SUMA 38
noviembre 2001, pp. 53-67

El concepto de infinito actual

Una investigación acerca de las incoherencias que se evidencian en alumnos de bachillerato

Sabrina Garbin Dall'Alba
Carmen Azcárate

En este artículo presentamos parte de un trabajo de investigación acerca del concepto de infinito actual, realizado con estudiantes de 2.° de Bachillerato. Presentamos el trabajo realizado, resultados y conclusiones que parten del interés de: a) describir las limitaciones y explotar las oportunidades de comunicación que ofrecen los registros de representación presentes en los enunciados de los problemas planteados a los estudiantes; b) diseñar un instrumento que permita mostrar la coherencia en las respuestas de los estudiantes a los problemas; c) describir y distinguir los términos «inconsistencias» e «incoherencia» para describir y clasificar a los estudiantes según estos términos y d) describir lo que entendemos por «tarea de conexión»y reflexionar sobre su posible importancia en la actividad matemática.

ARTÍCULOS

CUANDO UTILIZAMOS la expresión «educación matemática» nos referimos principalmente a los fenómenos de enseñanza y aprendizaje que suceden en las aulas donde profesores y alumnos realizan actividades relacionadas con la disciplina «Matemáticas». En el marco de los departamentos universitarios del área de Didáctica de las Matemáticas se han desarrollado durante los últimos años diversas líneas de investigación que estudian diferentes aspectos de dichos fenómenos y que permiten abordarlos desde distintos enfoques.

El trabajo que presentamos a continuación es el resultado de una investigación[1] llevada a cabo durante el curso 1998-99 con los estudiantes de tres aulas de Segundo de Bachillerato de otros tantos institutos públicos ubicados en la provincia de Barcelona.

Marco teórico

El marco teórico de nuestro estudio tiene varias fuentes, de las que expondremos únicamente los rasgos esenciales de las más relacionadas con los aspectos que vamos a presentar en este artículo.

Cuando nos referimos al sistema educativo, es fácil delimitar la enseñanza primaria y la secundaria o el bachillerato apoyándonos en las edades y cursos establecidos en cada etapa. Sin embargo, cuando hablamos del pensamiento matemático es más difícil delimitar o establecer una separación significativa entre el pensamiento matemático elemental y el pensamiento matemático avanzado. Dos investigadores, David Tall y Tommy Dreyfus, han elaborado una teoría cognitiva con relación al desarrollo y crecimiento del pensamiento matemático avanzado y es el mismo Tall (1996) quien afirma que el lugar donde el pensamiento matemático elemental se convierte en avanzado no se ha definido con precisión. Sin embargo, se reconoce la existencia de una diferencia o discontinuidad entre ambos pensamientos, especialmente en cuanto a las características de su enseñanza y evaluación. Otros autores, como Aline y Schwarzenbergen (1991), comparan el pensamiento matemático avanzado con el elemental y señalan las siguientes tendencias:

- Enseñar una mayor cantidad de conceptos en menor tiempo.
- Enseñar con mayor frecuencia los contenidos del currículo de manera formal antes que el estudiante se haya familiarizado con ellos de manera informal.
- Enseñar conceptos que históricamente evolucionaron muy lentamente y, al mismo tiempo, exigir el aprendizaje de demostraciones estándar y la realización de construcciones mentales abstractas.
- Enseñar una mayor cantidad de conocimientos matemáticos y exigir la comunicación de los mismos y el aumento de estrategias de trabajo; esperar, además, que los estudiantes adquieran la habilidad de distinguir entre pensamiento matemático y metamatemático.

También se refieren a la dificultad de evaluar a los estudiantes en tiempos cortos y la de reducir las actividades a tareas elementales; de esta manera se debe facilitar una evaluación que tome en cuenta la comprensión, el análisis y la síntesis, y no sólo la reproducción de conocimientos por parte del estudiante.

Tall (1995) afirma que el paso del PME al PMA implica una transición significativa que requiere una reconstrucción cognitiva. Esta reconstrucción implica, por un lado, el paso de «describir» a «definir», y por otro, el paso de «convencer» a «demostrar». Se podría decir que los alumnos que se encuentran en la franja de edad de 16-20 años, aproximadamente, son los que están en esta época de transición; se trata de alumnos de Bachillerato y primeros cursos de Universidad. Los estudiantes a los cuales hemos planteado un cuestionario con cinco problemas se encuentran en la primera etapa de esta franja.

Es en la década de los años setenta y primeros años de los ochenta cuando se detecta la diferencia entre los conceptos concebidos y formulados por la matemática formal y las interpretaciones de los estudiantes. Tall y Vinner (1981) explicaron esta distinción y definieron los términos «concept image» y «concept definition» que nosotras llamamos *esquema conceptual* y *definición del concepto,* respectivamente (Azcárate, 1990). Inicialmente, Tall y Vinner describieron el esquema conceptual que tiene un alumno de un concepto matemático como toda la estructura cognitiva asociada al concepto, la cual incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos asociados a la noción matemática. También explican que el esquema conceptual no necesariamente es coherente en todo momento y que los alumnos pueden evocar imágenes contradictorias en momentos diferentes. Cuando hablan de la *definición del concepto* se refieren a una definición verbal, «una sucesión de palabras para especificar el concepto».

Tall y Vinner describieron el esquema conceptual que tiene un alumno de un concepto matemático como toda la estructura cognitiva asociada al concepto, la cual incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos asociados a la noción matemática.

Por otro lado, dada la naturaleza de los objetos matemáticos también es importante distinguir los objetos mentales y los objetos físicos. Los objetos matemáticos tienen un significado más abstracto y son de naturaleza distinta a los objetos visuales como percepciones de los objetos físicos del mundo exterior. Un ejemplo típico es el de los objetos matemáticos como punto y línea. En el mundo real, un punto es una marca de un lápiz no prolongada y con medida finita; sin embargo, en matemática, tal concepto es abstracto, tiene posición pero sin medida. Cuando nos referimos a la estructura cognitiva, decimos que el esquema conceptual usa el símbolo para conectar convenientemente procesos y relaciones; de esta manera, en la mente se tienen símbolos que se pueden manipular como objetos mentales, sin ser necesariamente objetos físicos.

Siguiendo el ejemplo anterior, se tiene entonces, que el punto y la línea, en sentido físico, son la representación semiótica de los objetos matemáticos punto y línea. En la actividad matemática es importante que se diferencie la representación del objeto del objeto matemático. El profesor Duval (1996, 1999) ha desarrollado una teoría cognitiva de las representaciones semióticas. Duval, al interrogarse sobre si los medios estructuralmente requeridos para que una persona pueda acceder a los objetos del conocimiento matemático, son diferentes o no, a los medios requeridos para acceder a los otros objetos de conocimiento (por ejemplo en botánica, astronomía, química, historia…), constata lo siguiente:

- La no accesibilidad de los objetos matemáticos fuera de un sistema semiótico aunque sea rudimentario. Los objetos matemáticos, no son

1 La investigación en cuestión es la tesis doctoral presentada por la profesora Sabrina Garbin en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Autónoma de Barcelona y dirigida por la profesora Carmen Azcárate, «Infinito actual: inconsistencias e incoherencias de estudiantes de 16-17 años», julio 2000.

objetos reales, como pueden ser los propios de las disciplinas como la biología o la física que pueden ser manipulables. «De aquí la necesidad de describir y aprender cómo funcionan ciertos sistemas de representación: representaciones de escritura decimal de los números, representaciones gráficas de formas (funciones o no), representaciones de la escritura literal y algebraica, representaciones que son las figuras en geometría…».

- La necesidad de no confundir nunca un objeto con su representación semiótica (un número y su escritura, un objeto geométrico y la figura que lo representa…).

Duval, considera dos características esenciales de la actividad matemática: el cambio y la coordinación de los registros de representación semiótica. Por ejemplo, si se consideran los registros de representación: lingüísticos (lenguaje natural, escritura algebraica, lenguaje formal) u otros registros (figuras geométricas, gráficos cartesianos, tablas, etc.) se entiende por cambio de registro de representación «a la conversión de la representación de alguna cosa en una representación de esta misma cosa en otro sistema semiótico». Por ejemplo, realizamos un cambio cuando al resolver un problema matemático usamos un gráfico cartesiano para representar una función y en el siguiente paso de la resolución, expresamos con una ecuación algebraica la misma función. Otro ejemplo es cuando trasformamos un enunciado en lengua natural a una ecuación (o viceversa). Por otro lado, como en el dominio del conocimiento matemático se movilizan diferentes registros de representación, también es necesario coordinarlos.

Ahora bien, así como se ha afirmado anteriormente que en el esquema conceptual asociado a un concepto matemático no siempre hay consistencia e incluso pueden aparecer conflictos al cambiar de registros, es decir al convertir una representación en otra, se pueden producir situaciones de congruencia o de incongruencia.

…surgió la necesidad de hablar de la naturaleza y el rol de la intuición en la actividad matemática y de determinar cuál debería ser la actitud de los profesores de matemática ante la relación existente entre el pensamiento intuitivo y analítico.

Con esto nos introducimos en el tema de las *inconsistencias*. Es evidente que la presencia de ideas inconsistentes en nuestros alumnos ha sido una situación que a ningún profesor de matemáticas ha dejado indiferente. El recurso a las inconsistencias detectadas en nuestros estudiantes, como medio para la mejor comprensión de algún concepto matemático, ha sido seguramente un motivo de alegría unas veces, pero otras muchas, ante los múltiples esfuerzos para erradicarlas nos habremos sentido frustrados e impotentes. Es probable que sepamos muy poco sobre ellas y sobre su rol en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, pero no podemos dudar de su importancia y tenemos que aprender a utilizarlas de la manera más eficaz.

En el año 1990, varios investigadores en Didáctica de la Matemática dedicaron un lugar especial al tema de las inconsistencias dedicando un volumen entero de la revista *Focus on Learning Problems in Mathematics*. No vamos a exponer aquí el conjunto de estas investigaciones que enriquecieron el conocimiento básico sobre este tema pero queremos resaltar el interés de la sinopsis y la clasificación presentadas por Tirosh (1990).

Finalmente, queremos hacer una breve referencia a la intuición matemática. Como profesores de matemáticas nos hemos ido acostumbrando a pensar en la intuición, dentro de la actividad matemática, como algo más que un sinónimo de *sentido común*. La importancia que ha tenido y tiene la noción de intuición en la Matemática, las Ciencias y la Educación Matemática, hizo que surgiera un gran interés por investigarla, especialmente considerando el conocimiento intuitivo como un camino básico, junto al analítico, en la actividad matemática. Debido a esta importancia surgió la necesidad de hablar de la naturaleza y el rol de la intuición en la actividad matemática y de determinar cuál debería ser la actitud de los profesores de matemática ante la relación existente entre el pensamiento intuitivo y analítico. Esto último ha sido el principal problema práctico que se planteó el profesor Fischbein (1982, 1998). Además de estas razones, a nosotras nos ha interesado la intuición por el tipo de problemas que hemos planteado a los estudiantes en que está presente el infinito actual, que no responde a una interpretación natural e intuitiva del infinito.

El concepto aristotélico de infinito es una noción potencial que dominó en la historia hasta la época cantoriana, habiendo tenido una gran influencia en el desarrollo de este concepto. Como ha explicado Fischbein (1982), este concepto potencial de infinito es el que responde a la interpretación natural intuitiva del infinito. «Un objeto potencialmente infinito (por ejemplo una línea que puede ser extendida indefinidamente) tiene un significado "conductual". Una operación potencialmente infinita también tiene un significado "conductual" (por ejemplo dividir indefinidamente un segmento). Un infinito actual no tiene un significado conductual, por tanto no es congruente con una interpretación intuitiva». En una palabra, el infinito actual es una noción contraintuitiva.

Objetivos del estudio

Los principales objetivos de la investigación que se presenta aquí se pueden resumir en los cuatro enunciados siguientes:

- Describir las «limitaciones y oportunidades» de los registros de representación presentes en los enunciados de los problemas planteados a los estudiantes.
- Diseñar un instrumento que permita mostrar la coherencia en las respuestas de los estudiantes a los problemas planteados y establecer lo que llamamos «líneas de coherencia».
- Describir y distinguir los términos «inconsistencia» e «incoherencia» para describir y clasificar a los estudiantes según estos términos.
- Describir lo que entendemos por «tarea de conexión» y reflexionar sobre su posible importancia en la actividad matemática y sus consecuencias didácticas.

Para poder abarcar estos objetivos decidimos explorar los esquemas conceptuales de los alumnos asociados a la noción de infinito actual contextualizado en los problemas que presentamos a continuación.

Los problemas seleccionados y aplicados a los alumnos

Para conocer las ideas de los alumnos y poner en evidencia el pensamiento más o menos consistente con respecto al concepto de infinito actual, elaboramos un cuestionario con cinco problemas cuya característica principal es que en todos está presente la misma noción matemática del infinito actual pero expresada en lenguajes matemáticos diferentes: geométrico, verbal, analítico, gráfico y algebraico.

Primer problema

Observa la figura 1.

Nos muestra un esquema en el que se biseca cada vez el segmento de la derecha, es decir los puntos M, N, O, P, son los puntos medios de los segmentos AB, MB, NB y OB respectivamente.

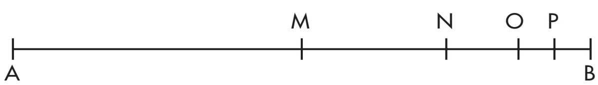

Figura 1

…el infinito actual es una noción contraintuitiva.

Si se siguen haciendo más y más bisecciones, ¿crees que es posible llegar a una situación en la que un punto de la bisección coincide con el punto B?

Explica tu respuesta.

Segundo problema

Se deja caer una pelota desde 2 metros de altura sobre una superficie horizontal. Cada vez que la pelota llega al suelo, tras caer desde una altura h, rebota hasta una altura h/2.

¿Podrías calcular la distancia total recorrida por la pelota? Explica tu respuesta.

¿Podrías decir cuántos rebotes hará la pelota? Explica tu respuesta.

Tercer problema

Considera la siguiente suma

$$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots + \ldots$$

¿Cuál crees que es el valor de esta suma? Explica tu respuesta.

Cuarto problema

La figura 2 representa la gráfica de una función

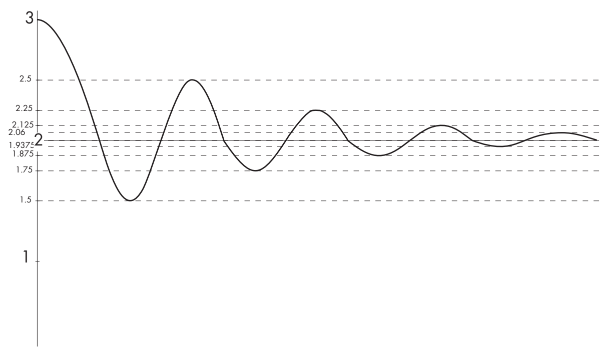

Figura 2

Describe lo que pasa con la función para valores muy grandes de x. *¿Podrías determinar el valor de la función cuando* x *se hace muy grande? Explica tu respuesta.*

Quinto problema

Considera la siguiente ecuación:

$$y = 1 + 1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + 1/2^4 + \ldots + 1/2^n + \ldots$$

¿Podrías decir para qué valor de n resulta y = 2? Explica tu respuesta.

Este cuestionario fue suministrado a 80 alumnos de 2.° de Bachillerato antes de que recibieran enseñanza sobre límites.

Al principio del artículo nos hemos referido a las representaciones semióticas. Podemos observar que cada problema, expresado en un lenguaje matemático distinto, presenta también un tipo de representación semiótica.

En el primer problema el lenguaje matemático usado es el geométrico y el registro de representación es una figura geométrica (segmento de recta).

En el segundo problema el lenguaje matemático usado es el verbal y el registro de representación semiótica es el lingüístico, la lengua natural.

En el tercer problema el lenguaje matemático usado es el analítico y el registro lingüístico es el numérico (suma infinita).

En el cuarto problema el lenguaje matemático usado es el gráfico y el registro de representación es el gráfico cartesiano (función cartesiana).

En el quinto problema el lenguaje matemático usado es el algebraico y el registro lingüístico es la escritura algebraica (ecuación con suma infinita).

Con relación a los problemas, podemos decir que los tres primeros son una versión actualizada de la primera paradoja de Zenón (diferenciada por el contexto), llamada *Paradoja de la dicotomía*. En la primera pregunta, la paradoja deriva de considerar que entre dos puntos cualesquiera de una recta siempre hay otro punto y entonces un segmento cualquiera contiene una sucesión de puntos decreciente. Numéricamente, sería la sucesión infinita (si consideramos el segmento [0,1]) 1, 1/2, 1/4, ..., que conforma la serie de la pregunta 3. Una respuesta correcta de esta pregunta 3 lleva implícita una respuesta correcta a la primera pregunta. La segunda pregunta, igual que la versión de la primera paradoja de Zenón, enfrenta al estudiante con una situación que, en nuestro mundo concreto y finito, es impensable: «la pelota hará un número infinito de rebotes». La quinta pregunta usa la misma suma de la pregunta 3 pero transformada en una ecuación y la gráfica de la cuarta pregunta, respeta la misma divisibilidad infinita en mitades de las preguntas 1, 2 y 3, originando la misma paradoja.

El conocer las limitaciones y cómo influyen las representaciones en las respuestas inconsistentes de los estudiantes, ayudará a proponer, en este nivel de enseñanza, las mejores maneras para tratar nociones tan complejas y contraintuitivas como es la noción de infinito actual.

Estas situaciones presentan subdivisiones y un infinito pequeño, lo cual implica una coordinación simultánea entre el creciente número de divisiones y el decreciente resultado parcial sobre el que se opera. El psicólogo Nuñez (1994) llamó a estas dos *tipos* de iteración: *divergente* y *convergente*.

En estos problemas se utiliza como método de resolución el modelo matemático del análisis estándar que se basa en el conocimiento de los números reales y las sumas infinitas. Como lo han demostrado otras investigaciones, muchas de las respuestas correctas a preguntas en que está involucrado el infinito actual resultan contraintuitivas; sabiendo que la intuición natural del infinito es el potencial, muchos estudiantes tienden a dar respuestas inconsistentes respecto al concepto involucrado. En esta etapa de su aprendizaje, resulta problemático que los estudiantes se enfrenten a problemas cuyas representaciones o modelos de resolución resultan contraintuitivos. El conocer las limitaciones, y cómo influyen las representaciones en las respuestas inconsistentes de los estudiantes, ayudará a proponer, en este nivel de enseñanza, las mejores maneras para tratar nociones tan complejas y contraintuitivas como es la noción de infinito actual.

Análisis de los datos recogidos con el cuestionario

El análisis descriptivo e interpretativo de las respuestas de los alumnos se realizó pregunta por pregunta. Las preguntas estaban planteadas de manera que requerían básicamente una respuesta afirmativa o positiva a los problemas; muchas respuestas eran las esperadas, pero también muchos alumnos no contestaron ni afirmativa ni positivamente, sino que expusieron sus criterios teóricos y/o prácticos para prever una posible solución o decantarse por la imposibilidad de una solución. Describir, interpretar y clasificar las respuestas nos permitió acercarnos a los esquemas conceptuales de los estudiantes poniendo en evidencia las limitaciones y oportunidades que ofrecían los registros de representación usados en los enunciados. Presentamos a continuación el resultado de este análisis, pregunta por pregunta:

Pregunta 1

- La representación del segmento que se hace el alumno puede ser física, es decir como un espacio finito y con medida, lo cual tiene como consecuencia un proceso finito de bisección.

- Cada segmento que resulta de cada bisección puede ser identificado por el estudiante como un espacio geométrico, una distancia numérica o como la cardinalidad de la bisección. Se ha observado que cada identificación puede llevar a un proceso finito o infinito de bisecciones.
- Los puntos que resultan de cada bisección, *M*, *N*, *O*, *P*, etc., pueden ser considerados como marcas físicas. El grosor del lápiz puede ser determinante para dar el número de bisecciones posibles (finitas).
- El segmento puede ser considerado como un conjunto con infinitos puntos, por tanto el proceso de bisección en este caso es infinito. La coincidencia del punto de bisección con el punto extremo *B* no es necesariamente aceptada.
- Para dar una respuesta no siempre se toma en cuenta el proceso infinito de bisección. Para algunos alumnos resulta relevante que *B* sea un punto extremo del segmento y, por tanto, geométricamente no puede ser un punto de bisección.
- El proceso geométrico de bisección, cálculo de *M*, *N*, *O*, *P*, etc. puede ser considerado como un proceso numérico, asignándole una medida a cada segmento.

Pregunta 2

- Puede percibirse el problema como parte del mundo físico, real y concreto. La experiencia es compatible con la experiencia real, dado que el objeto involucrado es una pelota. La infinitud no está presente en el proceso. Puede producir consideraciones en los estudiantes del tipo: fórmulas físicas, velocidad, gravedad, tiempo, presión, lugar, masa, elasticidad de la pelota, fuerza de rozamiento.
- Muchos estudiantes cambian de registro de representación para resolver el problema. Por ejemplo, hacen un dibujo de la situación o escriben una suma infinita. Las respuestas de los estudiantes son sensibles a este nuevo registro de representación al que optan. La finitud o infinitud del proceso dependerá de cada representación, y lo mismo si la infinitud es actual o potencial.
- Generalmente, los alumnos necesitan convertir la representación del enunciado del problema, la mayoría de las veces, a un dibujo de la situación descrita en el problema.

Pregunta 3

- No siempre es aceptada la cardinalidad infinita del conjunto de los sumandos. Puede haber omisión de los puntos suspensivos y calcularse la suma con los cinco sumandos.
- La suma es infinita no sólo por los puntos suspensivos, como expresión algebraica, sino como un proceso numérico; los estudiantes se refieren a la posibilidad de dividir el número 1 infinitamente.
- Cada uno de los sumandos puede no ser caracterizado como la mitad del anterior y, por tanto, no siempre se considera la cantidad numérica que se va sumando.
- Se considera que la expresión infinita de la suma indica que no es posible sumar una cantidad infinita de términos o que el resultado siempre es aproximado. En el primer caso no se toma en cuenta el tipo de sumandos.
- Se considera que la expresión infinita de la suma indica que el proceso no es acotado y que sugiere visualmente un infinito potencial, induciendo a una respuesta infinita pero no como número sino como indeterminación.
- Puede ser evadida la suma infinita, observando sólo el comportamiento de la sucesión $1/2^n$.

Pregunta 4

- El gráfico cartesiano induce a una respuesta infinita (actual o potencial) o finita, dependiendo de la concepción de función que el estudiante posee.
- La curva de la función puede ser considerada como una curva geométrica que en el infinito se transforma en una recta. También, se puede percibir el proceso como numérico: la variable y disminuye en la medida que la x aumenta numéricamente.
- La recta $y = 2$ puede ser confundida con el eje x.
- La representación gráfica de la curva puede considerarse de manera física, es decir con grosor y de longitud finita. En este caso la función toma el valor de 2 mediante un proceso finito.
- Pocas veces es tomada en cuenta el proceso de división por mitades en el eje y. Prevalece la observación

El segmento puede ser considerado como un conjunto con infinitos puntos, por tanto el proceso de bisección en este caso es infinito. La coincidencia del punto de bisección con el punto extremo B no es necesariamente aceptada.

del comportamiento de la función a partir del eje x, en el movimiento horizontal.

- La gráfica induce a una descripción de un proceso constante e infinito, en el sentido potencial.

Pregunta 5

- Al escribir la suma infinita como una ecuación se puede causar la evasión de la infinitud. La ecuación se transforma en una ecuación finita, donde se considera sólo el término n-ésimo.
- Aunque la suma sea infinita puede pensarse que el proceso no es necesariamente infinito para que resulte $y = 2$. Para un cierto valor de n, la suma no continúa y para ese valor la suma es 2. Los puntos suspensivos son despreciados.
- Observar que n es exponente de una fracción y deducir que el resultado de la ecuación debe ser un número entero puede inducir a considerar que el valor de la ecuación debe ser negativo. Se elude la infinitud.
- La incógnita de la ecuación es el exponente de un número; esto puede inducir a considerar que la solución viene dada por medio de logaritmos (conexión con conocimientos previos).

Hemos establecido, por cada pregunta, las respuestas más frecuentes que se podrán encontrar más adelante en las tablas de las figuras 3, 4, 5 y 6.

La construcción del instrumento

A partir de la clasificación, el análisis y la tabulación de las respuestas, pretendíamos construir un instrumento que pudiera mostrar a aquellos alumnos que dan respuestas incoherentes a los problemas del cuestionario. Nos dimos cuenta de que no era tan fácil hablar de coherencia entre las respuestas de las cinco preguntas, como, por ejemplo, afirmar que un alumno que ha mostrado ideas finitas en la primera, será coherente si se muestra finitista también en las demás preguntas (Garbin y Azcárate, 2000).

A partir de la clasificación, el análisis y la tabulación de las respuestas, pretendíamos construir un instrumento que pudiera mostrar a aquellos alumnos que dan respuestas incoherentes a los problemas del cuestionario.

El contexto de las preguntas, y sobre todo el lenguaje matemático utilizado, hace un tanto más compleja la situación. Por ejemplo, en la primera pregunta, un alumno se muestra finitista si contesta que el punto de bisección alcanza al punto extremo B con un número finito de bisecciones, o infinitista, si contesta que el punto de bisección alcanza, o no, al punto B pero con un número infinito de bisecciones.

Sin embargo, en la tercera pregunta, la infinitud está explícita, se presenta con un lenguaje algebraico y una representación numérica: una suma infinita; no cabe la posibilidad directa de hablar de finitud. El alumno pudo entonces mostrarse con una idea potencial del infinito, dejándose llevar por la expresión numérica que no acaba, o también, pudo reconocer que cada sumando representa la mitad del anterior, propiedad que permite la convergencia de la suma. Había que preguntarse, entonces, qué tipo de respuesta dada en esta pregunta puede considerarse coherente con la dada por un alumno que responde de manera finita en la primera pregunta.

Para cada problema nos hicimos esta última pregunta: qué tipo de respuestas dadas por los alumnos pueden considerarse coherentes (aunque éstas no sean las correctas). Respondiendo a esta pregunta pudimos establecer líneas de coherencias de respuestas a partir de las obtenidas por los estudiantes. Construimos tres líneas de coherencia, las cuales están representadas en las figuras 3, 4, 5 y 6. Estos gráficos están formados por tablas enlazadas entre ellas. En estas tablas podemos observar las distintas respuestas dadas por los alumnos. Si se siguen el orden dado por los enlaces, se pueden identificar a aquellos alumnos que no mantienen respuestas coherentes en las cinco preguntas del cuestionario. Por confidencialidad y discreción, identificamos a los alumnos con una codificación del 1 al 80.

La línea 1 la hemos llamado *línea finitista*. Está subdividida en dos sublíneas: 1.1 y 1.2. La línea 1.1 presenta un perfil de respuestas finitistas menos en las correspondientes a la pregunta 3, cuyas respuestas fueron dadas dejándose llevar visualmente por la expresión infinita de la suma.

La línea 1.2 presenta respuestas finitistas menos en las correspondientes a las preguntas 2, 2(b) y 3. Estas últimas son respuestas que son dadas por las siguientes razones: en la 3 por dejarse llevar visualmente por la expresión infinita de la suma y, en la 2(a) y 2(b), por considerar que el comportamiento descrito de la pelota no acaba.

Hemos llamado *respuestas finitistas* a las que fueron escritas con argumentos finitos.

PREGUNTA 1

Responde afirmativamente
El proceso de bisección es finito
4, 6, 13, 15, 16, 18, 21, 26, 27, 30, 54, 55, 56

PREGUNTA 3

El valor de la suma es infinito	El resultado corresponde a la suma de las 5 primeras fracciones	No se puede calcular o determinar		No indica valor alguno debido a la infinitud de la suma. Por faltar datos
		Por la infinitud	No se conoce la fórmula general	
5, 9, 13, 15, 22, 49, 53, 57, 68, 71	26, 53	16, 17, 18, 50, 63, 64, 65, 67, 79	7	40, 48, 69

PREGUNTA 2(a)

Responde afirmativamente	Se considera la necesidad de conocer el número de rebotes tanto para afirmar como para negar	Se considera que no hay datos suficientes para afirmar o negar	Responde afirmativamente	Responde negativamente	No contesta	
Indica una distancia			Se considera el comportamiento de la pelota. Alude a finitud.	La pelota tiene un solo movimiento vertical	La distancia depende de lo que haga la pelota	Escribe fórmulas físicas. No tiene datos suficientes
El proceso es finito						
11, 28, 33, 34, 35, 36, 39, 65, 73, 76	2, 3, 9, 16, 23, 31, 38, 56, 59, 72, 74	5, 6, 18, 22, 25, 27, 41, 45, 50, 51, 53, 55, 57, 64, 69, 70, 71	15, 40, 42, 53, 62, 67, 79, 80	1	4	8, 26

PREGUNTA 2(b)

Responde afirmativamente			Responde negativamente		No contesta	
Considera finitos rebotes	No indica una cantidad		No hay datos suficientes	Depende de cómo se tire la pelota	Alude a finitud	Escribe fórmulas físicas.
	Conociendo algunos datos	Alude a finitud				
10, 13, 16, 24, 28, 29, 34, 35, 36, 39, 42, 56, 61, 65, 68, 79	5, 15, 19, 41, 50, 57, 58, 62, 64, 71, 74	1, 4, 6, 7, 9, 14, 21, 23, 37, 40, 49, 67	18, 25, 26, 51, 55, 69, 70, 73	78	33, 45, 80	8

PREGUNTA 4

La función llegará a ser una recta. El valor de f es 2 o 0. Proceso finito	Considera que puede tener cualquier valor dependiendo del valor de x
1, 6, 7, 11, 13, 15, 20, 26, 27, 42, 56, 62, 69	49, 60, 76

PREGUNTA 5

Responde afirmativamente	Responde negativamente			
El valor de n es un número finito	Es un número tan grande que no saldría en la calculadora	La suma es infinita	Hay una infinidad de respuestas	1/2 es menor que 2
7, 8, 19, 20, 26, 30, 34, 35, 48, 61, 65, 68, 76, 78	14	18, 37, 50, 57, 58, 62, 66, 67	73	40, 55

Figura 3
Línea 1.1.

PREGUNTA 1

Responde afirmativamente
El proceso de bisección es finito
4, 6, 13, 15, 16, 18, 21, 26, 27, 30, 54, 55, 56

PREGUNTA 3

El valor de la suma es infinito	El resultado corresponde a la suma de las 5 primeras fracciones	No se puede calcular o determinar		No indica valor alguno debido a la infinitud de la suma. Por faltar datos
		Por la infinitud	No se conoce la fórmula general	
5, 9, 13, 15, 22, 49, 53, 57, 68, 71	26, 53	16, 17, 18, 50, 63, 64, 65, 67, 79	7	40, 48, 69

PREGUNTA 2(a)

Responde negativamente	Responde afirmativamente		No contesta
Por el proceso infinito	Infinitos metros	No tiene conocimientos suficientes, el proceso es inacabable	Describe el proceo como
17, 21 24, 47, 63, 66, 77	12, 44, 61	49	10, 13, 19, 68

PREGUNTA 2(b)

Responde afirmativamente		Responde negativamente		No contesta	
Considera infinitos rebotes	Considera que tiende a infinito	La pelota no para de rebotar	La altura nunca puede ser 0	La observación alude a infinitud	Por parte (a) se interpretan infinitos rebotes
11, 12, 22, 43, 46, 54, 63, 76	27	3, 17, 31, 32, 38, 44, 47, 48, 52, 53, 59, 60	66, 67, 77	20	30

PREGUNTA 4

La función llegará a ser una recta. El valor de f es 2 o 0. Proceso finito	Considera que puede tener cualquier valor dependiendo del valor de x
1, 6, 7, 11, 13, 15, 20, 26, 27, 42, 56, 62, 69	49, 60, 76

PREGUNTA 5

Responde afirmativamente	Responde negativamente				n = –°
El valor de n es un número finito	Es un número tan grande que no saldría en la calculadora	La suma es infinita	Hay una infinidad de respuestas	1/2 es menor que 2	
7, 8, 19, 20, 26, 30, 34, 35, 48, 61, 65, 68, 76, 78	14	18, 37, 50, 57, 58, 62, 66, 67	73	40, 55	16

Figura 4
Línea 1.2.

PREGUNTA 1

Responde negativamente
Por la infinitud del proceso se aproxima, se acerca a B
3, 8, 9, 10, 17, 20, 22, 24, 33, 34, 35, 37, 38, 43, 44, 45, 49, 50, 52, 53, 58, 61, 62, 63, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 77, 78

PREGUNTA 3

El resultado de la suma es 1,99...; 2,99...	El máximo valor que puede llegar es 1,99...	No se puede calcular			El valor de la suma está entre 2 y 2,99...	El valor de la suma se aproxima a 2
		No se puede calcular un número exacto	Los sumandos cada vez se hacen más pequeños	El número está alrededor del 2		
4, 8, 23, 41, 42, 59	75	20	16, 63	73	74	1, 2, 3, 6, 14, 19, 21, 27, 28, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 39, 43, 44, 45, 52, 60, 61, 62, 66, 72, 77, 78, 80

PREGUNTA 2(a)

Responde afirmativamente
Es proceso es infinito y la distancia se aproxima a 6m o es 5,99...
14, 29, 32, 37, 43, 48

PREGUNTA 2(b)

Responde afirmativamente		Responde negativamente		No contesta	
Infinitos rebotes	No indica cantidad Tiende a °	La pelota nunca para de rebotar	La altura nunca puede ser 0	Observación alude a infinitud	Por parte (a) se interpretan ° rebotes
11, 12, 22, 43, 46, 54, 63, 76	27	3, 17, 31, 32, 38, 44, 47, 48, 52, 53, 59, 60	66, 67, 77	20	30

PREGUNTA 4

La función se aproxima a 2, al eje x, o a 0	No se puede determinar. Por la infinitud del proceso Nunca será 2
3, 4, 5, 8, 9, 10, 14, 17, 19, 23, 29, 31, 32, 33, 36, 37, 38, 41, 43, 48, 50, 52, 53, 55, 58, 59, 64, 66, 67, 70, 71, 72, 73, 77	16, 63

PREGUNTA 5

n = ° pero la suma no llegará a 2	Responde negativamente La suma nunca será 2
23, 24, 42, 45, 47, 59, 60	1, 3, 4, 6, 9, 17, 21, 31, 32, 33, 38, 41, 43, 53, 64, 71, 77, 80

Figura 5
Línea 2

PREGUNTA 1

Responde afirmativamente
El proceso de bisección es °
12, 29, 40, 42, 46, 47, 59

PREGUNTA 3

El resultado de la suma es 2	El resultado de la suma es 1, 0 o un número decimal
10, 12, 24, 29, 30, 46, 51, 54, 58, 76	11, 35, 47, 55

PREGUNTA 2(a)

Responde afirmativamente
Indica una distancia. El proceso es infinito.
30, 46, 54

PREGUNTA 2(b)

Responde afirmativamente	Responde afirmativamente	No contesta	
Infinitos rebotes	No indica cantidad. Tiende a infinito.	Observación alude a °	Por parte (a) se interpretan ° rebotes
11, 12, 22, 43, 44, 46, 54, 63, 76	27	20	30

PREGUNTA 4

La función llrgsrá a ser una recta. El valor de f es 2 o 0. El proceso es infinito
2, 12, 18, 21, 24, 28, 39, 44, 46, 47, 54

PREGUNTA 5

n = °	Responde negativamente
2, 12, 22, 24, 25, 28, 29, 36, 39, 42, 44, 45, 46, 54, 59, 69, 70, 75	Será un número ° que no conocemos
	49

Figura 6
Línea 3

La línea 2 la hemos llamado *línea actual*. Presenta un perfil de respuestas actualistas a las preguntas del cuestionario. Hemos llamado *respuestas actualistas* a aquellas respuestas que reflejan una concepción actual del infinito.

La línea 3 la hemos llamado *línea potencial*. Presenta un perfil de respuestas potenciales a las preguntas del cuestionario. Hemos llamado *respuestas potenciales* a aquellas respuestas que reflejan una concepción potencial del infinito.

Observación: hay 5 tipos de respuestas que no aparecen en las líneas anteriormente mencionadas.

1. Respuestas que a la vez son afirmativas y negativas a las preguntas. Estos alumnos deberían afirmar en forma paradójica a todas las preguntas.

   Podemos ilustrar este tipo de respuesta con la dada por el alumno 11 a la primera pregunta:

   A11: Sí, porque llegará un momento en que no se podrá dividir el segmento y la letra *B* será la bisección. Antes de esto deberá pasar mucho tiempo porque tenemos micros (*m*) o *mm* los cortes serán más pequeños.
   También podría ser que no porque si es una bisección siempre debe haber un final y un principio por muy pequeño que sea. Es decir siempre así: ____ __ _

2. Respuestas en que el alumno distingue entre una respuesta *teórica* o *práctica* a la misma pregunta. Estos alumnos para ser coherentes deberían distinguir entre una respuesta teórica y práctica en todas las preguntas.

   Es ilustrativa la siguiente respuesta a la primera pregunta:

   A57: En teoría siempre hay un punto medio entre dos puntos por muy pequeños que sean. Pero en la práctica no se puede no hacerlos coincidir, por lo tanto en un momento u otro termina coincidiendo.

3. Respuestas que distinguen en la pregunta 1, una interpretación numérica y una gráfica.

   Un ejemplo es la respuesta del alumno 76:

   A76: Gráficamente sí puede ser, numéricamente no. Gráficamente puede que el lápiz sea más grueso y que entonces la bisección se superponga a *B*.

4. La respuesta a la primera pregunta, donde se considera que el punto de bisección no alcanza al punto *B* por ser éste punto extremo del segmento.

   Ilustramos con la respuesta del alumno 25:

   A25: Detrás de *B* no hay nada, entonces no puede ser el centro de algo si es el final.

5. Los que no contestan.

Esto quiere decir que los alumnos que no aparecen en ninguna de las líneas es porque han dado como respuesta alguna de éstas.

Veamos algunos ejemplos. El alumno 26 está presente a lo largo de la línea 1.1, esto quiere decir que se mantiene coherente y es un alumno con una concepción finitista o evasiva de la infinitud. Si observamos el comportamiento del alumno 54, éste aparece en la línea 2, en las preguntas 3, 2(a), 2(b), 4 y 5. Sin embargo, podemos observar su situación de incoherencia en la pregunta 1. En la primera pregunta este alumno aparece en la línea 1. Es decir, este alumno muestra una concepción actual del infinito en todas las preguntas, menos en la primera, que se muestra finitista.

Cuando se habla de una idea o pensamiento inconsistente, es con relación al concepto matemático involucrado, o a contradicciones dentro de una teoría matemática dada.

Diferencia entre «inconsistencia» e «incoherencia»

Al principio hemos hablado de las ideas inconsistentes de los alumnos y al referirnos a la construcción del instrumento, hemos utilizado también el término de incoherencia. Esta distinción no ha sido casual ni se han usado ambas como palabras sinónimas. Trataremos de explicar seguidamente, en qué consiste la diferencia con que las dotamos.

Cuando se habla de una idea o pensamiento inconsistente, es con relación al concepto matemático involucrado, o a contradicciones dentro de una teoría matemática dada. Generalmente, aparecen durante la resolución de un problema o en una respuesta al mismo. Nuestros alumnos, por ejemplo, pueden mostrar inconsistencias al resolver uno de los problemas del cuestionario, y, como hemos visto, pueden presentar una concepción inconsistente respecto al concepto matemático involucrado en el problema. Por ejemplo, es el caso de un alumno que ha mostrado una idea potencial de la suma infinita en la pregunta 3, siendo inconsistente con respecto a la idea actual del infinito.

Ahora bien, se puede estar en una situación similar a la que se ha presentado en el cuestionario, en que haya que resolver un mismo problema expresado en diferentes lenguajes matemáticos; es decir, problemas que tienen representación semiótica distinta y lenguaje matemático diferente (por ejemplo, muchas veces el estudiante se enfrenta a esta situación en una guía de problemas o en un libro, al final de un tema, en una sección dedicada al aprendizaje de un concepto específico). Ante esta situación en que el estudiante tiene que resolver un mismo problema pero expresado de distintas maneras, se generan respuestas contradictorias entre sí (la de un problema con respecto a otro). Nosotros llamamos respuestas incoherentes a las respuestas contradictorias entre sí.

Las líneas de coherencia son las que permiten identificar este tipo de respuestas coherentes o incoherentes. En consecuencia, podemos tener un alumno cuyas ideas o respuestas sean inconsistentes con el concepto involucrado y, sin embargo, mostrarse coherente en su pensamiento (ideas o respuestas equivalentes en problemas diferentes).

Podemos hablar de tres tipos de alumnos:

1. *Alumno coherente y consistente*. Este tipo de alumno tiene todas sus respuestas en la línea 2. El alumno 46, por ejemplo, es un alumno que tiene una concepción actual del infinito independientemente del tipo de problema.
2. *Alumno coherente e inconsistente*. Este tipo de alumno tiene todas sus respuestas en la línea 1 o en la línea 3. Un ejemplo es el alumno 26 que es coherente en la línea 1. Es decir, este estudiante tiene una concepción finitista o evade la infinitud. Curiosamente, no hubo ningún alumno coherente en la línea 3.
3. *Alumno incoherente*. Este tipo de alumno, tiene respuestas que no son coherentes con la línea. En este caso se pueden hacer combinaciones. Puede haber, de 1 a 5 respuestas incoherentes con la línea, lo cual muestra que no todo alumno es incoherente de la misma manera ni con la misma profundidad.

Por otro lado, analizando la situaciones de coherencia de los estudiantes a través de sus respuestas y las líneas de coherencias hemos podido obtener unas conclusiones parciales de las cuales subrayamos las siguientes:

- Aquellos alumnos que se muestran finitistas o que evaden la infinitud, en preguntas de tipo geométrico, algebraico o numérico, difícilmente contestan de manera infinitista (de manera actual o potencial) en preguntas en que la infinitud se presenta en situaciones de la vida real. Son alumnos en que la coherencia de su pensamiento reflejada en sus respuestas es inducida por una mirada a los espacios acotados, como por ejemplo el de un segmento, o expresiones no acotadas, como por ejemplo el de una suma infinita.
- Los alumnos que se muestran finitistas o que evaden la infinitud, han presentado un tipo de respuestas y un número de respuestas actualistas que indicaron que la noción del infinito actual en la mente de estos estudiantes empieza a aparecer a partir de representaciones que inducen a ello, o haciendo una analogía de concepto finitos. Por ejemplo, consideran que la suma infinita debe tener un valor numérico finito igual a como lo tiene la suma finita. O, aceptando el proceso infinito de bisecciones representado en un segmento de medida finita, aceptan la convergencia del punto gracias a la representación acotada del segmento que induce a ello.
- En la mente de los alumnos que muestran una concepción actual en la mayoría de sus respuestas, esta concepción entra en conflicto sobre todo en el segundo problema del cuestionario, el de la pelota, que presenta un contexto «real-físico».
- Los alumnos que se muestran potencialistas, responden a las preguntas básicamente dejándose llevar por la intuición natural del infinito que es la potencial.

…podemos tener un alumno cuyas ideas o respuestas sean inconsistentes con el concepto involucrado y, sin embargo, mostrarse coherente en su pensamiento (ideas o respuestas equivalentes en problemas diferentes).

…llamamos respuestas incoherentes a las respuestas contradictorias entre sí.

En la búsqueda de coherencia

Uno de los motivos de la presencia de respuestas incoherentes es la falta de consciencia por parte de los estudiantes de que están resolviendo un mismo problema representado de diferente forma; sin embargo, un motivo más profundo es la dificultad de realizar una tarea, que hemos llamado «tarea de conexión». La «tarea de conexión» consistiría en identificar y saber establecer relaciones entre los problemas, en cuanto a lenguaje matemático y registro de representación semiótica se refiere, de manera que permita una influencia mutua dando lugar a respuestas asociadas coherentes con los problemas.

Podemos ilustrar lo anterior con un ejemplo. Pensemos en los problemas 1 y 3. La tarea de conexión entre los dos problemas consiste en reconocer que en ambas preguntas está presente la divisibilidad infinita por mitades; son dos problemas que representan el mismo concepto, pero tales que en el primero se utiliza el lenguaje geométrico y en el tercero, el analítico. Entre los registros de representación, figura geométrica: segmento (pregunta 1) y escritura numérica: suma infinita (pregunta 3), la tarea de conexión consiste en reconocer los siguientes aspectos:

- Si se considera el segmento de dimensión 1, es decir, el segmento real [0, 1], cada punto del proceso de bisección se puede identificar con cada uno de los sumandos de la suma infinita de la pregunta 3.
- Que la suma infinita, numéricamente representa la suma infinita de los segmentos que son resultado de las bisecciones y que, por tanto, una solución explícita de la serie es la respuesta correcta a la primera pregunta.
- Una respuesta de la pregunta 1 debe ser asociada y coherente con la respuesta de la pregunta 3.

Ya dijimos anteriormente que uno de nuestros objetivos era reflexionar sobre la posible importancia de la tarea de conexión en la actividad matemática. Para ello, hemos entrevistado a 6 estudiantes. La entrevista se diseñó de manera que las preguntas que hacía la entrevistadora permitieran al estudiante realizar dicha tarea de conexión, es decir, que la entrevistadora inducía dicha tarea pero sin llegar a ser una intervención didáctica.

En la entrevista se presentaron los problemas 1, 3 y 4 del cuestionario; una vez resueltos estos problemas se les presentaba la pregunta 2, para que la trataran de resolver nuevamente. Esta última había sido la pregunta del cuestionario más paradójica y con mayor dificultad para los alumnos.

Al finalizar la entrevista, 5 de los 6 alumnos terminaron mostrando respuestas coherentes en los 4 problemas. Concretando, para llegar a esta coherencia ha sido fundamental que los estudiantes:

- Reconozcan en todas las preguntas el proceso de divisibilidad infinita, con los dos tipos de iteraciones, la divergente y convergente.
- Establezcan la relación y conexión entre las preguntas a través de la sucesión númerica, 1/2, 1/4, etc.

Hemos identificado además que dicha tarea puede favorecer:

- La aparición de un conflicto y la consciencia de la paradoja en la mente del estudiante cuando hay por lo menos una respuesta correcta en algunos de los problemas. Algunos de ellos no se habían percatado de la paradoja a qué llevaba el razonamiento de los problemas. Sin embargo, después de relacionarlos y poder hacer las conexiones matemáticas entre ellos, al comparar la respuesta correcta con las no correctas, (matemáticamente hablando), se les hacía presente la paradoja. Uno de ellos mantuvo el conflicto generado por la paradoja en todos los problemas hasta el final de la entrevista.
- La «autobúsqueda» de coherencia, de manera consciente o no, en las respuestas y afirmaciones relacionadas con las preguntas (a través de la tarea se llega a una mayor consciencia de la semejanza de la situación planteada en cada problema). De forma espontánea los mismos estudiantes se exigían una respuesta coherente después de identificar la relación existente en los problemas y después de haber hecho las conexiones matemáticas entre ellos.
- La identificación de la idea o creencia errónea que no permite dar una respuesta consistente al estudiante. Por ejemplo, en una de las entrevistas, la del único alumno que mantiene respuestas incoherentes al final de la misma, se identifica el motivo o la idea errónea del estudiante que no permite la coherencia de sus respuestas: sostiene firmemente que 1,999... es menor que 2.

Uno de los motivos de la presencia de respuestas incoherentes es la falta de consciencia por parte de los estudiantes de que están resolviendo un mismo problema representado de diferente forma…

A modo de conclusiones

De las muchas conclusiones que obtuvimos en nuestra investigación, sólo resaltaremos tres aspectos con fuertes implicaciones en la planificación de la docencia:

- Las respuestas de los estudiantes están influenciadas por los lenguajes matemáticos usados en el enunciado de los problemas. Cada registro de representación tiene unas «limitaciones y oportunidades». Por tanto, es importante detectar las limitaciones y explotar las oportunidades de comunicación que ofrece el registro de cada enunciado, es decir, la figura geométrica, el gráfico, el dibujo, la expresión algebraica, etc.
- El estudiante posee ideas inconsistentes, y no siempre se mantiene coherente cuando resuelve un

mismo problema expresado en diferente forma. El alumno, entonces, puede manifestar ideas y concepciones diferentes con respecto a un mismo concepto matemático, en nuestro caso, del infinito actual.

- La importancia de inducir en los estudiantes las tareas de conexión para ayudarles a construir un pensamiento coherente con sus propias ideas y esquemas.

Bibliografía

AZCÁRATE, C. (1990): *La velocidad: introducción al concepto de derivada*, Tesis Doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona.

ALINE, R. y R. SCHWARZENBERGER (1990): «Research in teaching and learning mathematics at an advanced level», en TALL, D. (ed.): *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht/Boston/London.

DUVAL, R. (1996): «Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques?», *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 6, 3, pp. 349-382. [Versión consultada: «Quale cognitivo per la didattica della matematica?» *La Matematica e la sua Didattica*, 3, 1996, 250-269].

DUVAL, R. (1999): «L'Apprendimento in matematica richiede un funzionamiento cognitivo specifico?», *La Matematica e la sua Didattica*, 1, 17-42.

FISHBEIN, E. (1982): «Intuition and proof», *For the Learning of Mathematics*, Vol. 3, 2, 9-19.

FISHBEIN, E. (1998): «Conoscenza intuitiva e conoscenza logica nell'attività matematica», *La Matematica e la sua Didattica*, 4, 365-401.

GARBIN, S. y C. AZCÁRATE (2000): «Estudio sobre esquemas conceptuales e incoherencias de estudiantes de bachillerato en relación con el infinito actual expresado en diferentes lenguajes matemáticos», *Educación Matemática*, 12. 3, 5-18.

TALL, D. (1995): «Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking», *Actas del PME 19*, Vol. 1, 61-75.

TALL, D. (1996): *Conferencia plenaria de clausura del ICME-8*, Sevilla.

TALL, D. y S. VINNER (1981): «Concept image and concept definition in mathematics with particular references to limits and continuity», *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 12, 2, 151-169.

TIROSH, D. (1990): «Inconsistencies in students' mathematical constructs», *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12, 111-129.

Sabrina Garbin
Carmen Azcárate
Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales. Universidad Autónoma de Barcelona


34

Los datos clínicos de un sanatorio permiten saber que el 99 % de las intervenciones quirúrgicas de apendicitis son satisfactorias. Un enfermo sabe eso y le pregunta al cirujano que le va a operar: "¿Cuántas veces ha realizado usted esta intervención?" El cirujano le responde: "200, y todas con éxito". Si tú fueras el enfermo, ¿te sentirías tranquilo o te echarías a temblar después de oír al cirujano?