

Grupo Cero, ¿nostalgia?

MATEMÁTICAS DE BACHILLERATO. VOLUMEN 1

Grupo Cero: Eliseo Borrás, M.^a Elisa Carrillo, Joaquin D'Opazo, Francisco Hernán, Magda Morata, Luis Puig, Angel Salar, Adela Salvador, Vicente Talens.
Obra gráfica: Antón Díez, María Llum y Daniel Torres

Edita: Roberto Guillén

Valencia, 1977

Matemáticas de Bachillerato. Volumen 2

Grupo Cero: Eliseo Borrás, M.^a Elisa Carrillo, Joaquin D'Opazo, Miguel González, Daniel Gozalbo, Francisco Hernán, Magda Morata, Luis Puig, Adela Salvador, Vicente Talens, Pepe Casany

Obra gráfica: José Saez, Jorge García, Margarita Baikauli, Alberto Parra, María José Cardona, Jorge Sempere, Nieves Barbera y Daniel Gil

Edita: Roberto Guillén

Valencia, 1978



Estamos a mediados de los setenta y un importante grupo de jóvenes recién licenciados nos incorporamos a las tareas docentes en los nuevos bachilleratos. Nuestra formación universitaria está fuertemente influenciada por el formalismo matemático derivado de la corriente bourbakista. En las escuelas e institutos se enseña la llamada «matemática moderna», la matemática que prioriza las teorías conjuntistas y las estructuras algebraicas, marginando una enseñanza tradicional cuyos pilares eran la aritmética y la geometría. El sistema educativo, apoyándose en una

interpretación sesgada de las teorías piagetianas, dice que los currículos se organizan de acuerdo con las etapas de desarrollo cognitivo de los alumnos. Los libros de texto asumen los planteamientos gubernamentales:

el bachillerato debe tender a la organización progresiva racional de la Matemática como ciencia deductiva; la evolución intelectual del alumno le ha puesto en condiciones de poder seguir un proceso deductivo racional; se ha seguido la línea estructuralista, por la simplificación que supone su utilización en el tratamiento de los conceptos matemáticos...

Desde estos posicionamientos, parecen darse todas las condiciones para que los profesores enseñen las matemáticas que se necesitan en la nueva sociedad, y para que los alumnos comprendan y utilicen lo que se enseña. Pero los mundos idílicos pertenecen a los cuentos de hadas; lo que demostró la realidad de las aulas distaba mucho de las expectativas levantadas: las ideas y conceptos matemáticos se justificaban y presentaban en orden deductivo, sin que ello significase que el alumno, que no había desarrollado la capacidad de abstracción que se le suponía, los organizase y estructurase cognitivamente de esta forma. Los resultados eran poco alentadores: los profesores constataron la falta de comprensión de sus alumnos, los alumnos percibieron que sus esfuerzos por entender las nuevas matemáticas resultaban baldíos, y la sociedad también constató que las asignaturas de matemáticas alcanzaban altos índices de fracaso escolar.

Es en este contexto que asistimos a la formación de movimientos de profesionales de la educación matemática que apuestan por el abandono de las llamadas «matemáticas modernas», y la «vuelta a lo básico». Así, surgen grupos de renovación pedagógica que se organizan en torno a las materias curriculares; en el caso de las matemáticas se formaron grupos de profesores como el Equipo Granada-Mats, el Grupo Cero de Valencia, el Grupo Zero de Barcelona, el Colectivo de Didáctica de las Matemáticas de Sevilla, el Colectivo Rosa Sensat, el Grupo Azarquiel de Madrid, etc. Estos grupos se preocuparon de analizar los contenidos de los programas de matemáticas vigentes, de proponer nuevos objetivos para la formación matemática de los futuros ciudadanos, y de experimentar metodologías alternativas en educación matemática.

El Grupo Cero de Valencia

El inicio de las actividades públicas del Grupo Cero de Valencia puede situarse en septiembre de 1975 con la publicación del artículo *¿Para qué las matemáticas?* que aparece, firmado por seis profesores de bachillerato, en el número 2 de la revista *Escuela 75*; revista editada por el Seminario de Pedagogía del Colegio Oficial de Doctores y Licenciados de Valencia. Estos profesores toman en consideración, entre otros, los trabajos sobre la naturaleza de la matemática de Lakatos, la fenomenología del conocimiento matemático de Freudenthal, y la resolución de problemas de Polya. Así, construyen una crítica a los currículos de matemáticas del nuevo bachillerato sustentada en cuatro ideas principales: se necesitan distintas perspectivas para el aprendi-

Los resultados eran poco alentadores: los profesores constataron la falta de comprensión de sus alumnos, los alumnos percibieron que sus esfuerzos por entender las nuevas matemáticas resultaban baldíos, y la sociedad también constató que las asignaturas de matemáticas alcanzaban altos índices de fracaso escolar.

zaje de las matemáticas, el rigor de las matemáticas admite distintos niveles, las matemáticas de los alumnos no pueden quedar reducidas al uso de técnicas, y el destino de la enseñanza de las matemáticas no es el de la división social.

Pero estas ideas no eran el resultado exclusivo de una reflexión teórica, también estaban influidas por los resultados de experimentar en el aula materiales y métodos de trabajo alternativos; algunos de los resultados de esta experimentación, así como el análisis de los mismos, aparecieron publicados por el ICE de la Universidad de Valencia. A través de títulos como *Es posible* o *Estrategias, conjeturas y demostraciones*, se pudieron conocer las intenciones que guiaban al Grupo Cero en su propuesta alternativa a la enseñanza tradicional de las matemáticas: la resolución de problemas como motor del aprendizaje, el valor educativo del trabajo en grupo, la importancia y utilidad del razonamiento plausible, la viabilidad de afrontar problemas de distintas disciplinas científicas, la necesidad de integrar la teoría y la práctica, etc.; y también se pudieron observar los modos de trabajo y las respuestas que ofrecían los alumnos a las tareas propuestas: en el aula aparecen distintas estrategias de resolución de problemas, las matemáticas informales también son eficaces para realizar las tareas, los procesos inductivos están más cerca de los alumnos que los procesos deductivos, la socialización del aprendizaje agiliza la búsqueda de soluciones, etc.

Además, el Grupo Cero desarrolló una amplia difusión de sus materiales, y de las ideas con las que los construyeron, dictando cursos de escuelas de verano y asistiendo a reuniones organizadas por colectivos de profesores. En uno de estos cursos, impartido en la Escola d'Estiu que organizaba la Associació de Mestres Rosa Sensat, surgió, a finales de 1975, la idea de que profesores de matemáticas de bachillerato de Valencia y Barcelona trabajaran conjuntamente en la elaboración de materiales; pero motivos de infraestructura y organización llevaron a que los profesores de cada comunidad decidiesen proseguir el trabajo por separado dando lugar a la formación del Grupo Zero de Barcelona como colectivo autónomo.

Las ideas y materiales del Grupo Cero y del Grup Zero, difundidas en buen número de publicaciones y encuentros con profesores, ayudaron notablemente a apaciguar el desasosiego de los profesores noveles, y de los no tan noveles; ayudaron a abrir nuevas perspectivas en la educación matemática y reorientaron gran parte de los contenidos y métodos de los currículos posteriores.

En el año 1978 se publican los dos libros de texto que se reseñan al inicio de este trabajo. Es la apuesta del Grupo Cero por ofrecer a profesores y alumnos una propuesta didáctica global para los dos cursos de matemáticas obligatorias de bachillerato. Es la culminación de los trabajos previos de diseñar, probar y reformular materiales utilizados en ámbitos locales. Es el momento de atender las demandas de los profesores que quieren llevar a sus alumnos una alternativa completa a la enseñanza tradicional.

Para muchos profesores la aparición de estos libros resultó impactante, tanto por los contenidos como por la forma de presentarlos. Transcurridos 25 años de su publicación, se pueden considerar como libros de texto clásicos. Puesto que se me ha encargado hacer una revisión de estos textos, se me ocurre hacerla en clave de recordar las sensaciones que me produjo.

La primera impresión

Al mirar por primera vez la portada de los libros Grupo Cero pensé que estaban más próximos a portadas de comics que a las portadas de los libros de texto de matemáticas; éstas solían contener formas geométricas (o, con menor frecuencia, fórmulas matemáticas) sobre fondo monocolor y textos escritos con letras de imprenta «formales»: eran portadas poco llamativas. Sin embargo, los ilustradores de los libros del Grupo Cero introducían formas humanas, símbolos matemáticos con carácter decorativo, reproducciones de manuscritos de alumnos y textos escritos con letras de imprenta «informales».

Al abrir el libro encontré una maquetación muy alejada de los libros de texto de la época, tanto por la estructura como por los recursos utilizados. Sin entrar en valoraciones estéticas, recuerdo algunos aspectos que, por comparación con los libros de texto usuales, me resultaron llamativos:

Para muchos profesores la aparición de estos libros resultó impactante, tanto por los contenidos como por la forma de presentarlos. Transcurridos 25 años de su publicación, se pueden considerar como libros de texto clásicos.

- Cada una de las lecciones se inicia con el enunciado de un buen número de problemas; además, hay otros problemas intermedios y también al final. Esta distribución se corresponde con la finalidad para los que están propuestos: hay problemas de introducción, para que aparezca algún aspecto parcial del concepto, y de consolidación de los conceptos abordados en la lección.
- Después de los enunciados de algunos problemas aparece una letra *t*, de tamaño destacado y trazo «informal», que indica alguna de las nociones aparecidas al resolver el problema, o alguna consideración sobre las mismas.
- La presentación formal de los conceptos matemáticos suele aparecer en el epígrafe *Resumen*, que está escrito con tinta de color, o bien en textos incluidos en el «bocadillo» que sale de una boca humana. Este epígrafe no encabeza las lecciones, como en los libros tradicionales, sino que se sitúa después de los enunciados de un buen número de problemas.
- Aparecen, bajo el epígrafe *Aclaración* y con letra de color, comentarios sobre algún concepto para delimitar sus interpretaciones; también se incluyen reflexiones sobre alguna de las técnicas que han surgido, resúmenes de las ideas que han aparecido, finalidad de las tareas que se van a proponer o posibles interpretaciones erróneas.
- Con el enunciado de *Problemas de manipulación* se proponen ejercicios para que los alumnos se adiestren en el uso correcto de las técnicas. Esta disposición no concuerda con el habitual listado de problemas y ejercicios que se entremezclan, en los textos habituales, al final de cada lección.
- En el desarrollo de las lecciones se encuentran ilustraciones variadas que aportan información sobre algún problema, ofrecen alguna ayuda o, simplemente, gratifican la vista. No era habitual encontrar en los libros tradicionales ilustraciones que pudiesen distraer la supuesta seriedad de las matemáticas.
- El tipo de la letra utilizada en los textos no es uniforme, ya que se entremezcla la letra de imprenta tradicional, con el de las letras de tipo manual, y con la de tipo «informal». Resultaba extraño esta licencia para quienes estábamos habituados a una presentación convencional de los textos matemáticos.

Las intenciones

En el prólogo del libro del primer volumen se ponen de manifiesto las intenciones educativas del Grupo Cero sobre la educación matemática en los dos primeros cursos de bachillerato. Allí figuraban ideas importantes para reflexionar sobre la práctica educativa, y para entender mejor la secuenciación y organización de los distintos bloques de contenido de los libros.

- *Para preparar a los jóvenes para lo desconocido, el aprendizaje debe primar sobre la enseñanza.*

Se postulaba un cambio respecto de una práctica educativa en la que el profesor se situaba como el actor principal de la

clase; la propuesta era la de colocar a los alumnos como el principal foco de interés. Y las razones parecían evidentes: la sociedad en que vivíamos estaba sometida a cambios vertiginosos en todos sus ámbitos y, por tanto, la formación matemática de los futuros ciudadanos debía potenciar el desarrollo de hábitos y capacidades.

Este posicionamiento obligaba a modificar los roles tradicionales que se jugaban en el aula, de modo que debía ser el alumno quien realizase las actividades propuestas, aprendiese desde su propia experiencia, indagase en la búsqueda de significados, planificase la resolución de los problemas, etc. Por el contrario, el papel del profesor pasaba a ser el de quien guiase el aprendizaje, estimulase al alumno para el trabajo, sugiriese distintos enfoques para los nuevos conocimientos, ofreciese distintas propuestas para buscar regularidades y formular conjeturas, animase a los alumnos que se bloqueaban en el camino...

- *En una clase activa de matemáticas la tarea primordial es hacer matemáticas, es decir, matematizar.*

Desde nuestra formación universitaria entendíamos que en las enseñanzas de bachillerato había que potenciar el método deductivo, que debíamos apostar por una práctica educativa basada en la presentación formal de las matemáticas. Pero la propuesta iba en el sentido de Freudenthal: los alumnos tienen que matematizar situaciones de la vida real, pero matematizar las matemáticas debe situarse al final del proceso, cuando los alumnos estén en disposición de hacerlo porque tienen un buen conocimiento de las matemáticas.

En consecuencia, la propuesta del Grupo Cero era una llamada para que los profesores apostásemos por invertir la presentación habitual de los conceptos; se sugería que en vez de empezar por las definiciones se comenzase resolviendo problemas, y que fuesen las ideas surgidas de esta actividad las que permitiesen la formalización de los conceptos.

- *Lo que queremos es estudiar los mismos fenómenos que estudian las ciencias sin dejar de señalar la peculiaridad del tratamiento matemático.*

Es cierto que había una tendencia a destacar el carácter instrumental de las matemáticas, tanto en lo que concierne a la formación del individuo, como en lo que se refiere a su carácter de ciencia auxiliar de otras disciplinas científicas. Pero este carácter de ciencia auxiliar era más teórico que real: los problemas que se resolvían habitualmente en las clases de matemáticas no afectaban a otras disciplinas científicas.

La aportación del Grupo Cero fue la de poner de manifiesto, ante los profesores y los estudiantes de bachillerato, que es posible y deseable una enseñanza integral de las matemáticas, una enseñanza en la que la teoría y la práctica se integrasen al resolver problemas del mundo real. Por tanto, había que modificar el tipo de problemas que se proponían a los alumnos, formulando enunciados provenientes de otras muchas disciplinas científicas como la física, la biología, la economía, la medicina, etc.

*Este
posicionamiento
obligaba
a modificar
los roles
tradicionales
que se jugaban
en el aula,
de modo
que debía de ser
el alumno
quien realizase
las actividades
propuestas,
aprendiese
desde su propia
experiencia,
indagase
en la búsqueda
de significados,
planificase
la resolución
de los problemas,
etc.*

- *Proponer problemas que muestren al alumno, desde ángulos diversos, el tipo de cuestiones que conducen a ver la necesidad de una aproximación unitaria.*

La enseñanza de la matemática arrastraba una dilatada práctica en la que los conceptos se mostraban en su formulación actual, y nuestra formación universitaria había incidido todavía más en esta práctica. No es extraño, por tanto, que los profesores noveles nos aferrásemos a la forma tradicional de enseñanza.

Ante esta situación, el Grupo Cero nos recordó que los conceptos matemáticos no surgieron tal y como se presentaban a los alumnos; su génesis se sitúa en la resolución de situaciones problemáticas reales que se plantearon en momentos históricos concretos, así como en un largo periodo de aproximaciones parciales, de superación de errores, de generalización, de abstracción, de precisión terminológica, etc. Y también nos recordaron que la simple presentación de un concepto matemático no garantiza que los alumnos lo capten en toda su complejidad, que hay que abordar el concepto desde distintas perspectivas y que hay que admitir las interpretaciones incompletas que, en el proceso de aprehensión de los conceptos, pueden hacer los alumnos.

El contenido

Primer Curso

Los temas que se abordan en este libro los agrupan los autores en tres bloques: número real, funciones y azar; además, hay un fascículo en el que aparece el Apéndice I dedicado a ecuaciones, inequaciones y programación lineal, y un Apéndice II dedicado a los números complejos.

1. Número real

En una primera parte, Introducción, se presenta un plano de la ciudad de Valencia dibujado en papel milimetrado, y sobre el que se piden respuestas numéricas a cuestiones relacionadas con la medida. Se persigue, entre otros objetivos, que los alumnos hagan una reflexión sobre el uso de expresiones decimales aproximadas de los números $\sqrt{2}$ y π , así como sobre la imprecisión de la medida.

La segunda parte se dedica a refrescar nociones conocidas sobre los números racionales incidiendo en la idea de equivalencia de fracciones y en la conexión entre las notaciones fraccionaria y decimal; concluyendo con una presentación de los números irracionales partiendo de la escritura de expresiones decimales infinitas y no periódicas, dejando la prueba de la irracional de $\sqrt{2}$ a criterio del profesor.

Finalmente, se presentan los números reales, tercera parte, como la unión de los números racionales e irracionales. De esta manera ante el alumno aparece el número real fuertemente vinculado a la medida de magnitudes continuas y a simbolización del resultado de la medida con expresiones decimales, dejando al margen toda referencia a las estructuras algebraicas, así como las técnicas operatorias con radicales. Ahora bien, al focalizar esta presentación en la medida se obstaculiza la aparición de los números negativos, y de hecho los autores soslayan las referencias tanto a su origen como a su significado; simplemente se limitan a utilizarlos como entes supuestamente conocidos por los alumnos.

La última parte del tema, Estimación, se justifica por la necesidad de resolver problemas reales de medida en los que hay que trabajar con números decimales, con expresiones decimales con un número finito de cifras. Por ello se abordan cuestiones referidas a las técnicas de redondeo y a las cotas de error.

2. Funciones

Comienza con ejemplos y ejercicios introductorios cuyo objetivo es el de presentar correspondencias entre conjuntos numéricos en forma gráfica, como tablas de datos o expresadas mediante relaciones simbólicas con fórmulas matemáticas. Se utilizan problemas enunciados en contextos que corresponden a distintas disciplinas, como medicina, economía, física, etc.

Después aparecen las funciones reales de variable real como casos particulares de las correspondencias entre conjuntos numéricos; se presentan mediante propuestas de interpretación de gráficas y de representaciones gráficas de fenómenos de naturaleza variada. Las funciones que aparecen, sin que se haga mención alguna, son continuas o con discontinuidades de salto finito.

La incapacidad de las funciones estudiadas para resolver la relación entre presión y volumen obliga a introducir la función de proporcionalidad inversa...

A partir del ejemplo del crecimiento de las bacterias de una colonia, se presentan las progresiones geométricas...

Una vez presentadas las ideas generales sobre las funciones, los autores inician el estudio de casos particulares, profundizando en el estudio de diversos tipos de funciones:

Las funciones cuya gráfica es una recta, focalizando el estudio en los conceptos de pendiente y ordenada en el origen.

Las sucesiones aritméticas como caso particular de las funciones cuyo dominio es el conjunto de los números naturales.

Funciones cuya gráfica no es una recta, funciones polinómicas, que se presentan como funciones adecuadas para ajustar las gráficas que proceden de representar fenómenos reales; en este estudio se realiza una revisión de las técnicas operatorias con polinomios y se hace un análisis pormenorizado de la función polinómica de segundo grado.

La incapacidad de las funciones estudiadas para resolver la relación entre presión y volumen obliga a introducir la función de proporcionalidad inversa; de forma similar, al estudiar la división celular mediante el número de bacterias en el transcurso del tiempo lleva al estudio de la función exponencial.

A partir del ejemplo del crecimiento de las bacterias de una colonia, se presentan las progresiones geométricas como funciones cuyo dominio es el conjunto de los números naturales, y como sucesiones que tienen características de las progresiones aritméticas previamente estudiadas.

El bloque termina con el estudio de las funciones circulares, aunque su posición en el libro parece indicar que su importancia curricular es secundaria. Estas funciones se introducen con un análisis de la catástrofe del barco «Urquiola», análisis centrado en los problemas que surgen al fijar la posición de un barco sobre una carta marina.

Hay aspectos de este bloque, como puede ser la presencia de las progresiones aritméticas y geométricas, que podrían cuestionar la coherencia del mismo; pero hay otros aspectos, como la presentación de las funciones y la variedad y calidad de los problemas que, en su momento, resultaron de gran interés y utilidad, y que han ejercido una notable influencia en los libros de texto posteriores.

3. El azar

Los ejemplos introductorios sirven para que el alumno se aproxime a las ideas que se trabajan en este bloque, y para que el profesor conozca el grado de conocimiento de sus alumnos sobre la utilización correcta de la conjunción y disyunción inclusiva, el cálculo de porcentajes y el empleo de diagramas de árbol.

El tema de la probabilidad se presenta con el estudio de sucesos elementales asociados a los juegos de azar; posteriormente, el trabajo con tablas de contingencia y diagramas de árbol permite presentar la probabilidad condicionada y la resolución de problemas de naturaleza muy variada.

La combinatoria se introduce para simplificar el cálculo de probabilidades, justificándose por la economía de trabajo que supone obtener con rapidez el número de grupos que cumplen determinada característica.

El bloque termina con el estudio de las variables aleatorias, de las funciones de frecuencia y de probabilidad, y de las medidas de centralización y dispersión, incluyendo un tratamiento elemental de la esperanza matemática y de las curvas de distribución.

Resulta de gran interés la aportación del Grupo Cero al vertebrar, desde planteamientos probabilísticos, la combinatoria y la estadística; además, hay que reconocer el planteamiento novedoso de introducir las funciones de frecuencia y de probabilidad en el estudio de las medidas de centralización y dispersión.

Apéndices

En un fascículo anexo al libro aparecen dos temas: en el Apéndice I se abordan las ecuaciones, inecuaciones y sistemas, y en el Apéndice II se abordan los números complejos.

El hecho de que aparezcan estos dos temas al margen de los restantes induce a interpretar el sentir de los autores de que se trata de temas de interés menor, bien sea porque prima el aspecto procedimental sobre el conceptual, en el caso del Apéndice I, o bien sea porque el contenido del tema no es pertinente en la formación matemática de los alumnos de bachillerato, Apéndice II. Es más, el tratamiento que se da a estos dos temas se corresponde con la presentación tradicional, no parece que corresponda a los mismos autores de los temas anteriores.

Segundo Curso

En este libro se presentan siete bloques temáticos, uno dedicado a la geometría vectorial y los seis restantes corresponden a distintos temas de análisis matemático.

1. Gráficas

Se comienza por recordar las tres principales formas de presentar una función: como tabla de valores, como una relación simbólica y como una gráfica. Seguidamente se muestran gráficas de funciones de distintos fenómenos para que las interpreten los alumnos. En la tercera parte de este bloque se proponen problemas que permiten estudiar gráficas de características diferenciadas: rectas, parábolas, cúbicas, cuárticas, en escalera, de proporcionalidad inversa y periódicas.

Resulta admirable el proceso de búsqueda y selección de los problemas que se enuncian en este bloque; ninguno de los distintos tipos de gráficas se presenta descontextualizado, siempre hay problemas, relacionados con disciplinas científicas de distinta naturaleza, que ilustren al alumno de las características de las gráficas que se quieren estudiar.

2. Derivadas

El estudio de la gráfica que representa la trayectoria de un móvil servirá para introducir el concepto de tasa de variación de una función en un intervalo. Partiendo de los ejemplos y problemas propuestos en el apartado anterior, se introducen las nociones de velocidad instantánea y pendiente, lo que permite alcanzar el concepto de función derivada y, posteriormente, el cálculo de derivadas. El bloque termina con el estudio del crecimiento y decrecimiento y el cálculo de máximos y mínimos.

...siempre hay una situación problemática que aproxima a la noción matemática que se pretende enseñar, y sólo después de resolverla hacen su aparición las definiciones y resultados expresados en el lenguaje formal.

A lo largo del tema se observa el papel principal que, en el proceso de introducción de los conceptos matemáticos, los autores conceden a los problemas; en efecto, siempre hay una situación problemática que aproxima a la noción matemática que se pretende enseñar, y sólo después de resolverla hacen su aparición las definiciones y resultados expresados en el lenguaje formal.

3. Estudio sistemático de las gráficas

La evidencia de que las representaciones gráficas a partir de tablas de datos resultan laboriosas, justifica la conveniencia de hacer un estudio sistemático de los aspectos que más influyen en la representación de funciones: intersección con los ejes coordenados, asíntotas verticales, comportamiento de la función para valores de x alejados de cero, dominio e imagen, simetrías y crecimiento y decrecimiento.

Es de destacar el esfuerzo de los autores por anticipar los conceptos a las técnicas, así, por ejemplo, los alumnos tienen que dibujar figuras simétricas respecto a alguno de los ejes, determinar por dónde hay que doblar una gráfica para que la mitad de una curva coincida con la otra mitad, calcular los valores de la función para pares de valores de la variable simétricos y, finalmente, caracterizar las funciones simétricas.

4. Vectores

Las trayectorias de objetos situados en la pantalla del radar o en un mapa permiten introducir la idea de representar los desplazamientos mediante flechas orientadas. El mismo ejemplo les permite introducir la idea de traslación, noción que refuerzan con el estudio de los motivos que, mediante traslaciones, generan azulejos y otros motivos arquitectónicos; después se incide más en este aspecto dedicando una lección al estudio de los mosaicos y a las redes cristalinas. Los vectores aparecen haciendo abstracción de las características comunes a todas las situaciones en las que se utilizaban flechas, se presentan como el conjunto de todas las flechas equivalentes a una dada. Las relaciones y operaciones con vectores se justifican desde la resolución de problemas sobre velocidades y fuerzas.

En el bloque se incluye un estudio formalizado de los espacios vectoriales y de la geo-

metría descriptiva. La presumible aridez de estos temas queda suavizada por la habilidad de los autores de situar los vectores sobre figuras geométricas, lo que permite al alumno hacer abstracciones desde la visualización sobre objetos familiares.

5. Sucesiones y límites

Ejemplos sobre la reproducción de algas o los resultados del lanzamiento de una moneda sirven para introducir la idea de sucesión de números reales. Un completo trabajo con problemas de naturaleza muy variada, permiten alcanzar la definición de límite de sucesiones de números reales y profundizar en su significado desde una perspectiva más formal.

Frente a la práctica habitual de primar el estudio de las técnicas de cálculo de límites, en la propuesta del Grupo Cero se observa una clara intencionalidad por centrar el trabajo en los conceptos de sucesión y límite de una sucesión, así como en destacar la presencia y utilidad de estas nociones en aspectos de la vida real.

6. Las funciones exponencial y logarítmica

Como consecuencia del estudio de la reproducción celular surge la idea de función exponencial, así como el estudio de sus propiedades. La función logarítmica surge, en el mismo ejemplo, al estudiar el significado y propiedades de la función inversa de la exponencial.

Los ejercicios de consolidación destacan por la temática que abordan, como la desintegración nuclear, la ley de Malthus o la velocidad de una reacción química; constituyen una clara muestra de las intenciones del Grupo Cero de potenciar el tratamiento interdisciplinar de la matemática.

7. Integrales

Los problemas del cálculo de áreas limitadas por gráficas de funciones constituye el núcleo introductorio de este bloque, y la suma de las áreas de rectángulos de igual base permite introducir una estimación del área buscada. La integral definida se obtiene con el paso al límite de las sumas de las áreas, finalizando el bloque con el teorema fundamental del cálculo integral.

Este bloque puede considerarse como un ejemplo del quehacer educativo del Grupo Cero, de cómo se pueden acercar los alumnos a temas complejos buscando la respu-

ta a situaciones problemáticas conocidas y de cómo se puede lograr una primera toma de contacto con un tópico matemático sin necesidad de agotarlo.

A modo de síntesis

Con la edición de éstos, y de otros libros, el Grupo Cero puso a disposición de los profesores y alumnos de bachillerato el material, que consideraron más adecuado, para que se produjesen cambios sustanciales en los métodos y fines de la educación matemática de la época. Influyeron notablemente en un cambio de actitud del profesorado de matemáticas, que se tradujo en una nueva práctica educativa caracterizada por valorar la iniciativa de los alumnos, por fomentar el trabajo cooperativo, por integrar la teoría y la práctica y por potenciar la interdisciplinariedad.

Ahora bien, si hubiese que destacar algún aspecto de las aportaciones del Grupo Cero a la educación matemáticas, ese sería, sin duda, el de haber impulsado en España la corriente denominada Resolución de Problemas. Los dos libros que hemos comentado son una buena muestra del interés y viabilidad de situar la resolución de problemas en el centro de la actividad matemática; en ellos se puede observar cómo usar los problemas en la construcción del conocimiento matemático y cómo utilizarlos para evidenciar la utilidad de las matemáticas en la vida real.

Jose María Gairín

Influyeron notablemente en un cambio de actitud del profesorado de matemáticas...



GEUP. UN PROGRAMA DE GEOMETRÍA INTERACTIVO
Ramón Álvarez Galván
Descargas: <http://www.geup.net>
Dirección electrónica del autor: rag@geup.net

GEUP es fundamentalmente un programa para aprender y hacer Geometría a través de las posibilidades que nos ofrece el ordenador, de manera interactiva y visual. Básicamente permite la realización de construcciones geométricas que cumplirán con los postulados de la Geometría Euclídea Plana (dentro de los límites impuestos por la precisión limitada del cálculo en coma flotante, presente en todos los programas de Geometría dinámica actuales).

Su característica fundamental es que los elementos que se crean en un proceso constructivo pueden depender de otros elementos previamente creados, estableciéndose entre ellos relaciones matemáticas que conseguimos a través de las distintas herramientas de construcción; además, algunos de los elementos pueden ser modificados después de ser contruidos sin que varíen las relaciones de dependencia entre todos los elementos que componen la construcción: al modificar un elemento en concreto la construcción se reformará, manteniéndose estas relaciones. De esta manera, con GEUP podemos estudiar gráficamente un problema general y