SUMA 37
junio 2001, pp. 125-128

Por una lectura detenida de la Historia

Carlos Usón Villalba
Ángel Ramírez Martínez

DESDE LA HISTORIA

EN EL ARTÍCULO ANTERIOR de esta sección –«Leyendo entre líneas la Historia»– planteábamos el problema de la continuidad entre el álgebra de Babilonia (probablemente su arranque más prometedor en la Antigüedad) y la de Bagdag (el comienzo de un brillante desarrollo). Se suele establecer a partir de un posible camino cuyas etapas serían Mesopotamia-Alejandría (Diofanto)-comunidades nestorianas[1] instaladas en Oriente Próximo y en Jundishapur[2] (Irán)–Bagdad, pero no hay documentos que prueben nada de forma fehaciente. Y hay que añadir, además, las permanentes relaciones de Persia con India y las posibles de ésta con la antigua Mesopotamia[3]. Un hipotético –aunque probable– y accidentado viaje de ida y vuelta para volver a nacer en el mismo suelo mil quinientos años después. Por nuestra parte, hemos aprovechado para recordar las aportaciones matemáticas de Mesopotamia, y hemos seleccionado dos temas.

El sistema de base 60

¿Cómo explicar la elección de un número tan alto como base del sistema de numeración? Se suele alegar su interés aritmético, dada la gran cantidad de divisores que tiene, pero a pesar de su pedigrí (ya la insinuó Teón de Alejandría en el s. IV[4]) nos parece una explicación filosóficamente idealista en exceso. En los comienzos influye más lo experimental que la teoría. Otra posibilidad es conectar el 60 con la Astronomía. Si el Sol tarda 360 días –un número habitual en calendarios de la Antigüedad– en dar una vuelta completa alrededor de los sacerdotes observadores, éstos podrían haberse decidido por 60, un valor más manejable pero igualmente relacionado con sus números y por tanto con el esoterismo cultivado sin duda por su casta. El problema en esta conexión, que probablemente todos hemos sugerido en clase alguna vez, es decidir qué fue primero, el huevo o la gallina. Para anotar regularidades es necesario un mínimo sistema numérico previo, pero, en contrapartida, nada impide pensar que fuera perfeccionado o modificado como consecuencia de las mismas.

En cualquier caso, esta segunda explicación[5] vuelve a confiar demasiado en las ideas como instrumento decisorio en elecciones complicadas pero muy conectadas con el mundo material. G. Ifrah (1997) propone otra tan natural que sorprende no haber pensado en ella anteriormente: doce falanges en una mano y un pulgar para contarlas, y cinco dedos en la otra para cada bloque de doce. En total 60. La técnica de recuento con las falanges está hoy vigente en amplias zonas, desde Egipto hasta la India, y por lo que hace a la base 5 ha sido una de las más utilizadas, por su naturalidad y como forma de abreviar la representación de números en base 10. De la combinación de las dos tradiciones surgiría la base 60. Se puede pensar incluso que se produjo una confluencia de modelos procedentes de dos de los pueblos que coincidieron en la región, según el clásico proceso invasión[6]–mestizaje cultural.

Dentro de esta misma línea de razonamiento de corte materialista resulta atractiva una simplificación de la propuesta que hizo Neugebauer –el gran investigador de las matemáticas egipcias y babilónicas– en 1927. Podemos pensar en una unidad de medida de longitud cualquiera, antropomórfica (codo, palmo, paso) o no, estandarizada sobre un trozo de madera, en el que se van dibujando las muescas que se corresponden con 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 y 1/6. Una vez dibujadas todas, la distancia más pequeña entre dos de ellas corresponde a 1/60.

Ninguno de estos argumentos es concluyente por sí mismo. En cualquier caso, sí parecen obvios los inconvenientes prácticos derivados de adoptar un número excesivamente alto como base del sistema de numeración. El más inmediato surge a la hora de multiplicar. ¿Cómo memorizar 60 tablas de 60 resultados cada una?[7] Sabíamos que en Babilonia se habían usado tablas de mutiplicar como auxiliar para el cálculo[8], pero no nos habíamos planteado lo que eso suponía ni el porqué. Como siempre la vida va por delante, y la reflexión ha venido motivada por un hallazgo casual.

Evidentemente no estamos hablando de una tablilla cuneiforme de barro cocido, sino de una página de la «Tabula Sexagenaria» de las *Efemérides* de A. Argoli (1659)[9]. Por fortuna no miramos el título, lo que nos permitió el placer (ingenuo, sí, pero placer) de descubrir de qué se trataba. La construcción de los objetos –aunque sean teóricos– aporta una información casi sensorial diferente de la que proporciona la mera lectura informativa. Resultó divertido operar con la tabla –hay calculadoras para evitar el trabajo tedioso– y resultó también útil para comprender el avance que supuso esta primera «máquina» de calcular artificial[10].

Da la impresión de que la *Tabula* de Argoli incluiría los productos de los treinta primeros números por todos los números desde 1 hasta 60. La propiedad distributiva evita los otros 1800 resultados. En base 10, claro, no es necesa-

508 ASTRONOMICORVM

Tabula Sexagenaria, deseruiens Multiplicationi,

	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	0 31	0 32	0 33	0 34	0 35	0 36	0 37	0 38	0 39	0 40
2	1 2	1 4	1 6	1 8	1 10	1 12	1 14	1 16	1 18	1 20
3	1 33	1 36	1 39	1 42	1 45	1 48	1 51	1 54	1 57	2 0
4	2 4	2 8	2 12	2 16	2 20	2 24	2 28	2 32	2 36	2 40
5	2 35	2 40	2 45	2 50	2 55	3 0	3 5	3 10	3 15	3 20
6	3 6	3 12	3 18	3 24	3 30	3 36	3 42	3 48	3 54	4 0
7	3 37	3 44	3 51	3 58	4 5	4 12	4 19	4 26	4 33	4 40
8	4 8	4 16	4 24	4 32	4 40	4 48	4 56	5 4	5 12	5 20
9	4 39	4 48	4 57	5 6	5 15	5 24	5 33	5 42	5 51	6 0
10	5 10	5 20	5 30	5 40	5 50	6 0	6 10	6 20	6 30	6 40
11	5 41	5 52	6 3	6 14	6 25	6 36	6 47	6 58	7 9	7 20
12	6 12	6 24	6 36	6 48	7 0	7 12	7 24	7 36	7 48	8 0
13	6 43	6 56	7 9	7 22	7 35	7 48	8 1	8 14	8 27	8 40
14	7 14	7 28	7 42	7 56	8 10	8 24	8 38	8 52	9 6	9 20
15	7 45	8 0	8 15	8 30	8 45	9 0	9 15	9 30	9 45	10 0
16	8 16	8 32	8 48	9 4	9 20	9 36	9 52	10 8	10 24	10 40
17	8 47	9 4	9 21	9 38	9 55	10 12	10 29	10 46	11 3	11 20
18	9 18	9 36	9 54	10 12	10 30	10 48	11 6	11 24	11 42	12 0
19	9 49	10 8	10 27	10 46	11 5	11 24	11 43	12 2	12 21	12 40
20	10 20	10 40	11 0	11 20	11 40	12 0	12 20	12 40	13 0	13 20
21	10 51	11 12	11 33	11 54	12 15	12 36	12 57	13 18	13 39	14 0
22	11 22	11 44	12 6	12 28	12 50	13 12	13 34	13 56	14 18	14 40
23	11 53	12 16	12 39	13 2	13 25	13 48	14 11	14 34	14 57	15 20
24	12 24	12 48	13 12	13 36	14 0	14 24	14 48	15 12	15 36	16 0
25	12 55	13 20	13 45	14 10	14 35	15 0	15 25	15 50	16 15	16 40
26	13 26	13 52	14 18	14 44	15 10	15 36	16 2	16 28	16 54	17 20
27	13 57	14 24	14 51	15 18	15 45	16 12	16 39	17 6	17 33	18 0
28	14 28	14 56	15 24	15 52	16 20	16 48	17 16	17 44	18 12	18 40
29	14 59	15 28	15 57	16 26	16 55	17 24	17 53	18 22	18 51	19 20
30	15 30	16 0	16 30	17 0	17 30	18 0	18 30	19 0	19 30	20 0
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

Diuisio

Muestra de la tabla sexagenaria
(Argoli, A. (1659). «Efemérides», págs. 508-509)

rio recurrir a ella. Acostumbrados a conceder a las ideas toda la capacidad explicativa de los distintos aconteceres, consideramos muy poco las consecuencias obligadas de la plasmación práctica de los diferentes pasos que se dieron al ir avanzando. Y, desde luego, si se hubiera optado por la base 2 o la base 5, las tablas no habrían sido necesarias.

Ya lo hicimos una vez[11], pero entonces no disponíamos de la tabla. ¿Por qué no jugar de nuevo?

$$
\begin{array}{rrrr}
 & 33; & 35; & 09 \\
\times & & & 22 \\
\hline
 & & 3; & 18 \\
 & 12; & 50 & \\
12; & 06 & & \\
\hline
12, & 18; & 53; & 18
\end{array}
$$

¡La tabla lo resuelve todo! Sólo es necesario para efectuar multiplicaciones con su ayuda, saber sumar y, por supuesto, entender cómo funciona un sistema posicional. Como nuestra tabla es incompleta hemos tenido que recurrir a la propiedad distributiva para 22 x 09.

$$22 \times 09 = 22 \times 40 - 22 \times 31 = 14;\ 40 - 11;\ 22 = 3;\ 18$$

Sin molestarnos en pensar hemos obtenido respuesta a un cálculo complicado. En sistema decimal,

$$120909 \times 22 = 2659998.$$

Fracciones poco periódicas

La sombra de la tradición es alargada. Los árabes emplearon a la vez dos sistemas de numeración: decimal para el comercio y decimal y sexagesimal para los cálculos científicos. Pero a mediados del s. XVII ya hacía 200 años que al-Kashi había propuesto emplear solamente fracciones decimales. Sin duda no fueron las ventajas aritméticas que insinuaba Teón de Alejandría las valedoras de esta pervivencia pero, una vez más, nos vamos a dejar fascinar por las maravillas del sistema sexagesimal.

En efecto, en base 60, de todas las fracciones unitarias con denominador hasta 12 ($1/n$, con 1 ″ n ″ 12), sólo son dos periódicas, mientras que en base 10 lo son seis. Si empleamos la notación 3,12;11 para expresar $3 + 12/60 + 11/60^2$, podemos comparar sus expresiones en las dos bases.

FRACCIÓN	BASE 10	BASE 60
1/2	0,5	0,30
1/3	0,$\overline{3}$	0,20
1/4	0,25	0,15
1/5	0,2	0,12
1/6	0,1$\overline{6}$	0,10
1/7	0,$\overline{142857}$	0,$\overline{8;34;17}$
1/8	0,125	0,7;30
1/9	0,$\overline{1}$	0,6;40
1/10	0,1	0,6
1/11	0,$\overline{09}$	0,5;27;16;21; $\overline{10;54;32;43;38}$
1/12	0,08$\overline{3}$	0,5

¿Qué interés podía tener esto para el cálculo? Los escribas de la antigua Mesopotamia efectuaban las divisiones multiplicando el dividendo por el inverso del divisor, para lo cual existían tablas con los inversos de los primeros números, y no parece que tuvieran una idea muy clara sobre los decimales periódicos. De hecho, en las tablas de inversos faltan 1/7 y 1/11, y en todas las tablillas que han llegado hasta nosotros solamente en una aparece una acotación de 1/7 por defecto: 0,8;34;16;59 y otra por exceso: 0,8;34;18. Los decimales exactos, por tanto, además de facilitar el cálculo permitían evitar resultados aproximados.

Pero abandonemos la Historia un momento a favor de la didáctica. La elaboración del cuadro anterior puede ser una buena propuesta para alumnos y alumnas de 4.° ESO o 1.° de bachillerato. ¿Cómo definir y justificar un algoritmo que permita obtener los períodos en base 60? Evidentemente, igual que en base 10, pero el cambio de contexto obliga a revisar lo que ya se conoce para adaptarlo. Y lo mismo para otra cuestión que ha quedado abierta: ¿qué denominadores producen decimales periódicos en base 60?

El olvido de la heurística

¿Ha sido Ifrah el primero en elaborar la conjetura citada sobre el origen de la base 60? La hemos encontrado en él y en G. Gheverghese Joseph, pero ninguno de los dos cita a otros autores. En cualquier caso nos sorprende la poca popularidad que tiene (entre el público en el que puede tenerla, claro), y nos parece que es una muestra más de la reticencia de la comunidad de historiadores de las matemáticas a proponer explicaciones de tinte «materialista». Lo empírico, lo material, la vida real, está subliminalmente marginado en el entorno de las matemáticas. Veamos otro ejemplo en un campo distinto.

En Taton (1971) se comenta un problema recogido en una tablilla cuneiforme, la denominada AO 6484, en el que se propone sumar la serie $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^9$. Y afirma el autor:

> Se da la respuesta sin comentario: se toma el último término disminuido en 1 unidad y se añade el número resultante al último término. De hecho, el cálculo realizado por el escriba corresponde a la fórmula moderna:
>
> $$S = a(q^n-1)/(q-1),\ \text{ siendo } q=2,\ a=1 \text{ y } n=10;\ \text{ o sea:}$$
> $$S = 2^{10} - 1 = 2^9 + (2^9 - 1)$$

La notación en los manuales de historia suele estar a veces menos matizada, no se sabe si por autores o por editores. Seguramente habríamos deseado ver S_n y a_1, pero la fórmula es tan conocida que no plantea ninguna dificultad de comprensión. Pero lo que interesa es que, en realidad, el cálculo que se detalla literariamente no corresponde a una aplicación directa de la fórmula, como demuestra el último paso. La fórmula da $2^{10} - 1$, y lo descrito $2^9 + (2^9 -1)$. No imaginamos al escriba obteniendo la primera expresión (por supuesto retóricamente) y modificándola para obtener la segunda. Si el escriba, por tanto, estaba en posesión de una *fórmula aritmética científica (sic)*, no debía tener ésta el aspecto en formato retórico que tiene la que manejamos hoy día en simbolismo algebraico. Es decir, el listado de operaciones es distinto en las dos redacciones del método para alcanzar la respuesta.

Dada la forma en que se redactaban papiros y tablillas, el problema de cómo obtuvieron sus resultados los sabios de la Antigüedad permanecerá inevitablemente abierto. Los manuales recogen en algunos casos conjeturas metodológicas que, no puede ser de otra manera, están sesgadas por la ideología matemática de su autor. En este caso en el Taton no se llega a sugerir una explicación. Simplemente se comprueba que nuestra actual rutina de resolución termina conduciendo a la misma respuesta. En realidad, si olvidamos la obsesión por ir siempre de lo general a lo particular, y actuamos a la inversa; si recuperamos algo tan natural desde el punto de vista de la heurística como la inducción, la «fórmula» del escriba aparece sin ningún problema. Basta con anotar resultados y observar regularidades.

$$1 = 1$$

$$1 + 2 = 3$$

$$1 + 2 + 4 = 7$$

$$1 + 2 + 4 + 8 = 15$$

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$$

No hace falta ser especialmente observador para detectar el zigzag que relaciona el resultado de una fila con el de la anterior. La suma global de una fila más el último número de la suma de la siguiente fila da el resultado global de esta última. Es decir, para la fila quinta:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 16 + 15 = 2^4 + (2^4 - 1)$$

Por este camino sí se obtiene la solución del escriba, pero igualmente podíamos haber elegido el formato $2^{10} - 1$, que también «salta a la vista» en el proceso anterior. La conexión entre las dos expresiones, además, no parece un paso difícil para calculistas que dejaron probada muestra de su habilidad en la resolución de otros problemas. Nos inclinaríamos por buscar una explicación en la escritura cuneiforme de los números, basada solamente en dos símbolos, que quizás hiciera más fácil ver que quedaban obligados a repetir el último término menos uno.

Intentaremos visualizar lo que queremos decir empleando nuestros símbolos para la suma y la igualdad y representando cada marca del cálamo en la arcilla con I.

IIII

I + II = III   I + II + IIII = III

Es cierto que en el siguiente paso, puesto que la suma parcial da 15 y el símbolo para 10 era una cuña horizontal distinta, se pierde la «visión directa» del proceso, pero la idea ya ha quedado sugerida.

Nos atrevemos, por tanto, a responder sólo en parte a la pregunta del historiador: ¿cómo habían obtenido las fórmulas? Sin duda por un método tan natural de construcción de rutinas como la inducción. Y la experiencia didáctica nos dice que la mayoría de quienes llegan a sumar la serie de potencias de 2 lo hace también con la de 3 y la de cualquier número natural.

Los sesgos interpretativos de los historiadores de las matemáticas están influenciados no sólo por su ideología sobre el devenir histórico o su interpretación filosófica de las matemáticas, sino también por la forma en que conciben los procesos de creación del conocimiento matemático. A falta de documentos sólo se puede conjeturar, pero las conjeturas no son asépticas.

Obras citadas

IFRAH, G. (1997): *Historia universal de las cifras*, Espasa.

JOSEPH, G.G. (1996): *La cresta del pavo real*, Pirámide.

TATON, R. (director) (1971): *Historia general de las ciencias (tomo I)*, Destino.

Notas

1 Néstor fue condenado en el Concilio de Éfeso (431) por sostener que Cristo tiene dos naturalezas, una divina y otra humana. Todavía su doctrina tiene hoy partidarios en Irán y Turquía. Su éxodo fue uno más de los que provocó la ortodoxia bizantina.

2 En esta ciudad, en la que la dinastía sasánida había fundado una Escuela de Medicina, se refugió no sólo parte del primer éxodo nestoriano, sino también, más tarde, profesores de la Universidad de Atenas clausurada por Justiniano (529). Aunque el nivel científico de Bizancio nunca fue alto, se supone que estos exiliados contribuyeron con sus traducciones al siríaco, del que posteriormente se harían traducciones al árabe, al contacto del mundo islámico con la ciencia griega.

3 Utilizaremos indistintamente las palabras Mesopotamia y Babilonia. No son lo mismo, evidentemente, pero la producción matemática de las distintas épocas en esta región puede quedar bien representada por la ciudad de Babilonia. (Véanse G. Gheverghese Joseph (1991) y R. Taton (1971)).

4 Más adelante, según Ifrah (1997), insistieron en ella John Wallis, en el s. XVII, y Löffler en el s. XX.

5 También con pedigrí: Formaleoni (1789); Cantor (1880).

6 Imposible evitar cierto pesimismo antropológico ante la evidencia de los caminos seguidos por la cultura y el conocimiento en sus avances.

7 Las criaturas de Primaria lo consiguen, incluso perdiendo el sentido de lo que dicen. Se puede (¡y se debería!, por tanto) mantener este sentido e ir más despacio. Pero, ¡qué dificultades para ello con 60 tablas de 60 resultados!

8 Ahora se obliga a memorizarlas pero se prohibe su función auxiliar. Convendría reflexionar un poco sobre el uso que se hace de una tabla en cualquier trabajo. Da la impresión de que sólo en las aulas se memorizan para aplicarlas posteriormente en una segunda etapa. La calle, como casi siempre, actúa de otra manera: a fuerza de usar la tabla en cuestión se llega a memorizarla.

9 La hemos encontrado en Ángel Aguirre Álvarez: *El astrónomo cellense Francisco M. Zarzoso (1556)*. Instituto de Estudios Turolenses. 1980.

10 Consideramos las manos como instrumentos naturales para el cálculo, anteriores, claro está, a las tablas de Mesopotamia.

11 En el artículo «¿Por qué seguir anclados en Egipto?», en el número 35 de *Suma*.

Rectificación

Las colaboraciones continuadas con Suma nos están permitiendo conocer la sensación de autismo resultante del silencio de los hipotéticos lectores o lectoras. Cierto, a veces llega algún aviso de alguien que se ha disgustado con alguna afirmación, e incluso también de alguna persona que por el contrario se manifiesta de acuerdo con lo escrito. Pero en las frases que nosotros hemos lamentado a posteriori, cuando ya no ha tenido remedio, nadie parece haberse detenido. Puesto que no nos ha llegado la crítica nos rectificaremos a nosotros mismos.

En el número 35 (noviembre del 2000) firmamos un artículo, «¿Por qué seguir anclados en Egipto?», en el que se deslizó la siguiente afirmación: Seguimos metodológicamente anclados en Egipto, pero con una diferencia social que hace la situación sangrante: los matemáticos de la Antigüedad y de la Edad Media escribían para usuarios analfabetos. Hay sugerencias dolorosas por este camino que preferimos no detallar. Ocurre que el párrafo es rechazable desde dos puntos de vista:

• En primer lugar hay una frase que es contradictoria en sí misma: no se escribe para analfabetos.

• En segundo lugar, no es razonable llamar analfabetos, por ejemplo, a los comerciantes medie-vales.

En realidad, lo que pretendíamos era establecer una comparación que nos parece que sigue siendo válida, pero que es difícil de ajustar en poco espacio. La frase debería decir: los matemáticos de la Antigüedad y de la Edad Media, cuando escribían manuales de instrucciones pretendían la pervivencia, la transmisión de rutinas que permitían dar respuesta a los enunciados de los problemas. Tres mil años después parece claro el arcaísmo de una didáctica basada en este objetivo.