

El seminario de problemas: un espacio para la alfabetización en resolución de problemas

**Roberto Núñez Malherbe
Concepción Valdés Castro
Mayra Solana Sagarduy**

ES UN HECHO universalmente reconocido que el comienzo del estudio de la matemática en el nivel superior presenta serias dificultades para la mayoría de los estudiantes, muy especialmente para aquellos que inician carreras con un alto grado de profundización en esta disciplina, como ocurre con la carrera de Matemática (ver, por ejemplo Guzmán y otros, 1998). Estas dificultades pueden ser de diversos tipos. En particular, la abstracción que presenta esta disciplina en el nivel superior, la densidad de la materia a cubrir en cada clase, así como la incertidumbre creada por las nuevas concepciones del rigor y de lo que es un problema en matemáticas conlleva a un considerable aumento en las exigencias en cuanto al conocimiento y las habilidades de tipo metamatemático de los estudiantes.

Entre las posibles acciones que se pueden realizar, con el fin de amortiguar esta situación, se proponen diferentes tipos de cursos propedéuticos que promuevan la realización con los estudiantes de actividades de repaso y orientación. Sin embargo, para que estos cursos sean verdaderamente efectivos deben propender al desarrollo en los estudiantes de habilidades de tipo metacognitivo que les permitan, por ejemplo, el autodiagnóstico de sus dificultades y cómo superarlas, optimizar sus recursos personales, organizar sus conocimientos. Para ello es necesario que los profesores expliciten a los estudiantes la aparición de estas nuevas habilidades, dentro de la actividad matemática y en su aprendizaje.

En el currículo de la carrera de Matemática en la Universidad de La Habana aparece la asignatura «Seminario de Problemas», situada en el primer año de la carrera. Se trata de una asignatura para cuyo desarrollo se dispone de relativamente poco tiempo (32 horas lectivas), cuyo objetivo general es introducir a los estudiantes, desde el primer año, en una de las actividades más importantes de la labor del profesional matemático: la resolución de problemas.

En el currículo del primer año de la carrera de Matemática en la Universidad de La Habana aparece la asignatura «Seminario de Problemas», cuyo objetivo general es introducir a los estudiantes en la *resolución de problemas matemáticos*. Los autores consideran que el poco tiempo de esta asignatura puede ser utilizado teniendo en cuenta la unidad dialéctica entre lo afectivo y cognitivo, de forma que contribuya a la iniciación de los estudiantes en una concepción de la Matemática como un cuerpo dinámico en constante desarrollo y enriquecimiento, en el papel que la actividad colectiva juega dentro del proceso de resolución y validación de los problemas matemáticos e, incluso, en la propia apreciación del término «problema matemático». El presente trabajo tiene el propósito de compartir nuestras experiencias y reflexiones acerca de cuál puede ser el diseño de este tipo de asignatura, a fin de crear un *espacio vivencial* que garantice una *alfabetización* de los estudiantes en la resolución de problemas.

En su existencia, esta asignatura ha transitado por diferentes formas de organización. En una primera etapa se adoptó la forma de tutoría individual, en la cual cada alumno trabajaba durante todo un semestre del año académico, asesorado por un profesor, en la resolución de algún problema matemático a su alcance. Varias son las razones por lo que esta forma organizativa no produjo los frutos esperados: en primer lugar, el espectro de estrategias a las que se enfrentaba el estudiante dependía del problema seleccionado y, por tanto, en la mayoría de los casos resultaba reducido; en segundo lugar, la multiplicidad de tutores, cada uno con sus propios puntos de vista en relación con el problema que planteaba, no facilitó una acción pedagógica uniforme sobre estudiantes con casi ninguna experiencia en la resolución de problemas matemáticos y finalmente, pero no menos importante, faltaba la influencia que la interacción grupal podía ejercer en cada uno de los estudiantes.

Estas dificultades determinaron la necesidad de modificar el trabajo docente en esta asignatura de modo que su contribución al desarrollo de habilidades propias de la resolución de problemas resultara más efectiva. Concebimos, entonces, nuestra acción educativa en el marco del planteamiento, la resolución y discusión de problemas variados en el aula y la utilización de métodos grupales. Las experiencias acumuladas en el desarrollo de esta asignatura durante 4 cursos académicos nos han permitido reelaborar y adecuar progresivamente las ideas iniciales. Compartir tales reflexiones es el propósito de este trabajo.

La estrategia didáctica: fundamentos y concepciones

Hoy en día, las teorías pedagógicas más avanzadas reconocen la significación de la resolución de problemas en el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Las diferencias esenciales se establecen al construir los modelos teóricos fundamentales a través de los cuales puede dirigirse este proceso.

Kilpatrick (1985, citado por Puig y Cerdán, 1996) sintetiza las diferentes opciones utilizadas generalmente en la instrucción de la resolución de problemas, en dependencia de la forma en que en las mismas se producen y relacionan la actividad del instructor y de los aprendices. Esta síntesis abarca:

- la concepción del carácter implícito del aprendizaje de la resolución de problemas a través del propio ejercicio de esta actividad;
- la enseñanza explícita de instrucciones o algoritmos procedimentales que faciliten la interiorización en el aprendiz de las estrategias heurísticas que se aplican en la resolución de problemas;
- la concepción del aprendizaje por análisis y comparación de la actuación propia del sujeto (el alumno) con

*Hoy en día,
las teorías
pedagógicas
más avanzadas
reconocen
la significación
de la resolución
de problemas
en el proceso
de aprendizaje
de los estudiantes.
Las diferencias
esenciales
se establecen
al construir
los modelos
teóricos
fundamentales
a través de
los cuales
puede dirigirse
este proceso.*

la de expertos competentes (los profesores), preferiblemente en los casos en que ésta se lleva a cabo siguiendo las ideas de los propios estudiantes o cuando se resuelven problemas cuya solución no se ha preparado previamente;

- el aprendizaje derivado de la explotación de la comunicación y el análisis crítico de las ideas entre los propios aprendices en la resolución de un determinado problema;
- el aprendizaje como producto de la reflexión en torno a los aspectos de carácter metacognitivo cuya manifestación ha determinado aceleraciones o retardos en el proceso resolutivo.

Cada uno de estos modos de concebir el proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas enfatiza direcciones esenciales a través de las cuales transcurre el tránsito de *aprendiz a experto* en resolver problemas. Argumentaremos por qué estimamos que esta competencia generalmente se alcanza cuando, en la *actividad sistemática de resolución de problemas concretos*, el individuo, *simultáneamente, recibe instrucciones específicas sobre formas ya establecidas de atacar ciertas clases de problemas, intercambia ideas con sus colegas, imita el comportamiento de modelos ya reconocidos y evalúa críticamente comportamientos propios o ajenos.*

La multiplicidad de enfoques, señalada antes, es generada por la función que se asigna a la resolución de problemas en la enseñanza de la Matemática y depende, por una parte, del modelo epistemológico implícito que sostiene la noción de *problema matemático* y, por otra, de la creencia que se tenga de lo que significa *enseñar y aprender matemática*.

Se entenderá aquí por *problema matemático toda situación vinculada al universo de la Matemática que, a través de un enunciado coherente, exprese la necesidad de la búsqueda de respuestas a interrogantes cognitivas, para la cual no se dispone, a priori, de un procedimiento predeterminado.*

Como es bien conocido, los trabajos de Polya (1974, 1962-65) constituyeron el

primer intento de un análisis sistemático de la actividad de resolución de problemas matemáticos y, además, al considerar que esta actividad podía ser objeto de instrucción, llamaron la atención de los investigadores en Educación Matemática en la problemática de la enseñanza y aprendizaje de este tipo de actividad.

Las concepciones iniciales sobre el entrenamiento en la resolución de problemas estaban enfocadas básicamente hacia la instrucción explícita de las estrategias generales identificadas por Polya. Al tratar de llevar a la práctica estas concepciones, se presentaron serias dificultades que motivaron la aparición de enfoques alternativos que incorporaron otros elementos cuya significación en el proceso de resolución de problemas ha sido suficientemente demostrada (Lester, 1994).

Este desplazamiento, sin embargo, no siempre ha subrayado explícitamente la necesidad, más que de la instrucción, de la *educación* de los estudiantes en la resolución de problemas, entendida no sólo como la consecución de mejores índices en su desempeño –en tanto que «comportamiento cognoscitivo integral» (Delgado, 1999)– al llevar a cabo esta actividad en situaciones concretas, sino como el logro de transformaciones perdurables en el sujeto, tanto en lo que se refiere a su motivación y actitud hacia la misma como a la formación de carácter axiológico que de ella pueda derivarse.

La matemática, como actividad humana, incluye no sólo un universo de problemas, conceptos, formalismos y construcciones, sino también un *punto de vista* sobre este universo. El proceso de enseñanza-aprendizaje de esta ciencia va a verse fuertemente influido por los puntos de vista que sobre este universo tengan tanto el profesor como los alumnos. Lo que los estudiantes puedan aprender o no y la solidez de este conocimiento estará relacionado directamente con la forma en cómo ellos aprenden. El *ambiente sociocultural* en el cual se desarrolla este aprendizaje va a depender y a afectar sus creencias de lo que es la matemática, de cómo ella se produce y se asimila y, lo que resulta especialmen-

*Las concepciones
iniciales
sobre
el entrenamiento
en la resolución
de problemas
estaban enfocadas
básicamente
hacia
la instrucción
explícita
de las estrategias
generales
identificadas
por Polya.*

te importante, de la valoración de sí mismos como aprendices de la matemática. (Schoenfeld, 1989).

D'Amore y Zan (1995), siguiendo a Kilpatrick y Kulm, han identificado tres variables, fuertemente interrelacionadas, que intervienen en la actividad de resolución de problemas y que deben ser tomadas en consideración en el diseño de cualquier acción didáctica dirigida a la educación de los estudiantes en la misma, a saber: el *sujeto que resuelve*, el *espacio problémico* en que debe desenvolverse su acción y el *entorno* (físico, psicológico y social) en medio del cual se desarrolla el proceso de resolución.

El comportamiento de estas variables, a su vez, aparece condicionado por el alcance que se establezca para la acción a desarrollar y por la concepción didáctica bajo la cual se lleve a cabo la misma.

La concepción didáctica basada en el enfoque histórico-cultural de Vigotsky centra su atención, principalmente, en el desarrollo integral de la personalidad y pretende superar aquellas tendencias que han dirigido su interés sobre todo a la esfera cognitiva del hombre. Según este punto de vista el punto nodal del proceso de desarrollo social y humano lo constituye el concepto de actividad, con su atributo esencial: ser actividad productiva, transformadora. Por otra parte, la actividad humana transcurre en un medio social en activa interacción con otras personas, a través de variadas formas de colaboración y comunicación. La actividad de aprendizaje, entendida como el proceso que mediatiza la relación entre el hombre (el sujeto de aprendizaje) y los objetos de la realidad que lo circunda (el objeto de aprendizaje) se concibe aquí en dos planos:

- el intersicológico, como actividad de carácter esencialmente social, que se manifiesta en las interrelaciones de carácter diverso que se establecen entre el profesor y sus alumnos y entre éstos entre sí, y
- el intrapsicológico, como actividad de construcción y reconstrucción interior (y no sólo de registro y observación), por parte del sujeto que aprende, de conocimientos, formas de comportamiento, actitudes, valores, afectos y sus formas de expresión, dependiente de su nivel de desarrollo en un momento histórico concreto en cada uno de estos aspectos.

En su libro *Pensamiento y Lenguaje*, Vigotsky señala:

El análisis que divide al todo complejo en unidades... muestra que existe un sistema dinámico de sentido que representa la unidad de los procesos afectivos e intelectuales. Muestra que en toda idea se contiene, reelaborada, una relación afectiva del hombre hacia la realidad representada en esa idea. (Citado en Colectivo de Autores, 1991).

Esta unidad dialéctica entre lo afectivo y lo cognitivo significa la necesidad de interrelacionar las acciones de instruir y educar. Se trata de aprovechar al máximo todas aquellas posibilidades educativas que brindan las diferen-

tes situaciones de instrucción, en especial cuando estas son concebidas en estrecha relación con las actividades propias de la profesión y en el contexto socio-histórico en que vive el estudiante.

Salvo en los casos de aquellos estudiantes (la minoría) que han recibido preparación específica para participar en competencias a diferentes niveles, el entrenamiento del estudiante promedio que ingresa a la Facultad de Matemática y Computación en la Universidad de La Habana en la actividad de resolución de problemas matemáticos gira, en esencia, alrededor de los denominados *problemas con texto*, caracterizados por un enunciado, relacionado con un área generalmente no matemática, que puede ser modelado a través de ecuaciones o sistemas de ecuaciones algebraicas, fundamentalmente de primero y segundo grado. Las insuficiencias de esta preparación se ponen de manifiesto en algunas de las creencias acerca de la resolución de problemas matemáticos que con más frecuencia se han podido detectar en los alumnos durante más de 20 años de práctica docente¹, las cuales coinciden con las reportadas en otros trabajos (Pozo y otros, 1994), a saber:

- Los problemas matemáticos deben involucrar ecuaciones, números y deben realizarse cálculos para resolverlos.
- Los problemas matemáticos generalmente tienen una única solución correcta que se obtiene por un método que el profesor conoce bien y deben ser resueltos como máximo en 10 minutos. (Prácticamente todos los problemas a los que los alumnos se enfrentan en su tránsito por la escuela están perfectamente definidos, las soluciones están bien determinadas, el método de resolución sigue un algoritmo conocido y lo que se requiere es dominar este algoritmo).
- Mientras más conocimientos matemáticos se tengan más fácilmente será la resolución de problemas matemáticos. (Existe una identificación entre resolución de un problema y conocimiento del algoritmo idóneo).
- Para resolver un problema matemático se requiere de gran práctica en la resolución de este tipo de problemas. (O sea se refiere al entrenamiento en la aplicación del o de los algoritmos necesarios).
- Equivocarse es muy lamentable y además esto puede influir en la opinión que el profesor se forma del estudiante lo que redundará en la calificación posterior.

En particular, esta última creencia, firmemente arraigada en la mayoría de los estudiantes que ingresan en la enseñanza universitaria, es una de las que ejercen un efecto más nocivo en el buen desenvolvimiento de una clase en la que se quiera utilizar un método productivo, donde los errores son *absolutamente* inevitables, tal y como ocurre en el proceso de investigación científica. Una enseñanza (como es la tradicional) que previene a toda costa la equi-

*...no sólo
no es grave
para el público
conocer que
los matemáticos
se equivocan,
sino que
al contrario,
sería
conveniente
que lo supieran.*

¹ Como parte de la experiencia que se reporta, se intentó, a través de la aplicación de un cuestionario exploratorio (adaptado de Callejo, 1996), una caracterización del estado inicial de este sistema de creencias en los estudiantes con los cuales se trabajaría.

Las respuestas a este cuestionario mostraron que los resultados obtenidos no correspondían al comportamiento real de los estudiantes en las sesiones de trabajo, reafirmando de este modo las consideraciones que sobre la efectividad de este tipo de instrumentos han sido expuestas por otros autores (Callejo, 1996).

vocación conduce necesariamente a esta creencia. Concordamos plenamente con Baruk (1985) cuando expresa que «no sólo no es grave para el público conocer que los matemáticos se equivocan, sino que al contrario, sería conveniente que lo supieran. Hacerlos saltar de su posición de superhombres para convertirlos en hombres, con las debilidades propias de la escala humana. Pero más interesante que la descalificación del hombre es la calificación del error, ni infamante ni humillante, sino constituido por el movimiento normal del espíritu».

Schoenfeld (1992, citado por Santos, 1997), por otra parte, subraya la importancia que reviste en el proceso de aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos que los estudiantes se desenvuelvan en un ambiente similar al que viven los matemáticos al trabajar o desarrollar las ideas en esta disciplina. Ello implica la creación de un «clima de resolución de problemas» en el salón de clase que facilite el desarrollo de actividades que propicien la formulación, el intercambio y la evaluación de preguntas y conjeturas, argumentos y explicaciones, que, de algún modo, resulten representativas del quehacer cotidiano de cualquier comunidad matemática.

Si se toma en consideración que en el seno de la comunidad matemática la resolución de problemas se vincula, de un modo u otro, a la actividad investigativa, resulta importante tener también en cuenta las características generales inherentes al desarrollo de las tareas propias de la investigación matemática. Núñez (1999) ha identificado como tales tareas: el análisis de existencia y unicidad, la caracterización, representación, clasificación y comparación de objetos, la generalización de relaciones, la optimización de procesos y la inversión de problemas. Núñez discute, además, otras acciones que se ponen de manifiesto en la resolución de los problemas científicos dentro de la Matemática, como son, por ejemplo, la formulación y validación de conjeturas, la demostración, la experimentación, la inducción, la estimación, por sólo citar algunas.

En consecuencia, el diseño de actividades educacionales *desarrolladoras* (entendido en el sentido *vigotskiano*) y conducentes a establecer un primer encuentro del estudiante con la actividad de resolución de problemas en Matemática (como es el caso de la que nos ocupa) deberá evidenciar, ante todo, esta diversidad de las actividades y la multiplicidad en sus manifestaciones.

El sistema de acciones antes mencionado proporciona una orientación para la concepción y puesta en práctica de este diseño. Por otra parte, el hecho de que en el programa de la asignatura no aparecen predeterminados los contenidos específicos y que tampoco esté prevista una evaluación mediante examen, permite que el profesor, liberado de la presión de tener que recorrer una cierta cantidad de materia estrictamente matemática, y los alumnos, libres de la tentación de modelar su aprendizaje sobre la base de las respuestas que tendrán que dar en el examen, tienen la oportunidad de conocerse mejor, manifestar sus opiniones relativas a lo que significa hacer matemática, al rigor de las construcciones matemáticas, acerca de las diversas estrategias que existen para enfrentar la resolución de los problemas. De esta manera, es factible conocer y tratar de modificar las creencias y actitudes que poseen los estudiantes.

Ejecución

Como se señaló antes, la experiencia fue realizada en el marco de la asignatura «Seminario de Problemas I», durante las primeras cinco semanas del curso, a razón de tres sesiones de trabajo semanales, de una hora y media cada una. Como es fácil comprender, las condiciones referidas y la complejidad propia de la actividad de resolución de problemas no permiten, en general, que en tan corto período de tiempo puedan lograrse progresos significativos en el desarrollo de habilidades, en el estudiante promedio, que lo capaciten para la ejecución de esta actividad con un cierto grado de efectividad, más aún si

Estas creencias y actitudes, aunque no siempre de forma explícita, dirigen el aprendizaje y el comportamiento matemático del alumno, ya que establecen el contexto individual dentro del cual funcionan los recursos, las heurísticas y el control al resolver problemas matemáticos.

se pretenden trascender los objetivos de carácter meramente instructivo.

Sin embargo, este tiempo disponible puede ser utilizado (y así fue concebido el alcance de la experiencia que nos ocupa) para crear *espacios vivenciales* que contribuyan, en una primera instancia, a la percepción por los estudiantes de la Matemática como un cuerpo dinámico en constante desarrollo y enriquecimiento y del papel de la actividad colectiva en el proceso de resolución y validación de los problemas matemáticos e incluso a la reconsideración del término «problema matemático».

Se trata de *alfabetizar* al estudiante en la resolución de problemas, entendiendo bajo esta denominación la realización de actividades de iniciación que, tomando como base la resolución de problemas, logren que se manifiesten y se discutan en la sala de clase un conjunto de creencias y emociones de los alumnos sobre la matemática y la resolución de problemas matemáticos, así como el papel que los alumnos y el profesor pueden jugar en el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de esta disciplina.

Estas creencias y actitudes, aunque no siempre de forma explícita, dirigen el aprendizaje y el comportamiento matemático del alumno, ya que establecen el contexto individual dentro del cual funcionan los recursos, las heurísticas y el control al resolver problemas matemáticos. Tener conciencia de esta influencia y actuar con ella, y no contra ella, significa ejercer un dominio sobre las propias emociones y saber comprender y respetar las ajenas. Esto es lo que Gómez-Chacón ha denominado *alfabetización emocional* y que engloba aspectos tan diversos como el control de impulsos y fobias en relación a la asignatura (lo que permite desarrollar la atención necesaria), la autoconciencia, la motivación, el entusiasmo, la perseverancia, la empatía, etc.

Cuando un alumno comprende que la resolución de problemas involucra interrupciones y bloqueos, puede percibir su frustración como una parte habitual en el proceso de resolución y no como una señal que induzca el abandono del problema. Del mismo modo, los estudiantes pueden aprender que la alegría que les produce el descubrimiento de una solución no debe provocar el relax, sino más bien el incentivo para revisar críticamente las soluciones encontradas, buscar otras soluciones más elegantes o bien enfoques alternativos (Gómez Chacón, 1998).

Se describirán a continuación algunas de las incidencias ocurridas en el desarrollo de la experiencia como una vía para evaluar el logro de los objetivos vivenciales perseguidos.

a) El primer problema planteado por el profesor (De Guzmán, 1991), fue el siguiente:

¿De qué forma es posible dividir en dos partes el conjunto de los números naturales comprendidos entre 1 y 26 (ambos inclusive) de manera que ninguno de los números de una parte aparezca también en la otra, y de modo que la suma de los números incluidos en cada una de las partes sea la misma?

El trabajo individual de los estudiantes sobre este problema permitió, bajo diferentes formas, poner en evidencia la creencia generalizada acerca de la «respuesta positiva» que debe asociarse a la interrogante cognitiva cuya búsqueda el problema plantea: algunos estudiantes encontraron formas (naturalmente, erróneas) de hacer la subdivisión, otros, aun ante los intentos fallidos de realizar tal división, no fueron capaces de considerar la posibilidad de la imposibilidad, y, sólo una minoría, aceptó y argumentó rigurosamente que tal subdivisión es imposible.

Esta dinámica de trabajo en el grupo no sólo proporcionó a los estudiantes una vivencia concreta que contribuyera al proceso de modificación de un convencimiento erróneo, sino que, además, permitió introducir las fases elaboradas por Polya para el proceso de resolución de problemas relacionadas con la posibilidad de una comprensión inicial incorrecta del problema (cuando asumieron que la división del conjunto inicial debía ser «equitativa» en cuanto al número de elementos de cada subconjunto), así como con la violación de la fase de la verificación (cuando se proporcionaron formas de hacer la subdivisión).

Las características del problema facilitaron la acción educativa en dos direcciones fundamentales: la relacionada con el análisis sobre la generalización o aplicación contenida en la última fase y la discusión de algunas de las vías de problematización a través de las cuales la comunidad matemática construye su espacio problémico (ver Núñez, 1999), a saber:

- Por existencia (¿es posible realizar tal división para algún natural n ?).
- Por caracterización (¿para qué número natural n tal división es posible?).

Estos nuevos problemas permitieron enfrentar al estudiante a algo apenas asociado a su sistema de creencias: el papel que la experimentación puede desempeñar en el proceso de resolución de un problema matemático. También ellos propiciaron la vinculación de los resultados de esta actividad experimental con la formulación y reformulación de conjeturas (primeramente se conjeturó que la división era posible sólo para los números naturales n de la forma $n = 4k$, modificándose en el transcurso del proceso resolutivo a través de la inclusión adicional de los números de la forma $n = 4k - 1$).

El tránsito de la resolución de estos problemas por la vía de la conjeturación permitió, a su vez, confrontar el punto de vista existente entre los estudiantes en cuanto a la suficiencia de la base experimental sobre la cual se apoya una conjetura para la validación de la misma con la necesidad de una argumentación demostrativa, entendida como conjunto de acciones dirigidas al establecimiento de la veracidad o falsedad de una determinada proposición matemática (Núñez, 1999).

Las distintas formas en que es posible realizar la división del conjunto, cumpliendo con las exigencias que el texto

plantea, permitieron contrarrestar, nuevamente, la concepción relacionada con la unicidad en la forma de la solución a un problema.

Finalmente, el cuestionamiento acerca de la posibilidad de hacer una subdivisión del conjunto, con iguales condiciones, pero en un número mayor de partes, posibilitó el anticipar la idea de que los verdaderos problemas deben siempre permitir derivar preguntas nuevas (Bouvier, 1981, citado por Parra, 1990).

b) La diferencia de actitud de los estudiantes cuando se enfrentan a problemas que consideran «matemáticos» y a aquellos que clasifican como «juegos» o «de lógica» se puso de manifiesto cuando se les planteó la siguiente situación (modificada de De Guzmán, 1991):

Al terminar una carrera, sus participantes manifestaron lo siguiente:

Antonio: «Yo no fui cuarto»

Bernardo: «Carlos llegó tercero»

Carlos: «Antonio llegó inmediatamente después de Ernesto»

Daniel: «Tres llegaron antes que yo»

Ernesto: «Daniel no ganó»

Si se sabe que, por alguna extraña razón, los dos primeros clasificados (y sólo ellos) mintieron, determinar la posición en que los corredores llegaron a la meta.

Estos nuevos problemas permitieron enfrentar al estudiante a algo apenas asociado a su sistema de creencias: el papel que la experimentación puede desempeñar en el proceso de resolución de un problema matemático.

El nivel de intercambio de ideas y de participación de los estudiantes en la resolución de este problema en comparación con el primero, resultó considerablemente mayor, lo cual no impidió que el análisis resultara errático e incompleto. Sin embargo, ello no fue advertido por los estudiantes. En particular, cuando varios llegaron a una misma distribución en la posición de los corredores que era compatible con las condiciones del problema, asumieron esta coincidencia como una forma de comprobación de la pertinencia de la solución encontrada. Esto explica las muestras de perplejidad que se manifestaron en el grupo cuando un estudiante mostró una distribución de posiciones diferente a la que antes había aparecido. Fue precisamente, en el momento en que los estudiantes defendieron ante el

colectivo sus respectivas soluciones, que se pusieron en evidencia las insuficiencias en el proceso de razonamiento, fundamentalmente por la incompletitud del análisis casuístico realizado.

La observación de cómo los estudiantes se resistían a aceptar la diversidad de posibilidades en la distribución final de posiciones de los corredores nos sirvió para corroborar lo arraigada que pueden estar en los estudiantes ciertas convicciones sobre la resolución de problemas matemáticos. Llegaron al punto de considerar que el problema debía considerarse mal planteado debido a la no unicidad de su solución.

La vivencia resultó todavía más impactante cuando se exhibieron nuevas soluciones bajo la interpretación, en términos estrictamente lógicos, de la afirmación «Tres llegaron antes que yo», también válida para el corredor que llegó en quinto lugar. Algunos estudiantes manifestaron, incluso, sentirse insatisfechos ante lo «primitivo» de la forma de realizar el análisis, «sin la utilización de ecuaciones o algo similar, más matemático».

c) Diversos autores (Puig y Cerdán, 1996; Santos, 1997) reconocen la conveniencia de que, en ocasiones, el maestro intente resolver, frente a sus alumnos, problemas que sean nuevos para él, como una forma realista de ilustración de la trayectoria cognoscitiva que recorre el experto al llevar a cabo la actividad de resolución de un problema.

En el desarrollo de la experiencia esta ocasión se presentó cuando un alumno planteó al profesor el siguiente problema, totalmente desconocido para él:

Encontrar todos los números enteros a , b , c y d , con $a < b < c < d$, tales que

$$\frac{abr}{(c-1)(b-1)(c-1)} = d$$

Se decidió posponer la discusión de la resolución del problema en el aula para la siguiente sesión de trabajo, dejando propuesta la tarea a la totalidad del colectivo (incluido el profesor). Aun así, esta situación, ya desde este momento

La experiencia que se aporta en el presente trabajo proporciona una alternativa de acción didáctica sobre esta importante componente de la actividad de resolución de problemas en períodos de tiempo relativamente cortos y grupos de estudiantes con un sistema de creencias no siempre acordes con lo que significa resolver problemas en Matemática.

inicial, permitió la reflexión en torno al papel del docente en este tipo de actividad y a las valoraciones que sobre el mismo generalmente poseen los estudiantes.

Cuando en la próxima sesión se discutieron las vías de solución propuestas por los estudiantes, pudo constatar que sólo aquellos que poseían una experiencia previa en la resolución de problemas matemáticos (por haber sido entrenados para su participación en competencias a diferentes niveles) pudieron aportar alguna alternativa promisoriosa que condujera a la solución del problema planteado. Ello permitió poner de manifiesto ante el grupo la dependencia del éxito en el desempeño de esta actividad de la especificidad del entrenamiento recibido.

Sin embargo, posiblemente la vivencia más rica se obtuvo cuando uno de los estudiantes, con particular predilección y destreza en el uso de las computadoras, planteó haber elaborado un programa de experimentación numérica cuya aplicación le había aportado infinidad de cuádruplos (a, b, c, d) que daban solución al problema. La discusión de la solución aportada por el docente, en la que sólo aparecía un número finito de tales cuádruplos, puso en evidencia dos aspectos de suma importancia y con una fuerte interrelación dialéctica: el trascendental apoyo que los dispositivos computacionales pueden brindar al desarrollo de la actividad de experimentación en Matemática y, al mismo tiempo, la necesidad del control de los resultados obtenidos con estas formas de experimentación a través de otras vías.

Conclusiones

Las conocidas etapas en el proceso de resolución de problemas identificadas por Polya presuponen implícitamente, en el sujeto, un cierto acondicionamiento que actúa como catalizador en el desarrollo de dicho proceso.

El acondicionamiento adecuado para la resolución de problemas matemáticos contempla, en su concepción más abarcadora, no solamente un conocimiento matemático debidamente estructurado, sino también un buen desarrollo de habilidades metacognitivas propias del trabajo en Matemática y de la actividad específica de resolución de problemas, lo que incluye una disposición intelectual y emocional que permita al individuo enfrentar y superar los múltiples escollos que, por lo general, tal actividad implica.

La experiencia que se aporta en el presente trabajo proporciona una alternativa de acción didáctica sobre esta importante componente de la actividad de resolución de problemas en períodos de tiempo relativamente cortos y grupos de estudiantes con un sistema de creencias no siempre acordes con lo que significa resolver problemas en Matemática.

El desarrollo de la experiencia mostró que se producen cambios significativos en la actitud de los estudiantes (y de los profesores), cuando la actividad de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas se lleva a cabo bajo

«reglas del juego» diferentes de aquellas en que habitualmente se desarrollan las asignaturas tradicionales, a saber:

- la ausencia de exámenes en el sentido acostumbrado del término;
- la amplia posibilidad de discusión y emisión de opiniones por parte de los estudiantes y los profesores;
- el trabajo con problemas no enmarcados en una teoría determinada y, por tanto, no sujetos a una «enseñanza» previa (esto impide «culpar» a la ausencia de conocimientos de los pobres desempeños en el proceso resolutorio);
- el enfrentamiento del error sin sensación de «culpa» para el estudiante y de «ofensa» para el profesor.

Estos cambios de actitud se manifiestan en:

- una revelación más espontánea de los bloqueos y creencias de los estudiantes en relación con lo que significa «hacer matemática» y «resolver problemas matemáticos»;
- la creación de un clima de colaboración e integración que trasciende el distanciamiento acostumbrado entre estudiantes y profesor;
- mayor receptividad de los estudiantes a los consejos y recomendaciones.

Los autores consideran que el «Seminario de Problemas» provee de un espacio vivencial apropiado para crear en los estudiantes las aptitudes básicas, sobre todo desde el punto de vista emocional y afectivo, necesarias para afrontar la resolución de problemas matemáticos. Pero, como todo proceso de alfabetización, éste no es más que el inicio del desarrollo educativo del estudiante en relación con esta actividad. Se ha comprobado que el entrenamiento del uso de las estrategias determinadas en la resolución de problemas está fuertemente condicionado por el contenido específico y que este conocimiento no se transfiere con facilidad de unos dominios a otros (Schoenfeld, 1985). Por ello el entrenamiento en estas estrategias debe ser objeto de estudio en cada una de las disciplinas matemáticas particulares. Las asignaturas tradicionales del currículo pueden ser desarrolladas trabajando en un ambiente problemático, mediante un uso sistémico de diferentes tipos de problemas (Núñez, 1999; Sánchez y Valdés, 1999). En términos generales, ello significa una reconceptualización del papel que la resolución de problemas debe desempeñar en cada una de estas asignaturas.

Bibliografía

- BARUK, S. (1985): *L'Age du Capitaine*, Éditions du Seuil.
- CALLEJO, M.L. (1996): «Evaluación de procesos y progresos del alumnado en la resolución de problemas», *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, n.º 8.
- COLECTIVO DE AUTORES (1991): *Tendencias Pedagógicas Contemporáneas*, CEPES, Habana.

*Se ha comprobado
que
el entrenamiento
del uso
de las estrategias
determinadas
en la resolución
de problemas está
fuertemente
condicionado
por el contenido
específico
y que este
conocimiento
no se transfiere
con facilidad
de unos dominios
a otros.*

**Roberto Núñez
Concepción Valdés
Mayra Solana**
Universidad de la Habana

- D'AMORE, B. y R. ZAN (1995): «Mathematical Problem Solving», *Italian Research in Mathematics Education: 1988-1995*.
- DE GUZMÁN M., B. R. HODGSON, A. ROBERT y V. VILLANI (1998): «Difficulties in the Passage from Secondary to Tertiary Education», en: *Proceedings of the international Congress of Mathematicians*, Berlin.
- DE GUZMÁN, M. (1991): *Para Pensar Mejor*, Editorial Labor, Madrid.
- DELGADO, R. (1999): *La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Dos elementos fundamentales para lograr su eficacia: la estructuración sistémica del contenido de estudio y el desarrollo de las habilidades generales matemáticas*, Tesis en opción al grado de Doctor en Ciencias Pedagógicas, Instituto Superior Politécnico «José Antonio Echeverría».
- GÓMEZ-CHACÓN, I.M. (1998): «¿Es la actividad matemática algo emocional?», *La Gaceta*, vol. 1, n.º 3.
- LESTER, F. K. Jr. (1994): «Musing About Research on Mathematical Problem Solving: 1970-1994», *Journal for Research in Math.* vol. 25, 660-675.
- NOIRFALISE, R.(1991): «Connaissances ou capacités?», *REPERES IREM*, n.º 5.
- NÚÑEZ R. (1999), *La Problematicación del Contenido en el Proceso de Formación del Licenciado en Matemática en Cuba*, Tesis Doctoral, Universidad de la Habana.
- PARRA, B. M. (1990): «Dos concepciones de resolución de problemas de matemáticas», *Educación Matemática*, vol. 2, n.º 3.
- POLYA, G. (1962-65): *Mathematical Discovery, vol I y II*, Wiley & Sons.
- POLYA, G. (1974): *Como plantear y resolver problemas*, Trillas, Mexico.
- POZO MUNICIO, J. I. (coordinador) (1994): *La Solución de Problemas*, Santillana.
- PUIG, L. y F. CERDÁN (1996): «Un curso de heurística matemática para la formación del profesorado», *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, n.º 8.
- SÁNCHEZ C. y C. VALDÉS (1999): «Por un enfoque histórico-problémico en la Educación Matemática», *Ciencias Matemáticas*, vol. 17, n.º 2.
- SÁNCHEZ C. y C. VALDÉS (1997): «Ilustración del uso de la Historia de la Matemática en una enseñanza centrada en problemas», *Educación Matemática*, vol. 9, n.º 3.
- SANTOS TRIGO, L. M. (1997): *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*, Grupo Editorial Iberoamericana.
- SCHOENFELD, A. H. (1985): *Mathematical Problem Solving*, Academic Press.
- SCHOENFELD, A.H. (1989): «Problem Solving in Context(s)», en R. I. Charles y E. A. Silver (ed.): *The Teaching and Assesing of Math. Prob. Solving*, vol. 3, NCTM.