, como por ejemplo el de un segmento, o expresiones no acotadas, como por ejemplo el de una suma infinita.
- Los alumnos que se muestran finitistas o que evaden la infinitud, han presentado un tipo de respuestas y un número de respuestas actualistas que indicaron que la noción del infinito actual en la mente de estos estudiantes empieza a aparecer a partir de representaciones que inducen a ello, o haciendo una analogía de concepto finitos. Por ejemplo, consideran que la suma infinita debe tener un valor numérico finito igual a como lo tiene la suma finita. O, aceptando el proceso infinito de bisecciones representado en un segmento de medida finita, aceptan la convergencia del punto gracias a la representación acotada del segmento que induce a ello.
- En la mente de los alumnos que muestran una concepción actual en la mayoría de sus respuestas, esta concepción entra en conflicto sobre todo en el segundo problema del cuestionario, el de la pelota, que presenta un contexto «real-físico».
- Los alumnos que se muestran potencialistas, responden a las preguntas básicamente dejándose llevar por la intuición natural del infinito que es la potencial.

En la búsqueda de coherencia

Uno de los motivos de la presencia de respuestas incoherentes es la falta de consciencia por parte de los estudiantes de que están resolviendo un mismo problema representado de diferente forma; sin embargo, un motivo más profundo es la dificultad de realizar una tarea, que hemos llamado «tarea de conexión». La «tarea de conexión» consistiría en identificar y saber establecer relaciones entre los problemas, en cuanto a lenguaje matemático y registro de representación semiótica se refiere, de manera que permita una influencia mutua dando lugar a respuestas asociadas coherentes con los problemas.

Podemos ilustrar lo anterior con un ejemplo. Pensemos en los problemas 1 y 3. La tarea de conexión entre los dos problemas consiste en reconocer que en ambas preguntas está presente la divisibilidad infinita por mitades; son dos problemas que representan el mismo concepto, pero tales que en el primero se utiliza el lenguaje geométrico y en el tercero, el analítico. Entre los registros de representación, figura geométrica: segmento (pregunta 1) y escritura numérica: suma infinita (pregunta 3), la tarea de conexión consiste en reconocer los siguientes aspectos:

- Si se considera el segmento de dimensión 1, es decir, el segmento real [0, 1], cada punto del proceso de bisección se puede identificar con cada uno de los sumandos de la suma infinita de la pregunta 3.
- Que la suma infinita, numéricamente representa la suma infinita de los segmentos que son resultado de las bisecciones y que, por tanto, una solución explícita de la serie es la respuesta correcta a la primera pregunta.
- Una respuesta de la pregunta 1 debe ser asociada y coherente con la respuesta de la pregunta 3.

Ya dijimos anteriormente que uno de nuestros objetivos era reflexionar sobre la posible importancia de la tarea de conexión en la actividad matemática. Para ello, hemos entrevistado a 6 estudiantes. La entrevista se diseñó de manera que las preguntas que hacía la entrevistadora permitieran al estudiante realizar dicha tarea de conexión, es decir, que la entrevistadora inducía dicha tarea pero sin llegar a ser una intervención didáctica.

En la entrevista se presentaron los problemas 1, 3 y 4 del cuestionario; una vez resueltos estos problemas se les presentaba la pregunta 2, para que la trataran de resolver nuevamente. Esta última había sido la pregunta del cuestionario más paradójica y con mayor dificultad para los alumnos.

Al finalizar la entrevista, 5 de los 6 alumnos terminaron mostrando respuestas coherentes en los 4 problemas. Concretando, para llegar a esta coherencia ha sido fundamental que los estudiantes:

- Reconozcan en todas las preguntas el proceso de divisibilidad infinita, con los dos tipos de iteraciones, la divergente y convergente.
- Establezcan la relación y conexión entre las preguntas a través de la sucesión númerica, 1/2, 1/4, etc.

Hemos identificado además que dicha tarea puede favorecer:

- La aparición de un conflicto y la consciencia de la paradoja en la mente del estudiante cuando hay por lo menos una respuesta correcta en algunos de los problemas. Algunos de ellos no se habían percatado de la paradoja a qué llevaba el razonamiento de los problemas. Sin embargo, después de relacionarlos y poder hacer las conexiones matemáticas entre ellos, al comparar la respuesta correcta con las no correctas, (matemáticamente hablando), se les hacía presente la paradoja. Uno de ellos mantuvo el conflicto generado por la paradoja en todos los problemas hasta el final de la entrevista.
- La «autobúsqueda» de coherencia, de manera consciente o no, en las respuestas y afirmaciones relacionadas con las preguntas (a través de la tarea se llega a una mayor consciencia de la semejanza de la situación planteada en cada problema). De forma espontánea los mismos estudiantes se exigían una respuesta coherente después de identificar la relación existente en los problemas y después de haber hecho las conexiones matemáticas entre ellos.
- La identificación de la idea o creencia errónea que no permite dar una respuesta consistente al estudiante. Por ejemplo, en una de las entrevistas, la del único alumno que mantiene respuestas incoherentes al final de la misma, se identifica el motivo o la idea errónea del estudiante que no permite la coherencia de sus respuestas: sostiene firmemente que 1,999... es menor que 2.

Uno de los motivos de la presencia de respuestas incoherentes es la falta de consciencia por parte de los estudiantes de que están resolviendo un mismo problema representado de diferente forma…

A modo de conclusiones

De las muchas conclusiones que obtuvimos en nuestra investigación, sólo resaltaremos tres aspectos con fuertes implicaciones en la planificación de la docencia:

- Las respuestas de los estudiantes están influenciadas por los lenguajes matemáticos usados en el enunciado de los problemas. Cada registro de representación tiene unas «limitaciones y oportunidades». Por tanto, es importante detectar las limitaciones y explotar las oportunidades de comunicación que ofrece el registro de cada enunciado, es decir, la figura geométrica, el gráfico, el dibujo, la expresión algebraica, etc.
- El estudiante posee ideas inconsistentes, y no siempre se mantiene coherente cuando resuelve un

mismo problema expresado en diferente forma. El alumno, entonces, puede manifestar ideas y concepciones diferentes con respecto a un mismo concepto matemático, en nuestro caso, del infinito actual.

- La importancia de inducir en los estudiantes las tareas de conexión para ayudarles a construir un pensamiento coherente con sus propias ideas y esquemas.

Bibliografía

AZCÁRATE, C. (1990): *La velocidad: introducción al concepto de derivada*, Tesis Doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona.

ALINE, R. y R. SCHWARZENBERGER (1990): «Research in teaching and learning mathematics at an advanced level», en TALL, D. (ed.): *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht/Boston/London.

DUVAL, R. (1996): «Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques?», *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 6, 3, pp. 349-382. [Versión consultada: «Quale cognitivo per la didattica della matematica?» *La Matematica e la sua Didattica*, 3, 1996, 250-269].

DUVAL, R. (1999): «L'Apprendimento in matematica richiede un funzionamiento cognitivo specifico?», *La Matematica e la sua Didattica*, 1, 17-42.

FISHBEIN, E. (1982): «Intuition and proof», *For the Learning of Mathematics*, Vol. 3, 2, 9-19.

FISHBEIN, E. (1998): «Conoscenza intuitiva e conoscenza logica nell'attività matematica», *La Matematica e la sua Didattica*, 4, 365-401.

GARBIN, S. y C. AZCÁRATE (2000): «Estudio sobre esquemas conceptuales e incoherencias de estudiantes de bachillerato en relación con el infinito actual expresado en diferentes lenguajes matemáticos», *Educación Matemática*, 12. 3, 5-18.

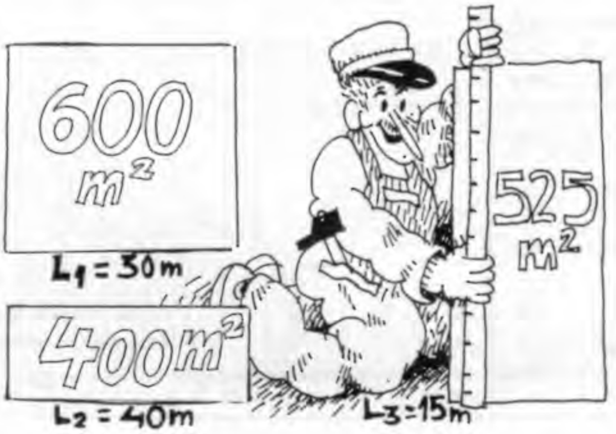
TALL, D. (1995): «Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking», *Actas del PME 19*, Vol. 1, 61-75.

TALL, D. (1996): *Conferencia plenaria de clausura del ICME-8*, Sevilla.

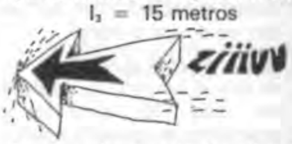
TALL, D. y S. VINNER (1981): «Concept image and concept definition in mathematics with particular references to limits and continuity», *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 12, 2, 151-169.

TIROSH, D. (1990): «Inconsistencies in students' mathematical constructs», *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12, 111-129.

Sabrina Garbin
Carmen Azcárate
Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales.
Universidad Autónoma de Barcelona



21 Un rectángulo tiene de perímetro 100 m.. El área es función de la longitud de uno de sus lados. En los dibujos tienes tres ejemplos, de lados $l_1 = 30$ metros $l_2 = 40$ metros $l_3 = 15$ metros



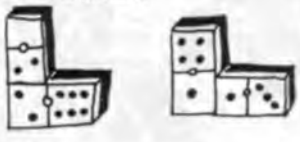
Comprueba que la función que da el área es $l \mapsto l\,(50-l)$ y dibuja su gráfica aproximada.

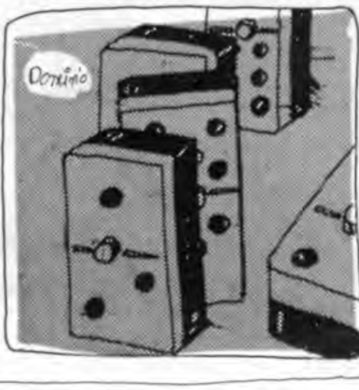
22 El dominó consta de 28 fichas, cada una de las cuales está dividida en dos partes, como se indica en la figura adjunta. En cada una de las partes va marcado un punto, dos, tres, cuatro, cinco, seis o ninguno.

Una ficha puede juntarse con otra si alguna de sus dos partes tiene el mismo número de puntos, como se indica en los dos casos que siguen:

Aquel que logra colocar antes las fichas o se queda con una suma de puntos menor, cuando ya no es posible seguir juntando fichas, es el ganador.

Si extraemos una ficha al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda ficha extraída al azar pueda juntarse a la primera?





62 Reflexiona sobre cómo podemos calcular el número de baldosas del dibujo. Como observarás puedes encontrar una regla sencilla, ya que el área pedida, es la mitad de la del mosáico rectangular obtenido adosando al dado otro igual pero al revés. Observa que así obtienes tiras de igual longitud. Por tanto:

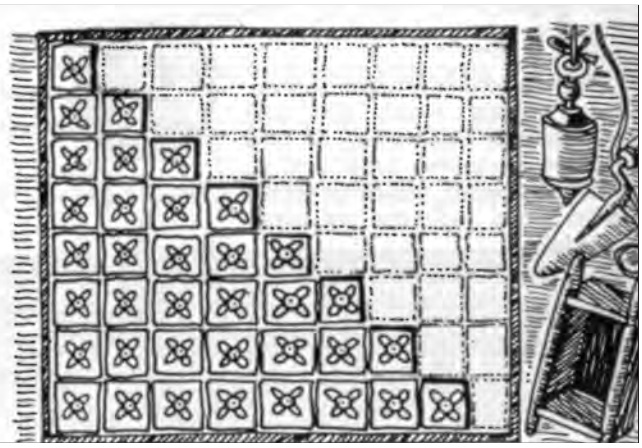
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 =$

$(1+8) + (2+7) + (3+6) + (4+5) =$

$9 + 9 + 9 + 9 = 36. = 9.4$

Escribe pues el valor de la suma

$1 + 2 + 3 + \ldots + \quad 99 + 100 =$



SUMA 38
noviembre 2001, pp. 69-72

Construcciones y disecciones del octógono

Inmaculada Fernández Benito
Encarnación Reyes Iglesias

IDEAS Y RECURSOS

Las construcciones geométricas con regla y compás, o bien con plegado de papel, constituyen un importante recurso para reforzar la faceta manipulativa del aprendizaje de las matemáticas.
En la observación del entorno que rodea a nuestros alumnos aparecen formas geométricas que con frecuencia son octógonos.
Las disecciones geométricas ofrecen mucho interés desde el punto de vista formativo y de desarrollo de la actividad creadora y descubridora del alumno.

CON LA CORRIENTE constructivista, que es inherente a las nuevas teorías de enseñanza, la Geometría ha recobrado un importante protagonismo. Pensamos que las construcciones geométricas con regla y compás, o bien mediante el plegado de papel, constituyen un importante recurso para reforzar la faceta manipulativa del aprendizaje de las matemáticas.

Uno de los objetivos generales de la enseñanza de las matemáticas consiste en ayudar al alumno a descubrir la realidad matemática del entorno que le rodea. En particular desde su vinculación con el arte y la arquitectura, la observación de distintas formas geométricas en los elementos constructivos y la frecuencia con la que aparece el octógono en ellas, nos ha llevado a considerar y analizar algunas características de este polígono.

El octógono es una forma geométrica utilizada con frecuencia en la construcción arquitectónica como paso intermedio entre la forma cuadrada y la circular. Recordemos, por ejemplo, en la arquitectura árabe los trazados de plantas, cúpulas, mausoleos, torres, fontanas, etc.

Construcciones

Son bien conocidas algunas de las construcciones del octógono regular con regla y compás como, por ejemplo, las siguientes:

A) *La obtenida a partir de una circunferencia trazando dos diámetros perpendiculares y sus bisectrices.*

El interés de esta construcción radica, además de por su sencillez, porque permite la obtención mediante bisecciones, del ángulo de 45°, que es el ángulo central del octógono.

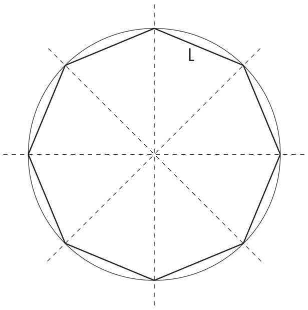


Figura 1

B) *La construcción realizada a partir de un cuadrado PQRS y el cuadrado P´Q´R´S´ que resulta al girar el primero 45° alrededor de su centro O.*

Esta construcción nos proporciona dos octógonos convexos y una estrella {8/2}.

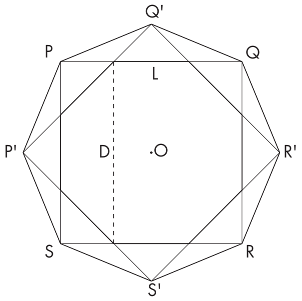


Figura 2

Actividades

Por el gran número de actividades de interés geométrico que pueden aportar otras construcciones del octógono, proponemos las siguientes:

1) A partir de un formato DIN A4 (Figura 3) que es un rectángulo de proporción $\sqrt{2}$, se extrae la tira de dimensiones $1 \times (\sqrt{2} - 1)$.

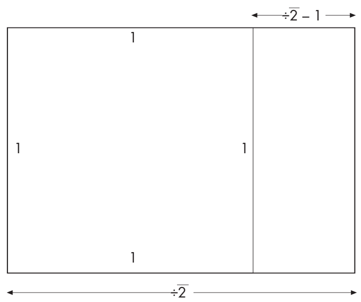


Figura 3

Para formar el octógono se sitúa la tira paralelamente a las dos diagonales del cuadrado, haciendo coincidir el eje de simetría longitudinal de la tira, con la diagonal del cuadrado, hasta intersecar a los lados de éste, como se puede observar en la siguiente figura:

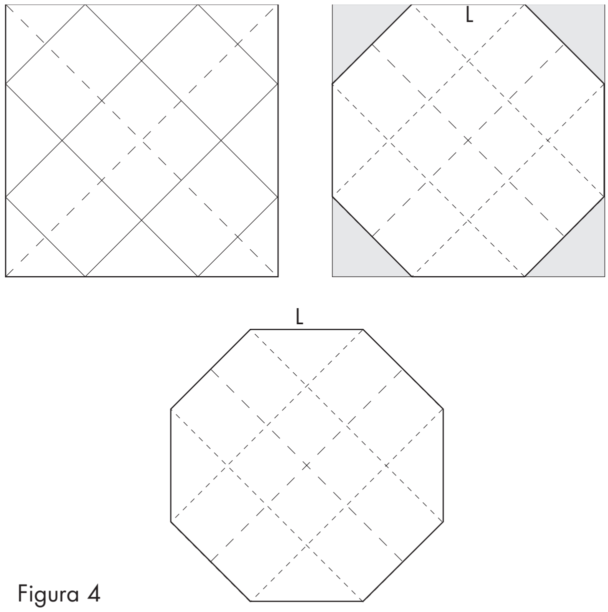


Figura 4

Calculemos el lado *L* del octógono a partir de un cuadrado de lado 1 y comprobemos que efectivamente el lado del octógono regular obtenido con esta construcción mide $\sqrt{2} - 1$

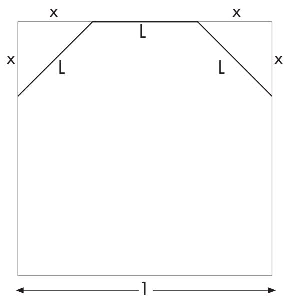


Figura 5

Esta construcción se conoce como “corte sagrado”.

Según se observa en la figura anterior, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} 2x + L &= 1 \\ L^2 &= 2x^2 \end{aligned}\right\} \text{ de donde: } \quad x = \frac{L}{\sqrt{2}}$$

y por tanto: $(\sqrt{2} + 1) \cdot L = 1$

$$L = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}, \text{ es decir: } \quad \boxed{L = \sqrt{2} - 1}$$

2) Dado un cuadrado se trazan sus diagonales y se dibujan cuatro arcos de circunferencia con centros en los vértices del cuadrado y radio la mitad de la diagonal. Dichos arcos determinan, al cortar a los lados del cuadrado, ocho puntos que son los vértices de un octógono regular. Esta construcción se conoce como “corte sagrado”.

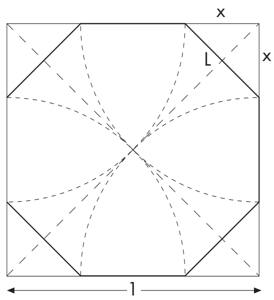


Figura 6

Comprobemos que efectivamente el polígono construido es un octógono regular. Tenemos:

$$\left.\begin{aligned} 2x + L &= 1 \\ x + L &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \text{de donde:} \qquad x = \frac{\sqrt{2}}{2} - L$$

y por tanto: $\sqrt{2} - 2 \cdot L + L = 1$

Es decir: $\boxed{L = \sqrt{2} - 1}$

3) Otra construcción especialmente interesante desde el punto de vista algebraico, geométrico y artístico es la del *octógono estrellado* {8/3} de la siguiente figura, que además de ser una estrella es un polígono, a diferencia de la estrella del apartado B) que no es un polígono sino dos (dos cuadrados).

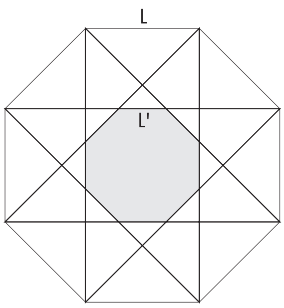


Figura 7

Disecciones

Las disecciones de polígonos, en piezas, para formar otros polígonos es una forma atractiva y entretenida de abordar el estudio de la geometría de los polígonos y sus propiedades.

Ha sido ya probado que cualquier polígono puede ser cortado en un número finito de piezas que forman otro polígono de la misma área. Así, diremos que dos polígonos son *equicompuestos* si y sólo si son equivalentes.

Las disecciones de polígonos, en piezas, para formar otros polígonos es una forma atractiva y entretenida de abordar el estudio de la geometría de los polígonos y sus propiedades.

Obviamente el interés de las disecciones radica en encontrar la figura equivalente con el mínimo número de piezas.

En la siguiente figura se muestran tres disecciones del octógono en cuatro partes. Con las cuatro partes en las que se han diseccionado cada uno de los octógonos se forman los rectángulos R_1, R_2 y R_3 cuyas áreas coinciden con las de los octógonos O_1, O_2 y O_3 de partida:

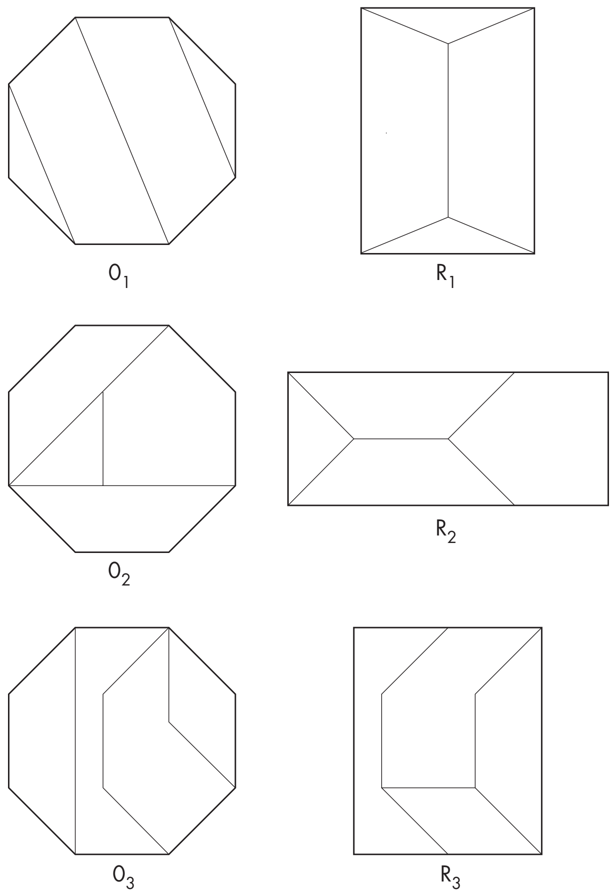


Figura 8

Proponemos además otra partición del octógono en cinco partes, cuatro de ellas trapecios rectángulos T_1, T_2, T_3 y T_4 y la quinta un cuadrado con centro en el centro del octógono. Estas cinco piezas forman el rectángulo R_4, que obviamente tendrá el mismo área que el octógono O_4.

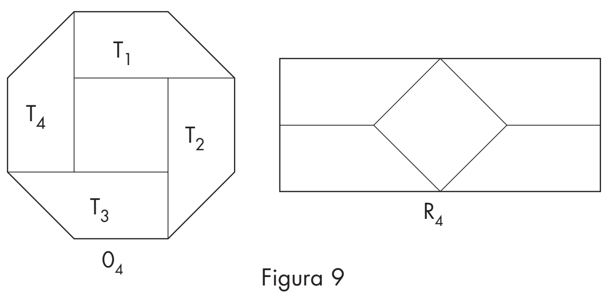


Figura 9

Actividades

Además de proponer como actividades las demostraciones que se han probado anteriormente, se pueden realizar otras que a continuación enunciamos:

1. Hallar el área de los triángulos sombreados de la figura 4 y como consecuencia calcular el área del octógono.
2. Demostrar que la tira extraída del formato DIN A4, en la figura 3 es un rectángulo de proporción $\sqrt{2} - 1$.
3. Deducir, utilizando el resultado de la actividad anterior, que:

$$\frac{D}{L} = 1 + \sqrt{2}$$

siendo L el lado del octógono y D la diagonal perpendicular al lado de apoyo, como se ve en la figura 2.

4. Hallar el área de la cruz dibujada en el primer cuadrado de la figura 4.
5. En la construcción del octógono sobre un cuadrado de referencia que origina el corte sagrado (figura 6), se genera una malla no regular de nueve rectángulos, como se muestra en la siguiente figura:

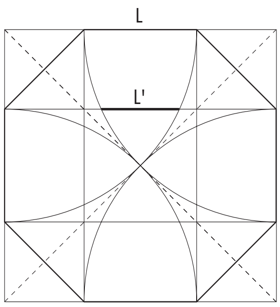


Figura 10

La parte central es un cuadrado en el que se dibuja una cruz similar a la del cuadrado de referencia.

a) ¿Cuál es la relación entre L y L'?

b) Deducir que los cuadrados central y de referencia son semejantes de razón $1 + \sqrt{2}$.

6. Formular geométricamente los métodos de disección de los octógonos O_1, O_2, O_3, O_4 y sus rectángulos equivalentes en las figuras 8, y 9.
7. Caracterizar y clasificar geométricamente las áreas de las piezas de las disecciones de la actividad anterior y compararlas con el área total del octógono y del rectángulo.

Inmaculada Fernández
IES María Moliner.
Laguna de Duero (Valladolid)
Encarnación Reyes
ETS Arquitectura.
Valladolid.
Sociedad Castellano-Leonesa
de Profesores de Matemáticas

Bibliografía

ALSINA, C. (1995): *Viaje al País de los Rectángulos*, Red Olimpica, Buenos Aires.

BOLTIANSKI, V.G. (1981): *Figuras equivalentes y equicompuestas*, Editorial MIR, Moscú

KAPPRAFF, J. (1991): *Conections. The geometric bridge between art and science*, McGraw-Hill, New York.

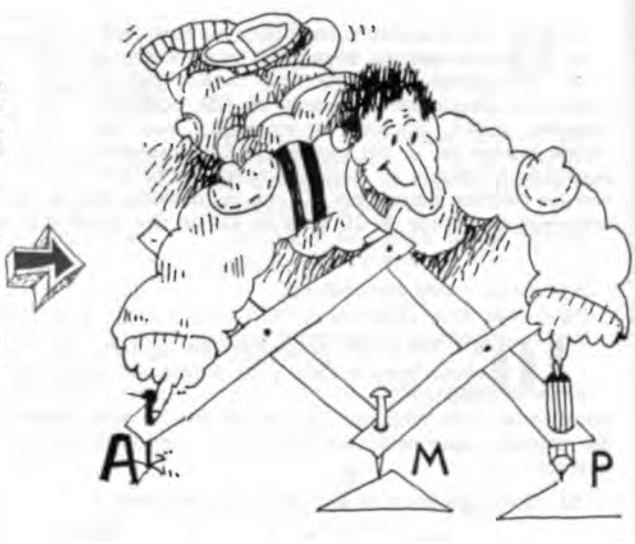
LINDGREN, H. (1972): *Recreational Problems in Geometric Dissections*, Dover, New York.

REYES, E. (1998) «Formatos Din y papiroflexia de algunos polígonos», en *Actas del 5° Seminario Castellano-Leonés de Educación Matemática*.

12 Con cuatro tiras de un mecano o material similar construye un paralelogramo articulado como indica la figura. En el punto M ponemos un punzón y en P un lápiz, tenemos así un aparato que se llama pantógrafo.

Dibuja un triángulo. Fija el punto A. Si con M recorremos el triángulo. ¿Qué hara el punto P ? ¿Qué propiedades cumplen un punto y su tranformado?

¿Qué tendrias que hacer para que el pantógrafo te diese una figura cuyas longitudes fuesen dobles de la dada?



SUMA 38
noviembre 2001, pp. 73-83

Actividades matemáticas fuera del aula: Cuaderno de Campo

Alfredo Marcos Cabellos
Eduardo Carpintero Montoro

IDEAS Y RECURSOS

En este artículo se presentan una serie de experiencias sobre cómo aprovechar el entorno a la hora de tratar ciertos contenidos del currículo. Estas actividades están organizadas en función de la proximidad al aula: trabajaremos tanto en el entorno más próximo, el patio del instituto, como en uno más alejado, el ambiente rural. Las actividades contienen aspectos interdisciplinares que tratan de mostrar la parte práctica y utilitaria de las matemáticas, trabajando especialmente los contenidos procedimentales, así como ser un material didáctico útil para la atención a la diversidad.
Las actividades propuestas aparecen recogidas en un cuaderno de campo de forma que los alumnos dispongan de un material donde reflejar de una forma ordenada y precisa los resultados obtenidos después de realizar cada una de ellas.

A LO LARGO de varios años hemos sentido la necesidad de proponer a nuestros alumnos tareas que tuviesen como contexto el entorno donde ellos desarrollan su actividad, tanto académica como cotidiana. Así, cuando tenemos que trabajar con trigonometría, salimos al patio del centro a medir la altura de distintos objetos. Del mismo modo, para un mejor conocimiento «matemático» de su barrio hemos propuesto la realización de fotografías donde se recogiese algún concepto estudiado en clase. Cuando hacemos la típica salida al campo con los alumnos, o visitamos algún edificio histórico, es una buena ocasión para que los alumnos «hagan matemáticas». Y, por qué no, podemos ir al parque más próximo para desarrollar nuestra clase de matemáticas allí, donde los alumnos encuentren situaciones problemáticas que tengan que resolver. Pensamos que una metodología basada en la resolución de problemas puede tener como contexto el exterior del aula.

Todas estas actividades las hemos ido realizando de forma aislada, dentro del curso académico, en los últimos tres años con alumnos de 4.° de ESO. Después de las primeras experiencias, llegamos a la conclusión de elaborar un cuadernillo donde se recogiesen todas estas actividades y donde el alumno tuviese que plasmar todos los datos recogidos y las conclusiones obtenidas, a modo de cuaderno de campo.

Siempre hemos creído en la necesidad de hacerles ver a nuestros estudiantes la proximidad con que se pueden encontrar en su vida cotidiana los conceptos matemáticos estudiados en el aula. También en mostrarles algunas aplicaciones de las matemáticas como herramienta práctica y útil. Desde luego que esto no es nada nuevo, lo que cambia es el contexto. Ya en los propios objetivos generales del área para la secundaria se plantea la necesidad de tratar las relaciones de las matemáticas con la realidad de forma que permitan una mejor interpretación de ésta. Todo ello mediante la utilización de técnicas adecuadas de recogida de datos, procedimientos de medida acordes con la situación planteada, y la representación de esa información de una forma gráfica y numérica que faciliten una mejor interpretación. También se pretende que los estudiantes identifiquen formas y relaciones espaciales presentes en la realidad, analizando las propiedades y relaciones geométricas implicadas, siendo sensibles a la belleza que generan. El contexto de trabajo que nosotros proponemos permite al alumno valorar sus habilidades matemáticas para afrontar situaciones que requieran su empleo.

Características de las actividades

Matemáticas próximas al entorno

Los profesores de matemáticas acostumbramos a pensar que es difícil encontrar situaciones de la vida cotidiana que podamos utilizar para nuestras clases, y más difícil aún nos resulta «hacer matemáticas» fuera del aula. La experiencia propuesta trata de ser un ejemplo de ambas situaciones.

Es una experiencia sobre cómo aprovechar el entorno a la hora de tratar ciertos contenidos del currículo. Trabajamos tanto en el entorno más próximo, el patio del instituto, como en otros más alejados, dentro de una visita a una zona rural, sin olvidarnos de otros lugares que muestren un «interés matemático».

Presentamos un material de clase pensado para ser desarrollado en el segundo ciclo de ESO. Sin embargo tiene mejores posibilidades de realización en 4.° ya que, al ser el último curso de la etapa, las actividades previstas pueden servir en muchos casos como aplicación de los contenidos que han estudiado con anterioridad. Algunas de las actividades propuestas sólo pueden ser realizadas por alumnos de la opción B.

Interdisciplinariedad

Se incluyen dentro de las tareas propuestas aspectos interdisciplinares de otras áreas del currículo, como por ejemplo: Ciencias Sociales (arquitectura y arte), Ciencias de la Naturaleza (conocimiento e interpretación del medio natural), Tecnología (diseño y construcción de instrumentos de medida), Educación Física (senderismo y orientación), Educación Plástica y Visual (realización y presentación de planos y trabajos topográficos). Así mismo, es una oportunidad para abordar algunos temas transversales dentro del área de matemáticas, tales como: Educación del consumidor y Educación ambiental.

Metodología diversa

La mayoría de estas actividades tratan de mostrar *la parte práctica de las matemáticas.* Planteamos cuestiones acerca de lo útiles que son las matemáticas en situaciones muy diversas. Esto lo hacemos utilizando una metodología muy variada con los alumnos: desde trabajos en grupo, gran parte de ellas, hasta el trabajo individualizado.

Los profesores de matemáticas acostumbramos a pensar que es difícil encontrar situaciones de la vida cotidiana que podamos utilizar para nuestras clases, y más difícil aún nos resulta «hacer matemáticas» fuera del aula.

El tipo de contenidos que tratamos son principalmente *procedimentales*, no muy habituales en el aula de matemáticas. Entre otros, destacamos:

1. Medición de distancias utilizando la cinta métrica o el método del paso.
2. Realización y análisis de fotografías.
3. Manejo de los instrumentos de medida –brújula, clinómetro, curvímetro.
4. Elaboración de planos y croquis.
5. Manejo e interpretación de planos y mapas topográficos.
6. Recogida de datos y otros elementos (hojas, plantas, etc.) durante la realización de las actividades.

Hacemos una mención especial a la *realización y análisis de fotografías* como un recurso didáctico que permite llevar la realidad al aula. A través de la realización de fotografías los alumnos se sienten obligados a mirar con ojos críticos el entorno en el que se mueven y les hace reflexionar sobre aspectos matemáticos de los objetos. El análisis de fotografías descubre la conexión de las matemáticas con la realidad, ya que

Fotografía 1

pone de relieve aspectos geométricos, gráficos y funcionales que la imagen hace presentes con mucha mayor facilidad que otras técnicas. En definitiva, la fotografía es el recurso didáctico que mejor se adapta al tipo de actividades que aquí planteamos: estimula la creatividad, permite establecer relaciones tanto con la realidad como con otras áreas y es fácil de adaptar a las capacidades de cada grupo de alumnos.

Atención a la diversidad

Otra de las razones que nos han llevado a elaborar este «cuaderno de campo» ha sido la necesidad de que los alumnos dispongan de un material donde puedan reflejar los resultados obtenidos después de realizar una actividad, y que le ayude a expresarlo de una forma ordenada y precisa. Esto hace que sea un material didáctico muy útil para la *atención a la diversidad*, ya que permite tanto la realización de tareas de manera individual por parte de los alumnos, a diferentes niveles de profundización, como el reparto de tareas dentro del trabajo en grupo de forma cooperativa, lo que supone adaptarlas a las capacidades de cada uno de ellos.

Cuaderno de campo

La estructura de las actividades es muy similar: se indica el objetivo específico que se pretende realizar, así como los materiales que se van a utilizar. Comienza la actividad con una breve introducción teórica (que ha de ser apoyada con una explicación previa por parte del profesor en el aula, tanto de los requisitos teóricos como de la actividad en concreto). Posteriormente aparecen una serie de tablas para la recopilación de los datos necesarios, así como los huecos y espacios necesarios para hacer los dibujos, croquis, fotografías, desarrollos, etc.

Las actividades están organizadas en cuatro unidades didácticas que se desarrollan de manera independiente, y que están presentadas en función de la proximidad al aula: desde lo más cercano, el patio del instituto, hasta lo más lejano, una zona rural. Se diseñaron para trabajar en la Comunidad de Madrid (parque Juan Carlos I, valle del Lozoya y Cercedilla) aunque también pueden ser adaptadas a cualquier otro contexto.

...la fotografía es el recurso didáctico que mejor se adapta al tipo de actividades que aquí planteamos: estimula la creatividad, permite establecer relaciones tanto con la realidad como con otras área y es fácil de adaptar a las capacidades de cada grupo de alumnos.

Unidades didácticas

Unidad 1. Matemáticas en el patio del instituto

1. Medición del paso.
2. Cálculo de alturas.
3. Elaboración del plano del instituto.
4. Cálculo de anchuras.

Unidad 2. Matemáticas en el Parque Juan Carlos I

5. Juan Carlos I: un parque único.
6. Jardín de las tres culturas.
7. Paseo por el parque.

Unidad 3. Paseo matemático por la sierra de Madrid

8. Paseo matemático.
9. Identificación de objetos matemáticos.
10. Localización de lugares.

Unidad 4. Matemáticas en una zona rural

11. Construcción de un reloj solar.
12. Elaboración de un plano a escala y orientado.
13. Simetrías en la arquitectura.
14. ¿Cómo leer un plano topográfico?
15. Excursión botánica .

Esquema del cuaderno

Presentación de las actividades

El desarrollo de las actividades puede ser llevado a cabo en dos cursos, 3.° y 4.°, o en uno sólo. En el caso de elegir esta segunda opción, su secuenciación estaría acorde con la programación del área, esto es, durante el primer trimestre se trabajaría con el bloque de *Representación y organización del espacio*, en el segundo trimestre con los contenidos sobre *Interpretación, representación y tratamiento de la información*, mientras que los contenidos de *Medida, estimación y cálculo de magnitudes* se abordan a lo largo de todo el curso.

Unidad 1. En el patio del Instituto

Los contenidos que se trabajan son: estimación de distancias, cálculo de alturas (con y sin uso de conceptos de trigonometría) y elaboración de planos a escala y orientados. Excepto para las actividades que prevén el uso de trigonometría, es suficiente que los alumnos estén familiarizados con el teorema de Thales y las propiedades de la semejanza de triángulos.

Una adecuada asimilación de los contenidos de esta unidad es muy importante para el desarrollo del resto de las unidades ya que son la base de las actividades que en ellas se plantean. Desde la primera actividad los alumnos tienen presentes cuales van a ser las pautas de actuación: trabajo en pequeños grupos de tres o cuatro personas, la necesidad de realizar tres mediciones en todos los experimentos o recogida de datos, la importancia que tiene la exactitud en la medición y toma de datos, así como el empleo de los procedimientos necesarios para el correcto uso de brújula y clinómetro.

Las actividades que se proponen no son originales, son los ejercicios que tradicionalmente aparecen en los libros de texto. Lo novedoso es que en estas actividades el alumno es el protagonista a la hora de estimar las distancias, manejar los aparatos de medición, recoger los datos, y calcular los resultados finales. Entre otras se pide: el cálculo de la longitud de su paso, el uso de distintos métodos para el cálculo de alturas –método de la escuadra, método del pintor y método de las sombras–, uso del clinómetro y brújula y su aplicación en la elaboración de planos y el cálculo de la altitud del Sol.

Unidad 2. En el Parque Juan Carlos I

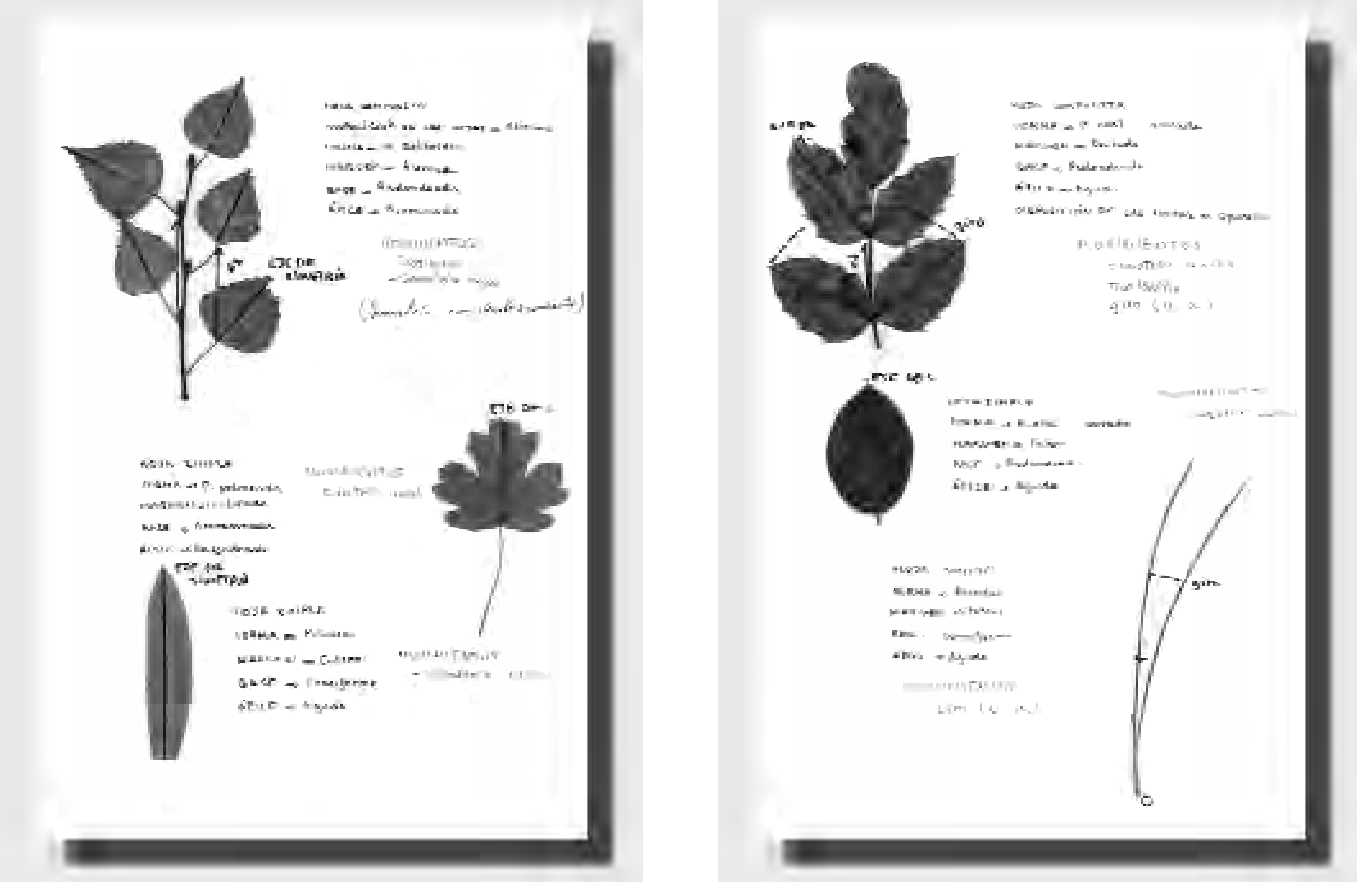
El Parque Juan Carlos I se ubica en el norte de la capital de Madrid. Asentado sobre un antiguo vertedero y un deteriorado olivar, su estado de degradación era absoluto hasta que se decidió su rehabilitación en 1989. La estructura del parque se extiende en torno a un bulevar de 40 m de anchura, con forma anular y de un 1 km de diámetro. Canales de agua, lagos, géiseres, más de 30 surtidores parabólicos, la combinación entre los restos del olivar y la nueva vegetación generan una simbiosis perfecta entre parque y olivar. Además 17 esculturas de gran tamaño y un conjunto de tres jardínes representativos de las culturas cristiana, judía y árabe hacen de este rincón, con 160 hectáreas, el parque más grande de Madrid y un lugar muy apropiado donde buscar la conexión entre matemáticas, naturaleza, arquitectura y escultura.

Además de trabajar los contenidos de la anterior unidad, aquí se introducen el reconocimiento de figuras geométricas en el plano (polígonos, polígonos estrellados, espirales), figuras geométricas en el espacio (prismas, pirámides, esferas, cilindros, coronas circulares), el estudio de transformaciones geométricas (movimientos en el plano, análisis de mosaicos, simetrías en la naturaleza y arquitectura), y la identificación de gráficas de funciones. Así mismo, se utiliza la realización de fotografías como un método de recoger información matemática.

El desarrollo de esta unidad se lleva a cabo en tres momentos: una actividad de lectura y comprensión del folleto explicativo del parque, previa a la visita, donde el alumno tiene que analizar la información numérica del folleto y calcular, entre otras cosas, la escala del plano, la superficie del bulevar, la distribución del olivar por decámetro cuadrado y la distancia y rumbos del recorrido propuesto. Se complementaría con el visionado de diapositivas del parque que servirían de ejemplo a los alumnos para la posterior de realización de fotos. La visita al parque tiene lugar durante toda una mañana, y en ella se distinguen dos bloques de actividades, las relativas al Jardín de las Tres Culturas y el paseo por el parque. El último momento se corresponde con el trabajo final en el aula, acabando las tareas y cálculos que no se concluyeron durante la visita, y una puesta en común comentando las incidencias, problemas y resultados de la experiencia con el alumnado.

El Jardín de las Tres Culturas es un conjunto de tres jardines individuales, representativos de las culturas árabe, cristiana y judía, que confluyen en un punto central común, alegórico a la idea de paraíso o edén. Algunas tareas matemáticas que nos ofrece este espacio son: el cálculo de la pendiente de una pasarela-puente, estudiar dos mosaicos (tipo de malla, motivo mínimo, movimientos que lo dejan invariante), calcular la razón de semejanza entre triángulos, hallar el área de polígono estrellados y calcular el volumen de un prisma octogonal. Durante el paseo por el parque los alumnos se encuentran con siete de las grandes esculturas que hay en el mismo: han de calcular el volumen de una esfera, un cilindro, un anillo circular, varios prismas cuadrangulares, así como identificar la gráfica de arcos parabólicos y de una sinusoide. A lo largo de toda la jornada los alumnos tienen que recoger muestras de hojas y plantas que presenten simetrías, así como identificar las simetrías que presentan las distintas esculturas y los tres jardines.

Las actividades que se proponen no son originales, son los ejercicios que tradicionalmente aparecen en los libros de texto. Lo novedoso es que en estas actividades el alumno es el protagonista a la hora de estimar las distancias, manejar los aparatos de medición, recoger los datos, y calcular los resultados finales.



Análisis de las simetrías y movimientos en la naturaleza. Trabajos realizados por alumnos durante la visita al Parque Juan Carlos I

Otras tareas propuestas requieren una labor de investigación por parte del alumno, que debería desarrollar de manera individual, como por ejemplo: aportaciones científicas de Galileo o búsqueda de los distintos tipos de espirales que existen. También se aprovecha para realizar actividades de tipo interdisciplinar con la materia de Historia, como por ejemplo: información relativa a la simbología de las plantas de las iglesias cristianas, las aportaciones artísticas de la cultura islámica o la simbología de la estrella de David en la cultura judía.

También se aprovecha para realizar actividades de tipo interdisciplinar con la materia de Historia

Unidad 3. Paseo matemático por la Sierra de Madrid

Las actividades que se plantean en esta unidad tienen un fuerte componente interdisciplinar: mientras practicamos senderismo –educación física– los alumnos interpretan un mapa topográfico, recogen y clasifican plantas y hojas –ciencias naturales– y recopilan datos para la elaboración de gráficas.

Fotografía 2. Entrada del Parque Juan Carlos I

El itinerario elegido para realizar las actividades forma parte de la Ruta Verde 1 a lo largo del Valle del Lozoya, que discurre en la sierra de la Comunidad de Madrid desde el pueblo de Rascafría hasta al Puerto de Cotos, pasando por el Paular, por la cabecera de aguas de la cuenca del río Lozoya. Se trata de una ruta ecoturista de una gran variedad y espectacularidad paisajística, así como de interés cultural y ecológico. Es un recorrido de 8 km, aproximadamente, siendo la primavera la mejor época para su realización.

La realización de esta unidad supone una aplicación práctica de los contenidos relacionados con la interpretación y elaboración de gráficas de funciones a partir de tablas de datos. Además se insiste en la realización de fotografías como forma de identificar las matemáticas presentes en el entorno.

Unidad 4. Matemáticas en una zona rural

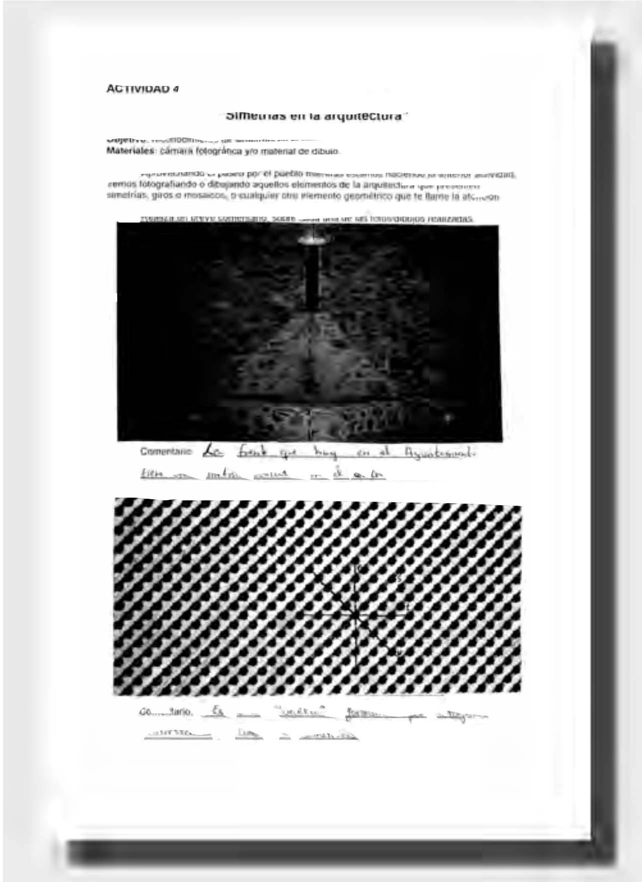
El objetivo de esta unidad es consolidar los contenidos tratados en actividades anteriores. Si las unidades didácticas se realizan en un solo curso, puede servir de colofón al trabajo desarrollado a lo largo del mismo. Se plantea como actividad extraescolar para realizar al menos durante cinco días en algún albergue o estancia situado en una zona rural. Nosotros hemos llevado a cabo esta unidad en el pueblo de Umbralejo, situado en el norte de Guadalajara, como un proyecto que presentamos al programa «Recuperación y utilización educativa de pueblos abandonados» del Ministerio de Educación. Estas actividades se pueden adaptar a la geografía de cualquier lugar, en concreto presentamos una adaptación al pueblo de Cercedilla (Madrid).

Los contenidos matemáticos utilizados hacen referencia a múltiples aspectos del currículo: resolución de problemas, geometría, funciones, números y estadística. Además, se trabajan lo contenidos relativos a la interpretación de los aspectos geográficos y formas del relieve.

Algunas de las actividades se basan en la recopilación de datos para la elaboración de gráficas, como por ejemplo, la construcción de un reloj solar, elaboración del perfil de un río, de un corte topográfico, el itinerario de una excursión; otras son de tipo manipulativo como la construcción de un curvímetro; otras de interpretación y orientación con un mapa topográfico; trazado de una poligonal para la elaboración de un plano del pueblo; búsqueda y fotografía de simetrías en la arquitectura; etc.

Ejemplos de actividades

A continuación, se presentan algunas de las actividades que aparecen en el Cuaderno de campo especificando los objetivos, contenidos y materiales de cada una de ellas, así como una breve descripción, su desarrollo y el trabajo realizado por los alumnos.

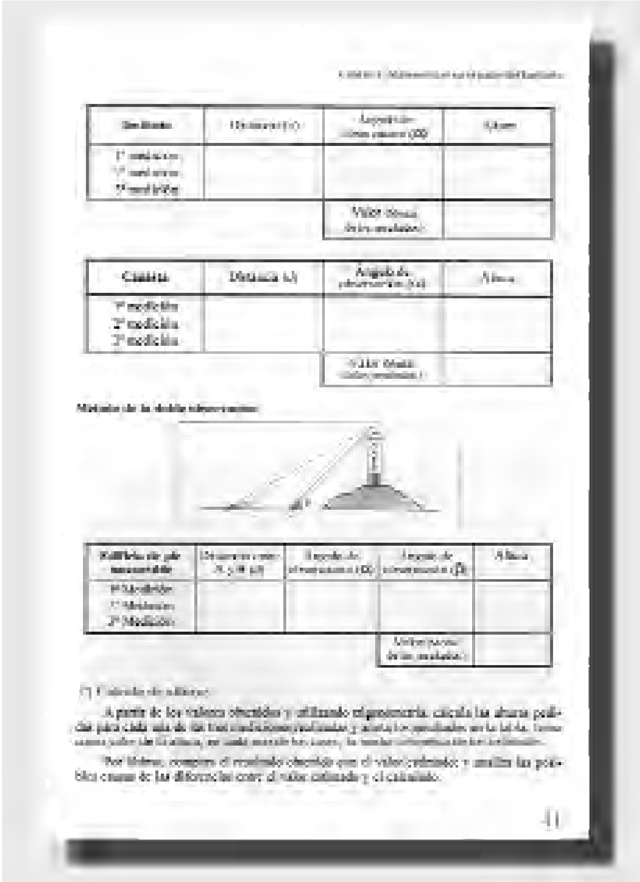


Simetrías en el entorno. Trabajo de los alumnos

Los contenidos matemáticos utilizados hacen referencia a múltiples aspectos del currículo: resolución de problemas, geometría, funciones, números y estadística.

Cálculo de alturas utilizando trigonometría

Esta actividad necesita como requisitos previos una exposición teórica en el aula de los conceptos de trigonometría. Salvo la tabla relativa a «Método de doble observación», podemos considerar este ejercicio como la primera práctica de trigonometría (en este caso, cálculo de alturas). Las dificultades observadas se centran sobre todo en un uso incorrecto del clinómetro por parte de los alumnos, lo cual conduce en algunos casos a resultados bastantes disparatados. Por ello, en esta actividad se les pide inicialmente que realicen una estimación de las alturas que van a medir (por comparación con distancias conocidas, por ejemplo: la altura de un piso, la distancia de la línea de tiro libre en la cancha de baloncesto), y al final, que valoren



Cálculo de alturas utilizando trigonometría

críticamente los resultados de la medición efectuada con respecto a la estimación realizada. Otro error detectado es que en algunas ocasiones los alumnos calculan la media aritmética de las mediciones efectuadas por distintas personas (distintas alturas de cada uno de ellos), a distintas distancias (y por tanto, distintos ángulos de observación), cuando realmente lo que se pide es que efectuadas las mediciones y cálculos por separado, tomen por resultado final la media de los distintos resultados obtenidos.

Por último, se propone el cálculo de la altura de un edificio exterior al instituto, sobre el cual no existe la posibilidad de acceder a su base para medir la distancia. Para su resolución no es necesario introducir el teorema del seno, sino que basta con aplicar conceptos trigonométricos a triángulos rectángulos. Es un buen ejercicio de utilización de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas a la hora de resolver problemas de la vida real. De alguna manera interrelacionamos geometría y álgebra, de forma que el alumno no lo perciba como bloques de contenidos estancos y separados.

…y abordar temas transversales como la tolerancia y el conocimiento y respeto a culturas distintas a la nuestra.

Jardín Árabe

La visita al Jardín Árabe es una excelente posibilidad para relacionar las matemáticas con las aportaciones de la cultura árabe a la arquitectura. Desde las simetrías en el arco de herradura, el uso del octógono y polígonos estrellados por doquier, hasta el componente estético en su afán decorativo de rellenar cualquier hueco en las paredes y suelos (*horror vacui*) con mosaicos, tenemos una buena combinación para trabajar interdisciplinarmente con el área de Ciencias Sociales y abordar temas transversales como la tolerancia y el conocimiento y respeto a culturas distintas a la nuestra.

En el apartado 3 se les pide el cálculo del volumen del prisma octogonal recto de la fotografía. Además de utilizar los procedimientos del cálculo de alturas ya vistos en las actividades del patio, tienen que dar una solución para el cál-

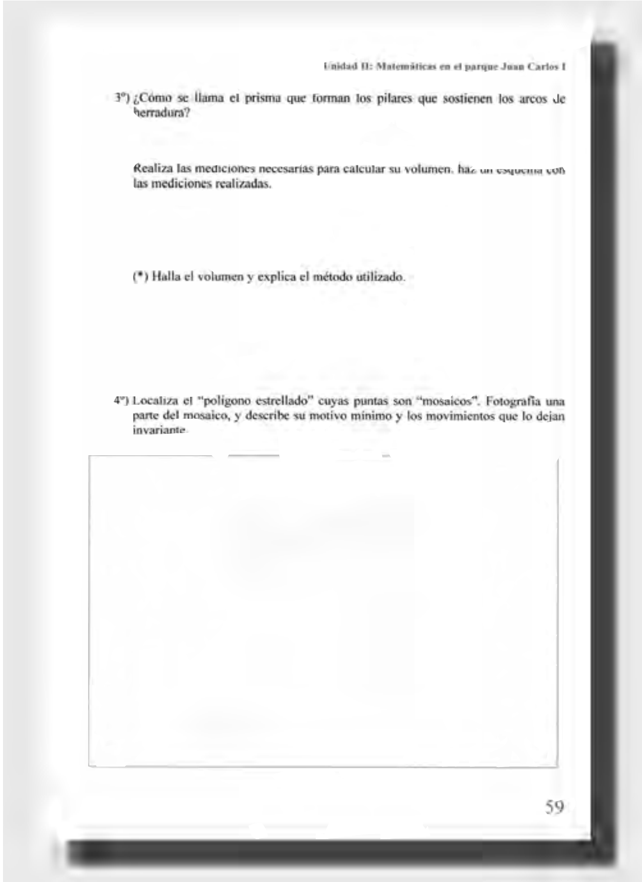

6.2. JARDÍN ÁRABE O ESTANCIA DE LAS DELICIAS

1º) ¿Qué tipo de arco, típico de la cultura islámica, está profusamente representado en este jardín?

Dibújalo e marca las simetrías que lo dejan invariante.

2º) ¿Cuál es el polígono predominante en este jardín?

58


Unidad II: Matemáticas en el parque Juan Carlos I

3º) ¿Cómo se llama el prisma que forman los pilares que sostienen los arcos de herradura?

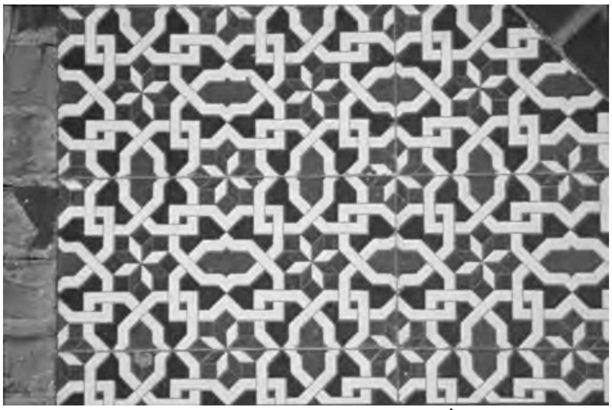
Realiza las mediciones necesarias para calcular su volumen, haz un esquema con las mediciones realizadas.

(*) Halla el volumen y explica el método utilizado.

4º) Localiza el "polígono estrellado" cuyas puntas son "mosaicos". Fotografía una parte del mosaico, y describe su motivo mínimo y los movimientos que lo dejan invariante.

59

Jardín Árabe o Estancia de las delicias


Fotografía 3. Mosaico del Jardín Árabe

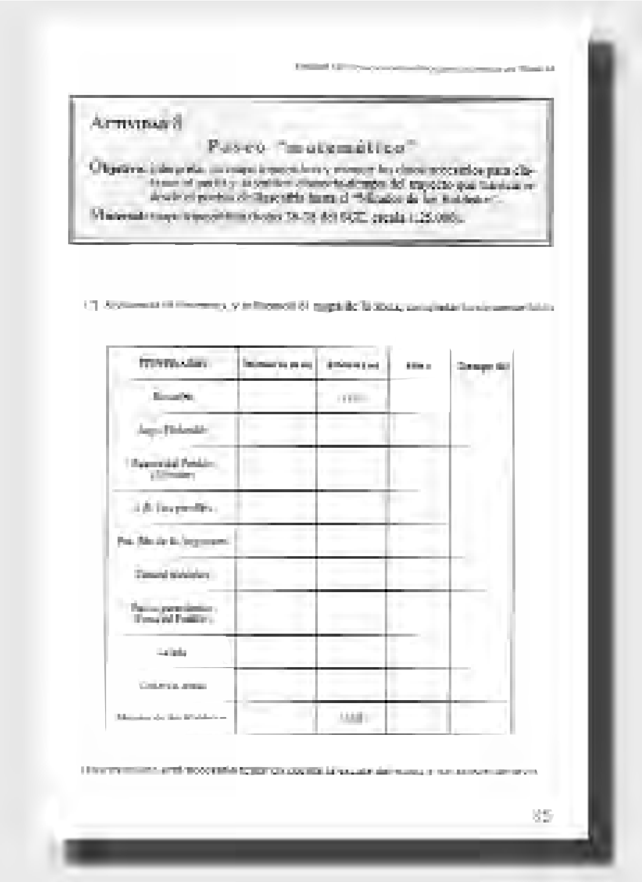
culo de la apotema de la base que en principio no pueden medir directamente sobre el terreno por la presencia de una fuente en el centro del prisma. De nuevo tienen que recurrir a la trigonometría, si bien algunas soluciones erróneas de los alumnos pasan por identificar radio y lado, para aplicar posteriormente el teorema de Pitágoras, o incluso identificar apotema y lado. Se concluye con el estudio y análisis del mosaico que decora el suelo.

Se pretende que los alumnos interpreten un mapa topográfico, identifiquen el relieve…

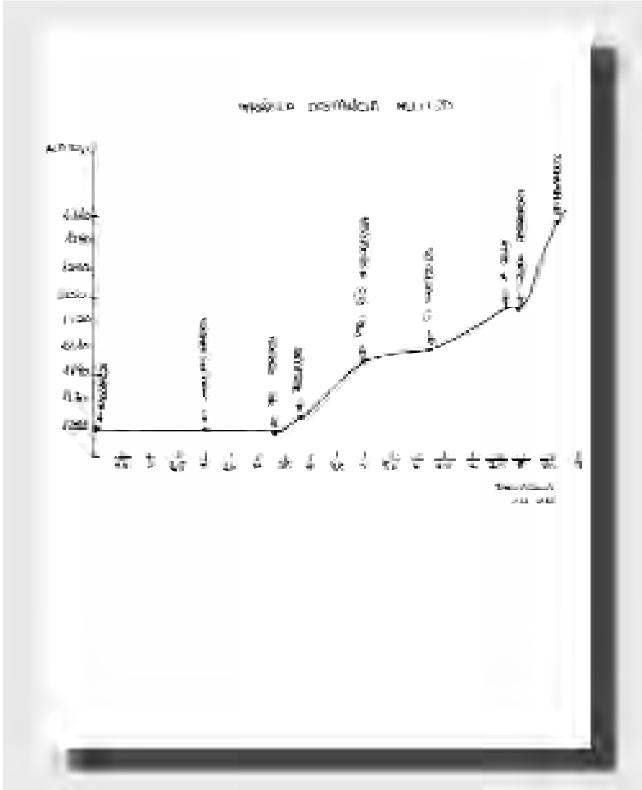
Paseo matemático

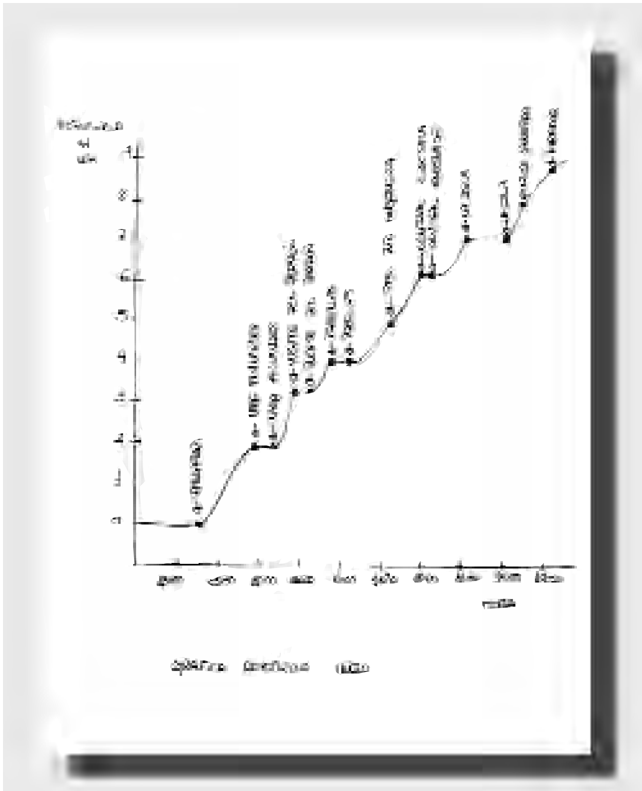
Esta actividad está diseñada para ser realizada durante una marcha por la Sierra madrileña (aunque puede ser adaptada a cualquier otro lugar) durante todo el día. Se pretende que los alumnos interpreten un mapa topográfico, identifiquen el relieve, y recogan datos de altitud, distancia y tiempo, y que los representen gráficamente.

Para llevar a cabo esta actividad es necesario una clase previa de explicación teórica de cómo manejar un plano: curvas de nivel, escala, puntos más destacables, distintos tipos de relieve, etc. Los alumnos se organizarán en grupos de tres o cuatro personas, debiéndose repartir y



Paseo «matemático»





Trabajos realizados por alumnos en la marcha realizada en marzo de 1999

organizar el trabajo de forma que durante la marcha puedan ir recogiendo los datos necesarios. Después de realizada la marcha cada grupo deberá trabajar en casa para pasar a limpio todos los datos y completar las tareas previstas.

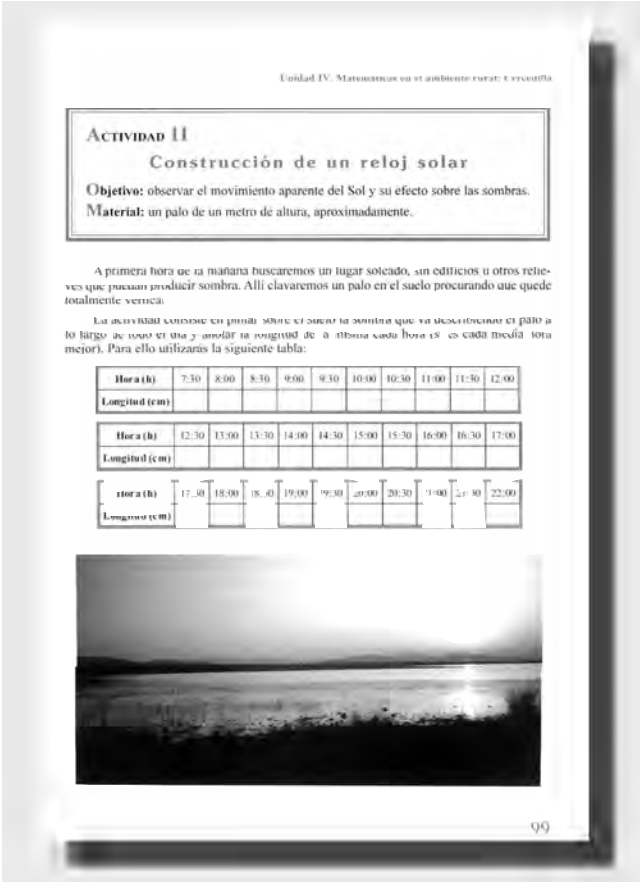
Además la zona permite realizar actividades propias del área de biología, aunque también tiene un gran interés cultural pues aquí se encuentra el Monasterio del Paular que, junto con el puente del Perdón, permite completar la salida con actividades de tipo histórico-artístico. Incluso existe la posibilidad de realizar algunas actividades de *Astronomía*: en particular, la zona del «Mirador de los Robledos» (final de nuestra marcha) es un excelente lugar para realizar una *observación nocturna del cielo*. Para ello es suficiente con utilizar unos prismáticos y varios planisferios, aunque sería deseable contar con un telescopio.

Construcción de un reloj solar

El estudio de las sombras del Sol nos permite trabajar con el sistema de numeración sexagesimal, los ángulos, conceptualizar la idea de dirección y justificar la elección de la dirección Norte-Sur como dirección de referencia.

Las peculiaridades de esta actividad implica que para su realización se necesite un día soleado, así como un sitio relativamente despejado donde la sombra del «palo» no sea interferida por otras sombras. Con los datos obtenidos se les pide que construyan una gráfica que relacione el tiempo con la longitud de la sombra. Es un ejercicio que nos permite, utilizando la brújula, comprobar la dirección de las sombras proyectadas sobre el suelo en distintos momentos del día, y sacar conclusiones acerca de que el movimiento «aparente» del sol de Este a Oeste es debido al movimiento de la Tierra alrededor del mismo.

Si bien la representación de los datos es fácil para los alumnos, cuando se les pregunta sobre la interpretación de los mismos en distintas situaciones nos encontramos con algunas dificultades. La mayoría da por bueno que, en efecto, la diferencia de las longitudes de la sombra se corresponde con las distintas «aparentes» alturas que alcanza el Sol a lo largo del día, siendo la sombra mínima la relacionada con la altura máxima del Sol sobre el horizonte. Las dificultades surgen cuando planteamos qué resultados obtendríamos si la experiencia se hubiera realizado en invierno, o si se hubiera realizado en el hemisferio Sur. Así mismo, muchos alumnos no ven con claridad cuánto tardará la sombra del palo en describir una vuelta completa.



Unidad IV. Matemáticas en el ambiente rural: Cercedilla

ACTIVIDAD 11

Construcción de un reloj solar

Objetivo: observar el movimiento aparente del Sol y su efecto sobre las sombras.
Material: un palo de un metro de altura, aproximadamente.

A primera hora de la mañana buscaremos un lugar soleado, sin edificios u otros relieves que puedan producir sombra. Allí clavaremos un palo en el suelo procurando que quede totalmente vertical.

La actividad consiste en pintar sobre el suelo la sombra que va describiendo el palo a lo largo de todo el día y anotar la longitud de la misma cada hora (si es cada media hora mejor). Para ello utilizarás la siguiente tabla:

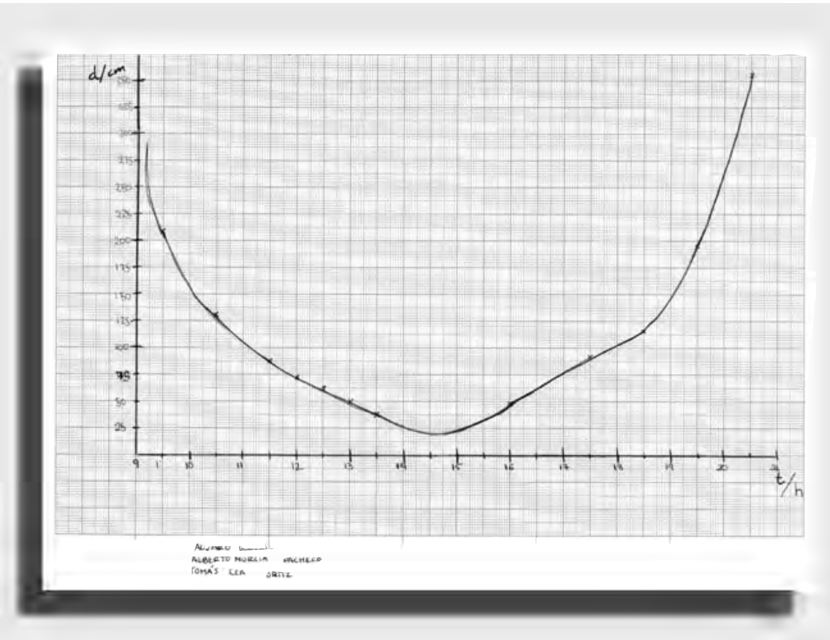
Hora (h)	7:30	8:00	8:30	9:00	9:30	10:00	10:30	11:00	11:30	12:00
Longitud (cm)										

Hora (h)	12:30	13:00	13:30	14:00	14:30	15:00	15:30	16:00	16:30	17:00
Longitud (cm)										

Hora (h)	17:30	18:00	18:30	19:00	19:30	20:00	20:30	21:00	21:30	22:00
Longitud (cm)										

99

Construcción de un reloj solar

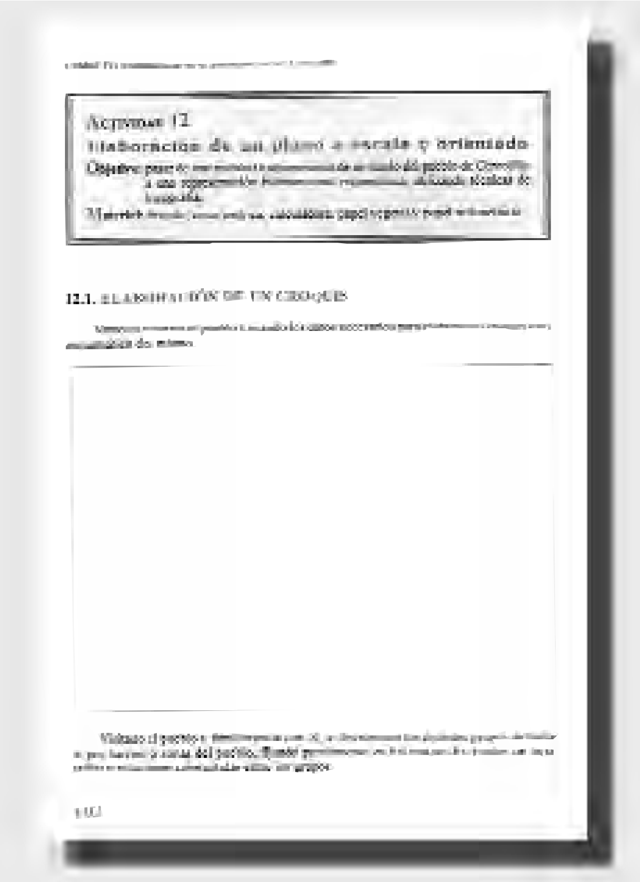


Evolución de las sombras en el mes de mayo. Trabajo de alumnos

Trazado de una poligonal

El objetivo final de esta actividad es la elaboración de un plano a escala y orientado de una barriada del pueblo de Cercedilla, siendo una aplicación de las matemáticas a la Topografía.

Para su desarrollo cada grupo de tres o cuatro alumnos debe realizar inicialmente un croquis de todo el barrio. Después se hace una puesta en común con los distintos croquis realizados, se corrigen diferencias entre cada uno de ellos y se divide la zona a topografiar en cuatro (o más) sectores. A continuación, cada grupo realiza una poligonal de su sector, que consiste en una línea quebrada formada por una serie de segmentos, formando ángulos entre ellos, teniéndose que medir la longitud de dichos segmentos y su rumbo.



Elaboración de un plano a escala

Es pues un trabajo que exige una coordinación eficaz entre los distintos grupos de alumnos a la hora de planificar el trabajo, tomar datos y concretar las estaciones topográficas comunes a los distintos grupos. Es fundamental insistir en la importancia de este último punto, determinar las estaciones topográficas comunes a cada sector, ya que éstas serán la base sobre la cual elaboraremos el plano definitivo.

Esta actividad aúna una gran cantidad de conceptos matemáticos (escalas, trigonometría, cambio de coordenadas de polares a cartesianas), unos contenidos procedimentales variados y un trabajo en equipo efectivo. La combinación de todos estos aspectos hace que esta tarea sea bastante compleja, lo cual requiere una explicación muy pausada y clara, para evitar errores. También es una buena oportunidad para hablar de geometría analítica, así como para proponer, a algún grupo más avanzado el uso del clinómetro y realizar una introducción a las coordenadas esféricas.

Alfredo Marcos
IES Anselmo Lorenzo.
San Martín de la Vega
(Madrid)
Eduardo Carpintero
IEES Severo Ochoa. Tánger.
Marruecos

Sociedad Madrileña
de Profesores de Matemáticas
«Emma Castelnuovo»

Bibliografía

AGUIRRE, F. (1995): *Matemáticas cotidianas*, Alhambra Longman. Madrid.

ALSINA, C. (1998): *Contar bien para vivir mejor*, Rubes. Barcelona.

BELL-LLOCH, A. y otros (1996): *Fotografía y matemáticas*, Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo», Madrid

BOLT, B. y D. HOBBS (1991): *101 proyectos matemáticos*, Labor. Barcelona

CARPINTERO, E. y A. MARCOS (2000): *Cuaderno de Campo de matemáticas*, Comunidad de Madrid, Madrid.

ERNST, B. (1994): *El espejo mágico. M.C. Escher*, Taschen,.

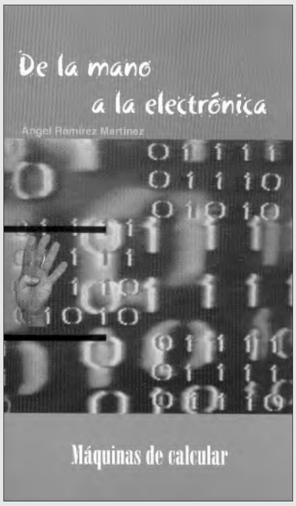
GHYKA, M. (1985): E*stética de la proporciones en la Naturaleza y el Arte*. Poseidón.

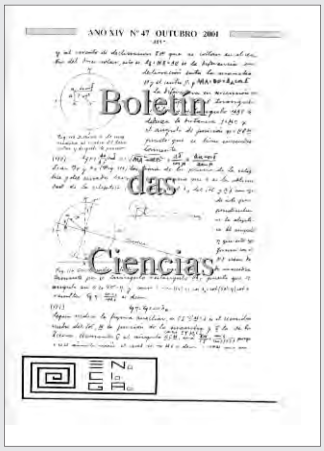
MARTÍNEZ, A. (1992): *Topografía espeleológica*, FEE, Barcelona

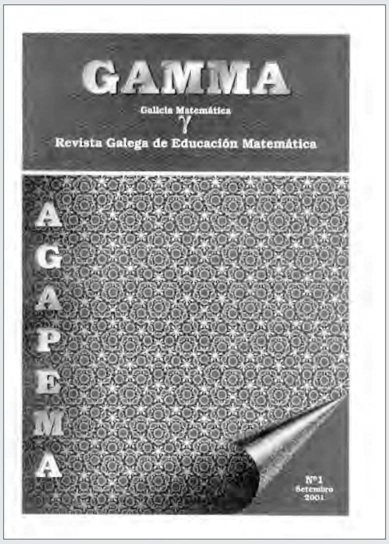
MEAVILLA, V. (1995): *Medir sin esfuerzo*, Alhambra Longman. Madrid.

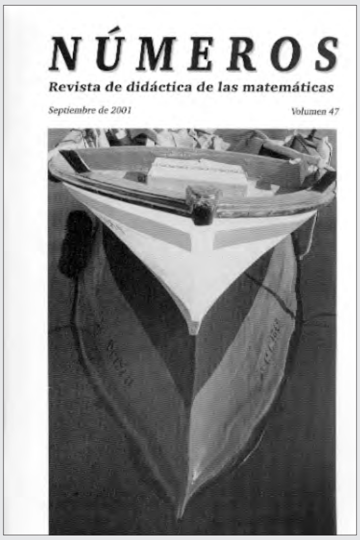
VILARRASA, A. y F. COLOMBO (1988): *Mediodía: ejercicios de exploración y representación del espacio*, Graó, Barcelona.

PUBLICACIONES DE LAS SOCIEDADES









SUMA 38
noviembre 2001, pp. 85-88

De pesetas a euros

Tomás Queralt Llopis

IDEAS Y RECURSOS

En el presente artículo se plantea y se resuelve una actividad propuesta para trabajar con los alumnos el concepto de redondeo, usando como contexto la futura situación de transformación de pesetas a euros y partiendo de las directrices que marcan la elaboración de actividades con un espíritu constructivista. En la resolución se obtienen resultados que sorprenden.

SE ESTÁ ACERCANDO el momento de abandonar la peseta como unidad de moneda en el territorio español y de utilizar el euro dentro del marco de la Unión Europea. Este proceso, abundantemente anunciado y apoyado por una campaña de formación de la población respecto a cómo hacer la transformación de una unidad a otra, puede ayudar a comprender el mecanismo que resuelve el problema de redondear una cierta cantidad, pero no es suficiente para comprender el significado matemático que involucra este concepto. Porque redondear una cantidad a una posición decimal dada significa buscar la aproximación, de entre las dos que existen, que esté más cerca del valor inicial: la aproximación por defecto o por exceso. Pero en este caso, en el que se trata de dinero, siempre hay alguien que gana o pierde, en función de si elegimos una aproximación u otra para redondear. Puesto que todos los ciudadanos deberemos cambiar nuestro dinero de pesetas a euros, me parece interesante el pararme a pensar un poco sobre este asunto, ya que la cuestión vista desde el punto de vista global puede involucrar mucho dinero. Y creo que todo el mundo tiene interés en que, por pequeña que sea esta cantidad, siempre será mejor que sea el banco que me facilitará el cambio quien pierda, en lugar de ser yo.

El tercer estudio internacional de Matemáticas y Ciencias (TIMSS) aplicado entre 1994 y 1995, revelaba que a aquellos alumnos españoles a los que se les pasó el test, solamente el 17% de los de 7.° de EGB y el 28% de los de 8.° (actualmente 1.° y 2.° de la ESO), respondieron de forma correcta a un problema de redondeo, muy por debajo de los valores internacionales, lo que demostraba que los alumnos no sabían lo que es redondear. Actualmente se ha incluido como un contenido más del currículo de la secundaria obligatoria, lo cual favorecerá el uso de una herramienta necesaria para desenvolverse con eficacia y normalidad en el futuro más próximo.

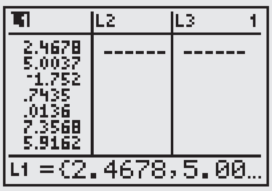
Por estos motivos me planteé la posibilidad de preparar alguna actividad para los alumnos que hiciera significativo el aprendizaje del concepto de redondeo. Para ello, usé algunos de los principios que Arcavi sugiere para diseñar actividades con espíritu constructivista (Arcavi, 1995):

- Presentar problemas que permitan actividad mental creadora de conocimiento.
- El alumno ha de poder utilizar su experiencia previa (situación familiar y manejable) y que haya una invitación explícita a utilizar el sentido común.
- Que haya problemas genuinos de la vida real para los cuales el uso de herramientas matemáticas ayude a comprender mejor fenómenos que nos rodean.
- Que la respuesta requiera la formulación de un argumento, una comparación, una idea, una conexión entre conceptos, una traducción entre diferentes representaciones.
- Que el problema se presente para elaborar preguntas nuevas, es decir, que la solución del mismo despierte curiosidad y el alumno, por su cuenta o en grupo –o con ayuda del maestro–, abra la posibilidad de seguir explorando la situación.
- Que la respuesta no sea accesible solamente por medio de la aplicación mecánica de un procedimiento de cálculo.

La actividad que construí parte de trabajar inicialmente el concepto de redondeo, y continúa con una pequeña investigación. Se plantea su resolución con la calculadora gráfica, por los beneficios que su uso reporta al alumno, en cuanto a dotarlo de autonomía, rapidez de cálculo, facilidad de visualización de los resultados, etc.

El valor del redondeo

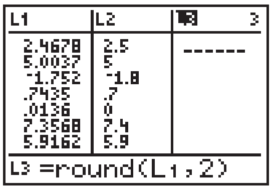
Escribe en una lista el siguiente conjunto de expresiones decimales:

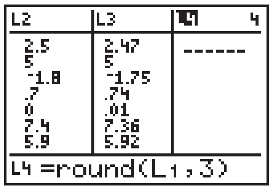


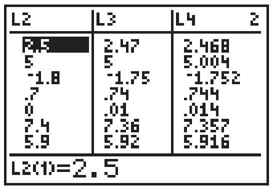
A continuación, en las listas que siguen, procura que se calcule el redondeo a las décimas, centésimas y milésimas.

Supongamos que la primera lista de números (L1) nos muestra el resultado de cambiar nuestro dinero en pesetas a dólares. ¿Cuál es el redondeo que nos resultará más conveniente? Explica el porqué en cada caso.

El redondeo a las distintas posiciones decimales se obtiene con la instrucción round():







Se plantea su resolución con la calculadora gráfica, por los beneficios que su uso reporta al alumno, en cuanto a dotarlo de autonomía, rapidez de cálculo, facilidad de visualización de los resultados, etc.

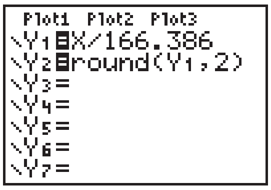
Para cada expresión decimal nos conviene un redondeo u otro, puesto que dependiendo de la expresión decimal redondearemos por exceso o por defecto. Así, en el primero nos conviene el redondeo a las décimas, porque de los tres redondeos calculados es el que me proporciona un valor mayor; en el segundo a las milésimas, en el tercero a las centésimas, y así sucesivamente.

El Cambio más favorable

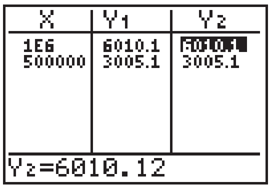
Sabemos que el 1 de Enero del año 2.002 tendremos que pagar en euros, porque la peseta habrá desaparecido. Será necesario que cambiar las pesetas que tenemos ahorradas en el banco o en la hucha por euros, ya que si no lo hacemos perderemos ese dinero. Se fijó el siguiente cambio: cada euro son 166,386 pesetas.

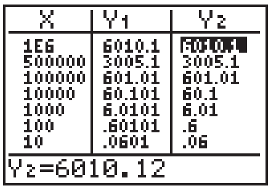
- Si disponemos de 1.000.000 de pesetas ahorradas, ¿cuántos euros nos darán por ellas? Recuerda que cuando calcules el resultado, debes redondear a las centésimas, pues la moneda más pequeña que existirá será la de céntimo de euro, y que no existe la milésima de euro.
- Si en lugar de eso cambiamos primero 500.000 pesetas y después las otras 500.000, ¿nos darían el mismo cambio?
- ¿Y si en lugar de dividir el millón en dos partes, lo dividimos sucesivamente en partes más pequeñas y vamos cambiando?
- ¿Cuál es la mínima cantidad de pesetas que nos conviene cambiar cada vez para sacar el máximo beneficio en el cambio?

La respuesta a las primeras preguntas puede darse haciendo la operación correspondiente y calculando el redondeo. Pero podemos definir una función que haga la conversión a euros, calculando después el redondeo correspondiente. Lo vemos en la siguiente pantalla:

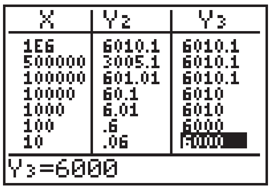


El resultado sería que por un millón de pesetas nos darán 6010,12 euros. Por 500.000 ptas 3.005,06 euros, lo cual nos daría el mismo total; por 100.000 ptas. nos darían 601,01 euros, lo cual hace un total de 6.010,1 euros, que muestra una pequeña diferencia de 2 céntimos de euro con respecto a los totales anteriores. Observamos que a medida que cambiamos cantidades más pequeñas, el efecto del redondeo hace que cambie la cantidad total de euros que recibamos.



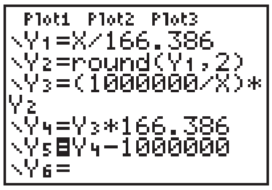


Se nos puede ocurrir que podemos calcular como se produce esta variación desde la primera peseta, viendo si la cantidad recibida equivalente en pesetas, ganamos o perdemos en el cambio. Para ello nos planteamos en ir al banco la cantidad de veces que sea, cambiando siempre la misma cantidad de dinero hasta tener cambiado el millón de pesetas. Así, definimos la función Y3 que multiplique lo que nos han dado en euros en el cambio por el número de veces que vamos al banco hasta cambiar el millón de pesetas.

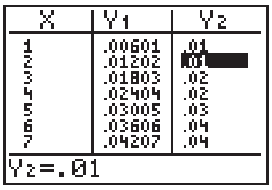


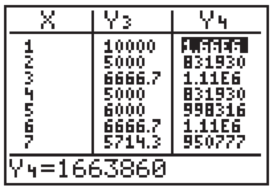
…en el supuesto de cambiar una peseta cada vez hasta el millón, en la conversión obtendríamos un beneficio equivalente a 663.860 pesetas, mientras que si fueran dos pesetas cada vez, en el proceso perderíamos 168.070 pesetas.

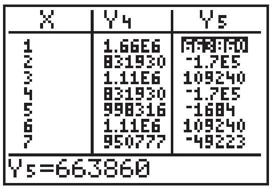
Si a continuación multiplicamos este valor por 166,386, obtendremos el equivalente en pesetas de lo que nos han cambiado a euros, por lo que una simple resta con la cantidad inicial de 1.000.000 nos indicará si en el proceso de cambio hemos ganado o hemos perdido dinero.

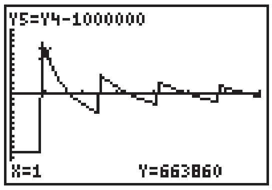


De esta manera vemos que para ciertas cantidades el cambio es el mismo (nos dan un céntimo de euro ya cambiemos una o dos pesetas), lo cual quiere decir que en el cambio se produce un error que en una ocasión es a nuestro favor y en la otra a favor del banco. Vemos que la función que proporciona la diferencia entre la cantidad inicial en pesetas, 1.000.000, y la que tendríamos después de la conversión a euros va oscilando tendiendo al cero a medida que aumenta la cantidad que cambiamos cada vez. Así, en el supuesto de cambiar una peseta cada vez hasta el millón, en la conversión obtendríamos un beneficio equivalente a 663.860 pesetas, mientras que si fueran dos pesetas cada vez, en el proceso perderíamos 168.070 pesetas. Se puede calcular cuándo se obtiene un beneficio máximo calculando el máximo de la función, el cual se correspondería con una cantidad que en la práctica no se podría utilizar: 0,8319305… pesetas, que me proporcionaría una diferencia a mi favor de… ¡1.000.000 de pesetas! Es decir, en el cambio ganaría la misma cantidad que pretendo cambiar. Por tanto, la cantidad mínima que deberíamos cambiar para obtener el máximo beneficio en el cambio sería 1 peseta, haciendo ¡un millón de viajes al banco! Aunque desde el punto de vista práctico resulte imposible realizarlo, desde el punto de vista legal se podría hacer, a menos que se nos marque una cantidad mínima en el banco a partir de la cual podemos cambiar.









Estas conclusiones, que a primera vista resultan sorprendentes, dejan en evidencia que existen muchas cuestiones matemáticas que aparentemente no tienen trascendencia pero que pueden conducir a resultados que por lo menos llaman la atención.

También me gustaría resaltar el beneficio que la calculadora gráfica proporciona en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, lo que ha sido tratado con más detalle en los numerosos informes que existen al respecto. Sirva como resumen de todos ellos la cita de H. Freudenthal (1980), quien ofreció su propia visión en el ICME 4.:

> Lo que busco no son calculadoras ni ordenadores como tecnología educativa, ni como educación tecnológica, sino como una herramienta poderosa para despertar y aumentar el entendimiento matemático.

Tomás Queralt
CEFIRE de Torrent.
Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi».
Proyecto T3 España

Bibliografía

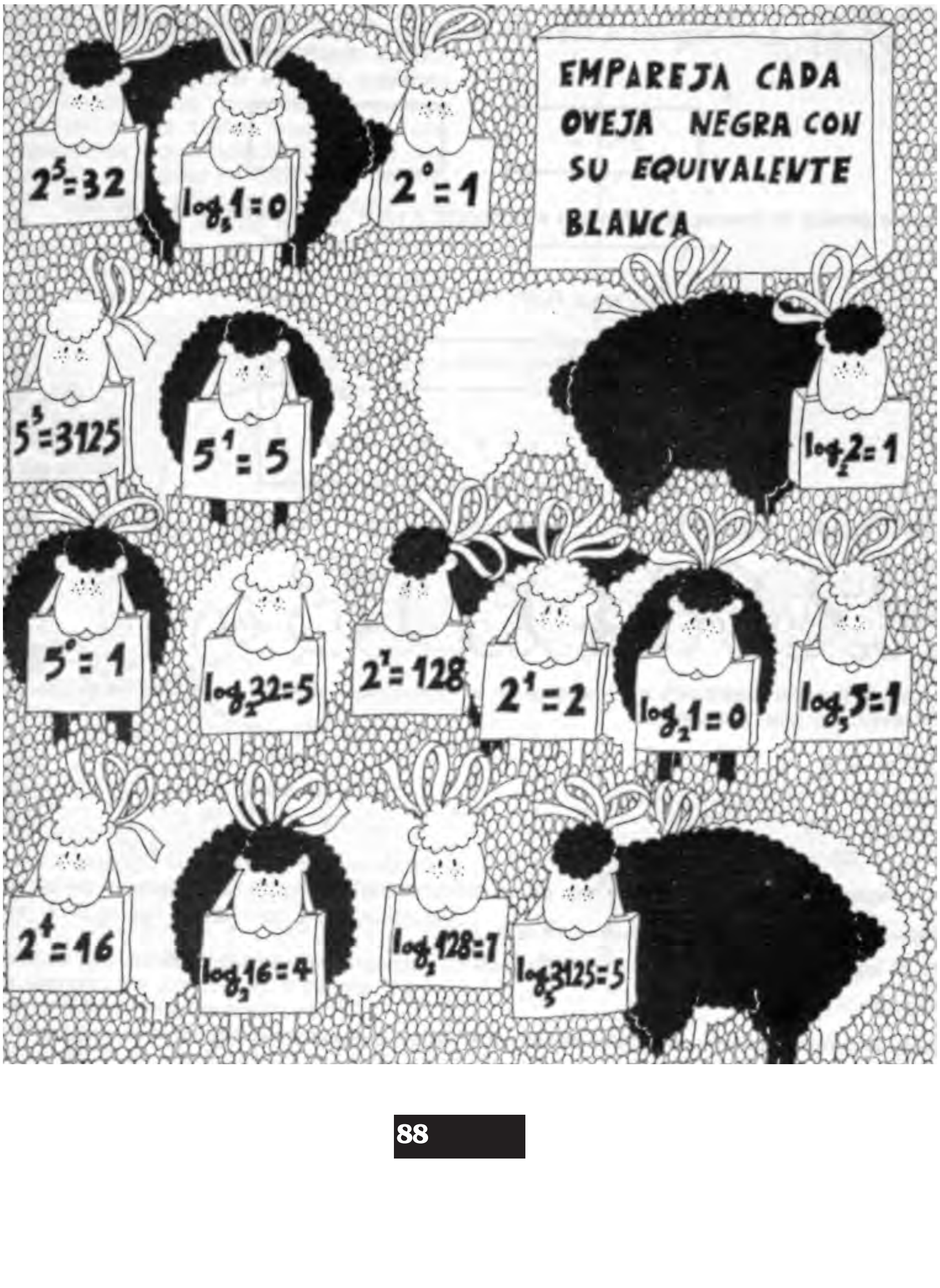
ARCAVI, A. (1995): "…Y en matemática, los que instruimos ¿qué construimos?" *Substratum*, vol II, n.° 6, 77-94.

QUERALT, T. (2000): "Un enfoque constructivista en el aprendizaje de la matemáticas con las calculadoras gráficas". *Actas de la 14 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* RELME. Panamá.

QUERALT, T. (2000): "Las matemáticas con tecnología entran". *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*. Vol. 41, 23-36.

TEXAS INSTRUMENTS (1996). *Manual de la calculadora gráfica TI-83.*

WAITS, B. (1997). "El apoyo que dan las calculadoras gráficas para enseñar y aprender mejor las matemáticas". TI-MAT.



SUMA 38
noviembre 2001, pp. 89-94

¡Qué viene el euro!

Francisco M. Bou, Lucía Puchalt,
Marta I. Trapero, Mónica Vivó

IDEAS Y RECURSOS

Desde este artículo se pretende dar a conocer un recurso para que los alumnos, trabajando en grupo, se inicien en el manejo del *euro*, simulando situaciones reales a las que pronto van a tener que hacer frente. Se tratan al mismo tiempo otros contenidos matemáticos como porcentajes, números primos, redondeos, operaciones combinadas, números negativos, decimales,… Con la posibilidad de adecuarlo a los distintos niveles educativos, desde primaria hasta bachillerato.
Por otra parte, este recurso ha sido diseñado para trabajar también la Educación para el Consumidor.
Todos estos objetivos se pueden cumplir con un atractivo formato de juego, el *EUROmes*.

YA VIENE EL LOBO… Hace tiempo que oímos «que viene el euro», y parece como en el cuento, que nunca va a llegar, pero ya casi está aquí. Hay que agudizar todos los sentidos, porque ya le vamos viendo las orejas.

A pocos meses de su aparición física, estamos asistiendo a un bombardeo de campañas institucionales, vendiéndonos las bondades y beneficios del euro, y la sencillez de su uso.

¿Pero, por qué seguimos la mayoría de la población todavía «ignorantes», y con el pensamiento fatalista de que «cuando venga, ya veremos»? La arena sigue cayendo inexorablemente en el reloj, y todos tenemos la impresión de que nos va a «caer» encima el euro.

Y es que no hay campaña institucional que pueda suplir a su manejo práctico.

La escuela debería de promover actividades y recursos para el conocimiento del euro entre el alumnado y, qué duda cabe, que debe de ser el área de matemáticas la que encabece esas iniciativas. La oportunidad histórica, y presumiblemente irrepetible, del cambio de moneda, posibilita al profesorado de matemáticas explicar conceptos matemáticos inherentes al cálculo. Además, con este recurso didáctico se incide en el eje transversal de la *educación para el consumidor*. Por este motivo, y dado su formato de juego, resulta especialmente útil para que los profesores, desde cualquier área, lo aprovechen en horas de tutoría, guardias, semanas culturales…

En esa idea, nuestro grupo de trabajo ha elaborado un recurso eminentemente práctico, que tiene una doble vertiente; matemática, y de divulgación del euro.

Este recurso educativo[1], denominado *EUROmes*, aprovecha la inquietud que al alumnado le supone la nueva situación, que no controla, y el aspecto lúdico que le da su formato de juego. Aparecerá en el Calendario Matemático de la Sociedad de Educación Matemática de la Comunidad Valenciana "Al-Khwarizmi" del curso 2001/2002.

El *EUROmes* está pensado para los distintos niveles de secundaria, pero con algunas variantes es posible su uso en primaria. También se puede utilizar en bachillerato.

El *EUROmes* como material curricular y como recurso didáctico

Descripción del juego

El juego consiste en recorrer el tablero. En el recorrido, los jugadores pagarán los productos y servicios de las casillas por las que pasan, todas ellas relacionadas con los hábitos de consumo de los jóvenes. Todos parten de la casilla de salida con el mismo dinero y ganará aquel que llegue a final de mes con mayor saldo o menos deudas.

1 Un recurso didáctico sería aquel que es utilizado en el aula con el fin de que los alumnos aprendan alguna cosa, un material curricular es aquel material que permite al profesor enseñar alguna cosa relativa al currículo prescriptivo, puede ser desde un documento hasta un material didáctico cuyo nivel y contenido se ajuste a las características del grupo.

Materiales

Para tres jugadores:

- Un tablero del *EUROmes* que se puede conseguir en la hoja Junio 2002 del Calendario Matemático de la Sociedad Al-Khwarizmi.
- Tres fichas de colores: rojo, azul y verde.
- Tres dados de seis caras equiprobables y numeradas.
- Tres copias de un extracto de cuentas, o bien reproducciones de billetes y monedas de euro.
- Opcionalmente, una calculadora.
- Monedas y billetes. La cantidad aconsejada para una partida es:

  15 monedas de 1 céntimo de euro.
  15 monedas de 2 céntimos de euro.
  15 monedas de 5 céntimos de euro.
  15 monedas de 10 céntimos de euro.
  15 monedas de 20 céntimos de euro.
  15 monedas de 50 céntimos de euro.
  15 monedas de 1 euro.
  15 monedas de 2 euros.

Figura 1: Tablero del *EUROmes*

20 billetes de 5 euros.
20 billetes de 10 euros.
10 billetes de 20 euros.
10 billetes de 50 euros.
5 billetes de 100 euros
3 billetes de 200 euros.
1 billete de 500 euros.

Características del tablero

Consta de 30 casillas:

- Diez son de las tiendas *Rojas*, las que ocupan los números siguientes: 1, 4, 8, 10, 14, 16, 20, 22, 25 y 27.
- Diez de ellas son *Azules* (cadena *Super*): 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 y 29. Corresponden a los números primos del tablero (excepto el 1). No se advierte al alumno que esta cadena de tiendas corresponde a los números primos: tiene que descubrirlo por su cuenta.
- Las restantes son las tiendas *Verdes*: 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 26, 28 y 30.

Reglas

1) Cada uno de los tres jugadores o equipos lanza un dado y elige una de las cadenas de tiendas por orden de puntuación de mayor a menor.
2) Se sitúan las fichas en la casilla de salida y empieza el juego en el orden obtenido.
3) Cada jugador empieza con 200 euros. Podrá utilizar reproducciones de monedas y billetes o bien llevar un extracto de sus cuentas, con pagos e ingresos (ver variantes de juego).

…podrá utilizar el EUROmes como material curricular para trabajar los contenidos matemáticos propios del nivel en el que se encuentra o bien utilizarlo como recurso didáctico para repasar los contenidos…

4) Si un jugador cae en una de sus tiendas no tendrá que comprar.
5) Si cae en una tiendas de los otros, compra tantos bienes o servicios como indique la puntuación de su dado.
6) Si un jugador cae en una tienda que no sea suya, del importe que paga, el propietario se queda el 10% como beneficio. (El resto, se supone que es para reposición de material de la tienda).
7) Si un jugador cae en una tienda cuyo número de casilla sea primo, compra, si la tienda no es una de las suyas y, en cualquier caso, vuelve a tirar.
8) Gana el jugador que tenga más saldo una vez han llegado todos exactamente a la casilla 30.

La expresión «exactamente» se deja a la libre interpretación de los alumnos que deberán ponerse de acuerdo al inicio de la partida. Por ejemplo:

a) No mover la ficha si el número del dado excede el de casillas necesarias para llegar a la número 30.
b) Si excede al de casillas necesarias para llegar, entonces se mueve la ficha hasta el 30 y se retrocede hasta completar la puntuación del dado.

Metodología

Se reparte el material necesario (un tablero, tres fichas, dados y extracto de cuenta y/o reproducciones de euros) por grupos, de tres alumnos preferiblemente.

Modalidades

- Con extracto de cuenta.
- Con billetes y monedas de euros: en este caso sería conveniente cuatro jugadores para que uno de ellos haga la función de Banca.

Variantes del juego

Al principio de cada partida se puede considerar:

- La compra de un único bien o servicio en cada casilla.
- La ausencia de porcentajes.
- Variaciones del porcentaje.

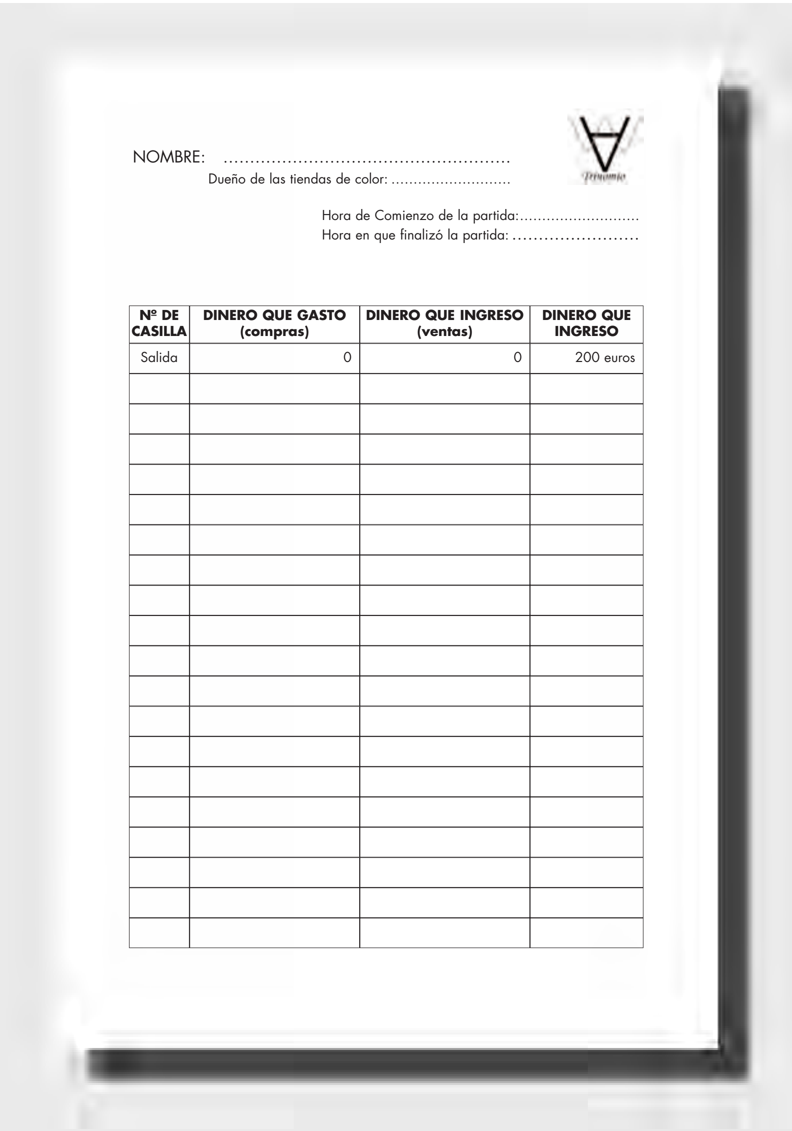
- El precio con o sin IVA.
- Otro saldo inicial.
- Otro criterio de finalización del juego.

Estas variantes se dejan a libre elección del profesor, pudiendo seleccionar aquellas que sean más oportunas para el grupo. En función del enfoque que le quiera dar, podrá utilizar el *EUROmes* como material curricular para trabajar los contenidos matemáticos propios del nivel en el que se encuentra o bien utilizarlo como recurso didáctico para repasar los contenidos del área de matemáticas antes descritos y/o familiarizar al alumno con la nueva moneda.

Nuestra propuesta sería la siguiente para los diferentes niveles de primaria y secundaria y bachillerato.

Primer Ciclo Primaria

- Consiste en utilizar el tablero del *EUROmes* como si fuera una galería comercial.



NOMBRE: ....

Dueño de las tiendas de color: ....

Hora de Comienzo de la partida:...........................

Hora en que finalizó la partida: ....

Nº DE CASILLA	DINERO QUE GASTO (compras)	DINERO QUE INGRESO (ventas)	DINERO QUE INGRESO
Salida	0	0	200 euros

- El profesor organiza un turno de juego entre los alumnos y pregunta, uno por uno, qué producto o servicio desea comprar.
- El alumno no puede elegir una casilla elegida con anterioridad por otro alumno.

Segundo Ciclo Primaria

- Se modificará la regla 5 para no multiplicar por la puntuación del dado. Sólo compraría un producto o servicio cada vez que caen en una casilla.
- Se omitirá la regla 6 para evitar el uso de porcentajes.
- Uso de reproducciones de billetes y monedas.

Tercer Ciclo Primaria

- Se omitirá la regla 6 para evitar el uso de porcentajes.
- Uso de reproducciones de billetes y monedas.

En el currículo de Primaria, se hace una mención específica al conocimiento del sistema monetario del país. Por ello, nos parece recomendable el uso de reproducciones de monedas y billetes. Sin embargo, en primaria se desconocen los enteros y no forman parte de su currículo. Por ello, consideramos que el juego finalizará cuando alguno de los jugadores se quede sin dinero aunque no hayan llegado todos a la última casilla. Y en este caso, ganará el que más dinero tenga en ese momento, independientemente de la casilla en la que se encuentre situado.

Secundaria

- Uso de reproducciones de billetes y monedas.
- Uso de extracto de cuentas.

Consideramos que no sería conveniente el uso de porcentajes hasta que se manejen con soltura con la nueva moneda, en el caso de utilizar reproducciones.

Si algún jugador se queda sin dinero, tomará un préstamo de la banca, en el caso de jugar con reproducciones. Y utilizará números negativos en su extracto de cuentas, en el caso de hacer uso del extracto de cuentas.

Opciones	PRIMARIA			SECUNDARIA	
	1er ciclo	2.° ciclo	3er ciclo	1er ciclo	2.° ciclo
Galería comercial	X	X			
Juego		X	X	X	X
Importe exacto	X	X			
Monedas y billetes	X	X	X	X	X
Extracto de cuentas				X	X
Banca	Profesor	Profesor	Alumno	Alumno	Todos
Producto	Uno	Uno	N.° de dado	N.° de dado	N.° de dado
Porcentaje				10%	Variable
Préstamo				X	X

Bachillerato

En el currículo de Bachillerato, no se hace una mención específica al conocimiento del sistema monetario del país, al refuerzo de las operaciones con decimales o a la resolución de problemas con porcentajes. No hay que olvidar que los alumnos de estas edades, sienten también cierta inquietud por conocer y manejar la nueva moneda.

Nosotros creemos que sería conveniente dedicar algunas sesiones a conocer el euro y su manejo. Para ello adecuaríamos los problemas que utilicemos en el aula a la nueva moneda y como introducción podemos utilizar el *EUROmes*.

A modo de resumen de las posibilidades que nos ofrece el juego se muestra la tabla de más arriba, ya que las variantes del juego descritas se pueden aplicar en distintos niveles dependiendo del alumnado al que va dirigido.

…las variantes del juego descritas se pueden aplicar en distintos niveles dependiendo del alumnado al que va dirigido.

Aspectos curriculares

Primaria

- Conocer el nuevo sistema monetario.
- Familiarizarse con el valor y características de las monedas y billetes del euro.
- Equivalencias en el uso del sistema monetario del euro.
- Suma de números decimales.
- Resta de números decimales.
- Multiplicar enteros por decimales.
- División de números decimales, con dividendo decimal y divisor entero.
- Resolver situaciones problemáticas relacionadas con el dinero.
- Despertar la curiosidad e interés por conocer el nuevo sistema monetario.

Secundaria

- Conocer los enteros y su ordenación.
- Divisibilidad de los números, y números primos.
- Operaciones con enteros y decimales.
- Utilización de los algoritmos tradicionales de suma, resta, multiplicación y división.
- Calculo de porcentajes con números naturales y decimales.
- Utilización de distintos métodos de cálculo de tanto por cien.
- Potenciación del cálculo mental, del uso de la calculadora y otros instrumentos, decidiendo según la complejidad y la exigencia de la precisión de los cálculos.
- Utilización de estrategias para resolver problemas numéricos relacionados con situaciones cotidianas.
- Uso de técnicas de recogida de datos para tener información de fenómenos, y representarla en forma gráfica y numérica, formándose juicio sobre ella.
- Observación de las regularidades y leyes que rigen los fenómenos de azar para interpretar los mensajes sobre juegos y sucesos, identificando conceptos matemáticos, analizando críticamente las informaciones que de ellos recibimos en los medios de comunicación y búsqueda de herramientas matemáticas para una mejor comprensión de esos fenómenos.
- Utilización del lenguaje numérico para la representación, comunicación y resolución de diferentes situaciones de la vida cotidiana.
- Despertar la curiosidad e interés por conocer el nuevo sistema monetario.

En el transcurso de una partida aparecerán operaciones combinadas con decimales y porcentajes. Los números decimales se pueden trabajar, bien con el extracto de cuentas o bien con la calculadora según se considere. En cuanto al porcentaje se puede variar con el fin de evitar que se lleguen a memorizar los beneficios sobre el precio, también es posible prescindir del porcentaje cuando la intención sólo sea dar a conocer la nueva moneda.

Por otra parte, el diseño del tablero permite que los alumnos se familiaricen con los números primos, ya que estos se corresponden con la cadena del *Super* (dato que no se les facilita en las reglas del juego).

Tanto en Secundaria como en Bachillerato, podemos hacer que analicen el juego lanzando la pregunta «¿Es un juego justo?»

La intención es que el alumno analice distintos aspectos del juego como:

- distribución de las casillas en el tablero,
- precios de los productos de cada tienda,
- reglas del juego,
- variantes de las reglas,
- ...

También se espera que la respuesta pueda venir dada por la simulación en el aula, haciendo referencia a la frecuencia relativa.

El juego ha sido diseñado para favorecer el debate, teniendo en cuenta los aspectos anteriormente mencionados.

Grupo Trinomio:
Francisco M. Bou
Lucía Puchalt
IES Pere Boïl (Manises)
Marta I. Trapero
IES La Morería (Mislata)
Mónica Vivó
Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valeciana «Al-Khwarizmi»

Eje transversal de educación para el consumidor

Este juego se puede utilizar como recurso didáctico para tratar el Eje Transversal de Educación para el Consumidor.

El *EUROmes* nos da pie para poder tratar en el aula temas relacionadas con:

- el manejo de la nueva moneda,
- la distribución de la paga mensual o semanal,
- los gastos habituales,
- las prioridades en el consumo.

En definitiva, crear una conciencia de consumidor responsable, que se sitúa críticamente ante el consumismo y la publicidad.

Bibliografía

Normativa del Euro.

Real Decreto 1007/1991, de 14 de junio.

GÓNZALEZ F. y M CORIAT (1998): «Matemáticas y consumo: el encuentro con el euro», *Suma,* n.° 28, 91-96.

14 accidentes de tráfico

En el ejercicio 9 habrás comprobado que no podías calcular la probabilidad del suceso A y B, ni decidir si A y B eran independientes, ya que necesitabas más información. Para el año 1973 el Anuario incluye la siguiente tabla:

	En carretera	En zona urbana	Total
Con víctimas	34.092	32.295	66.387
Sólo daños materiales	11.712	20.791	32.503
Total	45.804	53.086	98.890

a) Completa la siguiente tabla de porcentajes, obtenida a partir de la anterior:

	A	no A	Total.
B	34		67
no			33
Total.	46	54	100

b) Como sabemos que

$$p(B/A) = \frac{P(A \text{ y } B)}{p(A)}$$

calcula en el caso que nos ocupa p(B/A) y p(B/noA) y decide si A y B son independientes. ¿Es p(B/A) = p(B)?

SUMA 38

noviembre 2001, pp. 95-97

Isoperímetros: El panal de abejas y Fejes Toth

Grupo Construir las Matemáticas*

TALLER DE PROBLEMAS

DEMOS UN GRAN SALTO en el tiempo. En números anteriores narramos los avatares del problema isoperimétrico en Grecia y en los países islámicos medievales, respectivamente. Retomemos el enfoque dado por Pappus con el que llegó a la conclusión de que, para un área dada, el perímetro del hexágono regular es menor que el del cuadrado o el del triángulo equilátero, por lo que si el problema se plantea sobre una teselación regular del plano, un trozo finito del teselado regular hecho con hexágonos regulares es el que requiere menor perímetro. Bueno, aún no podemos detenernos porque hemos de hacer la demostración de la proposición de Pappus en 3D. El conocido MacLaurin (1698-1746), profesor de Aberdeen y Edimburgo, utilizó el método que a continuación presentamos. Lo hizo para poner de manifiesto la capacidad de la Geometría clásica como fuente de investigación en cualquier momento (conviene recordar que MacLaurin estaba centrado en analizar las posibilidades de los métodos infinitesimales que en su época emergían, lo que demostró sobradamente con su *Treatise of Fluxions*).

Sea un *alveolo* cuyo fondo está formado por rombos iguales *SABC*, *SCDE* y *SEFA*, de lado *c*. Consideremos la sección recta (perpendicular a su eje) que pasa por el vértice *A*; así obtenemos el hexágono regular *AKCLFK'*, de lado *a*, cuyo centro *O* es la proyección del vértice *S* (ver Figura 1).

Uniendo *K* con *O*, *A* con *C* y tomando un plano cualquiera que pase por *AC*, éste determina por intersección con los planos *TABU*, *UBCV*, *CSO* y *ASO* un rombo *AG'CG*; por último, llamemos λ a la longitud de la arista *AT* y *d* a la de la semidiagonal *AP*.

Por simetría, podemos considerar sólo la tercera parte de una celdilla y debemos buscar qué posición del plano *AG'CG* determina la superficie mínima formada por los trapecios *TAGU*, *UGCV* y por el rombo *AG'CG*.

Como la superficie descrita tiene por área:

$$(\lambda + GU)\cdot a + 2d\cdot GP = (\lambda + \lambda - GK)\cdot a + 2d\cdot GP =$$
$$2\lambda\cdot a - a\cdot GK + 2d\cdot GP$$

* Los componentes del Grupo Construir las Matemáticas son Rafael Pérez, Isabel Berenguer, Luis Berenguer, Belén Cobo, M.ª Dolores Daza, Francisco Fernández, Miguel Pasadas y Ana M.ª Payá.

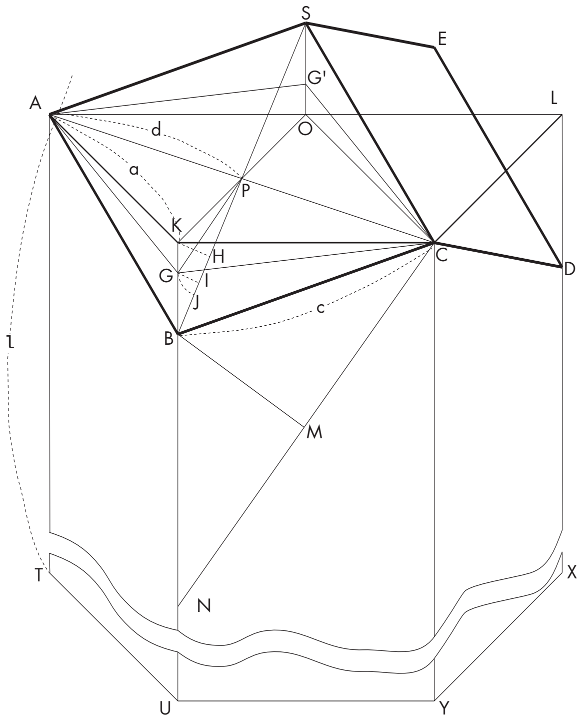


Figura 1

y el producto $2\lambda \cdot a$ es constante, la cuestión queda reducida a minimizar la expresión:

$$-a \cdot GK + 2d \cdot GP \quad (*)$$

Supongamos que B ha sido tomado sobre *KU* de tal manera que:

$$\frac{BK}{BP} = \frac{a}{2d} \quad (**)$$

Tomando *P* como centro y *PG* como radio, trazamos sobre el plano *BKP* un arco de circunferencia que corta a *PB* en *J* (prolongando si fuese necesario); determinemos las perpendiculares *KH* y *GI* a *PB*. La semejanza entre los triángulos rectángulos *GIB*, *KHB* y *BKP* y el resultado obtenido anteriormente (**), escribiremos que:

$$\frac{BI}{BG} = \frac{BH}{BK} = \frac{BK}{BP} = \frac{a}{2d}$$

De esta serie de razones obtenemos que:

$$\frac{BH - BI}{BK - BG} = \frac{IH}{GK} = \frac{a}{2d}$$

luego:

$$a \cdot GK = 2d \cdot IH.$$

Sustituyendo en la expresión (*), queda

$$2d \cdot GP - 2d \cdot IH =$$

$$2d \cdot (GP - IH) =$$

$$2d \cdot (JI + HP).$$

Pero siendo d y *HP* constantes, el problema se reduce a buscar el mínimo para *JI*. Este mínimo se alcanza cuando $JI = 0$; es decir, cuando los puntos *J* e *I* se confunden, o cuando *G* coincide con *B*.

Así pues, el mínimo buscado corresponde con la hipótesis de que el plano secante pase por el punto *B* determinado mediante la expresión (**). Esta posición del plano secante es precisamente la que se da en las celdillas de las abejas.

Los ángulos de uno de los rombos del fondo del alveolo miden 109° 28' 16'' y 70° 31' 44''.

En el triángulo rectángulo *BKP* se verifica que:

$$BP^2 = BK^2 + KP^2;$$

sustituyendo *BK* por $BP \cdot (a/2d)$, *KP* por $a/2$ y simplificando, queda:

$$BP = \frac{ad}{\sqrt{4d^2 - a^2}}$$

Como $AP = d$, se deduce que:

$$\frac{AP}{BP} = \frac{\sqrt{4d^2 - a^2}}{a}$$

Como d es la mitad del lado *AC* del triángulo equilátero inscrito en la circunferencia de radio a, su valor es igual a:

$$\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Sustituyendo en el cociente anterior, y simplificando, queda:

$$\frac{AP}{BP} = \sqrt{2}$$

Por tanto, la diagonal mayor de uno de los rombos estudiados coincide con la diagonal de un cuadrado cuyo lado es la diagonal menor de dicho rombo.

Por otro lado, tan ($\angle ABP$) = AP/BP; luego $\angle ABP$ = 54° 44' 8''. En definitiva, $\angle ABP$ = 109° 28' 16'' y $\angle ABP$ = 70° 31' 44'', por ser suplementario del primero.

El lado de un rombo es igual al triple de la distancia *BK* o *SO*.

Por ser el triángulo *BPC* rectángulo, se tiene que:

$$BC^2 = BP^2 + PC^2 = \frac{d^2}{2} + d^2 = \frac{9a^2}{8}$$

entonces:

$$BC = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$$

Análogamente, por ser rectángulo el triángulo *BKP*:

$$BK^2 = BP^2 - KP^2 = \frac{d^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{8}$$

y por lo tanto:

$$BK = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

Por tanto, $BC = 3BK$. Además, se observa que la distancia BK es la cuarta parte del lado de un cuadrado inscrito en la circunferencia de radio a.

> Las caras de cada uno de los ángulos poliédricos A, B, C, D, E y F son iguales.

En efecto, tomemos sobre la arista BU un punto N tal que $BN = BC$. Después, abatimos perpendicularmente BM sobre la recta CN. El triángulo NKC es rectángulo y, teniendo en cuenta que:

$$NK = 4BK = a\cdot\sqrt{2}$$

$$CN^2 = NK^2 + KC^2 = 3\cdot a^2;$$

luego:

$$CN = a\cdot\sqrt{3} = AC.$$

Los triángulos NBC y ABC son iguales por tener los tres lados iguales, por lo que:

$$\angle NBC = \angle ABC;$$

análogamente:

$$\angle NBA = \angle ABC$$

En consecuencia, también son iguales las caras del ángulo poliédrico C.

La demostración es análoga para los demás vértices.

Comparación con una celdilla de fondo plano

El prisma recto que tiene por base el hexágono $AKCLFK'$ y una celdilla tienen igual volumen, porque considerando sólo un tercio de éste, se observa que las pirámides $BAKC$ y $SAOC$ son iguales. Sin embargo, sus superficies son diferentes. Veamos cómo economizan las abejas la superficie de sus celdillas.

Llamando a al lado de la sección recta común a los dos tipos de poliedros –prisma hexagonal y alveolo– la longitud de la arista es $(25/6)a$.

Por tanto, las superficies del alveolo y del prisma hexagonal son, respectivamente:

$$\frac{a^2}{2}\left(50 + 3\sqrt{2}\right) \quad \text{y} \quad \frac{a^2}{2}\left(50 + 3\sqrt{3}\right)$$

La primera superficie es a la segunda como $50 + 3\sqrt{2}$ es a $50 + 3\sqrt{3}$, luego las abejas optimizan la superficie.

Esta fue la conclusión a la que llegó el físico francés Réaumur (1683-1757), que comunicó su conjetura a Samuel Koening. Éste llegó a la conclusión de que del principio minimal de Réaumur se deducen los ángulos de 120° y de 109° 26', lo que concordaba con las mediciones efectuadas sobre panales. A partir de ahí, han sido muchas las personas que dijeron que las abejas, al no ser inteligentes, *han utilizado ciegamente las más elevadas matemáticas por orden y guía divina.*

En todo lo dicho se está admitiendo que las abejas han atinado, no se sabe porqué, con el panal perfecto. Sin embargo, el húngaro Fejes Tóth ha demostrado en 1964 que hay otro modelo de celdilla que produce un resultado ligeramente mejor, aunque los errores que se cometen en la fabricación hacen que, de hecho, el modelo de las abejas sea el más adecuado. El fondo de esta celdilla consta de dos hexágonos y dos rombos.

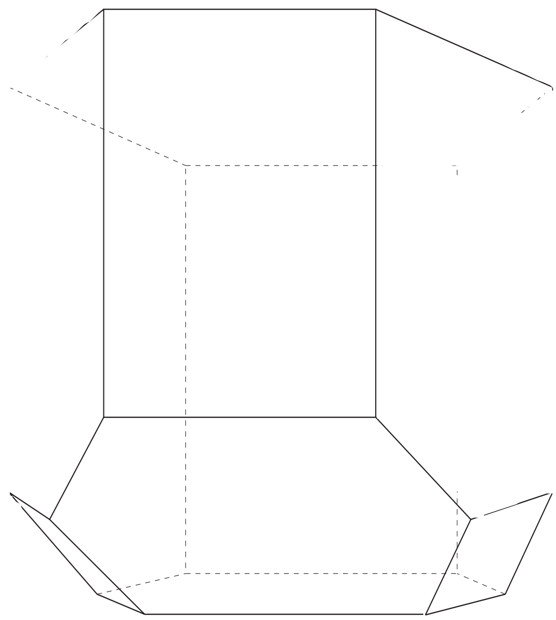


Figura 2 : Celdilla de Fejes Toth

Fejes Tóth realizó la correspondiente publicación de sus investigaciones al respecto en un artículo llamado *Lo que saben y no saben las abejas* en donde aparece el problema isoperimétrico correspondiente a los panales del que aún no sabemos cuál es la solución:

> Dados dos números cualesquiera, V y A, hallar un panal de anchura a cuyas celdillas tengan superficies de área mínima y encierren un volumen V.

XI JAEM

Canarias

Julio 2003

Día Escolar de las Matemáticas

SUMA 38

noviembre 2001, pp. 99-102

La actualidad matemática

Fernando Corbalán

MATES Y MEDIOS

ESTE TÍTULO puede responder a contenidos muy diferentes: aquí nos vamos a referir a su presencia en los medios de comunicación. El verano, con sus vacaciones anexas, es un buen momento para seguir con mayor profundidad los contenidos de los medios. Y, además, es más fácil porque paradójicamente en la época que más tiempo se tiene (no sólo uno mismo sino el conjunto de la sociedad) es cuando menos tiempo, espacio y esfuerzos dedican los medios a procurarnos informaciones novedosas. Así, los periódicos se hacen más delgados y los medios audiovisuales se dedican a reemitir programas con un cierto tufillo añejo en demasiados casos.

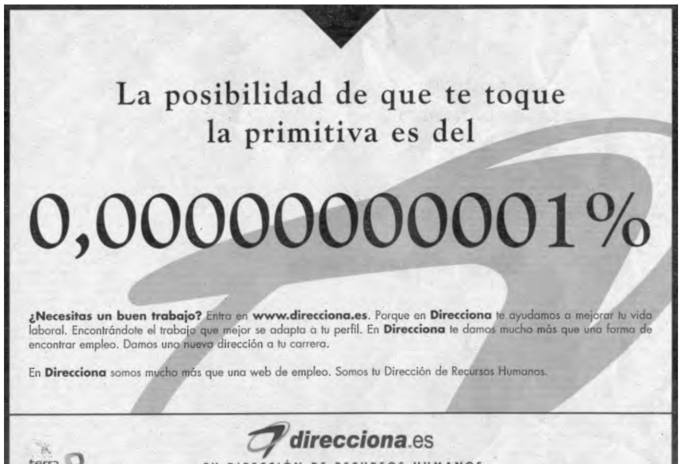
Así pues 'nuestra' actualidad vendrá a partir de una selección de artículos e informaciones de periódico de los últimos meses que nos darán pie a hacer comentarios que esperamos sean de interés para la práctica educativa diaria. Y ya antes de comenzar el primero sería que en los medios de comunicación los contenidos matemáticos hay que plantearlos y presentarlos con más tiento porque la audiencia potencial es toda la sociedad y no un auditorio 'cautivo' (porque no puede elegir) como el que hay en las clases. Pero que puesto que cada vez ese auditorio ha pasado a ser menos cautivo igual tenemos que aplicar las técnicas de los medios para lograr captar su atención y su participación.

Algunos contenidos

En un artículo titulado nada menos que «Las matemáticas absurdas» que C. Sartwell, profesor de Filosofía de la Universidad de Maryland, publicó en *El Correo Gallego* el 25/8/01 se hacen unas afirmaciones tremendas, como «Las matemáticas son una suerte de religión. No tienen ninguna base ni de hechos ni de teorías. Tiene que ver con entidades de las cuales nadie tiene una concepción clara» y acaba con otro exabrupto que es además una llamada a la rebelión: «Los niños son el futuro. Millones de padres comprometidos deberíamos reunirnos para ver qué matemáticas se estudian en los colegios. Se lo debemos a los niños, porque exponerlos a las matemáticas absurdas es un acto de irresponsabilidad». El primer impulso es achacarlo a desconocimiento y pasar del tema (tanto más cuanto que es alguien de un país lejano). Pero no sólo de fuera llegan comentarios de ese tipo. Alguien más cercano y prestigioso como el catedrático y académico Francisco Rico dijo hace poco que: «Las asignaturas técnicas, las matemáticas, no hacen ninguna falta: cualquier calculadora u ordenador te lo da todo hecho». (*El País*, 24/6/96). Y hay otros estudios que señalan que en la sociedad tecnológica en que estamos cada vez serán necesarias más matemáticas, pero que si no hay acciones consecuentes no serán los profesores de matemáticas quienes las transmitan sino tecnólogos en paquetes informáticos. Es lo que apunta Corinne Hahn, profesora de la Cámara de Comercio e Industria de París: «El lugar de la enseñanza de las matemáticas en la formación profesional es cada vez más reducido y sin embargo todas las profesiones utilizan las matemáticas. Las necesidades son, pues, importantes aunque no siempre sean aparentes. Efectivamente, estas matemáticas se encuentran muy a menudo escondidas dentro de las cajas negras tecnológicas y es tentador deducir de ello que es inútil prever una enseñanza específica, sobre todo teniendo en cuenta el rechazo hacia la asignatura manifestado por muchos alumnos. Sin embargo, si el futuro profesional quiere ser capaz de interpretar correctamente los resultados, es imprescindible que tenga un cierto conocimiento del tipo de algoritmo aplicado por los programas utilizados» (en «La matemática dentro de los cursos de formación ofrecidos por la Cámara de Comercio e Industria de París», *El currículo de matemáticas en los inicios del siglo XX*, J.Mª Goñi (ed), Graó, Barcelona, 2000). Por tanto, no es cuestión de echar balones fuera y mirar a otro lado. Los problemas, si no trabajamos bien, pueden venir no sólo de la caída de la natalidad, sino del convencimiento social de nuestra falta de utilidad.

Por supuesto que es un poco tremendista. Pero seguimos con otro campo vital: el cine. Najwa Nimri, la actriz de *Lucía y el sexo*, la película de Julio Medem, uno de los últimos éxitos del cine español, comenta cómo preparó su papel: «La hubiera preparado como un tetris, muy matemático. Y eso no es bueno. En una película de Julio, si te pones muy matemática se te escapa el alma, y yo me quedé con el alma y me olvidé de las matemáticas» (*El País*, 3/8/01). Expresa una idea muy común: las matemáticas son contrarias al sentimiento o a la imaginación. Debe ser algo extendido en el mundo del cine, porque también el estupendo guionista y director Fernando León decía «Cuando di clases de dirección en la carrera de Imagen –donde explicaban las cuatro perogrulladas sobre el eje– hubo un momento en que el cine me parecía una gran mentira, muy próximo a las matemáticas» (*El Cultural* de *El Mundo*, 7/11/2000). Y, sin embargo, todos los grandes matemáticos (y muchos de nosotros) estamos convencidos de la necesidad de imaginación, de belleza, de poesía incluso para hacer matemáticas. Luego, debe haber problemas de presentación de las matemáticas, que en el sistema educativo suelen aparecer como algo cerrado, acabado, viejo, caduco… ¿No os han preguntado a vosotros, «los matemáticos profesionales actuales, qué hacen»? Pregunta a veces difícil de contestar. Por eso es importante (y no queremos dejar de dar cuenta de ellos) la aparición de algunos estupendos artículos de divulgación matemática, como «Matemáticas sin rostro» de Carlos Andradas (*El cultural* de *El Mundo* de 12/9/01), que dan datos claros que permiten responder a esa pregunta poniendo de manifiesto además la importancia de su trabajo.

Sigue su curso una campaña de publicidad que empezó con «La posibilidad de que te toque la primitiva es del 0,00000000001%» y continuó con otras *posibilidades* absurdas como «La posibilidad de que conozcas a un multimillonario es del 0,1%. La de que quiera casarse contigo 0,0%». Que nos muestra varias características del lenguaje



matemático y su plasmación en los medios de comunicación en general y en la publicidad en particular: presentación de números como algo incontrovertible y sin ambigüedades; confusión entre probabilidad y posibilidad… Y que nos recuerda otras campañas publicitarias con números, como las de la ONCE: «Los números te hablan, sólo tienes que escucharlos» o la subsiguiente sobre un niño que soñaba con varias cosas que le harían la vida más agradable, entre las que estaba que las matemáticas desaparecían (a la que ya nos referimos en un artículo de esta sección de *SUMA*).

Y es que todo lo referido a la estadística tiene un tratamiento peculiar en los medios. Aunque quizás es difícil de superar la barbaridad sobre el método de tener una muestra representativa de Rodolfo Serrano: «Lo mejor para despejar las dudas [sobre el porcentaje o el número de parados en España] es preguntarse cuántos parados conoce, cuántos tiene usted en su familia. Es una de las estadísticas más fiables. Se lo aseguro. Luego pregunte a sus vecinos y sume» (*El País Semanal*, 6/2/85). Como todo se haga así vamos dados. Ya Paulos pedía en *El hombre anumérico* un «Defensor estadístico de los lectores», que creo que también tendría tarea en otros aspectos matemáticos de los medios de comunicación.

Y para acabar las referencias citaré un tema muy presente en la información actual para ejemplificar un aspecto importante de la relación medios/matemáticas: el tratamiento de los grandes números. Para ello nos puede servir el «caso Gescartera»: ¿cuánto son 18 000 millones? ¿De qué manera podemos hacer más inteligible esa enorme cantidad? Pues es aproximadamente 500 pesetas por cada ciudadano español, algo que se entiende un poco mejor. Ciertamente, no ha sido el chasco más gordo de nuestra historia financiera reciente: un titular de Heraldo de Aragón de enero de 1995 decía «La crisis de Banesto costará 37.500 pts. a cada español». Y, por desgracia, en ese caso no había ningún error.


42 ECONOMIA

La crisis de Banesto costará 37.500 pesetas a cada español

Los accionistas sólo pagarán el 30 % del plan de saneamiento de la entidad

Comunicar matemáticas

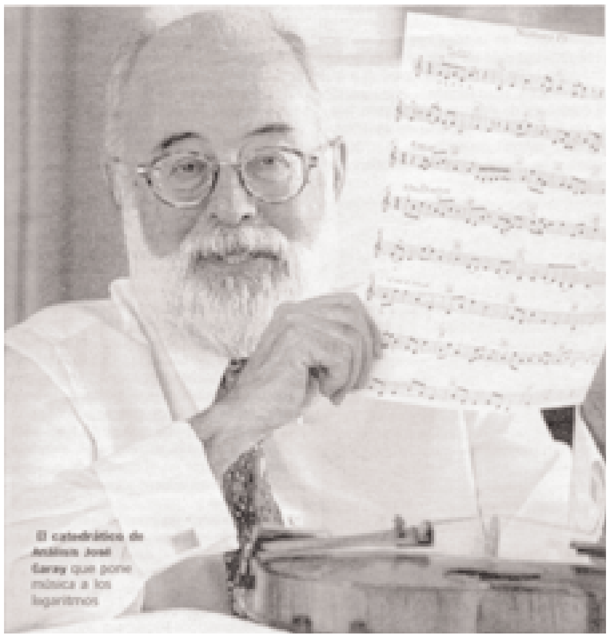
Las matemáticas por tanto aparecen en los medios, a veces de forma indirecta, a veces con errores e incluso burradas y no siempre de una manera positiva. Y cuando nos gustaría que aparecieran no siempre lo hace en la forma que nosotros queremos.

Por ejemplo, con motivo de las recientes X JAEM celebradas en Zaragoza, su presencia en los medios normales se redujo a los de Zaragoza (por la «ley de la proximidad» de la que otro día hablaremos) y entre los de tirada nacional al *ABC* (lo cual indica que a pesar de los esfuerzos del Año 2000 queda tarea por hacer). Y los temas de interés en ellos fueros dos:

1. Las matemáticas son un ‘coco’, ¿qué podemos hacer para evitarlo?
2. Relaciones de las matemáticas con la cultura (arte mudéjar, música,...).


EDUCACIÓN ZARAGOZA ACOGE A 700 MATEMÁTICOS DEL 7 AL 9 DE SEPTIEMBRE

Locos por los números



Y ya solo añadir dos reflexiones para nuestras clases, para la práctica educativa diaria, que conectan con el núcleo fundamental de nuestro trabajo, que consiste en comunicar matemáticas:

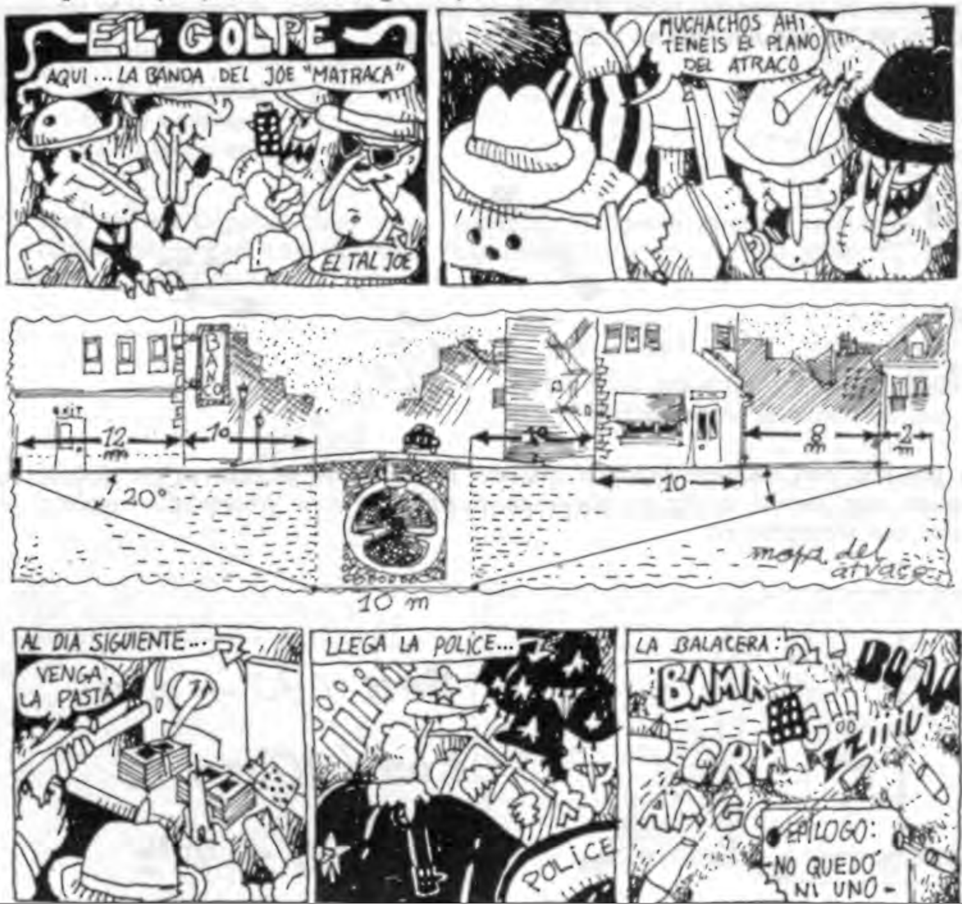
- No hay que dar por supuesto que todo interesa. Lo que nos debería llevar a esforzarnos en contextualizar los temas en intereses próximos a los alumnos.
- Habría que afrontar en conjunto las clases con el espíritu de hacer intervenciones en los Medios de Comunicación que difundan las Matemáticas. Que capten la atención de los receptores y la mantengan.

Estas dos líneas de actuación nos haría tener presente y replantearnos en serio esa pregunta fundamental en la enseñanza y que tendemos a «olvidar»: ¿Para qué les sirven (y le van a servir) las matemáticas a los ciudadanos? Y de paso contribuiríamos a que fuera desapareciendo esa percepción social tan extendida de las matemáticas que recoge el chiste de Forges: las matemáticas se enseñan mal por motivos oscuros.

157 Una banda decide atracar un banco. Para introducirse en él, idean un túnel como el indicado en el croquis de la figura adjunta.

¿Qué longitud tendrá el túnel?

¿Hasta qué profundidad llegan a penetrar?



SUMA 38
noviembre 2001, pp. 103-105

Hexamantes

Grupo Alquerque*

ENTRE LOS PUZZLES que suelen encontrarse en cualquier tienda de juegos, existen varios que son especialmente atractivos para los matemáticos, pues permiten sacarles rendimiento didáctico en clase. Uno de ellos es el Tangram Chino y otro son los Pentominós. Estos últimos están formados por todas las piezas planas que se pueden construir con cinco cuadrados, unidos entre sí por un lado común y considerando iguales las reflexiones especulares. Con ellos es posible construir muchas figuras geométricas. Los Pentominós son un caso particular de los Poliminós, creados en la década de los cincuenta por el profesor norteamericano Solomón W. Golomb, que son las figuras que pueden construirse uniendo cuadrados por un lado común y cuyo nombre deriva de la pieza más simple, la formada por dos cuadrados y que es conocida por Dominó.

En la misma época, el propio Golomb hablaba de otro posible puzzle basado en triángulos equiláteros unidos también por un lado. Como la figura más elemental posible es la que se obtiene uniendo entre sí dos triángulos equiláteros, que equivale al diamante de la baraja francesa, este tipo de figuras fueron bautizadas a principios de los sesenta por el matemático escocés T.H. O'Beirne como «poliamantes». Igual que en los poliminós son iguales una figura y su reflexión en un espejo, es decir, si se levanta, voltea y coincide con la otra. Son estas figuras con las que vamos a jugar en este artículo.

Desarrollo didáctico de la actividad

Dividimos el trabajo con los poliamantes en tres fases: el diseño de las piezas, su estudio geométrico y la construcción de figuras. Vamos a desarrollar cada uno de estos aspectos.

---

* Los componentes del Grupo Alquerque de Sevilla son Juan Antonio Hans Martín (C.C. Santa María de los Reyes), José Muñoz Santonja (IES Macarena), Antonio Fernández-Aliseda Redondo (IES Camas), José Blanco García (IES Alcalá del Río) y Josefa M.ª Aldana Pérez (C.C. Inmaculado Corazón de María –Portaceli–).

JUEGOS

Diseño y construcción de los poliamantes

A los alumnos se les entrega una trama triangular y con ella se les pide que vayan diseñando los distintos poliamantes. Deben comenzar con la única pieza de diamante que existe, y aumentar el número de triángulos obteniendo el triamante, los tetramantes (3), pentamantes (4) y hexamantes, de los que sólo existen doce posibles piezas, igual número que los pentominós. No es conveniente continuar a partir de ahí, pues existen 24 heptamantes (aunque si hay algún alumno especialmente dotado puede afrontar su desarrollo) y la cifra de octamantes se dispara hasta 66.

A continuación aparecen los doce hexamantes junto con el nombre que se les suele adjudicar, la mayoría de ellos elegidos por el matemático O'Beirne y que sirven como regla mnemotécnica para recordar las formas.

Conviene insistir a los alumnos en que utilicen un método preciso de recurrencia para el diseño de las fichas, partiendo de un determinado escalón, por ejemplo los pentamantes, y añadiendo un nuevo triángulo en todas las formas posibles para obtener los hexamantes. Si no se quiere trabajar directamente sobre la trama isométrica, se puede dar a los alumnos varios triángulos equiláteros para que, uniendo sus lados, consigan todas las fichas.

Una vez diseñadas las piezas, el siguiente paso consistiría en construirlas utilizando materiales con los que se pueda trabajar fácilmente como cartón o acetatos de colores, u otros de más consistencia como panel, cartón pluma o madera. Es aconsejable que las piezas tengan el mismo color por ambas caras para moverlas y voltearlas libremente.

Estudio geométrico de las piezas

Para los primeros puntos de este apartado no es indispensable tener construidas las piezas, pero sí tener el dibujo de todas ellas. Aunque nos vamos a referir a los hexamantes, se pueden hacer con cualquier otro nivel. Así, a partir del dibujo de las piezas, se pueden estudiar las siguientes características matemáticas:

a) *Perímetros:* Aunque todas las piezas tienen la misma área, al estar formadas por seis triángulos equiláteros, el perímetro varía de unas piezas a otras. Por ello, deben sumar el valor de los lados de cada pieza y posteriormente agruparlas según su perímetro. ¿Cuál es la pieza con mayor perímetro?, ¿y con menor? Ordenar las piezas según el número de lados.

b) *Simetrías y giros:* Estudiar qué hexamantes tienen ejes de simetrías y dibujarlos. Ver qué piezas poseen centro de rotación que deje invariante la figura al girarla menos de 360° y estudiar los ángulos de rotación en esos casos.

c) *Ángulos:* Aparte de lo anterior, al dibujar las piezas observamos que aparecen algunas cóncavas y otras convexas, por lo que pueden estudiarse la magnitud de los ángulos agudos y obtusos (que siempre serán múltiplos de 60°) y clasificar las figuras también por este concepto.

d) *Escalas:* Es interesante estudiar cómo afecta el cambio de medidas a las piezas del puzzle, lo que permite repasar problemas de cálculo. Se pueden construir figuras de doble área, aunque es más interesante la construcción con doble longitud. En este puzzle se ve muy claro que al duplicar la longitud del lado de la pieza, el área se multiplica por $2^2 = 4$, pues todas las piezas se pueden construir a doble tamaño del lado con cuatro piezas del propio puzzle. Algunas de ellas tienen distintas soluciones. La mayoría de las piezas permiten también construirlas a triple escala.

e) *Relaciones entre poliamantes:* Se pueden relacionar unos niveles con otros. Por ejemplo: ¿es posible obtener todos los hexamantes con dos triamantes?, ¿es posible descomponer todas las piezas en tres diamantes?

f) *Teselaciones:* Se puede usar el puzzle para realizar mosaicos y frisos. Por ejemplo, localizar con qué piezas se puede recubrir el plano. ¿Existe alguna pieza que lo consiga ella sola?, ¿cuáles se complementan entre sí para lograrlo?

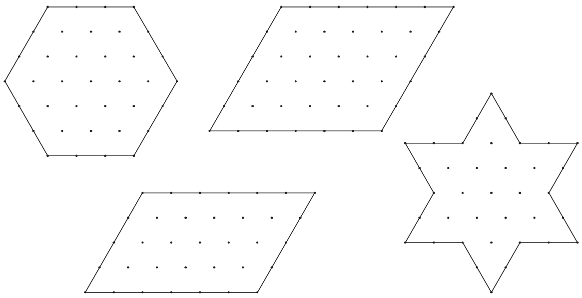
Construcción de figuras

Si consideramos este puzzle como un juego, el aspecto más atractivo es el de realizar figuras, aunque no son fáciles de conseguir salvo quizás las que ya hemos comentado: elegir cuatro hexamantes y construir una pieza a doble tamaño.

Una actividad consistiría en construir piezas geométricas, a ser posibles con algún nivel de simetría, utilizando todos o parte de los hexamantes. A continuación presentamos algunas figuras que se pueden construir con este puzzle.

a) Utilizando sólo algunos hexamantes

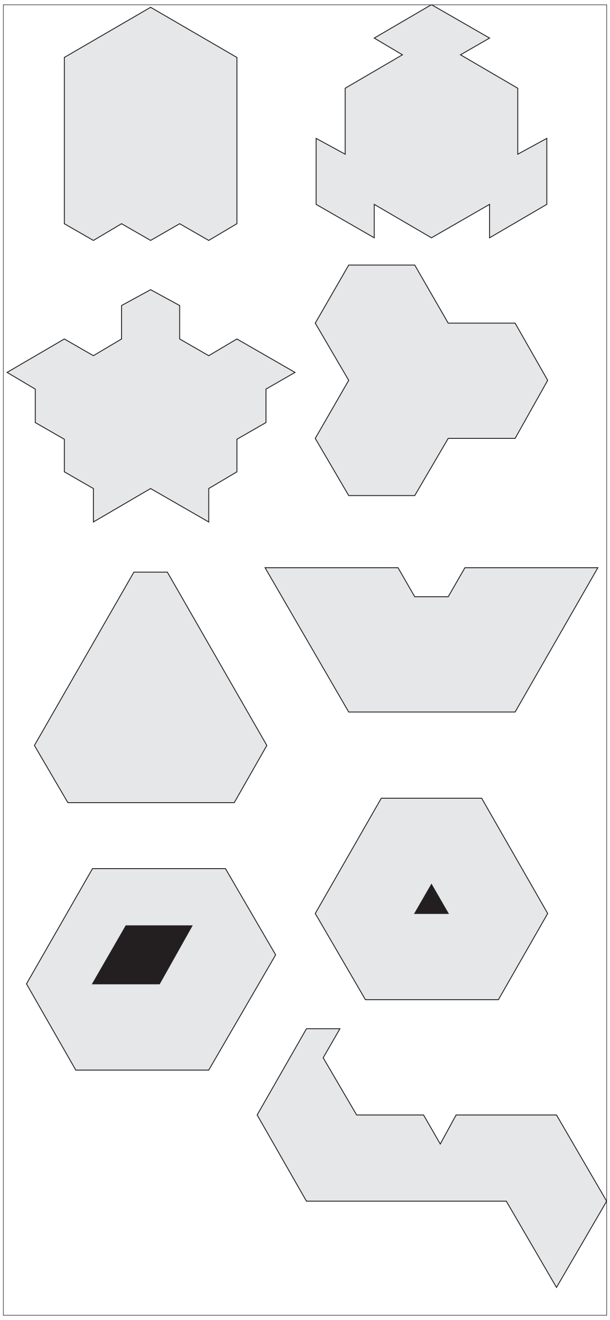
La figura más fácil de conseguir es la del romboide, pues existe mucha variedad de tamaños. Se pueden construir todos los romboides con un lado de medida tres unidades (donde la unidad es la medida del lado del triángulo base, de los que se utilizan seis para construir los hexamantes) y el otro lado variando desde 4 hasta 12. El número de piezas necesarias para construirlos coincide con el valor de ese último lado.



También pueden construirse un romboide con 8 piezas y de medidas 4x6 o con 10 piezas, de medida 5x6. Otras figuras que se pueden construir con parte de los hexamantes son: el hexágono hecho con 9 piezas, y la estrella para la que se utilizan 8 piezas.

b) Utilizando todos los hexamantes

Las figuras de la columna adyacente están conseguidas con las doce piezas.



Bibliografía

GARDNER, M. (1987): *Comunicación extraterrestre*, Cátedra, Madrid.

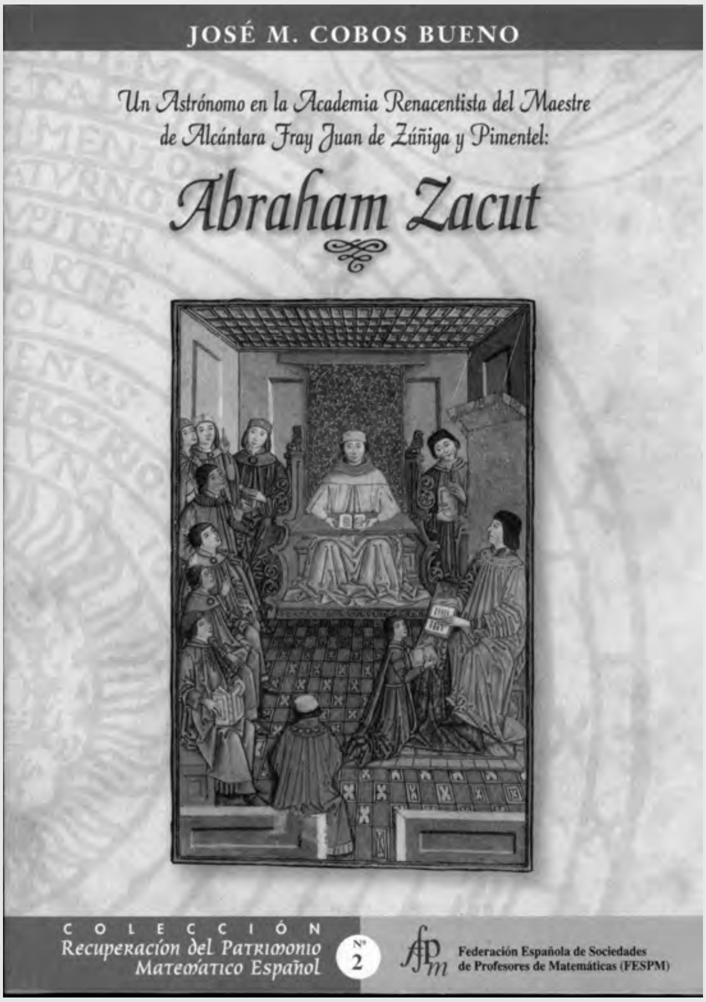
HANS MARTÍN, J.A. y J. MUÑOZ SANTONJA (1999): «Politriángulos», en *Actas de las 9ª JAEM*, Lugo, 603-606.

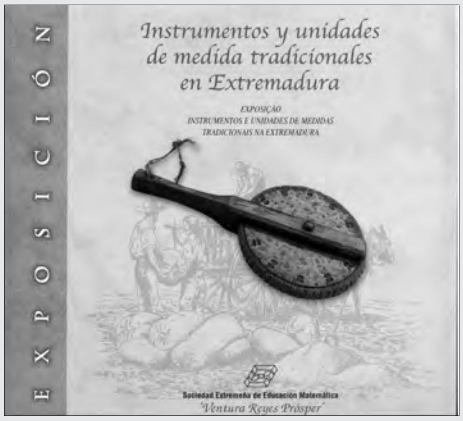
SUMA

ENVÍO DE COLABORACIONES

Revista SUMA
ICE Universidad de Zaragoza
Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

PUBLICACIONES DE LA FEDERACIÓN





SUMA 38
noviembre 2001, pp. 107-110

El Proyecto Descartes. Visualizar las matemáticas

Antonio Pérez Sanz

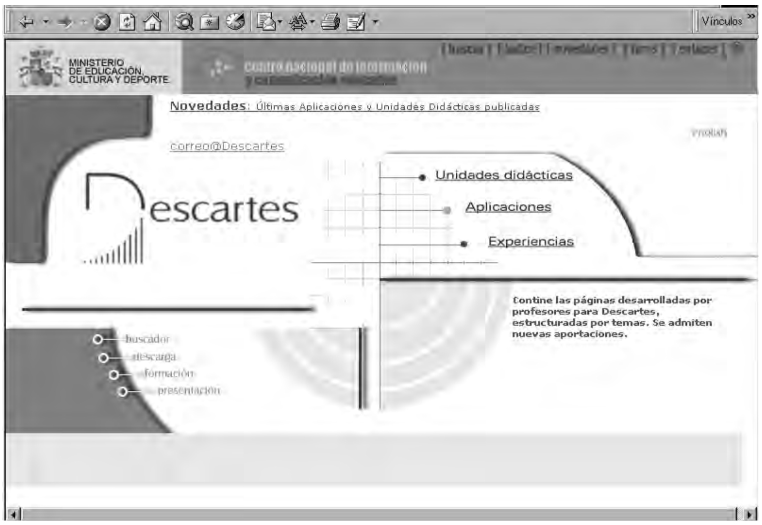
RECURSOS EN INTERNET

CUANDO RENÉ DESCARTES publicó el *Discurso del Método* lo acompañó de tres ensayos en los que ponía en práctica lo teorizado sobre cómo aplicar la razón para estudiar el mundo. Uno de esos ensayos convertiría a Descartes en un matemático de primer orden, se trata de *La Geometría*.

En esta obra, el gran matemático francés hace algo más que poner las bases de la geometría analítica. Realiza uno de los intentos más felices de visualización en matemáticas. Consigue dotar de formas visibles a las ecuaciones al asociar cada una de ellas, al menos hasta las de grado cuatro, con curvas y sus soluciones con intersecciones de dichas curvas.

Y de visualizar un buen número de conceptos y aplicaciones matemáticas de Primaria, ESO y Bachillerato trata precisamente el Proyecto Descartes.

El proyecto Descartes es una experiencia del PNTIC (Programa de Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación) del MECD que nace en 1998, basado en una aplicación de José Luis Abreu, el autor de los programas *Calcula* y *Cónicas*, llamada *Descartes* y que permite generar materiales interactivos de carácter visual y dinámico, compatible con el lenguaje HTML, y por tanto utilizables en Internet, utilizando applet de JAVA.



El proyecto recoge la experiencia de esas aplicaciones e introduce como novedad la facilidad para la confección de las *escenas*, a modo de pizarras electrónicas interactivas, y su inclusión en páginas *web*, de forma que una unidad didáctica será una o más páginas *html*, con todas las facilidades de creación y modificación que permiten los programas editores que hay en el mercado para confeccionar páginas de este tipo. Existen en *Internet* numerosos *applets*, algunos son interactivos, es decir que permiten al usuario modificar algún parámetro y observar el efecto que se produce en la pantalla, pero lo que caracteriza a *Descartes* es que, además, es configurable, es decir, que los usuarios (profesores) pueden programarlo para que aparezcan diferentes elementos y distintos tipos de interacción. No hay que olvidar, también, su finalidad educativa. En particular, el *applet* Descartes tiene una *programación* muy matemática para que a los profesores de esta materia les resulte fácil su aprendizaje y utilización.

Descartes es un sistema de referencia cartesiano interactivo, en el que se pueden configurar y emplear todos los elementos habituales: Origen, ejes, cuadrantes, cuadrícula, puntos, coordenadas, vectores, etc.

Permite representar curvas y gráficas dadas por sus ecuaciones, tanto en forma explícita como implícita; en particular permite representar las gráficas de todas las funciones que habitualmente se utilizan en la enseñanza secundaria, tanto en coordenadas cartesianas como en paramétricas o polares.

Los elementos que intervienen en la definición de las ecuaciones pueden ser parámetros modificables por el usuario, lo que hace que las gráficas que se muestran cambien al modificar esos parámetros.

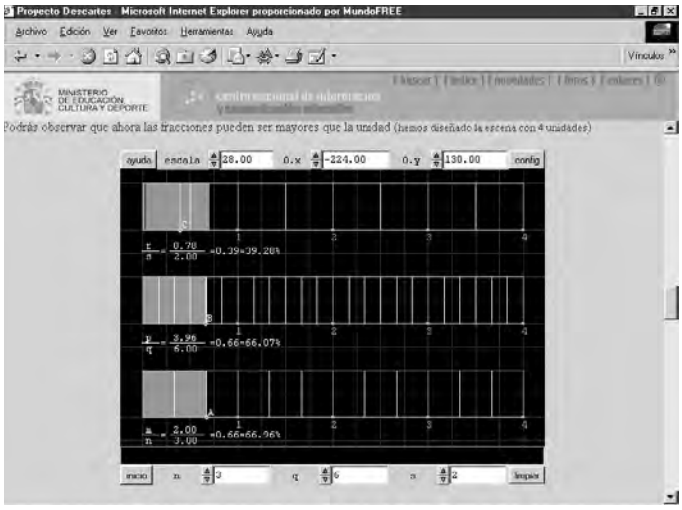
Dispone también de una poderosa herramienta de cálculo que permite evaluar cualquier expresión matemática y escribir el resultado en la escena. Como ocurre en las representaciones gráficas, los elementos que intervienen en los cálculos pueden ser parámetros modificables por el usuario, lo que hace que los resultados que se muestran cambien al modificar esos parámetros.

También se pueden representar los elementos geométricos elementales: puntos, segmentos, arcos, etc., lo que permite hacer numerosas representaciones geométricas. Como en los casos anteriores, estos elementos pueden depender de parámetros, de forma que la representación cambia cuando el usuario los modifica.

Uso de Descartes

Para el alumno: La forma más sencilla de usar *Descartes* es utilizar las páginas donde se hayan insertado las escenas. Es la que utilizarán generalmente los alumnos, o las personas que se acerquen por primera vez a esta aplicación. No se requiere tener ningún conocimiento previo. Bastará con las indicaciones que se hagan en la propia página en la que se habrán señalado las actividades que se deben de realizar.

Para el profesor: En este caso se necesita tener experiencia con algún editor de páginas web, puede ser un procesador de textos que permita editar este tipo de páginas. El profesor puede editar las páginas que le interesen y modificar la propuesta de actividades, quitando, corrigiendo o añadiendo actividades; esto no requiere más conocimientos que saber usar un procesador de textos. Si además ha practicado con las herramientas de configuración del *nippe* puede efectuar con facilidad pequeños cambios: colores, poner o quitar ecuaciones, puntos, segmentos, etc.



En estos últimos tres años un numeroso equipo de profesores ha realizado cientos de aplicaciones y desarrollado un buen número de unidades didácticas que recorren un alto porcentaje del currículo de la ESO y Bachillerato.

Estas aplicaciones están disponibles en el servidor de Internet del PNTIC, actualmente CNICE (Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa). En este servidor se pueden encontrar los siguientes apartados:

- *Unidades Didácticas*: Da acceso a la relación de Unidades Didácticas desarrolladas en el PNTIC con el nippe Descartes que están clasificadas por niveles y cursos; aunque también ofrece un buscador que permite acceder a las páginas por su contenido, lo que facilita la localización de unidades que tratan un determinado tema.
- *Aplicaciones:* Esta es la zona destinada a las aplicaciones desarrolladas por los profesores que quieran

publicar sus trabajos. Está previsto incorporar las unidades didácticas que desarrollan los profesores-alumnos de los cursos. Hay que resaltar la calidad de los trabajos realizados por los alumnos de los cursos, ya que no se han limitado a hacer el ejercicio final que se les pedía, como aplicación de programación del applet Descartes, sino que, en muchos, casos han realizado Unidades Didácticas muy completas y con una presentación excelente.

- *Experiencias:* Se pretende recoger, en esta zona, las experiencias llevadas a cabo por los profesores en el aula, con sus alumnos. En las cursos de Asturias y Castilla y León el curso incluye la experimentación con alumnos.
- *Buscador:* Permite localizar en Descartes las aplicaciones relacionadas con un tema dado.
- *Descarga:* Se dan instrucciones para descargar las Unidades Didácticas y las Aplicaciones en el ordenador local, de forma que puedan utilizarse todas las Unidades Didácticas y las Aplicaciones sin necesidad de estar conectados a la red.
- *Formación:* Se accede a las páginas del curso de autoformación, que consta de cinco prácticas y el desarrollo de una aplicación. En los momentos en que esté activo el curso a distancia se incluirá en esta página un enlace al curso.

Hasta ahora muchos profesores han rechazado esta herramienta por pensar que se necesitaba estar conectado a Internet para poder utilizarla con los alumnos. Está claro que se puede utilizar así, pero desde luego no es lo más aconsejable por las dificultades que la mayoría de los centros encuentran para poder trabajar conectados a la red en tiempo real.

Pero no es necesario estar conectado. El profesor puede descargar a los ordenadores locales o a disquetes, aplicaciones, unidades didácticas enteras y experiencias, modificarlas y trabajar con sus alumnos sin necesidad de estar conectado a Internet.

Para poder trabajar de este modo basta con descargar el motor de Descartes y los ficheros comunes y guardarlos en el disco duro del ordenador.

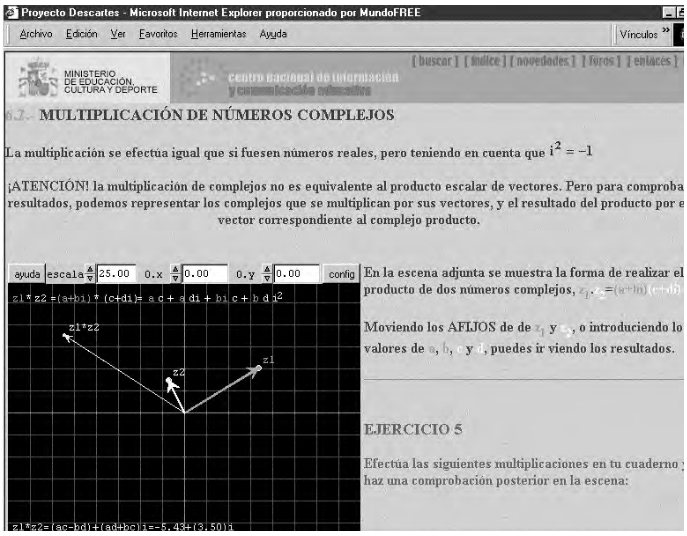
¿Qué podemos encontrar?

Unidades didácticas

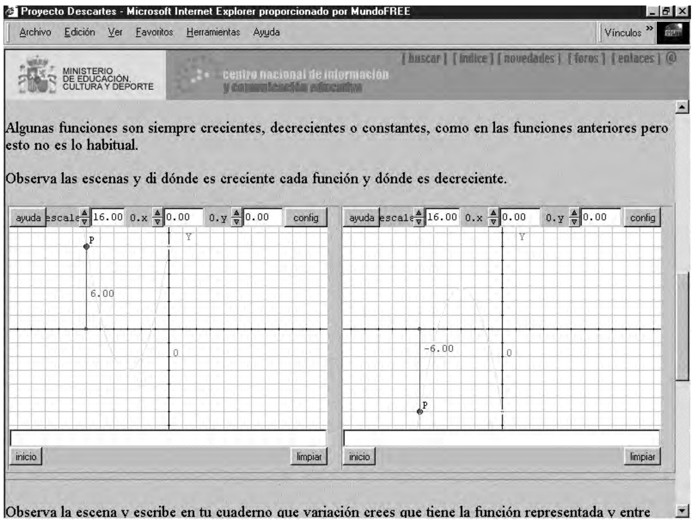
Más de 100 unidades didácticas correspondientes a:

- Primer ciclo de la ESO
- 3.° de ESO
- 4.° de ESO (Opción A)
- 4.° de ESO (Opción B)
- Taller de Matemáticas
- 1.° de Bachillerato de CC.NN. y SS. y Tecnológico
- 2.° de Bachillerato de CC.NN. y SS. y Tecnológico
- 1.° de Bachillerato de HH. y CC. SS.
- 2.° de Bachillerato de HH. y CC. SS.
- Otros niveles

En cada curso podemos encontrar entre 10 y 20 unidades didácticas desarrolladas completamente, con applets animados, introducción teórica y ejercicios de aplicación.



Unidad: Complejos. 1.° de Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud

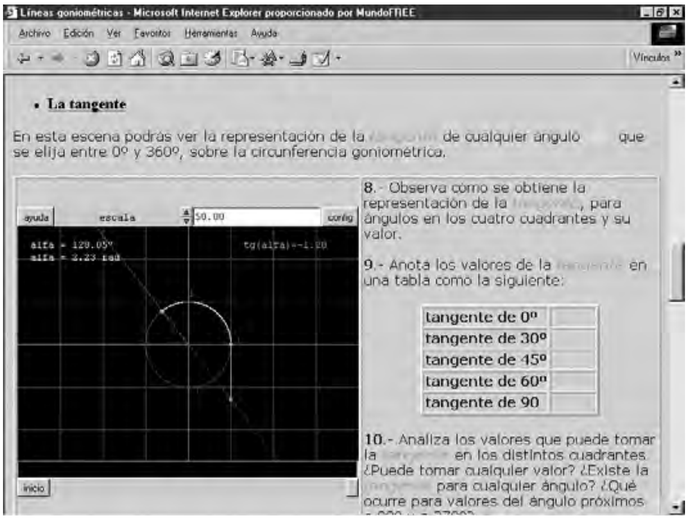


Unidad Funciones. 4.° de ESO

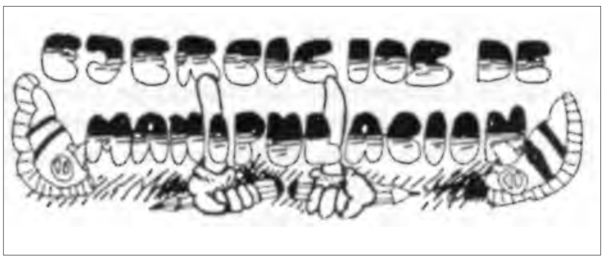
Aplicaciones

Incluye un catálogo de todas las aplicaciones seleccionadas por bloques temáticos y nivel educativo, autor. La descarga también se puede realizar desde estos cuadros:

Experiencias



Aplicación de alumnos de 1.° de Bachillerato del IES Atenea de Alcalá de Henares



En este apartado se incluyen las experiencias de aula realizadas por profesores y alumnos. Hasta hora sólo se han incorporado las del IES Atenea de Alcalá de Henares pero confiamos que pronto comience a crecer.

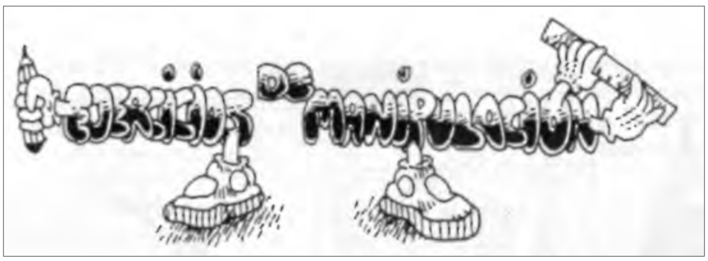
Conclusiones

Alguien puede pensar que material tan amplio y con un potencial didáctico tan grande debe ocupar mucho espacio y que las descargas se pueden eternizar. No es el caso. El motor que permite visualizar los applets y los archivos comunes con todos los índices no ocupa más de 200 K y una unidad didáctica completa está alrededor de los 30 K. Es decir en un simple disquete podemos incorporar unas cuantas unidades y aplicaciones. Los tiempos de descarga no llegan al minuto.

En fin, un proyecto que pone al alcance de todos los profesores y de sus alumnos un material sumamente interesante y que nos permite avanzar en uno de los sueños de René Descartes: hacer visibles las matemáticas. Porque a los que siguen pensando que la enseñanza de las Matemáticas debe constituir el paraíso de la abstracción, les recuerdo una frase del Príncipe de los Matemáticos, el genial Gauss:

«La Matemática es la ciencia del ojo»

Dirección de Internet del Proyecto Descartes:
http://www.cnice.mecd.es/Descartes/index.html



SUMA 38
noviembre 2001, pp. 111-115

El Renacimiento (I) Mucho más que un matrimonio de conveniencia

Ángel Ramírez Martínez
Carlos Usón Villalba

DESDE LA HISTORIA

HUBIÉRAMOS DESEADO enfocar este artículo desde otra perspectiva. Su gestación había deambulado por otros derroteros. Es cierto que pensábamos escribir sobre el tremendo paréntesis[1] que la historiografía clásica impone, en el campo de la Matemáticas, al final de la Edad Media hispana y al llamado Renacimiento, también en su versión peninsular. De la matemática «árabe» ya habíamos hablado en artículos anteriores[2], pero, una vez más, los medios de comunicación pretenden adiestrarnos en el lenguaje del odio, presentándolo bajo el prisma del choque cultural. Porque, una vez más, los paladines de la justicia y la democracia andan bombardeando un país musulmán respondiendo con iniquidad a la iniquidad. Razones más que suficientes, en nuestro caso, para cultivar la admiración, para revisar nuestra cultura a la luz de sus aportaciones. Las de «ellos», que fueron las nuestras, porque formábamos parte integrante de «esa» comunidad. Máxime cuando uno lee con dolor alegatos tan detestables –por racistas– y tan tendenciosos –por intencionadamente desinformados– como el de la señora Fallaci[3].

Una continuidad obligada

En aquellos artículos[2] habíamos dejado a Hugo de Santalla en Rueda, enfrascado quizás en la traducción de las obras de al-Mut'aman, y más tarde a Platón de Tívoli trabajando con Abraham bar-Hiyya. Tres representantes sin más de ese noreste hispano que traducía compulsivamente y exportaba[4] cuanto traducía sin dejar huella alguna en suelo ibérico. Mientras, París luchaba con denuedo contra el averroismo[5] y la Universidad de Toulouse lo usaba como banderín de enganche. Sin embargo, ¿debemos pensar que la fuente de la tradición matemática andalusí se había secado?

Si hemos de hacer caso a la historiografía académica así debió de ser. Si al eurocentrismo debemos escuchar, sería Fibonacci en 1202 quien recogiera la tradición perdida[6]. Incluso hay quien, haciendo acopio de un driblin asombroso cristaliza en él el resurgir de la ciencia griega que, tras invernar diez siglos, floreció en sus manos[7].

Efectivamente, debemos aceptar el *Liber Abacci* como un hito de referencia obligada, pero entendido como el resultado lógico de una continuidad. Fruto de una inquietud, consecuencia de una poderosa tradición que necesitó, para fructificar en Europa, de la autoestima aportada por las armas en Tierra Santa y, sobre todo, del camino abonado que, desde al-Andalus, fueron dejando de forma directa[8] o indirecta personajes como Juan Hispano, Pedro Alfonso, Abraham ben Ezra, Abraham bar Hiyya, Adelardo de Bath, Gerardo de Cremona, etc. Un camino que precisó violentar el escolasticismo neoplatónico dominante y dejó el continente europeo dividido en dos, intelectualmente hablando. Mientras uno bebía del caudal griego diversificado por los árabes en multitud de canales, el otro volvía la vista hacia la tradición latina a través de la *Institutio Arithmetica* de Boecio (ª480, 524) que cumplía ya siete siglos y que no pasaba de ser una adaptación de la *Introductio Arithmeticae* de Nicómaco[9] (ª100), empobrecida todavía más por Casiodoro (475, 570) y San Isidoro de Sevilla (570, 636). Algo similar a lo que pasaba en filosofía, donde se apostaba por las nociones simplistas del neoplatonismo[10] de autores como Plinio, Casiodoro, Mario Victoriano, Macrobio, Apuleyo o el mismo Boecio. O en astrología con Macrobio y Firmicio Materno.

En el fondo, dos concepciones contrapuestas por su base. Una que aspira a llegar a Dios por la razón en la más fiel tradición judeo-cristiana occidental y otra más restringida que Lo busca, exclusivamente, desde la fe y en la que la ciencia no pasa de ser un mal menor mientras no ponga en entredicho la verdad revelada[11].

Las Etimologías de San Isidoro son un claro ejemplo. Sólo el tercer libro está dedicado a las matemáticas. No por el interés que suscitan en sí mismas sino por el que despiertan en la teología como manifestación de los planes del Creador y, como consecuencia, para entender los libros sagrados. Así pues, la trascendencia de este tercer libro no está en su contenido sino en su difusión, en su obligada presencia en todo monasterio medieval. Por eso nace *De Aritmethicus Propositionibus* de Beda el Venerable (ª673, 735), como oposición a la obra de Isidoro, para mitigar su influencia en las islas británicas[12].

Sobre la genealogía del *Liber Abacci*

Y sin embargo el foco musulmán y el cristiano acabarían conformando uno sólo. Beda acumula un voluminoso bloque de problemas de los que hoy asociaríamos a las matemáticas recreativas que aparecerán después en las aritméticas medievales y renacentistas: Mahavira, Fibonacci, Paolo del Ábbaco, Chuquet, Tartaglia, la de Treviso… Algunos de ellos habían atravesado la historia hasta Beda y desde él a nuestros días con ligerísimas modificaciones. Los de aves, a los que D. E. Smith atribuye origen chino, pasarían después por las obras de Beda, Mahavira, Alcuino de York o Abu Kamil. Los de cisternas, a los que este autor sitúa en China o India en el momento de su nacimiento, todavía hoy ocupan su lugar[13] en los libros de texto.

Jugando por la otra banda, en suelo peninsular, Ibn al-Samh y al-Zaharawi de la escuela del madrileño Maslama, habían escrito, ya en el siglo X, aritméticas prácticas del tipo de las que después llevarían el apelativo «comerciales»: los *al-Muawalat*. Sin salir de al-Andalus, el siglo XI rendiría homenaje a al-Mu'taman, ibn-Sayyid y al-Yayyani, sin duda tres de los mejores matemáticos occidentales del medioevo. Pero de ellos ya hablamos en artículos anteriores. En este mismo ámbito de las aritméticas mercantiles, el siglo XII[14] nos dejaría el *Liber Mahameleth*. Una obra de autor desconocido que J. Sesiano atribuyó en segunda instancia a la pluma de Juan Hispano. ¿Una traducción quizás de alguno de los al-Muawalat de la escuela madrileña[15]? ¿O quizás de alguna otra obra posterior?

El caso es que el *Liber Mahameleth* presenta ya la típica estructura de las aritméticas comerciales que popularizaron los italianos a partir del siglo siguiente. Como ellas, está dividida en dos partes, una teórica y otra práctica. La primera hace referencia al sistema de numeración posicional y a sus algoritmos asociados[16], a la teoría de las proporciones[17] y a la resolución de ecuaciones de 1.° y 2.° grado. La parte práctica contiene una colección de problemas sobre contrataciones de obreros, compraventa de mercancías, cambio de moneda, aleaciones, matemática recreativa…

La obra rinde pleitesía a Euclides, como no podía ser de otro modo, al que cita infinidad de veces y del que exige que sea conocido y estudiado[18] antes de enfrentarse al *Liber*. También cita abundantemente a Abu Kamil, y en menor grado a Arquímedes y al-Khuwarizmi. E incluso, a Nicomaco de Gerasa. Las vías de influencia parecían haber confluido ya en el siglo XII.

Si hacemos caso a Sesiano el libro debió de tener escaso éxito. En su opinión, la síntesis que ofrecía entre teoría y práctica era demasiado avanzada para sus consumidores más naturales, los comerciantes, y se quedaba demasiado corta para los especialistas[19]. A nuestro juicio, esta opinión concuerda mal con el hecho de que hayan llegado hasta nosotros tres ejemplares.

Tampoco nos parece ni casual ni intrascendente que, de esas tres copias incompletas de que disponemos, una de ellas esté en Padua y las otras dos en París. Italia es la cuna de Fibonacci y la madre más prolífica en lo que a engendrar aritméticas comerciales se refiere. Francia alumbraría uno de los libros más interesantes del siglo XIII: *Carmen de Algorismo* de Alexander de Villadei. Pero esa línea de continuidad nos ha llevado sin pretenderlo hasta la reedición del texto, del muy loado[20], Leonardo de Pisa. Merece la pena analizarlo, aunque sólo sea someramente por afianzar esta continuidad.

El *Liber Abacci*

Se estructura en 15 capítulos. El primero lo dedica a las 9 cifras significativas y al «zephirum». En los cuatro siguientes se interesa por los algoritmos de la multiplicación, suma, resta y división –en este orden–, incluyendo además las pruebas del 7, 9 y 11 así como la descomposición en factores primos. El sexto y el séptimo tratan de las fracciones[21]. Del ocho al once están dedicados a aplicaciones y cálculos comerciales, reglas de tres simple y compuesta, simple y doble falsa posición, adición de progresiones y de cuadrados de números naturales, sustentados sobre una colección de problemas relativos a sociedades, cambios de moneda, aleaciones o matemática recreativa. Los capítulos 12 y 13 se ocupan de la solución entera de ecuaciones indeterminadas de primer grado. El decimocuarto al cálculo de raíces cuadradas y cúbicas, además de operaciones con expresiones de la forma $a \pm \sqrt{b}$. El último capítulo contiene una breve exposición de las ecuaciones de segundo grado al estilo de al-Khuwarizmi, problemas de geometría, resolubles a partir del Teorema de Pitágoras, y otros alusivos a fracciones continuas.

Sobre su influjo posterior hay pocas dudas: durante mucho tiempo constituyó una referencia obligada para media Europa. Y sin embargo, según G. Beaujouan y G. R. Evans, fueron mucho más populares en ese momento *Carmen de Algorismo* (ª1225) del francés Alexander de Villadei y el *Algorismo Vulgaris* del inglés Jhon Sacrobosco (ª1200, 1256). El primero era una obra en verso que alcanzó gran difusión entre los estudiantes de la época, quienes recitaban de memoria sus estrofas y consultaban las dudas en la prosa, mucho más clara, de Sacrobosco. Coetáneo de ellos es también la obra del alemán Jordanus Nemorarius *Demostratio de algorismo* y *Arithmetica decem libris demostrata*.

El siglo se despediría con el primer tratado del ábaco en lengua vulgar que se conoce, *Livero del abechio*, y la eclosión de las llamadas escuelas del ábaco en Italia. Tendrían que pasar todavía cien años para que apareciera la primera aritmética comercial castellana de la que se tiene noticia: *Libro de Arismética que es dicho Alguarismo*. Pero, otros treinta más para que lo hiciera la *Aritmética de Pamiers* que es, a la sazón, la primera de este tipo en Francia. Le seguirían las obras de Nicolas Chuquet dando paso ya, a finales de siglo, a las que inauguran el capítulo de las aritméticas impresas: la de Treviso por parte italiana, *De maviere omte leeren cyffren na die rechteconsten algorismi int gheheele ende int ghebroken* por parte alemana y la española[22] *Summa de l'art d'Aritmètica* (1482) de Francesc Sancliment. Siete años después aparecería en España una segunda copia de *Libro de Arismética que es dicho Alguarismo*. Las aritméticas comerciales triunfaban en toda Europa. La continuidad impone su lógica. Bajo su sombra, el desierto resulta menos estéril de lo que se presumía. Al menos no más infecundo que otros.

Leonardo de Pisa

Los expertos establecen líneas de influencia[23] en función del orden de introducción de las operaciones, los tipos de «pruebas» que utilizan, la división de los capítulos en siete o nueve «especias» o «puertas» y a partir del uso de determinados vocablos. Un trabajo encomiable, sin duda, aunque la necesidad de introducir tan sutiles argumentos lo que demuestra es la síntesis de corrientes a la que se había llegado. El maridaje entre ellas eran algo más que un matrimonio de conveniencia, era el resultado del apasionado idilio que ligaba las matemáticas a las necesidades de la época. En este caso las comerciales.

Las otras matemáticas

Aunque no pensábamos recorrer el camino que sigue a continuación, lo haremos en honor a la señora Fallaci. A ella dedicamos esta somera revisión de lo que pasaba en su tan odiada cultura musulmana antes de que el *Liber Abacci* inaugurara el siglo XIII.

Hacía ya más de cuatro siglos desde que ibn Hayyam[24] utilizara la numeración posicional y el cero, llamados a ocupar siglos después, como ya hemos visto, los primeros capítulos de las Aritméticas Comerciales. Un poco más tarde al-Kindi y al-Khuwarizmi difundirían la aritmética hindú. Por esa misma época Wasi ibn-Turk hacía un tratamiento de la ecuación de segundo grado algo más profundo que el de al-Khuwarizmi, que a la postre sería la versión que se popularizó. Algo tuvieron que ver en el proceso de selección el prestigio inicial y el que le aportaron las traducciones hispanas.

El impulso de la generalización movía al álgebra que sin embargo no supo dotarse hasta los siglos XIV y XV de ese poderoso simbolismo[25] que hubiera permitido un empuje definitivo. Sirvan como ejemplo de ese impulso estos dos modelos de trabajo. Por un lado al-Khuwarizmi resuelve una ecuación concreta: $x^2 + 10x = 39$.

Ciertamente su método es extensible a casos similares pero, la búsqueda de esa generalización para la que carecen de sentido las particularidades surge medio siglo después, cuando Tahbit ibn Qurra se plantea resolver una ecuación cualquiera de ese mismo tipo: $x^2 + bx = c$.

Esa actitud de desafío que admite el trabajo con «cosas» irreales cuyo valor se desconoce y de las que se admite que puedan estar sometidas a reglas de cálculo, caracterizaba el espíritu desbordante de la nueva álgebra. Muchos siglos después ese poderoso impulso conquistaría Europa y enervaría a Cavalieri que, como buen geómetra, se desesperaba:

> los algebristas (...) suman, restan, multiplican y dividen las raíces de los números, aun siendo inefables, absurdas y desconocidas, y están convencidos de haber actuado correctamente, siempre que eso sirva para obtener el resultado deseado.

El peso de la tradición griega era demasiado fuerte, la admiración por sus matemáticas fue tan profunda que costaría siglos desprenderse de la rémora geométrica. Ese sería durante siglos, aún sin saberlo, el gran reto del oriente islámico, aunque ya, a finales del siglo XI, Omar al-Hayyam (1048, 1131) hubiera escrito (1077) sus *Comentarios a las dificultades que se encuentran en las introducciones del Libro de Euclides*. El avance fue notable, pero quedaba todavía mucho por hacer. Así, por ejemplo, aunque es allí donde se trata por primera vez la razón A/B como un número y donde se define una nueva categoría de números asociados a las proporciones, se siguen manteniendo reparos acerca de la consideración numérica de las magnitudes inconmensurables.

Lamentablemente no nos ha llegado su *Tratado sobre la extracción de raíces* aunque en *Las dificultades de la aritmética* desarrolla un procedimiento general para el cálculo de una raíz cualquiera del número natural que se desee, haciendo uso de lo que hoy llamamos Binomio de Newton y que, en aquel momento se podría haber llamado Binomio de al-Karagi (¿ , 1019 al 1029), por ejemplo, si el culto a la personalidad hubiera estado tan desarrollado como ahora[26].

Omar al-Hayyam, más famoso en occidente por su supuesta heterodoxia y su poesía hedonista e iconoclasta[27], había escrito ya en 1074 *Sobre las demostraciones de los problemas del álgebra y la almucábala*: un exhaustivo estudio de las ecuaciones de tercer grado, clasificándolas primero en 19 formas canónicas y abordando su solución general como corte de cónicas. Es evidente que estamos hablando de obras puramente científicas. No es la resolución de problemas concretos la que motiva el estudio, ni son las soluciones particulares las que centran el interés del autor. Es la abstracción la que domina el tratamiento general de la obra. Es la ambición de síntesis la que la motiva.

Señora Fallaci:

¿Hace falta establecer algún tipo de comparación entre las preocupaciones científicas de Hayyam y las de los «matemáticos[28]» europeos de la época de Fibonacci? ¿No resultaría más razonable, siguiendo ese modelo elitista que ha dominado la historia de las Matemáticas y que ha excluido de ella casi todo lo que se asocia a la necesidad en lugar de al *honor del espíritu humano*[29], desterrar definitivamente a su paisano Leonardo de Pisa, de la historia de las matemáticas? No era puro, no tenía nivel suficiente para su época[30], su obra no supuso un paso adelante en la construcción del edificio matemático.

Es evidente, a estas alturas, que lejos de proponer semejante barbaridad nuestra propuesta pase por incluir en ella el *Liber abacci* pero también el *Libro de Arismética que es dicho Alguarismo* (por ejemplo) y todas esas «otras» matemáticas surgidas al amparo de la necesidad de sus usuarios para que nos sirvan, precisamente, para saber más de ellos y menos de ellas. Llevamos tanto tiempo mirándonos nuestro eurocentrista ombligo matemático desde la perspectiva del formalismo que hemos perdido la necesaria amplitud de miras que requiere la vista para poder ver.

Pero podemos seguir obcecados y apoyarnos en E. Colerus[31] para continuar diciendo, como lo hace usted en su artículo, que: «Es innegable que los árabes añadieron relativamente poco al contenido material de nuestra ciencia» y no seguir leyendo hasta que, en la página 145, diga aquello de: «Puede decirse que Leonardo es el primer matemático de valía de la edad moderna». Se puede ir más allá en esa ceguera argumental y afirmar, como lo hace C. B. Boyer[32], que: «...en la obra de Leonardo de Pisa, la Europa Occidental alcanzó a rivalizar con las restantes civilizaciones en el nivel de sus progresos matemáticos». Al fin y al cabo, si usted no necesita pruebas para matar, ¿por qué va a necesitar extraerlas de la historia para mantener sus afirmaciones?

Bibliografía

CAUNEDO DEL POTRO, B. y R. CÓRDOBA DE LA LLAVE (2000): *El arte del alguarismo*, Junta Castilla y León, Salamanca.

Notas

1 Más oscuro si cabe tras la polémica del siglo XIX. La que suscitara la pregunta formulada por Masson de Morvilliers en 1782 y que pretendió cerrar Rey Pastor en 1913 aprovechando el discurso inaugural de la Universidad de Oviedo.

2 *Unos siglos que cambiaron el mundo* (I y II). Números 34 y 35 de *SUMA*.

3 Hacemos referencia al artículo del día 1 de octubre aparecido en el diario *El Mundo*.

4 Tradicional visión de las cosas que niega cualquier poso científico en suelo hispano, especialmente si era de «origen» musulmán.

5 Decir los averroismos sería más correcto.

6 En frase de Rey Pastor: «... [a él] corresponde el honor de introducir en Europa la numeración india».

7 «El primer reflejo de cuanto anteriormente había producido el espíritu occidental» E. Colerus, 1972. *Breve historia de las Matemáticas.* Madrid. Doncel.

8 Tan directa como que J. Lomba considera al *Liber Abacci* inspirado en el *Liber embadorum* de Abraham bar Hiyya. Sin despreciar, por supuesto, el contacto directo o la vía siciliana de influencia.

9 Ya de por sí, un autor que «*muestra una competencia matemática muy escasa*» C. Boyer *Hª de la matemática.*

10 J. Lomba, 1997. *La raíz semítica de lo europeo.* Akal. Madrid.

11 «La verdad de las cosas consiste en su rectitud y en su conformidad con el Verbo, que las dice eternamente» R. Grosseteste (1175, 1253).

12 B. Caunedo del Potro, obra citada en la Bibliografía.

13 Destacado hasta hace unos años.

14 El de Abraham ben Ezra, Pedro Alfonso, Abraham bar Hiyya y con ellos la difusión por Europa.

15 Por esa opción parece inclinarse J. Samsó.

16 Producto, suma, división, resta y raíz cuadrada (en este orden).

17 La sombra griega es alargada.

18 Una exigencia justificada más por la tradición que por la complejidad de sus contenidos.

19 Fruto posiblemente de la disponibilidad negada por la historiografía tradicional. J. Lomba estima que, de las obras traducidas, un 68% eran científicas, y de ellas el 43% lo fueron de matemáticas.

20 Colerus (obra citada): «el primer matemático de valía de la edad moderna». Hª General de las Ciencias coordinada por R. Taton: «*El mayor matemático de la Edad Media*».

21 Hace uso de tres tipos de fracciones: las comunes, las sexagesimales y las de numerador uno pero no las decimales. Negando así una de las principales ventajas de la numeración posicional.

22 En realidad, la primera edición está escrita en catalán. Unos años más tarde se imprimiría la versión castellana.

23 Boecio, ben Ezra, bar Hiyya, Liber Mahameleth. Fibonacci, Sacrobosco..., son algunas de las referencias.

24 Hacia el 776.

25 De la mano de los matemáticos magrebíes y nazaríes.

26 Aunque el culto a la originalidad sea una creación renacentista, al-Biruni (s. X) ya se quejaba de la ausencia de ella en algunos textos de sus contemporáneos.

27 En occidente sus Rubaiyat le han hecho más famoso como poeta que como matemático.

28 Las comillas son contradictorias con nuestra línea argumental pero la pasión nos impide evitarlas.

29 Parafraseando a Jacobi.

30 A nivel internacional, claro está.

31 Ibídem, pág. 136

32 *Hª de la Matemática.* A. U. 1968. Madrid.

SUMA

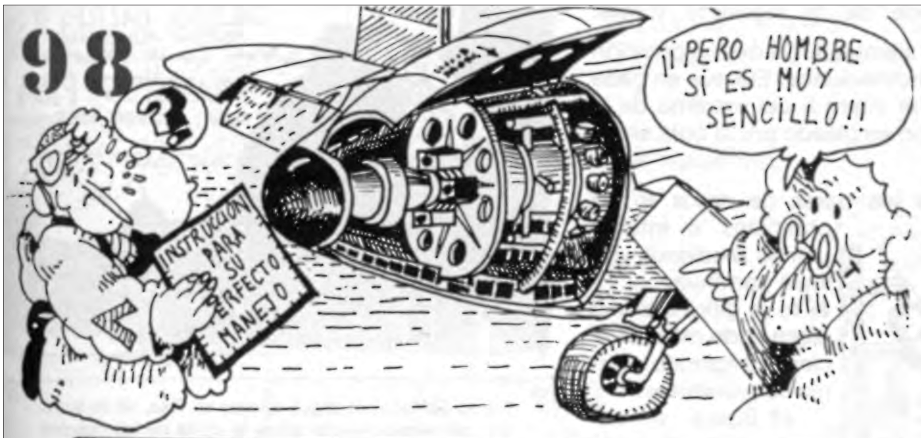
SUSCRIPCIONES

Particulares: 21 euros (3 números)
Centros: 30 euros (3 números)
Número suelto: 10 euros

Revista SUMA
ICE Universidad de Zaragoza. c/ Pedro Cerbuna, 12. 50009 ZARAGOZA
Fax: 976 76 13 45.
E-mail: suma@public.ibercaja.es

Se ruega a los suscriptores y a los socios de la Federación que para cualquier comunicación sobre envío de ejemplares atrasados, reclamaciones, suscripciones… se haga por correo, fax o mail.
No se podrán atender este tipo de comunicaciones por teléfono.

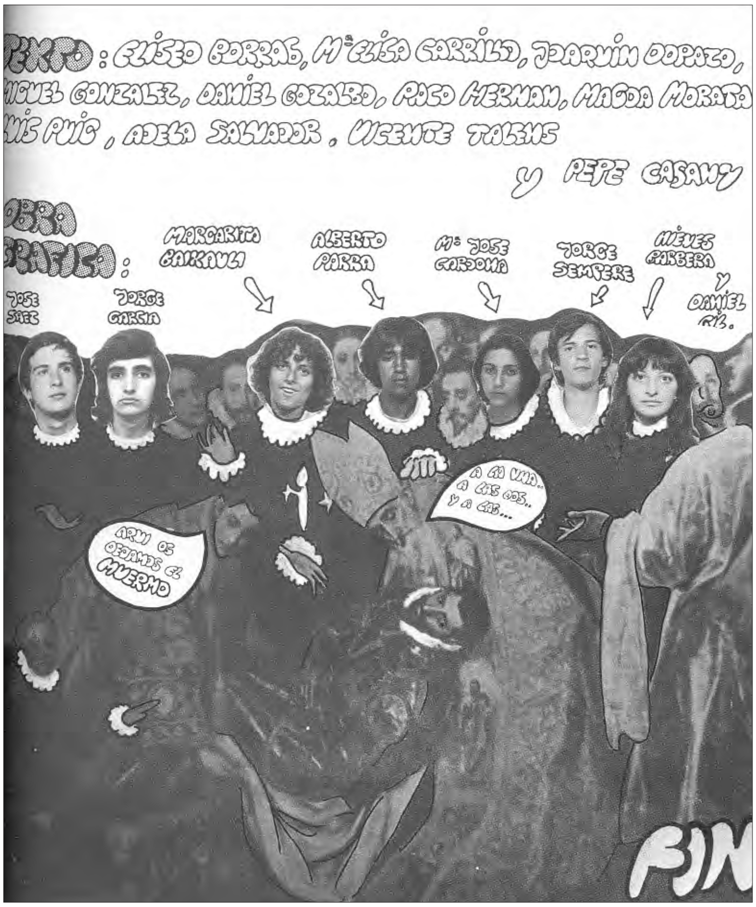
98



Se están haciendo pruebas de un dispositivo que permite a los aviones aterrizar en pistas de corta longitud. Se toma una película del aterrizaje de un avión, midiéndose los tiempos y las distancias recorridas desde el momento en que toca tierra hasta que se detiene y obtenemos la siguiente tabla:

tiempo (seg)	t:	0	1	2	3	4	5	6
distancia (m)	d:	0	100	175	230	270	300	325

Ver si hay alguna función polinómica que se ajuste a estos datos, y en caso afirmativo escribirla.



SUMA 38
noviembre 2001

Grupo Cero, ¿nostalgia?

RECENSIONES

MATEMÁTICAS DE BACHILLERATO. VOLUMEN 1
Grupo Cero: Eliseo Borrás, M.ª Elisa Carrillo, Joaquin D'Opazo, Francisco Hernán, Magda Morata, Luis Puig, Angel Salar, Adela Salvador, Vicente Talens.
Obra gráfica: Antón Díez, María Llum y Daniel Torres
Edita: Roberto Guillén
Valencia, 1977
Matemáticas de Bachillerato. Volumen 2
Grupo Cero: Eliseo Borrás, M.ª Elisa Carrillo, Joaquin D'Opazo, Miguel González, Daniel Gozalbo, Francisco Hernán, Magda Morata, Luis Puig, Adela Salvador, Vicente Talens, Pepe Casany
Obra gráfica: José Saez, Jorge García, Margarita Baikauli, Alberto Parra, María José Cardona, Jorge Sempere, Nieves Barbera y Daniel Gil
Edita: Roberto Guillén
Valencia, 1978

Estamos a mediados de los setenta y un importante grupo de jóvenes recién licenciados nos incorporamos a las tareas docentes en los nuevos bachilleratos. Nuestra formación universitaria está fuertemente influenciada por el formalismo matemático derivado de la corriente bourbakista. En las escuelas e institutos se enseña la llamada «matemática moderna», la matemática que prioriza las teorías conjuntistas y las estructuras algebraicas, marginando una enseñanza tradicional cuyos pilares eran la aritmética y la geometria. El sistema educativo, apoyándose en una interpretación sesgada de las teorias piagetianas, dice que los currículos se organizan de acuerdo con las etapas de desarrollo cognitivo de los alumnos. Los libros de texto asumen los planteamientos gubernamentales:

> el bachillerato debe tender a la organización progresiva racional de la Matemática como ciencia deductiva; la evolución intelectual del alumno le ha puesto en condiciones de poder seguir un proceso deductivo racional; se ha seguido la línea estructuralista, por la simplificación que supone su utilización en el tratamiento de los conceptos matemáticos…

Desde estos posicionamientos, parecen darse todas las condiciones para que los profesores enseñen las matemáticas que se necesitan en la nueva sociedad, y para que los alumnos comprendan y utilicen lo que se enseña. Pero los mundos idílicos pertenecen a los cuentos de hadas; lo que demostró la realidad de las aulas distaba mucho de las expectativas levantadas: las ideas y conceptos matemáticos se justificaban y presentaban en orden deductivo, sin que ello significase que el alumno, que no había desarrollado la capacidad de abstracción que se le suponia, los organizase y estructurase cognitivamente de esta forma. Los resultados eran poco alentadores: los profesores constataron la falta de comprensión de sus alumnos, los alumnos percibieron que sus esfuerzos por entender las nuevas matemáticas resultaban baldíos, y la sociedad también constató que las asignaturas de matemáticas alcanzaban altos índices de fracaso escolar.

Es en este contexto que asistimos a la formación de movimientos de profesionales de la educación matemática que apuestan por el abandono de las llamadas «matemáticas modernas», y la «vuelta a lo básico». Así, surgen grupos de renovación pedagógica que se organizan en torno a las materias curriculares; en el caso de las matemáticas se formaron grupos de profesores como el Equipo Granada-Mats, el Grupo Cero de Valencia, el Grup Zero de Barcelona, el Colectivo de Didáctica de las Matemáticas de Sevilla, el Colectivo Rosa Sensat, el Grupo Azarquiel de Madrid, etc. Estos grupos se preocuparon de analizar los contenidos de los programas de matemáticas vigentes, de proponer nuevos objetivos para la formación matemática de los futuros ciudadanos, y de experimentar metodologías alternativas en educación matemática.

El Grupo Cero de Valencia

El inicio de las actividades públicas del Grupo Cero de Valencia puede situarse en septiembre de 1975 con la publicación del artículo *¿Para qué las matemáticas?* que aparece, firmado por seis profesores de bachillerato, en el número 2 de la revista *Escuela 75*; revista editada por el Seminario de Pedagogía del Colegio Oficial de Doctores y Licenciados de Valencia. Estos profesores toman en consideración, entre otros, los trabajos sobre la naturaleza de la matemática de Lakatos, la fenomenología del conocimiento matemático de Freudhental, y la resolución de problemas de Polya. Así, construyen una crítica a los currículos de matemáticas del nuevo bachillerato sustentada en cuatro ideas principales: se necesitan distintas perspectivas para el aprendizaje de las matemáticas, el rigor de las matemáticas admite distintos niveles, las matemáticas de los alumnos no pueden quedar reducidas al uso de técnicas, y el destino de la enseñanza de las matemáticas no es el de la división social.

Los resultados eran poco alentadores: los profesores constataron la falta de comprensión de sus alumnos, los alumnos percibieron que sus esfuerzos por entender las nuevas matemáticas resultaban baldíos, y la sociedad también constató que las asignaturas de matemáticas alcanzaban altos índices de fracaso escolar.

Pero estas ideas no eran el resultado exclusivo de una reflexión teórica, también estaban influidas por los resultados de experimentar en el aula materiales y métodos de trabajo alternativos; algunos de los resultados de esta experimentación, así como el análisis de los mismos, aparecieron publicados por el ICE de la Universidad de Valencia. A través de títulos como *Es posible* o *Estrategias, conjeturas y demostraciones*, se pudieron conocer las intenciones que guiaban al Grupo Cero en su propuesta alternativa a la enseñanza tradicional de las matemáticas: la resolución de problemas como motor del aprendizaje, el valor educativo del trabajo en grupo, la importancia y utidad del razonamiento plausible, la viabilidad de afrontar problemas de distintas disciplinas científicas, la necesidad de integrar la teoría y la práctica, etc.; y también se pudieron observar los modos de trabajo y las respuestas que ofrecían los alumnos a las tareas propuestas: en el aula aparecen distintas estrategias de resolución de problemas, las matemáticas informales también son eficaces para realizar las tareas, los procesos inductivos están más cerca de los alumnos que los procesos deductivos, la socialización del aprendizaje agiliza la búsqueda de soluciones, etc.

Además, el Grupo Cero desarrolló una amplia difusión de sus materiales, y de las ideas con las que los construyeron, dictando cursos de escuelas de verano y asistiendo a reuniones organizadas por colectivos de profesores. En uno de estos cursos, impartido en la Escola d'Estiu que organizaba la Associació de Mestres Rosa Sensat, surgió, a finales de 1975, la idea de que profesores de matemáticas de bachillerato de Valencia y Barcelona trabajaran conjuntamente en la elaboración de materiales; pero motivos de infraestructura y organización llevaron a que los profesores de cada comunidad decidiesen proseguir el trabajo por separado dando lugar a la formación del Grup Zero de Barcelona como colectivo autónomo.

Las ideas y materiales del Grupo Cero y del Grup Zero, difundidas en buen número de publicaciones y encuentros con profesores, ayudaron notablemente a apaciguar el desasosiego de los profesores noveles, y de los no tan noveles; ayudaron a abrir nuevas perspectivas en la educación matemática y reorientaron gran parte de los contenidos y métodos de los currículos posteriores.

En el año 1978 se publican los dos libros de texto que se reseñan al inicio de este trabajo. Es la apuesta del Grupo Cero por ofrecer a profesores y alumnos una propuesta didáctica global para los dos cursos de matemáticas obligatorias de bachillerato. Es la culminación de los trabajos previos de diseñar, probar y reformular materiales utilizados en ámbitos locales. Es el momento de atender las demandas de los profesores que quieren llevar a sus alumnos una alternativa completa a la enseñanza tradicional.

Para muchos profesores la aparición de estos libros resultó impactante, tanto por los contenidos como por la forma de presentarlos. Transcurridos 25 años de su publicación, se pueden considerar como libros de texto clásicos. Puesto que se me ha encargado hacer una revisión de estos textos, se me ocurre hacerla en clave de recordar las sensaciones que me produjo.

Para muchos profesores la aparición de estos libros resultó impactante, tanto por los contenidos como por la forma de presentarlos. Transcurridos 25 años de su publicación, se pueden considerar como libros de texto clásicos.

La primera impresión

Al mirar por primera vez la portada de los libros Grupo Cero pensé que estaban más próximos a portadas de comics que a las portadas de los libros de texto de matemáticas; éstas solían contener formas geométricas (o, con menor frecuencia, fórmulas matemáticas) sobre fondo monocolor y textos escritos con letras de imprenta «formales»: eran portadas poco llamativas. Sin embargo, los ilustradores de los libros del Grupo Cero introducían formas humanas, símbolos matemáticos con carácter decorativo, reproducciones de manuscritos de alumnos y textos escritos con letras de imprenta «informales».

Al abrir el libro encontré una maquetación muy alejada de los libros de texto de la época, tanto por la estructura como por los recursos utilizados. Sin entrar en valoraciones estéticas, recuerdo algunos aspectos que, por comparación con los libros de texto usuales, me resultaron llamativos:

- Cada una de las lecciones se inicia con el enunciado de un buen número de problemas; además, hay otros problemas intermedios y también al final. Esta distribución se corresponde con la finalidad para los que están propuestos: hay problemas de introducción, para que aparezca algún aspecto parcial del concepto, y de consolidación de los conceptos abordados en la lección.
- Después de los enunciados de algunos problemas aparece una letra *t*, de tamaño destacado y trazo «informal», que indica alguna de las nociones aparecidas al resolver el problema, o alguna consideración sobre las mismas.
- La presentación formal de los conceptos matemáticos suele aparecer en el epígrafe *Resumen*, que está escrito con tinta de color, o bien en textos incluidos en el «bocadillo» que sale de una boca humana. Este epígrafe no encabeza las lecciones, como en los libros tradicionales, sino que se sitúa después de los enunciados de un buen número de problemas.
- Aparecen, bajo el epígrafe *Aclaración* y con letra de color, comentarios sobre algún concepto para delimitar sus interpretaciones; también se incluyen reflexiones sobre alguna de las técnicas que han surgido, resúmenes de las ideas que han aparecido, finalidad de las tareas que se van a proponer o posibles interpretaciones erróneas.
- Con el enunciado de *Problemas de manipulación* se proponen ejercicios para que los alumnos se adiestren en el uso correcto de las técnicas. Esta disposición no concuerda con el habitual listado de problemas y ejercicios que se entremezclan, en los textos habituales, al final de cada lección.
- En el desarrollo de las lecciones se encuentran ilustraciones variadas que aportan información sobre algún problema, ofrecen alguna ayuda o, simplemente, gratifican la vista. No era habitual encontrar en los libros tradicionales ilustraciones que pudiesen distraer la supuesta seriedad de las matemáticas.
- El tipo de la letra utilizada en los textos no es uniforme, ya que se entremezcla la letra de imprenta tradicional, con el de las letras de tipo manual, y con la de tipo «informalç. Resultaba extraño esta licencia para quienes estábamos habituados a una presentación convencional de los textos matemáticos.

Las intenciones

En el prólogo del libro del primer volumen se ponen de manifiesto las intenciones educativas del Grupo Cero sobre la educación matemática en los dos primeros cursos de bachillerato. Allí figuraban ideas importantes para reflexionar sobre la práctica educativa, y para entender mejor la secuenciación y organización de los distintos bloques de contenido de los libros.

- *Para preparar a los jóvenes para lo desconocido, el aprendizaje debe primar sobre la enseñanza.*

  Se postulaba un cambio respecto de una práctica educativa en la que el profesor se situaba como el actor principal de la clase; la propuesta era la de colocar a los alumnos como el principal foco de interés. Y las razones parecían evidentes: la sociedad en que vivíamos estaba sometida a cambios vertiginosos en todos sus ámbitos y, por tanto, la formación matemática de los futuros ciudadanos debía potenciar el desarrollo de hábitos y capacidades.

Este posicionamiento obligaba a modificar los roles tradicionales que se jugaban en el aula, de modo que debía ser el alumno quien realizase las actividades propuestas, aprendiese desde su propia experiencia, indagase en la búsqueda de significados, planificase la resolución de los problemas, etc. Por el contario, el papel del profesor pasaba a ser el de quien guiase el aprendizaje, estimulase al alumno para el trabajo, sugiriese distintos enfoques para los nuevos conocimientos, ofreciese distintas propuestas para buscar regularidades y formular conjeturas, animase a los alumnos que se bloqueaban en el camino...

- *En una clase activa de matemáticas la tarea primordial es hacer matemáticas, es decir, matematizar.*

  Desde nuestra formación univeritaria entendíamos que en las enseñanzas de bachillerato había que potenciar el método deductivo, que debíamos apostar por una práctica educativa basada en la presentación formal de las matemáticas. Pero la propuesta iba en el sentido de Freudhental: los alumnos tienen que matematizar situaciones de la vida real, pero matematizar las matemáticas debe situarse al final del proceso, cuando los alumnos estén en disposición de hacerlo porque tienen un buen conocimiento de las matemáticas.

  En consecuencia, la propuesta del Grupo Cero era una llamada para que los profesores apostásemos por invertir la presentación habitual de los conceptos; se sugería que en vez de empezar por las definiciones se comenzase resolviendo problemas, y que fuesen las ideas surgidas de esta actividad las que permitiesen la formalización de los conceptos.

- *Lo que queremos es estudiar los mismos fenómenos que estudian las ciencias sin dejar de señalar la peculiaridad del tratamiento matemático.*

  Es cierto que había una tendencia a destacar el carácter instrumental de las matemáticas, tanto en lo que concierne a la formación del individuo, como en lo que se refiere a su carácter de ciencia auxiliar de otras disciplinas científicas. Pero este carácter de ciencia auxiliar era más teórico que real: los problemas que se resolvían habitualmente en las clases de matemáticas no afectaban a otras disciplinas científicas.

  La aportación del Grupo Cero fue la de poner de manifiesto, ante los profesores y los estudiantes de bachillerato, que es posible y deseable una enseñanza integral de las matemáticas, una enseñanza en la que la teoría y la práctica se integrasen al resolver problemas del mundo real. Por tanto, había que modificar el tipo de problemas que se proponían a los alumnos, formulando enunciados provinientes de otras muchas disciplinas científicas como la física, la biología, la economía, la medicina, etc.

> *Este posicionamiento obligaba a modificar los roles tradicionales que se jugaban en el aula, de modo que debía de ser el alumno quien realizase las actividades propuestas, aprendiese desde su propia experiencia, indagase en la búsqueda de significados, planificase la resolución de los problemas, etc.*

- *Proponer problemas que muestren al alumno, desde ángulos diversos, el tipo de cuestiones que conducen a ver la necesidad de una aproximación unitaria.*

  La enseñanza de la matemática arrastraba una dilatada práctica en la que los conceptos se mostraban en su formulación actual, y nuestra formación universitaria había incidido todavía más en esta práctica. No es extraño, por tanto, que los profesores noveles nos aferrásemos a la forma tradicional de enseñanza.

  Ante esta situación, el Grupo Cero nos recordó que los conceptos matemáticos no surgieron tal y como se presentaban a los alumnos; su génesis se sitúa en la resolución de situaciones problemáticas reales que se plantearon en momentos históricos concretos, así como en un largo periodo de aproximaciones parciales, de superación de errores, de generalización, de abstracción, de precisión terminológica, etc. Y también nos recordaron que la simple presentación de un concepto matemático no garantiza que los alumnos lo capten en toda su complejidad, que hay que abordar el concepto desde distintas perspectivas y que hay que admitir las interpretaciones incompletas que, en el proceso de aprehensión de los conceptos, puedan hacer los alumnos.

El contenido

Primer Curso

Los temas que se abordan en este libro los agrupan los autores en tres bloques: número real, funciones y azar; además, hay un fascículo en el que aparece el Apéndice I dedicado a ecuaciones, inecuaciones y programación lineal, y un Apéndice II dedicado a los números complejos.

1. Número real

En una primera parte, Introducción, se presenta un plano de la ciudad de Valencia dibujado en papel milimetrado, y sobre el que se piden respuestas numéricas a cuestiones relacionadas con la medida. Se persigue, entre otros objetivos, que los alumnos hagan una reflexión sobre el uso de expresiones decimales aproximadas de los números $\sqrt{2}$ y π, así como sobre la imprecisión de la medida.

La segunda parte se dedica a refrescar nociones conocidas sobre los números racionales incidiendo en la idea de equivalencia de fracciones y en la conexión entre las notaciones fraccionaria y decimal; concluyendo con una presentación de los números irracionales partiendo de la escritura de expresiones decimales infinitas y no periódicas, dejando la prueba de la irracional de $\sqrt{2}$ a criterio del profesor.

Finalmente, se presentan los números reales, tercera parte, como la unión de los números racionales e irracionales. De esta manera ante el alumno aparece el número real fuertemente vinculado a la medida de magnitudes continuas y a simbolización del resultado de la medida con expresiones decimales, dejando al margen toda referencia a las estructuras algebraicas, así como las técnicas operatorias con radicales. Ahora bien, al focalizar esta presentación en la medida se obstaculiza la aparición de los números negativos, y de hecho los autores soslayan las referencias tanto a su origen como a su significado; simplemente se limitan a utilizarlos como entes supuestamente conocidos por los alumnos.

La última parte del tema, Estimación, se justifica por la necesidad de resolver problemas reales de medida en los que hay que trabajar con números decimales, con expresiones decimales con un número finito de cifras. Por ello se abordan cuestiones referidas a las técnicas de redondeo y a las cotas de error.

2. Funciones

Comienza con ejemplos y ejercicios introductorios cuyo objetivo es el de presentar correspondencias entre conjuntos numéricos en forma gráfica, como tablas de datos o expresadas mediante relaciones simbólicas con fórmulas matemáticas. Se utilizan problemas enunciados en contextos que corresponden a distintas disciplinas, como medicina, economía, física, etc.

Después aparecen las funciones reales de variable real como casos particulares de las correspondencias entre conjuntos numéricos; se presentan mediante propuestas de interpretación de gráficas y de representaciones gráficas de fenómenos de naturaleza variada. Las funciones que aparecen, sin que se haga mención alguna, son continuas o con discontinuidades de salto finito.

La incapacidad de las funciones estudiadas para resolver la relación entre presión y volumen obliga a introducir la función de proporcionalidad inversa…

A partir del ejemplo del crecimiento de las bacterias de una colonia, se presentan las progresiones geométricas…

Una vez presentadas las ideas generales sobre las funciones, los autores inician el estudio de casos particulares, profundizando en el estudio de diversos tipos de funciones:

Las funciones cuya gráfica es una recta, focalizando el estudio en los conceptos de pendiente y ordenada en el origen.

Las sucesiones aritméticas como caso particular de las funciones cuyo dominio es el conjunto de los números naturales.

Funciones cuya gráfica no es una recta, funciones polinómicas, que se presentan como funciones adecuadas para ajustar las gráficas que proceden de representar fenómenos reales; en este estudio se realiza una revisión de las técnicas operatorias con polinomios y se hace un análisis pormenorizado de la función polinómica de segundo grado.

La incapacidad de las funciones estudiadas para resolver la relación entre presión y volumen obliga a introducir la función de proporcionalidad inversa; de forma similar, al estudiar la división celular mediante el número de bacterias en el transcurso del tiempo lleva al estudio de la función exponencial.

A partir del ejemplo del crecimiento de las bacterias de una colonia, se presentan las progresiones geométricas como funciones cuyo dominio es el conjunto de los números naturales, y como sucesiones que tienen características de las progresiones aritméticas previamente estudiadas.

El bloque termina con el estudio de las funciones circulares, aunque su posición en el libro parece indicar que su importancia curricular es secundaria. Estas funciones se introducen con un análisis de la catástrofe del barco «Urquiola», análisis centrado en los problemas que surgen al fijar la posición de un barco sobre una carta marina.

Hay aspectos de este bloque, como puede ser la presencia de las progresiones aritméticas y geométricas, que podrian cuestionar la coherencia del mismo; pero hay otros aspectos, como la presentación de las funciones y la variedad y calidad de los problemas que, en su momento, resultaron de gran interés y utilidad, y que han ejercido una notable influencia en los libros de texto posteriores.

3. El azar

Los ejemplos introductorios sirven para que el alumno se aproxime a las ideas que se trabajan en este bloque, y para que el profesor conozca el grado de conocimiento de sus alumnos sobre la utilización correcta de la conjunción y disyunción inclusiva, el cálculo de porcentajes y el empleo de diagramas de árbol.

El tema de la probabilidad se presenta con el estudio de sucesos elementales asociados a los juegos de azar; posteriormente, el trabajo con tablas de contingencia y diagramas de árbol permite presentar la probabilidad condicionada y la resolución de problemas de naturaleza muy variada.

La combinatoria se introduce para simplificar el cálculo de probabilidades, justificándose por la economía de trabajo que supone obtener con rapidez el número de grupos que cumplen determinada característica.

El bloque termina con el estudio de las variables aleatorias, de las funciones de frecuencia y de probabilidad, y de las medidas de centralización y dispersión, incluyendo un tratamiento elemental de la esperanza matemática y de las curvas de distribución.

Resulta de gran interés la aportación del Grupo Cero al vertebrar, desde planteamientos probabilísticos, la combinatoria y la estadística; además, hay que reconocer el planteamiento novedoso de introducir las funciones de frecuencia y de probabilidad en el estudio de las medidas de centralización y dispersión.

Apéndices

En un fascículo anexo al libro aparecen dos temas: en el Apéndice I se abordan las ecuaciones, inecuaciones y sistemas, y en el Apéndice II se abordan los números complejos.

El hecho de que aparezcan estos dos temas al margen de los restantes induce a interpretar el sentir de los autores de que se trata de temas de interés menor, bien sea porque prima el aspecto procedimental sobre el conceptual, en el caso del Apéndice I, o bien sea porque el contenido del tema no es pertinente en la formación matemática de los alumnos de bachillerato, Apéndice II. Es más, el tratamiento que se da a estos dos temas se corresponde con la presentación tradicional, no parece que corresponda a los mismos autores de los temas anteriores.

Segundo Curso

En este libro se presentan siete bloques temáticos, uno dedicado a la geometria vectorial y los seis restantes corresponden a distintos temas de análisis matemático.

1. Gráficas

Se comienza por recordar las tres principales formas de presentar una función: como tabla de valores, como una relación simbólica y como una gráfica. Seguidamente se muestran gráficas de funciones de distintos fenómenos para que las interpreten los alumnos. En la tercera parte de este bloque se proponen problemas que permiten estudiar gráficas de características diferenciadas: rectas, parábolas, cúbicas, cuárticas, en escalera, de proporcionalidad inversa y periódicas.

Resulta admirable el proceso de búsqueda y selección de los problemas que se enuncian en este bloque; ninguno de los distintos tipos de gráficas se presenta descontextualizado, siempre hay problemas, relacionados con disciplinas científicas de distinta naturaleza, que ilustren al alumno de las características de las gráficas que se quieren estudiar.

2. Derivadas

El estudio de la gráfica que representa la trayectoria de un móvil servirá para introducir el concepto de tasa de variación de una función en un intervalo. Partiendo de los ejemplos y problemas propuestos en el apartado anterior, se introducen las nociones de velocidad instantánea y pendiente, lo que permite alcanzar el concepto de función derivada y, posteriormente, el cálculo de derivadas. El bloque termina con el estudio del crecimiento y decrecimiento y el cálculo de máximos y mínimos.

> *…siempre hay una situación problemática que aproxima a la noción matemática que se pretende enseñar, y sólo después de resolverla hacen su aparición las definiciones y resultados expresados en el lenguaje formal.*

A lo largo del tema se observa el papel principal que, en el proceso de introducción de los conceptos matemáticos, los autores conceden a los problemas; en efecto, siempre hay una situación problemática que aproxima a la noción matemática que se pretende enseñar, y sólo después de resolverla hacen su aparición las definiciones y resultados expresados en el lenguaje formal.

3. Estudio sistemático de las gráficas

La evidencia de que las representaciones gráficas a partir de tablas de datos resultan laboriosas, justifica la conveniencia de hacer un estudio sistemático de los aspectos que más influyen en la representación de funciones: intersección con los ejes coordenados, asíntotas verticales, comportamiento de la función para valores de x alejados de cero, dominio e imagen, simetrías y crecimiento y decrecimiento.

Es de destacar el esfuerzo de los autores por anticipar los conceptos a las técnicas, así, por ejemplo, los alumnos tienen que dibujar figuras simétricas respecto a alguno de los ejes, determinar por dónde hay que doblar una gráfica para que la mitad de una curva coincida con la otra mitad, calcular los valores de la función para pares de valores de la variable simétricos y, finalmente, caracterizar las funciones simétricas.

4. Vectores

Las trayectorias de objetos situados en la pantalla del radar o en en un mapa permiten introducir la idea de representar los desplazamientos mediante flechas orientadas. El mismo ejemplo les permite introducir la idea de traslación, noción que refuerzan con el estudio de los motivos que, mediante traslaciones, generan azulejos y otros motivos arquitectónicos; después se incide más en este aspecto dedicando una lección al estudio de los mosaicos y a las redes cristalinas. Los vectores aparecen haciendo abstracción de las características comunes a todas las situaciones en las que se utilizaban flechas, se presentan como el conjunto de todas las flechas equivalentes a una dada. Las relaciones y operaciones con vectores se justifican desde la resolución de problemas sobre velocidades y fuerzas.

En el bloque se incluye un estudio formalizado de los espacios vectoriales y de la geometría descriptiva. La presumible aridez de estos temas queda suavizada por la habilidad de los autores de situar los vectores sobre figuras geométricas, lo que permite al alumno hacer abstracciones desde la visualización sobre objetos familiares.

5. Sucesiones y límites

Ejemplos sobre la reproducción de algas o los resultados del lanzamiento de una moneda sirven para introducir la idea de sucesión de números reales. Un completo trabajo con problemas de naturaleza muy variada, permiten alcanzar la definición de límite de sucesiones de números reales y profundizar en su significado desde una perspectiva más formal.

Frente a la práctica habitual de primar el estudio de las técnicas de cálculo de límites, en la propuesta del Grupo Cero se observa una clara intencionalidad por centrar el trabajo en los conceptos de sucesión y límite de una sucesión, así como en destacar la presencia y utilidad de estas nociones en aspectos de la vida real.

6. Las funciones exponencial y logarítmica

Como consecuencia del estudio de la reproducción celular surge la idea de función exponencial, así como el estudio de sus propiedades. La función logarítmica surge, en el mismo ejemplo, al estudiar el significado y propiedades de la función inversa de la exponencial.

Los ejercicios de consolidación destacan por la temática que abordan, como la desintegración nuclear, la ley de Malthus o la velocidad de una reacción química; constituyen una clara muestra de las intenciones del Grupo Cero de potenciar el tratamiento interdisciplinar de la matemática.

7. Integrales

Los problemas del cálculo de áreas limitadas por gráficas de funciones constituye el núcleo introductorio de este bloque, y la suma de las áreas de rectángulos de igual base permite introducir una estimación del área buscada. La integral definida se obtiene con el paso al límite de las sumas de las áreas, finalizando el bloque con el teorema fundamental del cálculo integral.

Este bloque puede considerarse como un ejemplo del quehacer educativo del Grupo Cero, de cómo se pueden acercar los alumnos a temas complejos buscando la respuesta a situaciones problemáticas conocidas y de cómo se puede lograr una primera toma de contacto con un tópico matemático sin necesidad de agotarlo.

Influyeron notablemente en un cambio de actitud del profesorado de matemáticas…

A modo de síntesis

Con la edición de éstos, y de otros libros, el Grupo Cero puso a disposición de los profesores y alumnos de bachillerato el material, que consideraron más adecuado, para que se produjesen cambios sustanciales en los métodos y fines de la educación matemática de la época. Influyeron notablemente en un cambio de actitud del profesorado de matemáticas, que se tradujo en una nueva práctica educativa caracterizada por valorar la iniciativa de los alumnos, por fomentar el trabajo cooperativo, por integrar la teoría y la práctica y por potenciar la interdisciplinariedad.

Ahora bien, si hubiese que destacar algún aspecto de las aportaciones del Grupo Cero a la educación matemáticas, ese sería, sin duda, el de haber impulsado en España la corriente denominada Resolución de Problemas. Los dos libros que hemos comentado son una buena muestra del interés y viabilidad de situar la resolución de problemas en el centro de la actividad matemática; en ellos se puede observar cómo usar los problemas en la construcción del conocimiento matemático y cómo utilizarlos para evidenciar la utilidad de las matemáticas en la vida real.

Jose María Gairín

GEUP. UN PROGRAMA DE GEOMETRÍA INTERACTIVO
Ramón Álvarez Galván
Descargas: http://www.geup.net
Dirección electrónica del autor: rag@geup.net

GEUP es fundamentalmente un programa para aprender y hacer Geometría a través de las posibilidades que nos ofrece el ordenador, de manera interactiva y visual. Básicamente permite la realización de construcciones geométricas que cumplirán con los postulados de la Geometría Euclídea Plana (dentro de los límites impuestos por la precisión limitada del cálculo en coma flotante, presente en todos los programas de Geometría dinámica actuales).

Su característica fundamental es que los elementos que se crean en un proceso constructivo pueden depender de otros elementos previamente creados, estableciéndose entre ellos relaciones matemáticas que conseguimos a través de las distintas herramientas de construcción; además, algunos de los elementos pueden ser modificados después de ser construidos sin que varíen las relaciones de dependencia entre todos los elementos que componen la construcción: al modificar un elemento en concreto la construcción se reformará, manteniéndose estas relaciones. De esta manera, con GEUP podemos estudiar gráficamente un problema general y

obtener dinámicamente muchos casos particulares (Geometría dinámica), pudiendo comprobar propiedades geométricas de manera precisa y descubrir nuevas propiedades a través de la exploración, experimentando interactiva y visualmente.

Además, la capacidad de poder definir elementos tales como medidas de longitud y distancia, de áreas, de ángulos y las coordenadas de puntos, ecuaciones de rectas y circunferencias respecto a un sistema de coordenadas, así como la posibilidad de definir funciones de los elementos numéricos (comportándose estas funciones como un elemento más en el proceso constructivo), pudiendo, además, representarlas en unos ejes de coordenadas, nos permite abordar aspectos de Geometría analítica así como estudiar funciones que se obtienen de construcciones geométricas.

Otras características de GEUP son:

- Su gran velocidad de cálculo nos permite reformar rápidamente la construcción, facilitando la visualización de propiedades.
- Representa lugares geométricos.
- Implementa las transformaciones geométricas simetría central y axial, traslación, giro, homotecia e inversión.
- Es una herramienta de gran utilidad en el estudio de la Trigonometría.
- Es posible definir cualquier número de sistemas de coordenadas simultáneamente.
- Trabaja con coordenadas rectangulares y polares.
- Utilizando la calculadora incorporada permite obtener funciones de medidas realizadas sobre la construcción y utilizar los valores de la función en cualquier proceso constructivo o como variable de una nueva función.
- Representa gráficamente funciones tanto en coordenadas rectangulares como polares (puede representar *n* funciones en cada sistema de ejes).
- Es posible abreviar el proceso de construcción utilizando macros.
- Es más que un programa de geometría: posee versatilidad para abordar problemas de distintas áreas de las matemáticas (destacando el análisis y el estudio de funciones) y también en otros campos, como por ejemplo, la simulación de mecanismos, la óptica geométrica, el dibujo y diseño gráfico, etc.
- En cualquier momento podemos modificar la apariencia de cualquier elemento de la construcción, cambiar su color y forma, así como añadirle una etiqueta o nombre, o incluir textos.
- Capacidad de impresión de cualquier parte de la construcción.
- El programa es totalmente configurable, incluyendo soporte multilenguaje.

Todo esto junto con su facilidad de uso lo convierten en una herramienta versátil y muy útil en la enseñanza y práctica de las Matemáticas a cualquier nivel.

GEUP se ha diseñado con la idea de que sea un programa en continua evolución, intentando ampliar su funcionalidad hasta donde sea posible; en esta primera versión se han implementado las funciones básicas para empezar a trabajar; con el uso de este programa no sólo se obtiene una poderosa herramienta para el aprendizaje y la creación en Matemáticas, también se contribuye al desarrollo de futuras versiones.

Luis Balbuena

CD del Año Mundial de las Matemáticas

La página web del Comité Español para el Año Mundial de las Matemáticas CEAMM2000 <http:// dulcinea. uc3m. es/ceamm/> fue recogiendo las actividades más importantes que se celebraron durante ese año, así como enlaces a las páginas de los Comités Locales y a otros sitios de interés. Ofreció todos los documentos relacionados con el AMM2000, desde las declaraciones de la UNESCO y la IMU anunciando el evento, los apoyos parlamentarios habidos en el Congreso, Senado y en las distintas CC.AA, hasta el acta de cierre y las conclusiones más importantes que la comunidad matemática española ha sacado de este AMM2000. Además de este aspecto testimonial, casi ya histórico, la web del CEAMM2000 es una importante fuente de ideas y recursos –listados de vídeos, de películas, de fotos, de exposiciones matemáticas…– cuya validez va más allá del año 2000. Por tanto, y dado que la página será cerrada en breve, el CEAMM2000 ha decidido volcarla en un CD, en el que se ha incluido también el contenido de la mayor parte de las páginas de los Comités Locales.

Hay al menos un ejemplar de este CDROM en todas las Sociedades, aunque se está estudiando la mejor manera de ponerlo a la venta para todas las personas que estén interesadas en guardar este recuerdo del año 2000.

María Jesús Luelmo

IDEAS DEL INFINITO
Investigación y Ciencia
Temas n.° 23
Prensa Científica, S.A.
Barcelona 2001
ISSN: 1135-5662
96 páginas

Dentro de la colección de números monográficos *Temas* que edita la revista *Investigación y Ciencia* (edición española de la revista *Scientific American*) el número 23 correspondiente al primer trimestre del 2001, está dedicado al estudio del tema del Infinito desde el punto de vista de las matemáticas, la lógica, la geometría y la pintura.

Aunque sea innecesario señalar el interés de todos y cada uno de los 16 artículos de los que consta este número monográfico, y como un breve comentario, me atrevo a señalar los siguientes:

El infinito matemático (Javier de Lorenzo) en el que se nos muestra al evolución desde el infinito potencial que aparece, por ejemplo, en los *Elementos* de Euclides al establecer que «hay más números primos que cualquier cantidad propuesta de números primos» hasta el infinito actual que aparece al admitir la existencia de los cardinales transfinitos como $\aleph_0$.

Thabit ibn Qurra y el infinito numérico (Tony Lévy) donde se nos presenta al matemático árabe Thabit ibn Qurra, fallecido en el 901, que admite que hay un infinito más grande que otro (en concreto el de los números pares y los enteros) con el cual refuta el argumento, hasta entonces aceptado, de que no hay un infinito más grande que otro derivado del principio de que el todo es necesariamente más grande que una parte.

El carácter paradójico del infinito (Jean-Paul Delahaye) en él se nos van presentado las diversas paradojas que van surgiendo al enfrentarse al estudio del infinito. La paradoja del Hotel de Hilbert, hotel que nunca se llena aunque esté lleno. La paradoja de la reflexividad por la que podemos poner en correspondencia los puntos de un segmento y los de una semirrecta infinita, que sirve a Cantor para poner en correspondencia los puntos de una superficie plana con los de una curva cualquiera. La paradoja de Russell sobre los conjuntos que no son miembros de sí mismo. La paradoja de Banach-Tarski en la que se demuestra que una esfera puede ser descompuesta en un número finito de piezas, las cuales por desplazamiento sin deformación, permiten recomponer dos esferas idénticas a la esfera de partida…

Eusebio Rodríguez

EULER. EL MAESTRO DE TODOS LOS MATEMÁTICOS
William Dunham
Ed. Nivola libros y ediciones S.L.
Madrid, 2000
ISBN: 84-9079-6-X
280 páginas

La siempre interersante colección *La matemática en sus personajes,* de editorial Nivola, dedica su sexto número a la vida y obra de una de los más impresionantes genios que ha dado la humanidad y no sólo el pensamiento matemático: Leonhard Euler. Sin lugar a dudas, se trata del matemático más prolífico de la historia que publicó más de 800 libros y trabajos, pero también uno de los más influyentes tanto entre sus contemporáneos como en las generaciones que le siguieron.

Para este título el autor elegido no es español, como en el resto de la serie, sino que se ha recurrido a una obra ya publicada en lengua inglesa por la Mathematical Association of America. De su autor, William Dunham ya han aparecido otras obras en castellano —*Viaje a través de los genios* y *El universo de las matemáticas*— que le acreditan como un gran divulgador. En el libro que nos ocupa demuestra su admiración por el genio suizo así como los grandes conocimientos que tiene sobre su obra.

No parece que la vida de Euler fuese muy excitante. Aunque pasó gran parte de su vida dentro de las cortes de Berlín y San Petesburgo, prefería la tranquilidad de su gabinete de trabajo dentro de su entorno familiar. Aparte de su impresionante inteligencia y memoria, su dominio de las técnicas algorítmicas y su tremenda capacidad de trabajo, quizá el aspecto humano más relevante de su larga y bastante apacible vida lo proporcione la entereza que mostró ante la desgracia de perder completamente la vista a la edad de 60, que no pudo frenar su ingente producción matemática que continuó a un ritmo imparable hasta su muerte cuando tenía 76 años.

W. Dunham no se detiene demasiado en contar las peripecias vitales de Euler: se despacha el relato de su vida en un corto capítulo al inicio del libro. El resto de la obra lo dedica a lo que realmente le interesa, su actividad matemática. A lo largo de ocho capítulos desgrana una selección de teoremas obtenidos por Euler en las diversas ramas de las matemáticas puras.

La estructura de los capítulos centrales del libro es similar: todos se dividen en tres apartados. En el primero, el *Prólogo*, se da una visión de lo que se conocía sobre el tema, al que Dunham dedica el capítulo, antes de Euler, dando pie a que hagan su aparición grandes predecesores y algunos de sus resultados. Así por ejemplo, en el capítulo 2, titulado *Euler y los logaritmos*, muestra cómo Napier y Briggs descubren los logaritmos y explica los complejos cálculos que se necesitaban para construir sus tablas; luego sigue describiendo los avances que aportan algunos de sus sucesores —Mercator, Gregory y Newton— que con la introducción de las series infinitas facilitarán notablemente la construcción de las tablas de logaritmos.

El segundo apartado, *Aparece Euler*, es el núcleo del capítulo en el que se examina con detalle alguno de los grandes resultados obtenidos por Euler. Este examen detallado ahonda en los métodos que empleó el suizo y muestra el gran desarrollo que hicieron posible sus hallazgos. Siguiendo con el segundo capítulo como ejemplo, en él, Dunham analiza la sistematización que Euler introdujo en la teoría de los logaritmos, sus avances en los desarrollos en serie de las funciones exponencial y logarítmica, así como sus aplicaciones a la confección, más simple, de las tablas de logaritmos y la obtención del diferencial de *ln x*. En la exposición de los métodos empleados por Euler, que trata de ser fiel al original, se puede constatar la ausencia de rigor en el sentido que le damos en la actualidad lo que no impide, sino todo lo contrario, que obtuviese resultados correctos y de gran calado.

En la parte final de cada capítulo, el *Epílogo*, el autor elige una de dos opciones (a veces ambas): mostrar las consecuencias y desarrollos que Euler hizo a partir de los resultados que se han comentado, o describir cómo otros matemáticos desarrollaron las ideas de Euler. Finalizando con el capítulo 2, en su epílogo se relata cómo Euler encontró una relación entre los logaritmos y la serie armónica y cómo en el camino descubrió la llamada constante de Euler.

El autor afirma que las matemáticas precisas para leer el texto son elementales y que se sitúan al nivel de las de bachillerato. Creo que sería deseable que los alumnos de bachillerato estuviesen en condiciones de leer textos como el presente, aunque dudo que la mayoría lo puedan hace con comodidad. Probablemente, las culpas no haya que echárselas a la dificultad de los razonamientos o métodos empleados por Dunham sino a las deficiencias de nuestro sistema educativo que no hace posible que una parte importante de los alumnos del bachiller se sientan cómodos con este tipo de textos.

Dunham se responsabiliza de la selección de los temas a los que dedica los capítulos del libro asumiendo lo que tienen de elección personal. Con ella se abarcan muchas de las ramas de la matemática pura en las que Euler dejó su huella: la teoría de números, el análisis, el álgebra, la geometría, la combinatoria, la teoría analítica de números, la variable compleja… Dice que otros cincuenta autores que hubieran seguido las mismas premisas que él a la hora de escribir sobre Euler probablemente hubieran hecho otros cincuenta libros distintos y que a él le hubiera interesado leerlos todos. Desde luego que si esos hipotéticos autores hubieran acertado de manera tan rotunda como ocurre con este libro, no cabe duda de que se trataría de obras muy apetecibles y de cuya lectura se podría difrutar tanto como yo lo he hecho con ésta.

Además de la calidad de la obra hay que alabar también la de la edición que hace agradable la lectura y la facilita con las anotaciones y comentarios introducidos por Antonio Pérez.

Julio Sancho

INICIACIÓN A LA INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA. HOMENAJE AL PROFESOR MAURICIO RICO

Pedro Gómez y Luis Rico (eds.)
Universidad de Granada
Granada, 2001
ISBN: 84-338-2752-9
371 páginas

Dentró del programa Alfa de la U.E., el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada promovió el proyecto «Formación de investigadores en educación matemática para América Latina» (FIEMAL). En una fase del desarrollo del proyecto becarios de los distintos países involucrados realizaron estudios de doctorado fuera de su país de origen, Entre ellos, el profesor colombiano Mauricio Castro se incorporó a la Universidad de Granada el curso 1998-99. Cuando iba a volver de Bogotá tras las vacaciones murió asesinado, víctima inocente de una acción violenta. Como homenaje a Maurico Castro, se acordó realizar una publicación que recogiera trabajos realizados por profesores y alumnos de la red FIEMAL.

El resultado es este libro que contiene 25 artículos sobre la investigación en didáctica de las matemáticas agrupados en tres apartados: reflexiones institucionales y estudios comparados, herramientas y momentos relevantes y estudios concretos.

Julio Sancho

SUMA 38
noviembre 2001

XII Olimpiada Nacional, X JAEM

XII Olimpiada Matemática Nacional

Los comienzos

La historia de esta Olimpiada comienza cuando Claudia Lázaro, Tesorera de la FESPM y Secretaria de la SMPC, en una de las Juntas de la Federación del año 2000 ofreció la posibilidad de que nuestra Sociedad la organizara. Previamente lo habíamos hablado varias veces y pensamos que ya era hora de que nuestra Sociedad aportara alguna colaboración a la Federación, después de cinco años de pertenecer a ella.

En junio de 2000 Claudia, María José Madrazo, Ángel García y yo nos reunimos para empezar a planificar la Olimpiada. Claudia nos traía el primer borrador de proyecto que sirvió como punto de partida para empezar a trabajar. Ella siempre nos ha servido de punto de referencia pues ha sido la persona que ha asistido a las cuatro Olimpiadas Nacionales anteriores acompañando a nuestros participantes.

Colaboraciones

Una de las primeras cosas que fijamos en esa reunión fue determinar los posibles patrocinadores o colaboradores. Concretamente la sede de la Olimpiada, parecía la más adecuada, el Centro de Programas Educativos de Viérnoles, para lo que la colaboración de la Consejería de Educación era fundamental. Este lugar permite tener un contacto más directo con la naturaleza y disponer de instalaciones adecuadas para actividades propias de la olimpiada, facilitando así cubrir uno de los objetivos primordiales como es el de potenciar la convivencia entre todos. Nos alojaron en tres pabellones de los muchos que tiene el centro, dos del CRIE (Centro Rural de Innovación Educativa) y uno del CEAM (Centro de Educación Ambiental).

CRÓNICAS

Claudia también nos informó de que había llevado el proyecto a la Federación de Municipios y que algunos alcaldes se habían mostrado interesados en colaborar. Concretamente los de los Ayuntamientos de Santander, Torrelavega, Castro Urdiales, Los Corrales de Buelna y San Vicente de la Barquera. También pensamos pedir la colaboración de la Consejería de Cultura para poder realizar algunas exposiciones traídas de otras sociedades. Como es sabido, el Consejero de Cultura, José Antonio Cagigas, es profesor de Matemáticas y socio, lo que supone su sensibilización hacia la actividad. Y cómo no, pensamos también en las entidades financieras, Caja Cantabria y La Caixa.

Después de la ardua tarea de solicitar las diversas colaboraciones podemos decir que los patrocinadores de esta Olimpiada han sido la Consejería de Educación y Juventud, que nos ha proporcionado el alojamiento y manutención y ayuda económica y la Consejería de Cultura y Deporte que nos ha proporcionado las salas de exposiciones y los gastos de transportes y seguros de las mismas y ayuda económica. Ambas instituciones del Gobierno de Cantabria han sido sensibles a nuestras peticiones y además de las ayudas expresadas han acudido a los diversos actos públicos de la Olimpiada.

Los ayuntamientos citados también han colaborado significativamente en las actividades de la Olimpiada, aunque la ofrecida por el de Castro Urdiales no ha sido posible por incompatibilidad de fechas.

Otras instituciones y entidades han colaborado como: la Universidad de Cantabria, CPR de Viérnoles, CPR de Santander, ONO, ZOOM, RJB, IES M. Gutiérrez Aragón, IES Santa Clara, IES Ricardo Bernardo, IES Alberto Pico, IES La Albericia, Librería Estudio, Editorial SM, Anaya, Nivola y Santillana, La Caixa y Caja Cantabria.

No puedo dejar de nombrar a Enrique Carpintero. Para los participantes en la Olimpiada es desconocido, pero para los organizadores ha sido fundamental. Él ha diseñado y ejecutado el cartel anunciador y el folleto informativo de la Olimpiada. La idea y diseño de la banda o cinta de Möbius también fue idea suya. Es un artista, profesor de Diseño y Dibujo, asesor del CPR de Camargo. Gracias Enrique.

El acto de presentación a los medios de la XII Olimpiada Matemática Nacional tuvo lugar el pasado 10 de abril, en la Escuela Superior de Marina Civil y tuvimos el honor de contar no sólo con la presencia de la Consejera de Educación y Juventud del Gobierno de Cantabria, Sofía Juaristi, sino además con nuestro compañero de la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas Isaac Newton, Luis Balbuena.

Participantes y asistentes

Los participantes han sido estudiantes de segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria de las diferentes comunidades autónomas conforme al siguiente reparto fijado por la Federación Española:

Andalucía	6
Andorra	2
Asturias	3
Canarias	3
Cantabria	6
Castilla-La Mancha	3
Castilla-León	3
Cataluña	3
Galicia	3
Extremadura	3
La Rioja	3
Madrid	3
Marruecos (Colegios españoles)	2
Melilla	2
Murcia	3
Navarra	3
Valencia	3

En total participaron 54 estudiantes y 18 profesores acompañantes de los mismos. Hay que destacar como novedad respecto a años anteriores la participación de Melilla, los colegios españoles de Marruecos y la Comunidad de La Rioja a través de la Sociedad A Prima.

En esta ocasión hemos de constatar que los chicos (39) eran más del doble que el número de chicas (15). Cabe resaltar su colaboración para que se cumplieran los objetivos del programa y la buena convivencia entre ellos, facilitando que la olimpiada fuera un éxito.

Los dieciocho acompañantes y otros invitados mostraron en todo momento

un alto nivel de colaboración en todas las tareas, destacando siempre lo positivo y obviando los contratiempos o inconvenientes que pudieran encontrar. En este ambiente de amistad y comprensión nos resultó mucho más fácil y agradable asumir la responsabilidad organizativa.

Programa

Viernes, 22 de junio

Llegada de los participantes, acto de apertura en el salón de actos del IES Manuel Gutiérrez Aragón de Viérnoles con la asistencia del Director General de Educación, José Antonio del Barrio y el Secretario General de la FESPM, José Luis Álvarez.

En el propio acto de inauguración tuvo lugar la primera sesión matemática a cargo del grupo *Huellas de Paz* formado por los artistas colombianos Andrés Osorio y David Murillo titulada «Cuenta Cuentos Matemáticos». El mismo grupo desarrolló una sesión de Dinámica de Grupos que sirvió para empezar a conocerse y para formar los equipos de trabajo. Reparto de cámaras fotográficas a los grupos y a los profesores.

Sábado, 23 de junio

Salimos hacia Santander para realizar la prueba por equipos en la península de la Magdalena.

Conferencia de Carlos Suárez

A continuación, asistimos a la conferencia «Las matemáticas también tienen historia» impartida por Carlos Suárez de la SAEM Thales y visitamos la exposición «Filatelia Matemática», ambas actividades en la Escuela Superior de Marina Civil de la Universidad de Cantabria en Santander.

Más tarde salimos hacia el Parque de la Naturaleza de Cabárceno donde comimos y pudimos admirar, no sólo los animales que viven allí en semilibertad, sino su paisaje cárstico tan peculiar.

Por la tarde nos desplazamos a Torrelavega, donde visitamos la exposición «Instrumentos y Unidades de Medida Tradicionales de Extremadura» en la Casa de Cultura de Torrelavega.

Por la noche cenamos en el Monasterio de las Caldas de Besaya invitados por el Ayuntamiento de Los Corrales de

De excursión por los Picos de Europa…

…y de «guiris» en Cabárceno

Es obvio… los profesores

Buelna y terminamos la jornada en la verbena de la noche de San Juan en esta localidad cántabra.

Domingo, 24 de junio

Salimos temprano hacia Fuente Dé, donde subimos en el teleférico que acerca a los Picos de Europa. En un día en que lucía un sol espléndido recorrimos 15 kilómetros andando por los senderos de alta montaña realizando la comida en el refugio de Áliva. Bajamos hasta Espinama donde nos esperaba el autobús para que, antes de dejarnos en la residencia de Viérnoles, pudiéramos dar un paseo por Potes, pueblo muy típico de la región lebaniega. Al llegar a la residencia recogimos las cámaras fotográficas para poder tener listas las fotos al día siguiente. Los grupos terminaron de realizar las tareas que les propusimos en la prueba por equipos.

Lunes, 25 de junio

Durante la mañana se celebró la prueba individual en las aulas del IES Manuel Gutiérrez Aragón. Después nos desplazamos a San Vicente de la Barquera, pueblo costero de gran belleza paisajística, donde comimos invitado por su Ayuntamiento y donde pudimos visitar las exposiciones «Geometría Mudéjar en Aragón» y «Chistes Matemáticos» en el Castillo del Rey. Más tarde el autobús nos llevó a visitar la villa de Santillana del Mar que es monumento histórico artístico.

Por la noche, en la residencia de Viérnoles, después de la cena tuvimos la fiesta de despedida. En ella pudimos escuchar un recital de rabel, instrumento típico de Cantabria, ofrecido por nuestro compañero de Reinosa, Tomás Macho. Como sorpresa y fuera de programa, Albert Violant, profesor acompañante de los participantes catalanes dio un pequeño concierto de violín acompañado de explicaciones sobre la relación entre la música y las Matemáticas.

Las fotografías se expusieron para que los participantes pudieran aportar los títulos de las mismas. El fin de fiesta lo organizaron Esther López, profesora de Castilla la Mancha, Miguel Ángel Heredia, profesor de Melilla y Alejandro González, profesor de Madrid, con globos, refrescos y música para bailar.

Martes, 26 de junio

Esta día nos permitimos no madrugar, pues el ritmo que llevábamos era bastante agotador. A las diez tuvimos la conferencia de nuestro compañero José Antonio Cordón, profesor de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Cantabria, titulada «Una de números (¿numerales?)» en el salón de actos del IES Manuel Gutiérrez Aragón de Viérnoles, donde a continuación se celebró el acto de clausura y la entrega de premios. Todos esperaban ansiosos este momento que resultó emotivo, entrañable y triste a la vez, por cuanto suponía la despedida de la Olimpiada. La mesa del acto la formaron la Presidenta de la FESPM, María Jesús Luelmo, la Jefe de Servicio de Programas e Innovación Educativa de la Consejería de Educación y Juventud del Gobierno de Cantabria, Carmen López-Rendo y el Director del IES Manuel Gutiérrez Aragón, Joaquín Barber.

Después de los discursos de los componentes de la mesa salió de forma espontánea uno de los alumnos participantes, Amadeo Jiménez, que también había

Acto de clausura

preparado un discurso de despedida y que gustó mucho a todos.

Después de comer salieron los primeros grupos y los últimos lo hicieron el miércoles 27 por la mañana.

Pruebas

Siguiendo con la tradición, no podían faltar la clásica prueba individual, el concurso de fotográfica matemática y la prueba por equipos.

La *prueba individual* constaba de cinco problemas seleccionados por un equipo de cinco profesores, con la finalidad de conseguir enunciados adecuados a los participantes.

Se propuso un problema geométrico, otro de estrategia, otro numérico, otro de tanteo y otro de azar, con la intención de abarcar distintos ámbitos de las matemáticas y procurando un enunciado asequible a la mayoría de los alumnos. Nuestro deseo era facilitar que todos los participantes con sus peculiares habilidades pudieran resolver algún problema, pero manteniendo el nivel necesario para este tipo de pruebas.

Como ya es habitual, la prueba por equipos se realizó al aire libre, esta vez en la Península de la Magdalena con su Palacio. Se les repartió a cada equipo una carpeta con un mapa de la península, donde se señalaban unos ejes coordenados, unas hojas informativas de la historia del Palacio y de los distintos tipos de hojas de los árboles de la península.

Se trataba de seguir un recorrido dando las coordenadas de los distintos lugares, hacer algunas medidas, recoger algunas hojas de árboles, hacer algún dibujo y contestar a unas preguntas sobre la historia del palacio. No había que completar los trabajos en el momento, sino hacerlo el domingo por la noche en la residencia.

En el próximo número de SUMA aparecerán publicadas las pruebas planteadas, tanto la indicidual como la de equipos.

El concurso de fotografía matemática, como ya viene siendo habitual, consistió en la entrega a cada equipo de una cámara fotográfica de un solo uso para que captaran, en los distintos ámbitos y espacios visitados, imágenes con algún sentido o referencia matemática. Lugares y oportunidades no faltaron, y así quedó reflejado en la variedad y belleza de las fotografías presentadas.

Prueba individual

Prueba por equipos

Exposición de los trabajos realizados en la prueba fotográfica

Premios y regalos

De todos es sabido que el hecho mismo de haber podido acudir a la Olimpiada es un premio digno de mención. Pero además de esa satisfacción de haber sido elegido para asistir a este evento, se les obsequió a todos participantes y profesores acompañantes con diferentes regalos.

En la recepción del día 22 se le entregó a cada participante una camiseta con el logo de la Olimpiada junto con el programa detallado de la Olimpiada y una carpeta turística de Cantabria. La noche del lunes 25, después del concierto de rabel se repartieron regalos a todos los participantes y a sus profesores acompañantes: carpetas, libros de Cantabria, plumas, libros de juegos matemáticos y de lectura, y vídeos de Cantabria. A los profesores participantes y a los colaboradores se les hizo entrega de la banda de Möbius. Por su parte, de todas las comunidades hemos recibido regalos de todo tipo, carteles, carpetas, camisetas, revistas, pins, juegos matemáticos, etc. Gracias a todos ellos.

Posteriormente, se ha enviado a todos los participantes una copia de la orla que se ha elaborado con la foto de cada uno de ellos.

A los ganadores del concurso de fotografía matemática se les obsequió con un lote de libros. A los de la prueba por equipos una calculadora científica y libros. A los cinco finalistas, una calculadora científica, un diccionario y libros y a los cinco ganadores de la prueba individual una calculadora gráfica programable y libros. En los premiados individuales, tanto en los cinco finalistas como en los cinco ganadores, no establecimos ningún orden, sus nombres figuran por orden alfabético.

A todos los participantes se les entregó un diploma en el acto de clausura, pero a los cinco ganadores de la prueba individual se les hizo un diploma especial en el que se plasmaba la hazaña conseguida.

Los premiados posan para *SUMA*

PREMIADOS EN LA XII OLIMPIADA MATEMÁTICA NACIONAL

Fotografía Matemática

Equipo «Patatas al cubo» formado por:

- Alejandro Alcalde (Murcia)
- Alexiares Bayo (La Rioja)
- Eneko Ezquerro (Navarra)
- Verónica Menéndez (Asturias)
- David Moral (Castilla-León)

Prueba por equipos

Equipo «Cuadrados» formado por:

- Víctor Albeza (C. Valenciana)
- Patxi Gómez (Andorra)
- Amadeo Jiménez (Madrid)
- Ana León (Canarias)
- M.ª Francisca Pérez (Extremadura)

Finalistas Prueba individual

- Miguel Aguilera (La Rioja)
- Antón Fente (Galicia)
- Hugo García (Cantabria)
- Ion Mendoza (Navarra)
- Alejandro Miñón (Canarias)

Ganadores Prueba individual

- Anas El Barkani (Marruecos)
- Diego González (Castilla-León)
- Francisco Jurado (Andalucía)
- Aznar León (La Rioja)
- Carlos Sánchez (Extremadura)

Exposiciones

Con el objetivo de popularizar las Matemáticas y también de hacer partícipes a todos los estudiantes de Cantabria del acontecimiento que ha supuesto en nuestra región la Olimpiada Nacional, hemos tenido abiertas simultáneamente seis exposiciones matemáticas durante los meses de mayo y junio.

«Filatelia Matemática» en el Centro Cultural La Rasilla de Los Corrales de Buelna y en la sala de exposiciones de Marina Civil; «Geometría Mudéjar en Aragón» en la sala de la ONCE y en el Castillo de San Vicente de la Barquera;

«Instrumentos y Unidades de Medida Tradicionales de Extremadura» en la Casa de Cultura de Torrelavega; «Grabados de Escher» en el CPR de Viérnoles; «Chistes Matemáticos» en el IES La Albericia y en el Castillo de San Vicente de la Barquera; y «Fotografía Matemática» en el IES Santa Clara.

En estas exposiciones quiero destacar la ayuda de José Antonio Cagigas, Consejero de Cultura y Deporte, de Pedro J. Martínez de la SAEM Thales, de Javier Gómez de la Universidad de Cantabria, de Ignacio Argumosa Concejal de Educación, Cultura y Festejos del Ayuntamiento de Los Corrales de Buelna, de Carlos Suárez de la SAEM Thales, de Alfred Mollá de la Sociedad de Educación Matemática Al-Kharizmi, de Pablo Flores de la SAEM Thales, de Evaristo González de la SAEM Thales, de Florencio Villarroya de la Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas Pedro Sánchez Ciruelo y de Cipriano Sánchez de la Sociedad Extremeña de Educación Matemática Ventura Reyes Prósper.

Evaluación

Nuestra Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria consta en estos momentos con 60 socios, es una de las menos numerosas de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, pero en la organización de esta Olimpiada hemos participado 25, esto es un 41,6%, todo un récord.

Pero tengo que decir también que sólo Cantabria no hubiera hecho nada sin la colaboración de los numerosos compañeros del resto de las sociedades de las que se compone la Federación.

Y hay que destacar a los protagonistas, a los estudiantes. A todos, a los de Andalucía, Andorra, Asturias, Canarias, Cantabria, Castilla La Mancha, Castilla León, Cataluña, Extremadura, Galicia, Madrid, Marruecos, Melilla, Murcia, Navarra, Rioja y Valencia. Todas las fases previas, sus preparaciones, su entusiasmo, su afición a las Matemáticas.

Si hablamos de las diferentes tareas que hemos desempeñado a lo largo de este curso para llegar a culminar en la Olimpiada hay que recordar, reuniones, gestiones, visitas, montajes y desmontajes de exposiciones, guardias en algunas salas, transportes, preparación de pruebas, llamadas telefónicas, miles de correos electrónicos… Han sido horas de trabajo y esfuerzo sin detrimento de nuestro trabajo habitual...

Mudéjar aragonés:
una de las muchas exposiciones

Según la encuesta realizada a los alumnos y profesores, el último día de la Olimpiada, en la que podían responder de muy mal a muy bien (5 categorías en total) en diversos aspectos, la mayoría valoró bien la organización y las pruebas, las visitas desde regular a bien y muy bien, y las actividades y alojamiento de regular a bien.

Valoramos positivamente estos días de convivencia, de intercambio, de vivir las matemáticas de otra manera y ver como los participantes se entusiasmaban con sus pequeños y significativos logros matemáticos. Como en toda obra humana, a la que no somos ajenos, a buen seguro que algún error habremos cometido, de ahí que nuestro agradecimiento a todos los coordinadores y participantes, por su amable comprensión, sea mayor. Deseamos un futuro de éxito a las próximas olimpiadas, brindándoles a los futuros organizadores nuestro apoyo.

Como colofón de esta XII Olimpiada matemática quiero hacer llegar mi gratitud a todos los que han colaborado en la organización, de una u otra forma, haciendo posible con su ayuda el desarrollo y éxito de la misma. De todos ellos es el mérito.

Ángela Núñez Castaín

Coordinadora de la XII OMN

Web de la Olimpiada, donde se presentan todas las actividades y muchas fotografías:

http://platea.pntic.mec.es/~anunezca/Sociedad/Soci.htm

Preparando el material

Sin ellos no hubiesen salido adelante las JAEM…

…y sin Javier Pola, tampoco

X Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas

7, 8 y 9 de septiembre de 2001. Han pasado nueve meses desde que el 2000, Año Mundial de las Matemáticas, diese sus últimas campanadas pero los profesores de matemáticas seguimos tan activos como el año pasado.

Al menos eso es lo que hemos podido comprobar en estas Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas, las décimas de las que cada dos años convoca la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) y que cumplían con esta edición los 20 años de existencia, edición celebrada en Zaragoza y organizada conjuntamente por la Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo» y el Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Zaragoza.

Más de 700 profesores y profesoras de todas las comunidades cutónomas, junto a colegas de Portugal, Francia, Bélgica e Hispanoamérica hemos disfrutado de tres intensos días de conferencias, ponencias, comunicaciones y talleres con una idea común: la mejora de la enseñanza de las matemáticas, en todos sus niveles, desde la escuela infantil hasta la universidad.

Porque, en efecto, tres conferencias plenarias, 32 ponencias, 20 talleres y más de 60 comunicaciones han contribuido a que los profesores asistentes a las Jornadas retornen a sus aulas en este principio de curso con dos ideas claras:

- Las Matemáticas son una ciencia viva, presente en casi todas las manifestaciones de nuestra vida cotidiana: en la Naturaleza, en el Arte, en la Música, en los medios de comunicación, en la tecnología... ¡Y así hay que mostrarla a los alumnos!
- Existen otras formas de enseñar matemáticas. El centenar largo de actividades ha mostrado otras tantas

experiencias concretas desarrolladas por profesores en sus aulas. A través de ellas hemos podido comprobar que la enseñanza de las matemáticas no debe reducirse a contar fórmulas, algoritmos, técnicas y rutinas que poco o nada significan para los alumnos. Que utilizando nuevos recursos informáticos, audiovisuales, calculadoras gráficas... y otros no tan nuevos, materiales manipulables, el periódico, la historia de las matemáticas... se puede conseguir un aprendizaje más motivador, más atractivo para el alumno y sobre todo más eficaz.

La presidenta de la Federación presentando a Luis Balbuena

Diario de un asistente

Asistir a unas JAEM y no perderse ninguna ponencia, comunicación, exposición o actividad que nos interese es ¡imposible! Para minimizar las pérdidas hay que aplicar con celo todas las estrategias conocidas de resolución de problemas: seleccionar la información, elaborar un plan para poder estar en el máximo de actividades, hacer un esquema espacio temporal de la distribución de las mismas, calcular velocidades de los desplazamientos, distancias entre dos actos consecutivos, contemplar tiempos para saludar a los amigos y conocidos, paréntesis para ver materiales y exposiciones situadas fuera del recinto de la Universidad, tiempos para el café... y además estar en una excelente forma física para poder enfrentarse a los cambios de edificios y aulas con una rapidez endiablada. Aun trabajando en el problema con varios días de anticipación siempre habrá una comunicación interesantísima de la que nos tendremos que enterar al leer las actas.

La acogida tanto de los organizadores como de las autoridades municipales fue fabulosa. Los que llegamos el jueves 6 por la tarde tuvimos la ocasión de asistir al acto organizado en el Ayuntamiento para dar la bienvenida a los asistentes y disfrutar de las excelentes tapas de los bares más emblemáticos de Zaragoza.

Javier Pérez pronunciando su conferencia plenaria

Pilar Plaza recibe el II Premio Gonzalo Sánchez Vázquez

Francisco Martín
en su ponencia
de Geometría

Una de las
comunicaciones
en el Aula de
Informática

La conferencia
de José Garay,
dentro del
Programa
Cultural,
fue acompañada
por la Orquesta
Pentagruel

No viene mal hacer acopio de calorías para los tres días que nos esperan.

Viernes 7

El viernes y tras recoger la documentación a buena hora, el primer paseo para tonificar los músculos, los actos de la mañana se celebran en el moderno Auditorio.

Allí, asistimos al acto oficial de la inauguración y a las dos primeras conferencias plenarias.

El profesor Luis Balbuena nos puso ante los ojos unas profundas reflexiones sobre el papel del profesor de matemáticas en los albores del siglo XXI y sobre los retos de la educación matemática. En una época con serios problemas y en la que el desánimo parece hacer mella en muchos docentes hizo un canto a la esperanza de nuestra profesión y nos mostró todo un arsenal para combatir ese desánimo. Una de las mejores armas: la solidaridad.

Por problemas familiares de última hora no pudimos disfrutar de la conferencia del profesor Martin Kindt, que fue sustituido por el profesor Javier Pérez que nos deleitó con un recreativo viaje en la historia alrededor de un viejo amigo y conocido de todos, el número ≠. ¡Cuántas cosas nos sigue enseñando la Historia de las Matemáticas!

La mañana se cerró con la entrega del II Premio Gonzalo Sánchez Vázquez, que recayó en Pilar Plaza Queralt, profesora aragonesa que ha dedicado unos cuantos años de su vida en tareas educativas en Hispanoamérica. El relato de las circunstancias en que desarrolló su labor nos emocionó a todos y nos demostró que las matemáticas también pueden ser solidarias.

Y tras la comida, ¡empiezan las carreras! En dos horas 12 ponencias más 4 talleres que se realizan simultáneamente. En cada momento 8 actividades simultáneas. Difícil elección. ¿Cómo renunciar a alguno de los títulos tan atrayentes? Mientras no resolvamos el problema de la ubicuidad habrá que resignarse.

Las ponencias y comunicaciones se estructuran en torno a 8 núcleos temáticos que pocos huecos dejan en el panorama de la enseñanza de las matemáticas:

- La modelización como actividad matemáticas
- ¿Qué pasa con la demostración?
- Lenguaje visual y geometría
- Funciones: una confluencia de lenguajes
- Azar: la matemática de lo posible
- Números: significado y destrezas
- Álgebra: ¿cuándo? ¿cómo?
- Medida: de la regla a la trigonometría

Y en cada núcleo 4 ponencias y muchas más comunicaciones. Y para complicarlo, a mí, como a casi todos los asistentes nos interesan la mayoría de los temas.

Selecciono una ponencia y un taller y, dos horas más tarde, con la sensación de haberme perdido 14 actos de interés me encamino a las seis y media a una de las cuatro presentaciones simultáneas que tienen lugar a esa hora. Como soy un fan de Euler me inclino por la *Introductio in Analysin Infinitorum*, publicado por las SAEM Thales. Por cierto, que no se me olvide adquirir un ejemplar en el stand de la Thales, antes de volver a Madrid.

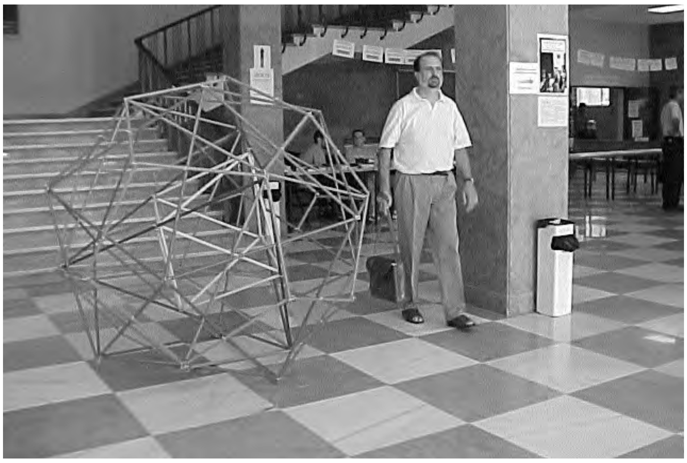
Al terminar hay que salir pitando al hotel para dejar la documentación, refrescarse un poco porque a las 8 no hay que perderse la inauguración de la exposición de la Sociedad Extremeña «Instrumentos y unidades de medida tradicionales en Extremadura» en el Paraninfo de la Universidad.

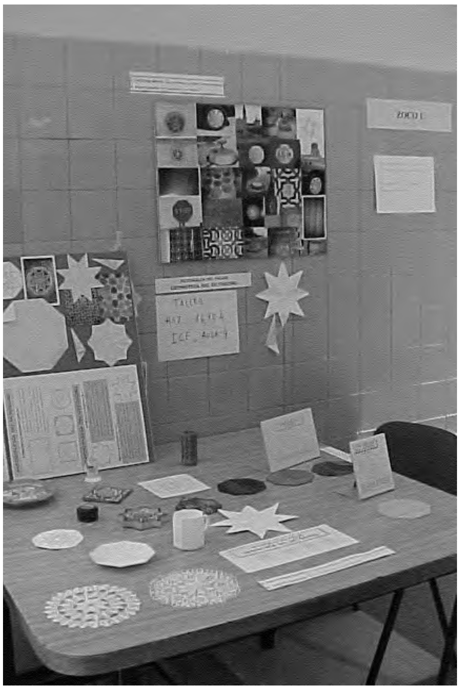
El taxi y el atasco, ¡cómo está el tráfico en Zaragoza!, han merecido la pena. La exposición es espectacular y a buen seguro que merece dedicarle más tiempo y disfrutarla con calma.

Sábado 8

Madrugón y desayuno rápido. A las 9 de

El omnipoliedro construido en el taller de José Antonio Mora se expuso en el hall de la Facultad de Ciencias

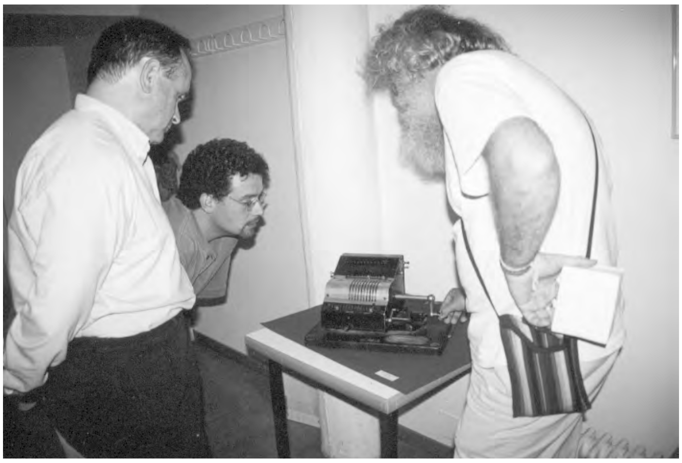




Zoco matemático

El stand de la Federación

Unidades e instrumentos de medida de Extremadura



Exposición de calculadoras.
¡¡Horacio!!: que no se podían tocar

Explicando «2 elevado a *n*»

la mañana comienzan las actividades y hoy a las 5 ponencias y los tres talleres se suma la videomaratón de vídeos matemáticos, que se extiende durante toda la jornada.

Entre 10 y 11 la elección es aún más complicada hay que elegir dos actividades entre 12 comunicaciones, dos talleres y los vídeos.

Se me está ocurriendo una estrategia: la asistencia a las JAEM hay que enfocarla no como trabajo individual sino como tarea de equipo, y de equipo de fútbol. ¡Con once jugadores y tres suplentes no se nos escaparía nada! Pero eso será para las próximas.

De 11 a 12 parece que se hace un poco de calma: sólo hay cinco ponencias, tres talleres y dos vídeos. Bueno, pues de cabeza a una de ellas. Por cierto, no he tenido tiempo de tomar un café y ya llevo tres viajes del ICE a la Facultad de Matemáticas.

A las 12 no lo dudo, no me puedo perder el homenaje a Felipe Mellizo, el entrañable pionero de los programas de divulgación matemática en televisión y un personaje muy próximo. Tendré que leerme las 11 comunicaciones que hay entre 12 y 1 en el libro de actas...

A la 1 las matemáticas salen de las matemáticas y se adentran en otros universos, empiezan las actividades del programa cultural; lo malo es que no sé que elegir: Matemáticas y Vanguardias artísticas, Matemáticas y Música, Matemáticas y Poesía o Matemáticas y Arquitectura. Para complicarlo a esa hora la presidenta de la Sociedad Boliviana de Educación Matemática, Begoña Grigoriu, habla sobre la educación matemática en su país.

Por la tarde, al menos de 4 y media a 5 y media la organización me ha liberado del trauma de elegir, y sin dudarlo me voy a mi ponencia. Creo que no me hubiesen perdonado si me meto en otra.

Pero hay que acabar pronto porque a las 5 y media en el programa cultural no me quiero perder el Paseo matemático por la Zaragoza mudéjar. Aunque ahora que miro el programa, coincide con otras dos actividades que había marcado como imprescindibles: la presencia de los números en la música, con orquesta incluida y Arte y nuevas tecnologías. ¡Elegir es renunciar!

A las seis y media termina el videomaratón. Pero no podemos irnos sin ver las diversas exposiciones que nos introducen las matemáticas por los sentidos:

- Máquinas de calcular. De la mano a la electrónica.
- Matemáticas 2000.
- 2 elevado a n
- Fotografía matemática.
- El mudéjar aragonés.
- Historia de las Matemáticas.
- Matemáticas y proporción.

Lo malo es que cuatro están en la facultad de Ciencias, una el ICE y las otras fuera del recinto de las Jornadas. Los paseos nos despejarán la mente.

Domingo 9

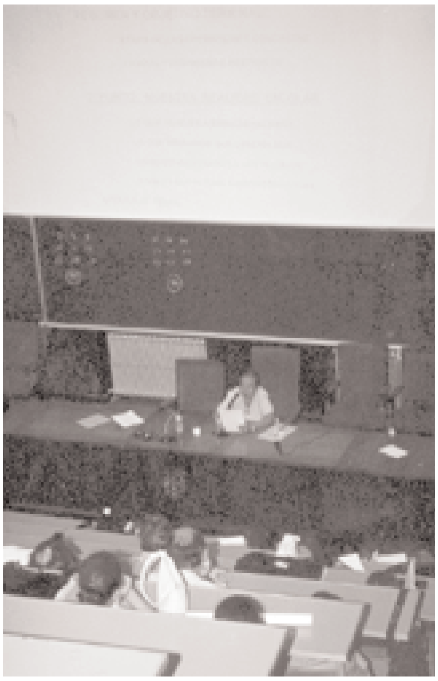
¡Qué bien se duerme después de un día sin parar! Lo malo es que hay que madrugar. A las 9 hay que estar en la Facultad de Ciencias.

Antes de las 10:30 he tenido que decidirme para seleccionar dos entre 20 comunicaciones y dos talleres. Por fortuna las marqué la noche anterior. Las cabezas empiezan a estar desbordadas ante tanta oferta.

En la hora siguiente, los organizadores han mostrado un poco de clemencia con nosotros y sólo nos han preparado 5 ponencias y un taller al mismo tiempo. Pero ya somos unos expertos en la toma de decisiones.

Estamos en la recta final y de 11:30 a 12:30, otra vez me ha quedado sin café, selecciono dos de las 14 comunicaciones que aparecen en el menú, dos de las más visuales.

Y, ya casi exhaustos, nos preparamos para el acto final, la conferencia de clausura a cargo de María Antonia



María Antonia Canals
en la conferencia de clausura

Flores
de la Federación
para
quienes hicieron
posible
la organización
de las X JAEM

El día de después
la Comisión
Organizadora
se relaja

Canals que con su tono coloquial pero profundo nos guía por el fascinante mundo de la aproximación y el aprendizaje de las matemáticas de los alumnos en las edades más tempranas.

El acto de clausura, emotivo y entrañable nos demostró algo que todos habíamos sospechado: detrás de una maquinaria compleja, y es complejo organizar unas jornadas para 700 personas, dando la apariencia de que todo fluye de manera natural como las aguas de un río, hay un equipo humano extenso en cantidad y sobre todo en calidad profesional y humana, imposible de enumerar aquí, que hizo posible el milagro de que todo funcionase como un reloj y de que a pesar del cansancio físico y mental, todos los asistentes nos despidiésemos deseando que los dos años que faltan para las siguientes JAEM que organizará la Sociedad Canaria Isaac Newton pasen volando. En representación de ese fabuloso equipo humano damos las gracias a Emilio Palacián, Jesús Antolín, José María Gairín, Ana Pola y Julio Sancho, cabezas visibles y pilares de la organización. Gracias a ellos y a las varias decenas de personas que colaboraron en la organización estos tres días serán imborrables.

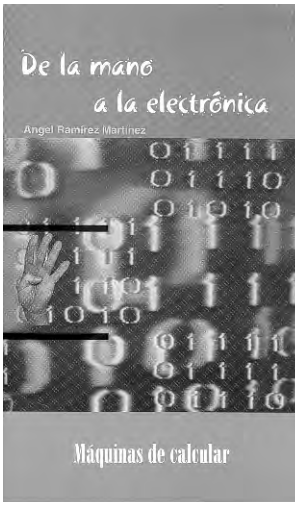
La televisión no estuvo ausente de las Jornadas. Precisamente para reafirmar esta relación estrecha entre Matemáticas y Televisión se desarrolló a lo largo de todo el día 8 una vídeo-maratón de temas matemáticos como homenaje al periodista Felipe Mellizo, vinculado a TVE durante muchos años, y autor de una preciosa serie de programas de divulgación matemática, realizada en los años ochenta, titulada ¿Un mundo feliz? *Como* ya ocurriera en Lugo, TVE cubrió informativamente las JAEM y emitió un reportaje sobre el tema el día 9 de octubre en «La Aventura del Saber».

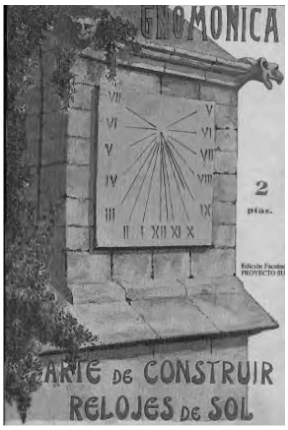
Tras tres agotadoras jornadas los participantes hemos vuelto a nuestros pueblos y ciudades con el ánimo reforzado para hacer frente a los problemas de un nuevo curso, con la convicción de que para mejorar la situación de la enseñanza de las matemáticas no basta con enumerar en un programa todas las cosas que los alumnos deberían saber, y sobre todo, convencidos de que el futuro de la educación matemática en nuestro país está en nuestras manos.

No volvimos con las manos vacías, en sus bolsas de viaje llevábamos materiales, recursos y sobre todo centenares de ideas para aplicar la semana siguiente con nuestros alumnos en colegios, escuelas, institutos y universidades de todo el país. Pero llevábamos un bien más valioso: el entusiasmo suficiente para seguir luchando día a día, a través de la enseñanza de las matemáticas, por el gran sueño de Felipe Mellizo: UN MUNDO FELIZ.

Antonio Pérez Sanz

Vocal de prensa de la FESPM





SUMA 38
noviembre 2001

VI Reunión de Didáctica del Cono Sur, RSEM 2002...

CONVOCATORIAS

VI REUNIÓN de Didáctica de las Matemáticas del Cono Sur

Se celebrará en Argentina del 22 al 27 de julio de 2002 organizada por la Sociedad Argentina de Educación Matemática y el Instituto Superior del Profesorado «Joaquín V. González». La Comisión Organizadora está presidida por la profesora Nelly E. Vázquez de Tapia.

Se desarrollarán actividades como conferencias plenarias, conferencias regulares, paneles, talleres, grupos de discusión, comunicaciones breves y posters, estando previstos, inicialmente los siguientes temas:

- Educación matemática e investigación en educación matemática.
- Enseñanza de la matemática en los distintos niveles desde inicial hasta universitario.
- Diseño curricular de matemática.
- La formación del docente en matemática. Educación continua.
- Didáctica de la matemática.
- Educación matemática a distancia.
- Educación matemática de adultos.
- Educación matemática de alumnos con dificultades de aprendizaje.
- Historia de la matemática.
- Etnomatemática.
- Aportes de la tecnología a la educación matemática.
- Tecnología: su enseñanza. Los trayectos técnico-profesionales.
- Desarrollo y uso del software educativo en la enseñanza de la matemática.
- Aportes de materiales y juegos didácticos a la educación matemática.
- Revalorización de la geometría.

- Probabilidad, estadística y combinatoria. Aplicaciones y modelos.
- Modelos y modelización matemática.
- Visualización. Grafos.
- El aula virtual.
- Otros.

Para más información dirigirse a:

Nelly Vázquez de Tapia
Echeverría 2019. Piso 10º «B»
1428 Buenos Aires (Argentina)
E-mail: nvtapia@giga.com.ar

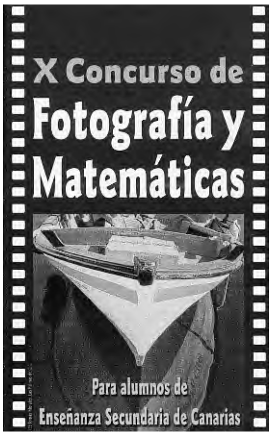
RSME 2002

La Real Sociedad Matemática Española anuncia la celebración del Congreso RSME 2002, que se desarrollará en Puerto de la Cruz (Tenerife) del 27 de enero al 1 de febrero de 2002, organizado por la propia RSME y la Universidad de La Laguna. Se celebrarán conferencias plenarias, minisymposia, sesiones de posters y mesas redondas. Están invitados como conferenciantes los profesores Charles Fefferman, Kristian Seip, Bosco García, Jesús Gonzalo, María Teresa Lozano, Gabor Lugosi, José M. Muñoz, Ricardo Pérez, Jordi Quer y Luis Vega.

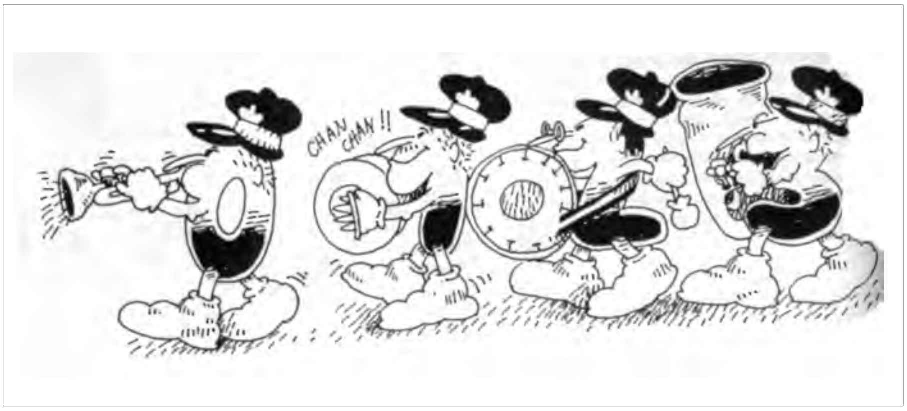
Más información en la página de Internet.

http://www.fmat.ull.es/rsme2002

X Concurso de Fotografía y Matemáticas



Coincidiendo con el Día Escolar de las Matemáticas, el Departamento de Matemáticas del IES Viera y Clavijo de la Laguna y la Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas ha convocado la décima edición de su ya tradicional concurso de Fotografía y Matemáticas, dirigido a alumnos de enseñanza secundaria de Canarias.



Exposición «Historia de las Matemáticas»

Esta muestra ha sido realizada en el Departamento de Matemáticas del IES Élaios de Zaragoza, con motivo del Año Mundial de las Matemáticas. Consta de 40 paneles en formato A2 que cubren un recorrido por las principales etapas en la historia de esta ciencia (Mesopotamia, Egipto, Grecia Clásica, Edad Media, Renacimiento, Siglos XVII-XVIII y SIglos XIX-XX), resaltando sus características generales y desarrollando semblanzas de los grandes matemáticos (su faceta humana, su obra científica, la vigencia de sus aportaciones, etc.). A la vez, en los paneles se propone un concurso de problemas relacionados con cada época o personaje a dos niveles (ESO y Bachillerato).

Esta exposición se presta gratuitamente a los centros educativos y culturales que lo soliciten, debiendo éstos abonar sólo los gastos de transporte. Para más información, dirigirse a:

Departamento de Matemáticas
IES Élaios
Andador Pilar Cuartero, n.° 3
50015 Zaragoza
Tf.: 976 527 500 y Fax: 976 525 968

FE DE ERRATAS N.° 37

En la sección Crónicas del n.° 37 de SUMA (página 140), aparece una errata en el enunciado del problema 2 de los propuestos en la XXXVII Olimpiada Matemática Española. En la tercera línea de dicho problema 2 debe poner $AP = BP$ en lugar de $AB = BP$.

La detección de este error se la debemos a Ricardo Barroso, a quien le agradecemos su comunicación.

NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, ICE de Universidad de Zaragoza, C./ Pedro Cerbuna 12, 50009 Zaragoza), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.
2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos en ningún caso serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.
3. Los gráficos, diagramas y figuras se enviarán en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. Así mismo, podrán incluirse fotografías. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.
4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de entre cinco y diez líneas, que no necesariamente tiene que coincidir con la Introducción al artículo. Debe ir escrito en hoja aparte. En ese mismo folio aparecerán los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede).
5. Si se usa procesador de texto, agradeceremos que además se envíe un disquette con el archivo de texto que contenga el artículo, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quiera incluir. La etiqueta del disquette debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda MS-Word (hasta versión 5.0) en Macintosh, o WordPerfect (hasta versión 5.1) en PC. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF.
6. En cualquier caso, tanto un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.
7. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.
8. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo.
9. La bibliografía se dispondrá al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:

   TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma,* n.° 20, 91-98.

   En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas,* Labor, Barcelona.

   En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2,* ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.
10. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: …supone un gran avance (Hernández, 1992).

    Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: …según Rico (1993).
11. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como —en caso afirmativo– la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

BOLETÍN DE SUSCRIPCIÓN

Tarifa

	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	21 €	10 €
Centros	30 €	10 €
Europa	38,5 €	13,5 €
América y resto del mundo	$50 USA	$17 USA

Fotocopiar y enviar a: Revista SUMA. ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Deseo suscribirme a la revista SUMA:
Nombre y apellidos:. . . . .
Dirección:. . . . . Tno.: . . . .
Población: . . . . CP: . . . .
Provincia/país . . . . CIF/NIF: . . . .

Importe

☐ Suscripción a partir del n.º______ (3 números)

☐ N.os sueltos:______________________________

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto).

☐ Transferencia bancaria (Ibercaja: 2085-0168-50-03-000415-98).

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista Suma. Firma y fecha:

☐ Giro postal dirigido a Revista Suma.

Nombre y apellidos: . . . .
Código Cuenta Cliente
Entidad ☐☐☐☐ Oficina ☐☐☐☐ DC ☐☐ Cuenta ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Banco/Caja . . . .
Agencia n.º: . . . . Dirección: . . . .
Población: . . . . Provincia: . . . .

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que periódicamente les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (Fecha y firma):

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

FESPM