

El lenguaje probabilístico en los libros de texto

Juan José Ortiz de Haro
Carmen Batanero Bernabeu
Luis Serrano Romero

EN LOS NUEVOS DISEÑOS curriculares se sugiere adelantar la enseñanza de la probabilidad, y utilizar una metodología apoyada en la simulación y experimentación, indicando como un punto fundamental la adquisición de un lenguaje preciso en relación con el azar y la probabilidad. Por ejemplo, en el diseño curricular del Ministerio de Educación y Ciencia para la enseñanza secundaria obligatoria, en el bloque 5, denominado *Tratamiento del azar* encontramos como concepto a presentar a los alumnos: «Fenómenos aleatorios y terminología para describirlos». Dentro de los procedimientos, se hace referencia a la «utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar». El currículo del MEC no es una excepción, ya que encontramos parecidos términos o expresiones en los diseños curriculares de las comunidades autónomas y en otros países, como Inglaterra o Estados Unidos, que han propuesto reformas recientes sobre el currículo de Matemáticas.

Por otro lado, cuando el alumno se inicia en probabilidad, ha usado con frecuencia términos y expresiones para referirse a los sucesos aleatorios, que con frecuencia no tienen el mismo sentido preciso que adquieren en la clase de matemáticas. En el lenguaje ordinario, tanto en las conversaciones, como en la prensa o literatura encontramos con frecuencia referencias al *azar* y lo *aleatorio*, aunque el significado que se da a estos términos no siempre coincide con el que tratamos de enseñar. Otros términos coloquiales se asocian a los fenómenos aleatorios que pueden presentar matices diferenciados según el contexto, como *casual*, *accidental*, *eventual*, *fortuito*, *impensado*, *imprevisible*, *inesperado*, *inopinado*, *ocasional*, *por suerte* o las expresiones tales como *por chiripa*, *por chamba*, *de rebote*, *de rechazo*, *sin querer*, *sin intención*, *sin plan*.

En este trabajo nos hemos interesado por el lenguaje específico, que en torno al azar y la probabilidad se presenta en

En la actualidad ha adquirido gran importancia la enseñanza de la probabilidad, como se desprende del análisis de los diseños curriculares vigentes, indicando como un punto fundamental la adquisición de un lenguaje preciso en relación con el azar y la probabilidad. Por otro lado una preocupación fundamental del profesor de matemáticas es facilitar el aprendizaje de los alumnos, contando para ello con diversos recursos y materiales didácticos, entre los que destaca el libro de texto.

En este artículo presentamos un estudio empírico sobre el lenguaje relacionado con la probabilidad, utilizado en los libros de texto, en el que se observan diferencias significativas, que pueden tener una influencia en el aprendizaje de los alumnos y que consideramos de interés para el profesorado que imparte esta materia.

los libros de texto, realizando un estudio empírico de los términos y expresiones en dos libros de primer curso del Bachillerato Unificado Polivalente, y es parte de un estudio más completo sobre el tratamiento de la probabilidad en los libros de texto (Ortiz, 1999). Una preocupación fundamental del profesor de matemáticas es facilitar el aprendizaje de los alumnos, contando para ello con diversos recursos y materiales didácticos, entre los que destaca el libro de texto. Como se afirma en el informe Cockcroft (1985: 114) «los libros de texto constituyen una ayuda inestimable para el profesor en el trabajo diario del aula». Y por su parte Rico (1990: 22) señala que: «el profesor conserva, mantiene y transmite el saber institucionalizado en los manuales, donde aparece seleccionado y adecuadamente estructurado».

Cuando queremos plasmar en un texto una ciencia como la Matemática, que está en continuo desarrollo y expansión, los imperativos didácticos nos obligan a realizar una transposición didáctica (Chevallard, 1985), para transformar el *saber sabio* en *saber escolar*, asequible a los alumnos. Este delicado proceso introduce a veces sesgos o carencias que pueden tener una influencia en el aprendizaje de los alumnos. El lenguaje de los libros de texto es un aspecto relevante en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, por lo que creemos suficientemente justificado nuestro estudio.

Para llevarlo a cabo seleccionamos dos libros de texto, que designaremos como [A] y [B] en el resto del trabajo y que aparecen referenciados al final del artículo. Estos libros fueron seleccionados en nuestro estudio previo (Ortiz, 1999), entre los más utilizados por los profesores, por ser de los más completos en cuanto al tema de probabilidad. Corresponden, además, a dos editoriales distintas, uno de ellos correspondiente al año 1975 y otro al año 1991. Estos son los años de comienzo de la reforma correspondiente al período llamado de las Matemáticas Modernas y de la Reforma LOGSE, con lo que esperamos encontrar diferencias significativas entre ambos.

Para fundamentar nuestro estudio, hacemos un breve repaso a las implicaciones que el lenguaje tiene en el estudio de las matemáticas.

El lenguaje en matemáticas

Según Orton (1990) hay muchos aspectos del lenguaje que pueden afectar al aprendizaje de las matemáticas, ya que muchos chicos no entienden los términos que empleamos en clase como parte del vocabulario matemático. Puede que existan problemas incluso cuando el alumno parece emplear un vocabulario apropiado, porque a veces le atribuyen un significado no acorde con el que pretendemos darle en la clase de matemáticas. Lo que reviste un problema no son los términos en sí mismos, sino los conceptos y proce-

Una preocupación fundamental del profesor de matemáticas es facilitar el aprendizaje de los alumnos, contando para ello con diversos recursos y materiales didácticos, entre los que destaca el libro de texto.

sos subyacentes que se están comunicando y el significado que transmiten. Pimm (1987) también llama la atención sobre el uso de palabras del lenguaje cotidiano, con sentido matemático particular, lo cual puede ocurrir en el caso de los términos probabilísticos. Sin embargo, también considera que la analogía (metáfora) por medio de palabras cotidianas es muy importante para la construcción del significado matemático.

Dickson y otros (1991) resumen diversas teorías que señalan la importancia del lenguaje en el desarrollo del pensamiento matemático, desde la tradición conductista americana que consideraba el pensamiento como «habla no vocalizada» hasta el constructivismo de Piaget quien consideraba el pensamiento como «acciones interiorizadas». Para él, el lenguaje sólo podrá reflejar y no determinar el desarrollo cognitivo y la adquisición del lenguaje y los conceptos subyacentes no es en modo alguno pasivo. La comprensión del lenguaje y su uso por el niño depende de su implicación en las situaciones en que se utiliza. Por ello, considera esencial que el niño y el maestro analicen los diversos significados e interpretaciones de las palabras, de manera que cada uno sepa claramente lo que el otro quiere decir al usar determinadas formas lingüísticas.

Rothery (1980) diferencia tres categorías de palabras usadas en la enseñanza de las matemáticas:

- a) Palabras específicas de las matemáticas que, normalmente, no forman parte del lenguaje cotidiano. Una de las características distintivas del discurso sobre las matemáticas es el uso generalizado del vocabulario técnico. Los matemáticos han desarrollado una serie de términos específicos para comunicarse entre sí, que pueden causar problemas en las clases de matemáticas en caso de que los alumnos no lleguen a dominarlo (Pimm, 1987).
- b) Palabras que aparecen en las matemáticas y en el lenguaje ordinario, aunque no siempre con el mismo significado en los dos contextos.

Pimm (1987) indica que la mayor parte de las clases de matemáticas se desarrollan en una mezcla de lenguaje corriente y lenguaje matemático (es decir usando términos ordinarios del lenguaje con un sentido matemático). A causa de interpretaciones lingüísticas diferentes se producen innumerables confusiones cuando el profesor emplea términos «del dialecto matemático» y los alumnos lo interpretan de acuerdo al lenguaje ordinario.

- c) Palabras que tienen significados iguales o muy próximos en ambos contextos.

Como veremos en el caso de la probabilidad la mayoría de los vocablos pertenecen a las dos últimas categorías, aunque, si el niño no está muy familiarizado por el uso, muchas palabras de la categoría c) se convertirán en términos de la categoría b), lo que podrá crear dificultades de comunicación en el aula. Todas estas consideraciones nos han llevado a analizar el lenguaje empleado en los dos libros de texto seleccionados. Los objetivos concretos pretendidos son los siguientes:

- a) Mostrar la riqueza de los medios expresivos probabilísticos en los libros de texto, incluso cuando se trata de unidades pensadas para una primera introducción al tema. Tras esta riqueza de medios expresivos subyace una riqueza conceptual que apunta, por un lado, a la complejidad de los significados de los conceptos matemáticos subyacentes, y por otro, a sus múltiples interrelaciones y a la rica fenomenología de lo aleatorio.
- b) Mostrar las diferencias de medios expresivos en los textos analizados, para ejemplificar como, para un mismo nivel de enseñanza y unos mismos conceptos, es posible una gama de significados a presentar a los alumnos, en función del lenguaje empleado y el modo en que se usa este lenguaje.

A continuación presentamos nuestros resultados, clasificándolos en dos pun-

tos: el lenguaje de lo aleatorio y el lenguaje de la probabilidad.

El lenguaje de lo aleatorio

Un primer punto analizado en nuestro estudio son las palabras y términos usados para hacer referencia al concepto de experimento aleatorio, la aleatoriedad, sus propiedades y ejemplos de situaciones aleatorias. En la tabla 1 recogemos este lenguaje, alfabetizado para cada uno de los dos libros analizados. Podemos clasificar estas palabras y expresiones en los siguientes grupos diferenciados:

- a) Expresiones referidas a la aleatoriedad.
- b) Expresiones referidas a la idea de experimento aleatorio o a sus resultados.
- c) Vocablos relacionados con los dispositivos generadores de resultados aleatorios.

Texto [A]	Texto [B]
Aleatoria (experiencia)	Bolas en urnas
Azar, azaroso	Dado
Baraja, española, francesa	Experimento aleatorio
Bolsa (con bolas)	Fichas numeradas
Cargado, correcto (dado)	Impredecible
Carta	Juegos de azar
Chincheta	Lanzar (dados, moneda)
Dado (caras, trucado, irregular)	Moneda
Extraer (una bola)	Observar (un resultado)
Extracción	Obtener (un resultado)
Ficha	Predecir (un resultado)
Función Random	Proceso (define un)
Imprevisible	Resultado
Incertidumbre, incierto	Rifas (con números premiados)
Inseguridad	Sacar (una carta, una moneda, bolas de urnas)
Juegos de azar: ganar/ perder	Sucesión de elementos (permite obtener una)
Jugada	
Lanzar (un dado, moneda)	
Moneda	
Números aleatorios	
Resultado	
Ruleta	
Sacar (una carta)	
Secuencia (de resultados aleatorios)	
Simétrica (simetría)	
Sondeo	
Suerte	
Tirar (un dado, moneda)	

Tabla 1. Lenguaje utilizado en relación con el experimento aleatorio

Expresiones referidas a la aleatoriedad

Son las que evocan este concepto, sirven para definirlo o precisar sus características. Hemos encontrado entre ellas substantivos como azar:

El azar es considerado como lo más opuesto al orden, cualquier regla, a toda previsión. ¿Cómo poner leyes a algo imprevisible? (Texto [A]: 234)

Sin embargo, aunque es cierto que cada resultado aislado de un experimento es imprevisible, cuando consideramos un gran número de experimentos aparecen leyes de probabilidad. En este sentido la afirmación del texto no es del todo precisa.

Otros vocablos utilizados para caracterizar estas situaciones aleatorias son *incertidumbre*, *inseguridad*:

Estos ejemplos te dan la clave fundamental para empezar a poner números a la incertidumbre; para manejarte bien a pesar de la inseguridad. (Texto [A]: 223)

Asimismo se hace referencia a que «No se puede predecir el resultado» (texto [B]: 40). Esta es una característica que sirve para discriminar experimentos aleatorios y no aleatorios:

Fíjate en que cada vez que realizas los experimentos a), b) y d) no puedes predecir el resultado, ya que en a) puede ser cara o cruz; en b) puede salir 1, 2, 3, 4, 5 o 6, etc. En cambio, en el experimento c) sí puedes predecir el resultado: el trozo de plomo no flota en el agua. Por ello decimos que los experimentos a), b) y d) son aleatorios y que el experimento c) no es aleatorio. (Texto [B]: 40)

A veces encontramos adjetivos que se emplean para calificar este tipo de experiencias, resultados o situaciones y para describir sus características, como en el siguiente ejemplo en las que se consideran sinónimos *azaroso* e *imprevisible*:

La palabra *azaroso* se utiliza como sinónimo de *imprevisible*. (Texto [A]: 234)

Otro término más técnico es el de *aleatoria*, *aleatorio*:

Los acontecimientos cuya realización depende del azar se llaman sucesos aleatorios. (Texto [A]: 227)

Sin embargo, en otras ocasiones la palabra *azar* no se emplea como sustantivo, sino como adjetivo para calificar una situación, especialmente, en lo referido a los juegos:

Se empezó con juegos de azar. (Texto [A]: 222)

Estos juegos se describen en la siguiente forma en el texto [B]:

Una de las características de los llamados «juegos de azar» consiste en que sus resultados están substancialmente de acuerdo con las probabilidades «a priori» (Texto[B]: 39).

Con una connotación de control del azar o bien de resultado inesperado, aparece a veces la idea de *suerte*. De este modo, y coincidiendo con lo expuesto por Hawkins y

La introducción de la idea de aleatoriedad se hace preferentemente de un modo descriptivo y por ello los matices del lenguaje cobran un papel primordial en tal descripción.

otros (1992), se diferencia entre aleatoriedad que es no controlable y la suerte que podría ser controlable o podría favorecer o perjudicar a una persona:

Tuve una tarde de suerte: tiré el dado 180 veces y salió el 6 en 84 ocasiones. (Texto [A]: 234)

Como indica Rescher (1995) la suerte solo tiene sentido si existe aleatoriedad o inseguridad y si el suceso, en cuestión favorece o perjudica a una persona determinada y ocurre, a pesar de no ser previsible su ocurrencia.

Expresiones referidas a la idea de experimento aleatorio o a sus resultados

En general, en estos libros son pocas las ocasiones en que se sugiere a los alumnos realizar experimentos aleatorios y observar sus resultados. La introducción de la idea de aleatoriedad se hace preferentemente de un modo descriptivo y por ello los matices del lenguaje cobran un papel primordial en tal descripción. Las características atribuidas a los resultados de estos experimentos se realizan con palabras tales como *imprevisible*, *incierto*, con las que se pretende que el alumno evoque las propiedades de tales fenómenos, pero cuyo significado no suele clarificarse, quedando abierta la posibilidad de una interpretación ambigua. También la palabra *aleatorio* se usa como calificativo, por ejemplo *número aleatorio* (Texto [A]: 230), a pesar de no haberse dado una definición explícita de dicho término.

Algunos verbos evocan tipos característicos de experimentos considerados aleatorios, como *extraer* (una bola), *lanzar* (un dado, una moneda), *sacar* (una carta), *tirar* (un dado, una moneda). Asimismo encontramos referencias a «obtener un resultado» y «observar un resultado»:

Lanzar una moneda al aire y observar el resultado. (Texto [B]: 40)

Estos verbos evocan una serie de acciones familiares a la experiencia del niño con los juegos que están presentes en su cultura, a la vez que generalmente

les recuerdan unos convenios implícitos en los mismos. Por ejemplo, tiramos o lanzamos un dado, para estudiar el número que resulta en la cara superior, pero no nos preocupamos de su color y suponemos que el dado no cae de canto. Sacamos o extraemos una carta de la baraja, habiendo barajado ésta previamente y sin hacer trampas, suponiendo que la baraja está completa, etc. Sólo hemos encontrado en el texto [B], una mención a la posibilidad de no considerar algunos de los resultados:

Lanzar al aire el dado de la figura 11 y observar el resultado. Supongamos que hay sólo seis resultados posibles (prescindimos de la posibilidad de que el dado quede apoyado en una arista o en un vértice). (Texto [B]: 46)

Suponemos que el alumno comprende bien todos estos convenios, pero no solemos comprobarlos en la clase, por falta de tiempo y algunos investigadores han mostrado como los niños tienen ideas subjetivas respecto a los experimentos aleatorios, por ejemplo, pueden pensar que si se concentran pueden conseguir un tipo dado de resultados, esto es, controlar los experimentos aleatorios.

Otro caso en que aparecen convenios implícitos en los libros de texto es cuando se hace una referencia a la palabra sondeo:

Hacen un sondeo y averiguan que el 40% de los hombres y el 30% de las mujeres estaría dispuesto a ser trasladado. (Texto [A]: 251)

Esta palabra implica la idea de una población subyacente de la que se ha tomado una muestra, de modo que ésta sea representativa de dicha población, es decir, donde se supone que los elementos de la muestra han sido elegidos de alguna forma aleatoria que impide la inclusión de sesgos respecto a los resultados obtenidos. Aunque «sondeo» es un término técnico, su uso se está incorporando progresivamente al lenguaje ordinario, debido al uso creciente de encuestas y *sondeos de opinión*, especialmente por parte de la prensa, por lo que creemos debe resultar familiar a los alumnos a los que van dirigidos los libros.

*Al analizar
el concepto
de aleatoriedad
desde un punto
de vista teórico,
podemos
separar
dos componentes:
los resultados
o secuencias
de resultados,
y el experimento
en sí mismo...*

En el caso de los *juegos de azar* nos referimos a juegos en los que interviene un elemento aleatorio que nos impide tener la seguridad de ganar siguiendo una estrategia dada y también encontramos vocablos específicos asociados a este tipo de juegos, como *ganar, perder, jugada*.

Otra expresión característica es la de *secuencia* (de resultados aleatorios) que evoca una serie de resultados obtenidos al repetir en las mismas condiciones un experimento aleatorio un número dado de veces y que potencialmente podemos continuar en las mismas condiciones iniciales:

Con un programa adecuado se pueden obtener en muy pocos minutos los resultados de una supuesta secuencia de miles de tiradas de dado con la misma eficacia que si, realmente, se efectuaran los lanzamientos. (Texto [A]: 230)

También hemos encontrado para referirse a los resultados de un experimento aleatorio, la palabra sucesión, utilizada en el mismo sentido que la de secuencia:

En el capítulo anterior has estudiado los fenómenos aleatorios. Cada uno de éstos define un proceso que permite obtener una sucesión de elementos. (Texto [B]: 58)

Vocablos relacionados con los dispositivos generadores de resultados aleatorios

Al analizar el concepto de aleatoriedad desde un punto de vista teórico, podemos separar dos componentes: los resultados o secuencias de resultados, y el experimento en sí mismo o bien del dispositivo experimental que produce los resultados aleatorios. En los libros hemos encontrado gran variedad de vocablos que se refieren a los dispositivos que generan resultados aleatorios. La riqueza de este tipo de vocabulario implica la consideración de ejemplos variados de experimentos aleatorios, que no siempre son isomorfos y que, según Truran (1994a), pueden ser considerados como no equivalentes por los niños, incluso en el caso de ser isomorfos.

En primer lugar, nos encontramos con los dispositivos físicos productores de resultados aleatorios, que son suficientemente conocidos por los alumnos a través de sus experiencias con juegos de azar, muy extendidos en nuestra cultura. Entre otros, en los textos se hace referencia a la *baraja (española y francesa), bolsa (con bolas), chincheta, dado, ficha, moneda, ruleta*. Una moneda o un dado pueden ser similares para el alumno, con la diferencia del número de sucesos del espacio muestral implicado, puesto que en ambos casos hay un conjunto discreto de resultados determinados por la posición física del objeto (moneda o dado) al caer después de un lanzamiento. En estos casos, tanto como en la extracción de bolas en urnas, es más fácil visualizar la relación parte-parte en el cálculo de probabilidades, lo que hace que en ocasiones los alumnos no lleguen a usar fracciones sino a comparar los valores absolutos de casos favorables y desfavorables para asignar probabilidades.

Una ruleta visualiza mejor la relación parte-todo y por tanto la regla de Laplace y, además, permite al alumno utilizar consideraciones de tipo geométrico. Tanto este caso como la chincheta permite proponer ejemplos de sucesos no equiprobables. La baraja o la bolsa con bolas permite trabajar situaciones de muestreo sin reemplazamiento que no es fácil ejemplificar con los dispositivos anteriores.

Otras veces se usan contextos de tipo cotidiano para ejemplificar experimentos aleatorios como «sacar una moneda de un bolso que contiene una moneda de 5 pesetas, una moneda de 25 pesetas y una moneda de 50 pesetas» (texto [B]: 54), o problemas relacionados con el tráfico, como en el ejemplo siguiente:

Los expertos de tráfico, sin conocer las intenciones personales de cada conductor, prevén con mucha precisión qué flujo de coches va a haber en cada carretera a cada hora de la semana. Y lo que es más sorprendente, vaticinan con tino el número de accidentes que se van a producir. Estos no son más que algunos de los muchísimos ejemplos que se pueden dar sobre regularidades en situaciones completamente aleatorias. (Texto [A]: 234)

Incluso se menciona la *función random* de un microordenador, que es un dispositivo determinista que permite obtener resultados que a efectos prácticos pueden ser tomados como aleatorios:

Los microordenadores tienen una función (RANDOM) con la que se pueden conseguir números aleatorios. Con un programa adecuado se pueden obtener en muy pocos minutos los resultados de una supuesta secuencia de miles de tiradas de un dado. (Texto [A]: 230)

En ocasiones se especifican las condiciones que deben seguir estos generadores para ser considerados como aleatorios, introduciendo, por ejemplo, la idea de *dado correcto* o *moneda indistinguible* que hace referencia implícita a la equiprobabilidad de sus diferentes resultados, aunque explícitamente no se analizan estas propiedades:

Hemos calculado y representado en los siguientes diagramas, las frecuencias relativas de los resultados de lanzar un dado correcto. (Texto [A]: 229)

El espacio muestral asociado al experimento aleatorio «lanzar al aire dos monedas indistinguibles y observar el resultado» es: $E = \{(c, c), (c, f), (f, c), (f, f)\}$. (Texto [B]: 41)

La equiprobabilidad de los distintos resultados se conceptualiza también mediante el término *simétrico* (*simetría*), que implica que es posible aplicar el principio de indiferencia, debido a las propiedades físicas del objeto. O, por el contrario, se introducen adjetivos como *cargado* para indicar los dispositivos que no cumplen estos requisitos. Estas palabras del lenguaje ordinario adquieren así un significado específico dentro del tema de probabilidad.

Un dado es una figura muy simétrica, a menos que esté preparado (cargado). Hay las mismas razones para esperar que, al lanzarlo al aire, salga el 5 que el 4. (Texto [A]: 222)

A veces este término es sustituido por irregular, como en el siguiente ejemplo:

Vamos a jugar con un dado, pero sospechamos que es irregular. (Texto [A]: 252)

En consecuencia, el vocabulario usado con relación a la idea de aleatoriedad sirve para precisar las características atribuidas a este concepto, así como a la idea de experimento aleatorio y para describir diferentes generadores de resultados aleatorios.

Del análisis detallado de la tabla 1 observamos una mayor riqueza del lenguaje empleado para referirse a la aleatoriedad en el texto [A]. Por un lado, es mucho más variada la gama de adjetivos y expresiones usadas para describir este concepto. Por otro aparecen ejemplos de generadores aleatorios, como la chincheta, para cuyos resultados no puede aplicarse la regla de Laplace y que están, por tanto, asociados a una concepción frecuencial de la probabilidad. Aunque en ninguno de los dos libros se introducen tablas de números aleatorios, el texto [A] hace referencia a este concepto y se habla de la función random de los microordenadores. Todo ello apunta a un mayor énfasis en este libro del concepto de aleatoriedad y experimento aleatorio, así como por la fenomenología del azar que en el texto [B].

...el vocabulario usado con relación a la idea de aleatoriedad sirve para precisar las características atribuidas a este concepto, así como a la idea de experimento aleatorio y para describir diferentes generadores de resultados aleatorios.

El lenguaje de la probabilidad

Hemos encontrado, asimismo, una gran variedad en el vocabulario usado para referirse a la idea de probabilidad y su asignación a los sucesos, para graduar las probabilidades de distintos sucesos o para referirse a diferentes tipos de probabilidades. Este vocabulario se presenta en la tabla 2, que también podemos agrupar en diferentes apartados.

Concepto, interpretación, tipos de probabilidad, concepciones

Un primer grupo de vocablos y expresiones se refiere al concepto de *probabilidad* y a su interpretación, que revisita diversos matices que indican la con-

Texto [A]	Texto [B]
«A priori»	Aplicación
Asignar (probabilidad)	«A priori»
Apuestas (acertar)	Asignamos (probabilidad)
Cálculo (de la probabilidad)	Cálculo matemático (de la probabilidad)
Casi seguro	Ganar (probabilidad de)
Chances	Grado de confianza
Combinatoria, combinatorio	Igualmente posibles
Confianza	Igual probabilidad
Grado de incertidumbre	Juicio de credibilidad
Grado de inseguridad	Juicio de probabilidad
Equiprobable	Número no negativo
Estimar	Posible (resultado)
Igualmente probables	Probabilidad
Imposible (casi imposible)	Probable
Ley de Laplace	
Medir (la probabilidad)	
Odds	
Permutación	
Probable (muy, muy poco, poco, medianamente)	
Probabilidad	
Probabilidad teórica/experimental	
Probabilístico (conocimiento, estudio)	
Posibilidad (mayor, menor)	
Seguro, asegurarnos	
Simetría	
Suceso raro (muy)	
Triángulo combinatorio	

Tabla 2. Lenguaje utilizado en relación con la probabilidad

cepción de probabilidad subyacente, que puede ser laplaciana, frecuencial, subjetiva o formal.

Por ejemplo, en la acepción subjetiva, se considera la probabilidad como el grado de creencia personal en la realización de un suceso. Como tal grado de creencia, diferentes personas podrían asignar diversas probabilidades al mismo suceso. Hemos encontrado esta acepción de probabilidad cuando se habla de *confianza* personal en la realización de un suceso, como en el siguiente ejemplo:

Si el hombre del tiempo nos dijera que la probabilidad de que mañana esté despejado es del 80 por ciento, querría significar que, de 100 días con las circunstancias

meteorológicas observadas hoy, el día siguiente, en 80 de los 100 casos, se ha presentado despejado. Como ves, no te quita las dudas de lo que vaya a pasar mañana, pero no por eso la información deja de ser útil. Puedes preparar tu excursión con bastante confianza de que no será pasada por agua. (Texto[A]: 222)

Una acepción parecida, aunque no totalmente equivalente es cuando la probabilidad se interpreta como *grado de incertidumbre o inseguridad*. En el ejemplo que sigue no queda claro si este es un grado subjetivo (dependiente de cada persona en particular) u objetivo (asociado al suceso en cuestión): «El grado de incertidumbre es mayor o menor en cada caso» (texto [A]: 227) o grado de inseguridad:

La probabilidad es la parte de las matemáticas que trata de manejar con números la incertidumbre (grado de inseguridad). (Texto [A]: 223).

En la definición anterior se hace referencia al carácter numérico de la probabilidad. El texto [B], al introducir la definición axiomática de la probabilidad, utiliza los *números* para definirla de la siguiente forma:

A cualquier suceso $S \in B$ se le puede asociar un número no negativo $p(S)$ que se llama probabilidad de dicho suceso. (Texto [B]: 47)

En esta acepción no se dota de un significado intuitivo a la probabilidad, sino sólo de unas reglas formales que debe cumplir para satisfacer unos axiomas.

La palabra probabilidad se toma en algunos libros como sinónimo de *posibilidad* (*mayor, menor*), aunque matemáticamente estos dos términos no son estrictamente equivalentes:

¿Cómo se mide la mayor o menor posibilidad de que ocurra algo que no es seguro? (Texto [A]: 227)

Por otro lado, se diferencia entre *probabilidad teórica* o «a priori», que es la que viene dada por el cálculo matemático de probabilidades siguiendo la regla de Laplace y *probabilidad experimental*, que es la obtenida a partir de las frecuencias relativas de resultados experimentales, es decir, donde la probabilidad se presenta en su acepción frecuencial:

Podrás decir que la probabilidad experimental de que la chincheta quede con la punta hacia arriba es 30/100. (Texto [A]: 241)

En el texto [B] incluso se menciona explícitamente estas diversas interpretaciones del término «probabilidad»:

Sin embargo, en cada caso nos referimos a un tipo diferente de juicios de «probabilidad». Así, el primero es un ejemplo de lo que podríamos llamar juicio de probabilidades «a priori» y está relacionado con el cálculo matemático de probabilidades; el segundo es un ejemplo de lo que, a falta de mejor expresión, llamaríamos un juicio de credibilidad, y es una medida del grado de confianza que tenemos en la verdad de una cierta afirmación o en el acaecimiento de determinado suceso. (Texto [B]: 39)

Otro término introducido en el texto [A] que guarda relación con el concepto de probabilidad es el de *odds* o

chances, que no suele ser muy utilizado en los libros de texto, por lo que posiblemente el autor ha preferido no traducir esta palabra al castellano, donde podría usarse «posibilidades» para estos términos:

En el mundo anglosajón, tal vez por la afición de las apuestas, en lugar de hablar de la probabilidad de un suceso A, hablan muy a menudo de las «odds in favour of A», que expresaremos en castellano, para evitar confusiones con probabilidad, aunque tal vez de un modo no muy ortodoxo, las chances a favor de A. (Texto [A]: 254)

En el texto [B], hemos encontrado un ejercicio donde se propone un juego y se pregunta cuál es la probabilidad que tiene un jugador de ganar:

A y B juegan a cara y cruz con las siguientes condiciones: si la primera vez sale cara gana A; mas si esto no sucede, se juegan otras dos, y si en las dos sale cara, gana A también. ¿Cuál es la probabilidad que tiene B de ganar? (Texto [B]: 54)

Por último, los textos emplean también el adjetivo *probabilístico* para calificar las situaciones en que se emplea el cálculo de probabilidades:

Pero incluso el conocimiento físico de los últimos elementos constituyentes de la materia es también probabilístico. (Texto [A]: 224)

La probabilidad como función y asignación de sus valores

En el apartado anterior hemos analizado los términos que aluden a la probabilidad como valor numérico, como medida, con diversas variantes. Donde aparece claramente el concepto de probabilidad como función es en el texto [B], que concluye la definición axiomática de la probabilidad así:

El conjunto formado por el espacio muestral E , el conjunto de sucesos y la aplicación p se llama espacio probabilístico y se representa por (E, B, p) . (Texto [B]: 47)

Además de los términos que se refieren al concepto, hemos encontrado un vocabulario bastante variado en lo que se refiere a la forma de asignar o calcular probabilidades. Se usan a veces como sinónimos palabras que podrían tener un significado diferenciado, como asignar (probabilidad), *calcular* o *medir*. Por otro lado este último término tiene un carácter ambiguo que podría llevar al alumno a confusión, debido a la diferencia que toma respecto al significado de «medir» en otros contextos, donde implica una acción física empleando instrumentos de medida: «Asigna tú mismo la probabilidad» (texto [A]: 241), *cálculo* (de la probabilidad), *medir* (la probabilidad):

Vamos a intentar medir la probabilidad de algunos sucesos al lanzar un dado. (Texto [A]: 243)

El procedimiento empleado para realizar estos cálculos puede basarse en la *combinatoria*, o ser de tipo *combinatorio*, o emplear el *triángulo combinatorio*. Se hace

también referencia, como método de cálculo a la *ley de Laplace*:

Esta fórmula de cálculo, llamada «Ley de Laplace» se suele expresar así. (Texto [A]: 244)

Para poder aplicar esta fórmula se exigen condiciones de *simetría* que se refiere a que no hay más razones a favor de uno u otro resultado, pero que no se suele clarificar:

En el dado, en la moneda, en la ruleta, ..., la simetría de la situación nos conduce a un cálculo directo de la probabilidad teórica de los sucesos correspondientes. (Texto [A]: 241)

Todos estos vocablos evocan el enfoque clásico de la probabilidad. En otros casos se alude a que los sucesos son «igualmente posibles»:

Enumerar los casos igualmente posibles del experimento aleatorio que consiste en tirar dos dados a la vez. (Texto [B]: 54)

En caso de emplear una aproximación frecuencial, se habla de *estimar* la probabilidad:

Al final estimamos que la probabilidad de cada suceso elemental es... (Texto [A]: 252)

Finalmente el término *apuestas* puede evocar una asignación de tipo subjetiva:

Las primeras consideraciones matemáticas profundas a propósito de los juegos de azar y de las apuestas. (Texto [A]: 223)

Graduación de probabilidades

Los libros de texto emplean diferentes vocablos para expresar de modo cualitativo una graduación de la probabilidad de los diferentes sucesos. De este modo, hemos encontrado los siguientes vocablos, que hemos ordenado según la mayor o menor probabilidad implicada: *seguro*, *asegurarnos*, *casi seguro*, *probable* (*muy*, *muy poco*, *poco*, *medianamente*), *equiprobable*, *igualmente probables*, *suceso raro* (*muy*), *imposible* (*casi imposible*):

La probabilidad es el número de resultados favorables m , dividido por el número de resultados posibles n , supuesto que éstos sean equiprobables. (Texto [A]: 222)

La única mención que hemos encontrado en el texto [B] sobre este aspecto la realiza en la introducción, donde afirma:

Los libros de texto emplean diferentes vocablos para expresar de modo cualitativo una graduación de la probabilidad de los diferentes sucesos.

En el lenguaje ordinario se usan palabras como probabilidad, probables, ..., al referirnos a determinados sucesos. Así, por ejemplo, se habla de la probabilidad de obtener dos seises al lanzar sobre una mesa dos dados. De que es probable que determinado país consiga la medalla de oro en la prueba de los 100 metros masculinos, en las próximas Olimpiadas. (Texto [B]: 39)

De nuevo la riqueza de vocabulario es mucho mayor en el texto [A]. En el texto [B] no aparecen gradaciones cualitativas de las probabilidades de los sucesos, sino simplemente valores numéricos de las mismas. Se aísla así el trabajo de probabilidades realizado en el aula del uso del mismo en la vida diaria donde con frecuencias hacemos valoraciones del tipo «muy probable», «bastante posible», etc., para referirnos a la verosimilitud de un cierto suceso aleatorio.

No hay tampoco alusión a modos diferentes de obtener los valores de probabilidad, diferentes del «cálculo matemático», puesto que las concepciones subjetivas y frecuencial de la probabilidad no se presentan en el texto. Por consiguiente, no hay referencia a la «estimación» o «asignación subjetiva» de probabilidades. Tampoco se presenta la distinción entre «probabilidades teóricas» y «experimentales», confirmando la falta de conexión entre este tema y el estudio de la estadística. Finalmente, no hemos encontrado tampoco conexión con el tema de combinatoria, puesto que, a pesar de que la mayor parte de los problemas se deben resolver usando conceptos combinatorios, no hay referencias explícitas ni vocabulario o notación que indique esta conexión.

Implicaciones didácticas

En este estudio hemos intentado destacar la importancia del libro de texto como recurso didáctico, que como hemos visto es uno de los más utilizados por el profesorado, así como las posibles limitaciones que pueden existir. Ha quedado igualmente de manifiesto la relevancia que tiene el lenguaje en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, y especialmente el lenguaje utilizado en las nociones de experimento aleatorio y de probabilidad, conceptos muy com-

Juan Jesús Ortiz
Facultad de Educación
y Humanidades de Melilla.
Universidad de Granada.

Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
«Thales»

Carmen Batanero
Facultad de Ciencias
de la Educación de Granada.
Universidad de Granada.

Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
«Thales»

Luis Serrano
Facultad de Educación y
Humanidades de Melilla.
Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
«Thales»

plejos y que nos ha permitido mostrar la gran riqueza y diversidad de términos existentes en los dos textos analizados. Aunque nuestro análisis se ha llevado a cabo en los libros de bachillerato, anterior al actual plan de estudios, sus resultados y metodología son aplicables al análisis de los libros vigentes en el marco de la LOGSE. También nos ha mostrado la variabilidad de expresiones que con relación a la aleatoriedad y probabilidad pueden aparecer en dos libros que han sido escritos para el mismo nivel de enseñanza.

Estos dos puntos sirven de nuevo para mostrar el importante papel de los escritores de libros de texto que marcan un nuevo nivel en la transposición didáctica del tema, al fijar y concretar lo establecido en los diseños curriculares, así como del profesor que, finalmente, en el aula decide no sólo el libro de texto que recomienda a sus alumnos sino las partes de éste a usar en la enseñanza y los recursos con que debe ser complementado. Esperamos con este trabajo contribuir a la mejora de la enseñanza de las matemáticas, en particular de la aleatoriedad y la probabilidad, en los niveles de la Educación Secundaria, así como facilitar la labor del profesorado en el aula.

Referencias bibliográficas

- CHEVALLARD, Y. (1985): *La transposition didactique*, La Pensée sauvage, Grenoble.
- COCKCROFT, W. H. (1985): *Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid.
- DICKSON, L., M. BROWN y O. GIBSON (1991): *El aprendizaje de las matemáticas*, Labor, Madrid.
- HAWKINS, A., F. JOLLIFFE y L. GLICKMAN (1992): *Teaching statistical concepts*, Longman, London.
- ORTIZ, J. J. (1999): *Significado de conceptos probabilísticos en los textos de Bachillerato*, Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- ORTON, A. (1990): *Didáctica de las matemáticas*, MEC y Morata, Madrid.
- PIMM, D. (1987): *Speaking Mathematically*, Routledge and Kegan Paul, New York.
- RESCHER, N. (1995): *Luck. The brilliant randomness of everyday life*, Harper Collins, Canada.
- RICO, L. (1990): «Diseño curricular en Educación Matemática: Una perspectiva cultural», en S. LLINARES y V. SÁNCHEZ (eds): *Teoría y Práctica en Educación Matemática*, Alfar, Sevilla, 17-62.
- ROTHERY, A. (1980): *Children reading mathematics*, College of Higher Education, Worcester.
- TRURAN, K. (1994 a): «Children's understanding of random generators. Short oral communication», *Proceeding of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, University of Lisbon.

Libros de texto analizados

- [A]: GUZMÁN, M., J. COLERA y A. SALVADOR (1988): *Matemáticas, Bachillerato 1.º*, Anaya, Madrid.
- [B]: VALDÉS, J. y S. MARSINYACH (1975): *Matemáticas, Bachillerato 1.º*, Bruño, Madrid.