

metría descriptiva. La presumible aridez de estos temas queda suavizada por la habilidad de los autores de situar los vectores sobre figuras geométricas, lo que permite al alumno hacer abstracciones desde la visualización sobre objetos familiares.

5. Sucesiones y límites

Ejemplos sobre la reproducción de algas o los resultados del lanzamiento de una moneda sirven para introducir la idea de sucesión de números reales. Un completo trabajo con problemas de naturaleza muy variada, permiten alcanzar la definición de límite de sucesiones de números reales y profundizar en su significado desde una perspectiva más formal.

Frente a la práctica habitual de primar el estudio de las técnicas de cálculo de límites, en la propuesta del Grupo Cero se observa una clara intencionalidad por centrar el trabajo en los conceptos de sucesión y límite de una sucesión, así como en destacar la presencia y utilidad de estas nociones en aspectos de la vida real.

6. Las funciones exponencial y logarítmica

Como consecuencia del estudio de la reproducción celular surge la idea de función exponencial, así como el estudio de sus propiedades. La función logarítmica surge, en el mismo ejemplo, al estudiar el significado y propiedades de la función inversa de la exponencial.

Los ejercicios de consolidación destacan por la temática que abordan, como la desintegración nuclear, la ley de Malthus o la velocidad de una reacción química; constituyen una clara muestra de las intenciones del Grupo Cero de potenciar el tratamiento interdisciplinar de la matemática.

7. Integrales

Los problemas del cálculo de áreas limitadas por gráficas de funciones constituye el núcleo introductorio de este bloque, y la suma de las áreas de rectángulos de igual base permite introducir una estimación del área buscada. La integral definida se obtiene con el paso al límite de las sumas de las áreas, finalizando el bloque con el teorema fundamental del cálculo integral.

Este bloque puede considerarse como un ejemplo del quehacer educativo del Grupo Cero, de cómo se pueden acercar los alumnos a temas complejos buscando la respu-

ta a situaciones problemáticas conocidas y de cómo se puede lograr una primera toma de contacto con un tópico matemático sin necesidad de agotarlo.

A modo de síntesis

Con la edición de éstos, y de otros libros, el Grupo Cero puso a disposición de los profesores y alumnos de bachillerato el material, que consideraron más adecuado, para que se produjesen cambios sustanciales en los métodos y fines de la educación matemática de la época. Influyeron notablemente en un cambio de actitud del profesorado de matemáticas, que se tradujo en una nueva práctica educativa caracterizada por valorar la iniciativa de los alumnos, por fomentar el trabajo cooperativo, por integrar la teoría y la práctica y por potenciar la interdisciplinariedad.

Ahora bien, si hubiese que destacar algún aspecto de las aportaciones del Grupo Cero a la educación matemáticas, ese sería, sin duda, el de haber impulsado en España la corriente denominada Resolución de Problemas. Los dos libros que hemos comentado son una buena muestra del interés y viabilidad de situar la resolución de problemas en el centro de la actividad matemática; en ellos se puede observar cómo usar los problemas en la construcción del conocimiento matemático y cómo utilizarlos para evidenciar la utilidad de las matemáticas en la vida real.

Jose María Gairín

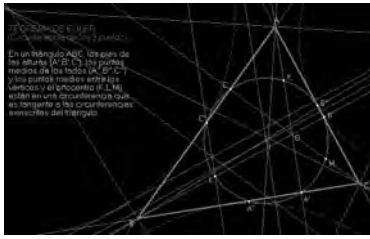
Influyeron notablemente en un cambio de actitud del profesorado de matemáticas...



GEUP. UN PROGRAMA DE GEOMETRÍA INTERACTIVO
Ramón Álvarez Galván
Descargas: <http://www.geup.net>
Dirección electrónica del autor: rag@geup.net

GEUP es fundamentalmente un programa para aprender y hacer Geometría a través de las posibilidades que nos ofrece el ordenador, de manera interactiva y visual. Básicamente permite la realización de construcciones geométricas que cumplirán con los postulados de la Geometría Euclídea Plana (dentro de los límites impuestos por la precisión limitada del cálculo en coma flotante, presente en todos los programas de Geometría dinámica actuales).

Su característica fundamental es que los elementos que se crean en un proceso constructivo pueden depender de otros elementos previamente creados, estableciéndose entre ellos relaciones matemáticas que conseguimos a través de las distintas herramientas de construcción; además, algunos de los elementos pueden ser modificados después de ser construidos sin que varíen las relaciones de dependencia entre todos los elementos que componen la construcción: al modificar un elemento en concreto la construcción se reformará, manteniéndose estas relaciones. De esta manera, con GEUP podemos estudiar gráficamente un problema general y



obtener dinámicamente muchos casos particulares (Geometría dinámica), pudiendo comprobar propiedades geométricas de manera precisa y descubrir nuevas propiedades a través de la exploración, experimentando interactiva y visualmente.

Además, la capacidad de poder definir elementos tales como medidas de longitud y distancia, de áreas, de ángulos y las coordenadas de puntos, ecuaciones de rectas y circunferencias respecto a un sistema de coordenadas, así como la posibilidad de definir funciones de los elementos numéricos (comportándose estas funciones como un elemento más en el proceso constructivo), pudiendo, además, representarlas en unos ejes de coordenadas, nos permite abordar aspectos de Geometría analítica así como estudiar funciones que se obtienen de construcciones geométricas.

Otras características de GEUP son:

- Su gran velocidad de cálculo nos permite reformar rápidamente la construcción, facilitando la visualización de propiedades.
- Representa lugares geométricos.
- Implementa las transformaciones geométricas simetría central y axial, traslación, giro, homotecia e inversión.
- Es una herramienta de gran utilidad en el estudio de la Trigonometría.
- Es posible definir cualquier número de sistemas de coordenadas simultáneamente.
- Trabaja con coordenadas rectangulares y polares.
- Utilizando la calculadora incorporada permite obtener funciones de medidas realizadas sobre la construcción y utilizar los valores de la función en cualquier proceso constructivo o como variable de una nueva función.
- Representa gráficamente funciones tanto en coordenadas rectangulares como polares (puede representar n funciones en cada sistema de ejes).
- Es posible abreviar el proceso de construcción utilizando macros.
- Es más que un programa de geometría: posee versatilidad para abordar problemas de distintas áreas de las matemáticas (destacando el análisis y el estudio de funciones) y también en otros campos, como por ejemplo, la simulación de mecanismos, la óptica geométrica, el dibujo y diseño gráfico, etc.
- En cualquier momento podemos modificar la apariencia de cualquier elemento de la construcción, cambiar su color y forma, así como añadirle una etiqueta o nombre, o incluir textos.
- Capacidad de impresión de cualquier parte de la construcción.
- El programa es totalmente configurable, incluyendo soporte multilingüaje.

Todo esto junto con su facilidad de uso lo convierten en una herramienta versátil y muy útil en la enseñanza y práctica de las Matemáticas a cualquier nivel.

GEUP se ha diseñado con la idea de que sea un programa en continua evolución, intentando ampliar su funcionalidad hasta donde sea posible; en esta primera versión se han implementado las funciones básicas para empezar a trabajar; con el uso de este programa no sólo se obtiene una poderosa herramienta para el aprendizaje y la creación en Matemáticas, también se contribuye al desarrollo de futuras versiones.

Luis Balbuena



CD del Año Mundial de las Matemáticas

La página web del Comité Español para el Año Mundial de las Matemáticas CEAMM2000 <<http://dulcinea.uc3m.es/ceamm/>> fue

recogiendo las actividades más importantes que se celebraron durante ese año, así como enlaces a las páginas de los Comités Locales y a otros sitios de interés. Ofreció todos los documentos relacionados con el AMM2000, desde las declaraciones de la UNESCO y la IMU anunciando el evento, los apoyos parlamentarios habidos en el Congreso, Senado y en las distintas CC.AA, hasta el acta de cierre y las conclusiones más importantes que la comunidad matemática española ha sacado de este AMM2000. Además de este aspecto testimonial, casi ya histórico, la web del CEAMM2000 es una importante fuente de ideas y recursos –listados de vídeos, de películas, de fotos, de exposiciones matemáticas...– cuya validez va más allá del año 2000. Por tanto, y dado que la página será cerrada en breve, el CEAMM2000 ha decidido volcarla en un CD, en el que se ha incluido también el contenido de la mayor parte de las páginas de los Comités Locales.

Hay al menos un ejemplar de este CDROM en todas las Sociedades, aunque se está estudiando la mejor manera de ponerlo a la venta para todas las personas que estén interesadas en guardar este recuerdo del año 2000.

María Jesús Luelmo

IDEAS DEL INFINITO
Investigación y Ciencia
Temas n.º 23
Prensa Científica, S.A.
Barcelona 2001
ISSN: 1135-5662
96 páginas



Dentro de la colección de números monográficos *Temas* que edita la revista *Investigación y Ciencia* (edición española de la revista *Scientific American*) el número 23 correspondiente al primer trimestre del 2001, está dedicado al estudio del tema del Infinito desde el punto de vista de las matemáticas, la lógica, la geometría y la pintura.

Aunque sea innecesario señalar el interés de todos y cada uno de los 16 artículos de los que consta este número monográfico, y como un breve comentario, me atrevo a señalar los siguientes:

El infinito matemático (Javier de Lorenzo) en el que se nos muestra al evolucionar desde el infinito potencial que aparece, por ejemplo, en los *Elementos* de Euclides al establecer que «hay más números primos que cualquier cantidad propuesta de números primos» hasta el infinito actual que aparece al admitir la existencia de los cardinales transfinitos como \aleph_0 .

Thabit ibn Qurra y el infinito numérico (Tony Lévy) donde se nos presenta al matemático árabe Thabit ibn Qurra, fallecido en el 901, que admite que hay un infinito más grande que otro (en concreto el de los números pares y los enteros) con el cual refuta el argumento, hasta entonces aceptado, de que no hay un infinito más grande que otro derivado del principio de que el todo es necesariamente más grande que una parte.

El carácter paradójico del infinito (Jean-Paul Delahaye) en él se nos van presentando las diversas paradojas que van surgiendo al enfrentarse al estudio del infinito. La paradoja del Hotel de Hilbert, hotel que nunca se llena aunque esté lleno. La paradoja de la reflexividad por la que podemos poner en correspondencia los puntos de un segmento y los de una semirrecta infinita, que sirve a Cantor para poner en correspondencia los puntos de una superficie plana con los de

una curva cualquiera. La paradoja de Russell sobre los conjuntos que no son miembros de sí mismo. La paradoja de Banach-Tarski en la que se demuestra que una esfera puede ser descompuesta en un número finito de piezas, las cuales por desplazamiento sin deformación, permiten recomponer dos esferas idénticas a la esfera de partida...

Eusebio Rodríguez



EULER. EL MAESTRO DE TODOS LOS MATEMÁTICOS
William Dunham
Ed. Nivola libros y ediciones S.L.
Madrid, 2000
ISBN: 84-9079-6-X
280 páginas

La siempre interesante colección *La matemática en sus personajes*, de editorial Nivola, dedica su sexto número a la vida y obra de una de los más impresionantes genios

que ha dado la humanidad y no sólo el pensamiento matemático: Leonhard Euler. Sin lugar a dudas, se trata del matemático más prolífico de la historia que publicó más de 800 libros y trabajos, pero también uno de los más influyentes tanto entre sus contemporáneos como en las generaciones que le siguieron.

Para este título el autor elegido no es español, como en el resto de la serie, sino que se ha recurrido a una obra ya publicada en lengua inglesa por la Mathematical Association of America. De su autor, William Dunham ya han aparecido otras obras en castellano —*Viaje a través de los genios* y *El universo de las matemáticas*— que le acreditan como un gran divulgador. En el libro que nos ocupa demuestra su admiración por el genio suizo así como los grandes conocimientos que tiene sobre su obra.

No parece que la vida de Euler fuese muy excitante. Aunque pasó gran parte de su vida dentro de las cortes de Berlín y San Petersburgo, prefería la tranquilidad de su gabinete de trabajo dentro de su entorno familiar. Aparte de su impresionante inteligencia y memoria, su dominio de las técnicas algorítmicas y su tremenda capacidad de trabajo, quizá el aspecto humano más relevante de su larga y bastante apacible vida lo proporcione la entereza que mostró ante la desgracia de perder completamente la vista a la edad de 60, que no pudo frenar su ingente producción matemática que continuó a un ritmo imparable hasta su muerte cuando tenía 76 años.

W. Dunham no se detiene demasiado en contar las peripecias vitales de Euler: se despacha el relato de su vida en un corto capítulo al inicio del libro. El resto de la obra lo dedica a lo que realmente le interesa, su actividad matemática. A lo largo de ocho capítulos desgrana una selección de teoremas obtenidos por Euler en las diversas ramas de las matemáticas puras.

La estructura de los capítulos centrales del libro es similar: todos se dividen en tres apartados. En el primero, el *Prólogo*, se da una visión de lo que se conocía sobre el tema, al que Dunham dedica el capítulo, antes de Euler, dando pie a que hagan su aparición grandes predecesores y algunos de sus resultados. Así por ejemplo, en el capítulo 2, titulado *Euler y los logaritmos*, muestra cómo Napier y Briggs descubren los logaritmos y explica los complejos cálculos que se necesitaban para construir sus tablas; luego sigue describiendo los avances que aportan algunos de sus sucesores —Mercator, Gregory y Newton— que con la introducción de las series infinitas facilitarán notablemente la construcción de las tablas de logaritmos.

El segundo apartado, *Aparece Euler*, es el núcleo del capítulo en el que se examina con detalle alguno de los grandes resultados obtenidos por Euler. Este examen detallado ahonda en los métodos que empleó el suizo y muestra el gran desarrollo que hicieron posible sus hallazgos. Siguiendo con el segundo capítulo como ejemplo, en él, Dunham analiza la sistematización que Euler introdujo en la teoría de los logaritmos, sus avances en los desarrollos en serie de las funciones exponencial y logarítmica, así como sus aplicaciones a la confección, más simple, de las tablas de logaritmos y la obtención del diferencial de $\ln x$. En la exposición de los métodos empleados por Euler, que trata de ser fiel al original, se puede constatar la ausencia de rigor en el sentido que le damos en la actualidad lo que no impide, sino todo lo contrario, que obtuviese resultados correctos y de gran calado.

En la parte final de cada capítulo, el *Epílogo*, el autor elige una de dos opciones (a veces ambas): mostrar las consecuencias y desarrollos que Euler hizo a partir de los resultados que se han comentado, o describir cómo otros matemáticos desarrollaron las ideas de Euler. Finalizando con el capítulo 2, en su epílogo se relata cómo Euler encontró una relación entre los logaritmos y la serie armónica y cómo en el camino descubrió la llamada constante de Euler.

El autor afirma que las matemáticas precisas para leer el texto son elementales y que se sitúan al nivel de las de bachillerato. Creo que sería deseable que los alumnos de bachillerato estuviesen en condiciones de leer textos como el presente, aunque dudo que la mayoría lo puedan hacer con comodidad. Probablemente, las culpas no haya que echárselas a la dificultad de los razonamientos o métodos empleados por Dunham sino a las deficiencias de nuestro sistema educativo que no hace posible que una parte importante de los alumnos del bachiller se sientan cómodos con este tipo de textos.

Dunham se responsabiliza de la selección de los temas a los que dedica los capítulos del libro asumiendo lo que tienen de elección personal. Con ella se abarcan muchas de las ramas de la matemática pura en las que Euler dejó su huella: la teoría de números, el análisis, el álgebra, la geometría, la combinatoria, la teoría analítica de números, la variable compleja... Dice que otros cincuenta autores que hubieran seguido las mismas premisas que él a la hora de escribir sobre Euler probablemente hubieran hecho otros cincuenta libros distintos y que a él le hubiera interesado leerlos todos. Desde luego que si esos hipotéticos

autores hubieran acertado de manera tan rotunda como ocurre con este libro, no cabe duda de que se trataría de obras muy apetecibles y de cuya lectura se podría disfrutar tanto como yo lo he hecho con ésta.

Además de la calidad de la obra hay que alabar también la de la edición que hace agradable la lectura y la facilita con las anotaciones y comentarios introducidos por Antonio Pérez.

Julio Sancho



**INICIACIÓN A LA INVESTIGACIÓN
EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA.
HOMENAJE AL PROFESOR
MAURICIO RICO**

Pedro Gómez y Luis Rico (eds.)

Universidad de Granada

Granada, 2001

ISBN: 84-338-2752-9

371 páginas

Dentró del programa Alfa de la U.E., el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada promovió el proyecto «Formación de investigadores en educación matemática para América Latina» (FIEMAL). En una fase del desarrollo del proyecto becarios de los distintos países involucrados realizaron estudios de doctorado fuera de su país de origen. Entre ellos, el profesor colombiano Mauricio Castro se incorporó a la Universidad de Granada el curso 1998-99. Cuando iba a volver de Bogotá tras las vacaciones murió asesinado, víctima inocente de una acción violenta. Como homenaje a Mauricio Castro, se acordó realizar una publicación que recogiera trabajos realizados por profesores y alumnos de la red FIEMAL.

El resultado es este libro que contiene 25 artículos sobre la investigación en didáctica de las matemáticas agrupados en tres apartados: reflexiones institucionales y estudios comparados, herramientas y momentos relevantes y estudios concretos.

Julio Sancho