SUMA 37
junio 2001, pp. 105-110

Isoperímetros: Ficha didáctica en álgebra. Desigualdades

Grupo Construir las Matemáticas*

TALLER DE PROBLEMAS

EN EL NÚMERO 36 DE SUMA (*Isoperímetros: Ficha didáctica en Geometría. Métodos trigonométricos*) proponíamos una serie de actividades de introducción al Método Trigonométrico para el tratamiento de ciertos problemas de isoperímetros. El objetivo que perseguimos en esta nueva aportación es la utilización del Álgebra para resolver este tipo de problemas. Pretendemos mostrar cómo se puede abordar un *mismo problema* desde este otro bloque de contenidos del currículo de Matemáticas, y con otra profundidad, para incidir en el carácter cíclico que todo aprendizaje debe tener a lo largo de toda la ESO.

El problema

> Dispones de un listón de madera de tres metros de longitud para enmarcar una lámina con cuatro lados. ¿Cuál es la lámina de mayor superficie que puedes enmarcar?

En la *Ficha didáctica de Geometría* se afirmaba que de entre todos los cuadriláteros de perímetro 3 metros, el cuadrado es el de mayor área. ¿Se justificaba la afirmación en la demostración realizada? Realmente, la demostración geométrica dada es sólo válida para paralelogramos. Ahora completaremos la demostración haciendo uso del Álgebra y de la teoría sobre enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas de Van Hiele.

Diagnóstico

Comenzamos planteando al alumnado distintas cuestiones con las que recordaremos los conceptos fundamentales con los que vamos a trabajar:

- ¿Qué es un cuadrilátero?
- ¿Qué es un rectángulo?
- ¿Qué es un cuadrado?
- ¿Qué significa la palabra perímetro?
- ¿Cuál es el perímetro de un cuadrado?
- ¿Cuál es el perímetro de un rectángulo? Si conoces el valor de un lado de un rectángulo, ¿puedes deducir el del otro?

* Los componentes del Grupo Construir las Matemáticas son Rafael Pérez, Isabel Berenguer, Luis Berenguer, Belén Cobo, M.ª Dolores Daza, Francisco Fernández, Miguel Pasadas y Ana M.ª Payá.

- ¿Cuál es el perímetro de un cuadrilátero? Si conoces el valor de un lado de un cuadrilátero, ¿puedes deducir los de los otros?

De entre las distintas láminas que podríamos enmarcar con un listón de 3 metros, ¿tienen todas igual área?

Primera orientación dirigida

Un heurístico recomendable para abordar un problema es *empezar por un caso sencillo*. Si la lámina que queremos enmarcar es rectangular, ¿cuál es la de mayor superficie?

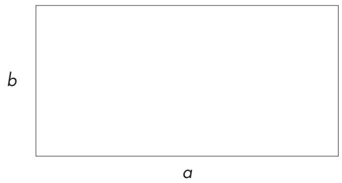


Figura 1

En este momento conviene organizar la clase en grupos de cuatro. Llamemos a y b a las longitudes de los lados del rectángulo. ¿Pueden tomar a o b valores negativos? ¿Por qué? ¿Puede ser $2a$ mayor que 3? ¿Puede ser $2a$ igual a 3? ¿Por qué? ¿Puede ser $2b$ mayor que 3? ¿Puede ser $2b$ igual a 3? ¿Por qué?

Por tanto, observa que los valores de a y b estarán comprendidos entre 0 y 3/2

Recordemos que en Matemáticas para escribir «mayor que» convenimos en utilizar el símbolo «>», para escribir «menor que» utilizamos «<» y para escribir «mayor o igual» y «menor o igual» escribimos respectivamente «≥» y «≤».

Utilizando esta notación podremos decir que si a y b son las longitudes de los lados de un rectángulo de perímetro 3 metros, entonces $0 < a < 3/2$ y $0 < b < 3/2$.

Puesto que el listón del que disponemos mide 3 metros, resulta que $2a + 2b = 3$; conociendo a podemos determinar b, puesto que de la igualdad anterior obtenemos que:

$$b = \frac{3 - 2a}{2}$$

Así pues, el área de un rectángulo de perímetro igual a 3 metros, de lados a y b, es

$$S = a\left(\frac{3 - 2a}{2}\right)$$

Otro heurístico aplicado frecuentemente en la resolución de problemas consiste en *organizar la información en una tabla*. Dando valores a a se rellena la siguiente tabla en la que aparecen áreas asociadas a distintas dimensiones:

Lado a	1/6			3/4			
Lado b							
Área							

Si $a = 3/4$, ¿qué forma tiene la lámina? ¿Qué parece que ocurre con el valor de su área?

Los heurísticos utilizados ya han dado su fruto: ¡la elaboración de una conjetura! No se puede avanzar en la resolución de un problema si no hay una intuición a validar. ¿Qué conjetura puede establecerse?

Conjetura 1

Entre los rectángulos de perímetro igual a 3 m, el cuadrado de lado 3/4 es el que tiene mayor área.

El área de un rectángulo de perímetro 3 metros y lados a y b es ab, donde sabemos que $2a + 2b = 3$. Observa que el área del cuadrado de perímetro 3 metros es $(3/4)^2$. Para probar que la conjetura que hemos hecho es cierta, tenemos que justificar que $ab \leq (3/4)^2$ siempre que $2a + 2b = 3$.

Observar que si a y b verifican que $2a + 2b = 3$, entonces

$$b = \frac{3 - 2a}{2}$$

y queremos probar si se verifica que:

$$a\left(\frac{3 - 2a}{2}\right) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^2 \qquad [*]$$

Si operamos, la desigualdad [*] será cierta si se verifican las siguientes desigualdades:

$$8a(3 - 2a) \leq 3^2$$

$$24a - 16a^2 \leq 3^2$$

$$0 \leq 16a^2 - 24a + 3^2$$

$$0 \leq (4a - 3)^2 \qquad [**]$$

¿Se verifica la desigualdad [**]?

Razonemos ahora «directamente»:

Puesto que el cuadrado de cualquier número es siempre mayor o igual que cero, resulta que $0 \leq (4a - 3)^2$ y por tanto $0 \leq 16a^2 - 24a + 3^2$. Sumando en ambos miembros de la desigualdad anterior $24a - 16a^2$ se tiene $24a - 16a^2 \leq 3^2$.

Sacando factor común $8a$ en el miembro de la izquierda, obtenemos que

$$8a(3 - 2a) \leq 3^2$$

Dividiendo los dos miembros de la desigualdad anterior entre 4^2, tendremos que

$$a\left(\frac{3 - 2a}{2}\right) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

que es justamente la desigualdad que queríamos probar.

¿Cuándo y sólo cuándo se verifica la igualdad?

Acabamos de justificar que el área de cualquier rectángulo de perímetro 3 metros es siempre menor o igual que el área del cuadrado de lado 3/4. Luego el cuadrado de lado 3/4 metros es el «rectángulo» de perímetro 3 metros que tiene mayor área.

Primera explicitación

Cada grupo redactará un informe en el que se organice todo el trabajo realizado y se expliquen claramente los resultados obtenidos. Dicho informe será expuesto por un miembro del grupo en clase.

Orientación libre

Se pretende *generalizar* el resultado anterior, con lo que se completa el primer heurístico utilizado: *trabajar sobre un caso más sencillo y, después, generalizar*. Si el perímetro de la lámina rectangular que queremos enmarcar es P metros, ¿cuál es la lámina de mayor superficie que puedes enmarcar?

Conjetura 2

De entre todos los rectángulos de perímetro P metros, el cuadrado de lado $P/4$ metros es el que tiene mayor área.

El área de un rectángulo de perímetro P metros y lados a y b es ab, donde podemos decir que $2a + 2b = P$. Observa que el área del cuadrado de perímetro P metros es $(P/4)^2$.

Para probar la veracidad de esta nueva conjetura tendremos que justificar que $(P/4)^2 \geq ab$ siempre que $2a + 2b = P$.

Si a y b verifican que $2a + 2b = P$, entonces:

$$b = \frac{P - 2a}{2}$$

y observemos que entonces queremos probar si se verifica que:

$$a\left(\frac{P-2a}{2}\right) \leq \left(\frac{P}{4}\right)^2 \qquad [*]$$

Si operamos, la desigualdad [*] será cierta si se verifican las siguientes desigualdades:

$$8a(3 - 2a) \leq P^2$$

$$24a - 16a^2 \leq P^2$$

$$0 \leq 16a^2 - 24a + P^2$$

$$0 \leq (4a - P)^2 \qquad [**]$$

¿Se verifica la desigualdad [**]?

Segunda explicitación

Ídem a primera explicitación.

Hemos justificado que entre todos los rectángulos de perímetro fijo P metros, el cuadrado es el que tiene mayor área. Nuestro interés está en demostrar que el mismo resultado se obtiene entre todos los cuadriláteros de perímetro fijo P metros. Una herramienta útil en el trabajo con polígonos es «triángularizarlos» para así trabajar con triángulos. Esto es lo que vamos a hacer nosotros para simplificar el problema. Abordamos ahora el siguiente problema que «a priori» pueda parecer que no tiene mucho que ver con el que teníamos. Cambiaremos las dimensiones para evitar confusiones.

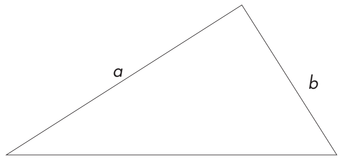
Problema

Queremos enmarcar ahora una lámina triangular que tiene un lado que mide 2 metros con un listón de madera de 5 metros. ¿Cuál es la lámina de mayor superficie que puedes enmarcar?

Tercera orientación dirigida

Construyamos un triángulo de perímetro 5 metros con base fija de 2 metros de longitud (figura 2). Llamemos a y b a los otros dos lados del triángulo. Observa que como $a + b + 2 = 5$, entonces $b = 3 - a$.

Figura 2



Recuerda la Fórmula de Herón

El área de un triángulo de lados a, b y c es

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde $s = \frac{a+b+c}{2}$ es el semiperímetro.

Para las láminas triangulares que estamos considerando, ¿cuál es el semiperímetro? Observa que el área de cada una de estas láminas triángulares, en función del lado a es:

$$\text{Área} = \sqrt{\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}-a\right)\left(\frac{5}{2}-3+a\right)\left(\frac{5}{2}-2\right)}$$

$$\text{Área} = \sqrt{\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}-a\right)\left(-\frac{1}{2}+a\right)\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\text{Área} = \sqrt{\frac{5}{4}\left(\frac{5}{2}-a\right)\left(-\frac{1}{2}+a\right)}$$

$$\text{Área} = \sqrt{-\frac{5}{4}a^2+\frac{15}{4}a-\frac{25}{16}}$$

Tratamos de nuevo de establecer una conjetura. Procedemos igual que antes elaborando una tabla. Para ello cada grupo va a dar seis valores a a, rellenando la siguiente tabla para láminas triangulares de distintas dimensiones:

Lado a						
Área						

Entre todos los triángulos posibles (con perímetro 5 metros y base 2 metros) parece intuirse que el isósceles (con lados iguales a 1,5 m) es el que tiene mayor área.

Conjetura 3

De entre todos los triángulos de perímetro 5 metros y base fija de 2 metros, el triángulo isósceles de lados iguales 3/2 metros es el que tiene mayor área.

> *Recordar*
>
> Si l es un número positivo, una elipse de focos $F1$ y $F2$ y semieje l es el conjunto de puntos del plano cuya suma de distancias a los focos es $2l$.

Construyamos un triángulo de perímetro 5 metros con base fija 2 metros y llamamos $V1$ y $V2$ a los extremos de la base y $V3$ al otro vértice (figura 3).

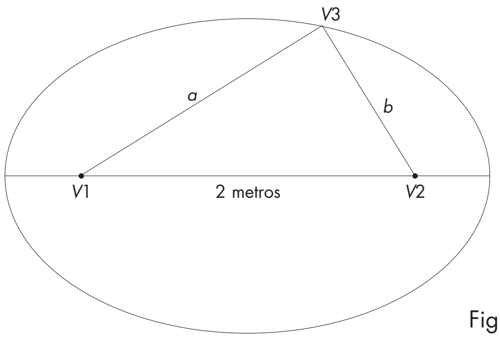


Figura 3

Si el perímetro del triángulo es 5 metros, entonces $a + b = 3$; es decir, la suma de las distancias desde $V3$ a $V1$ y respectivamente, a $V2$, debe ser igual a 3. Dicho de otro modo, si queremos construir un triángulo de perímetro 5 metros y base fija 2 metros, el vértice $V3$ será un punto de la elipse de focos los extremos de la base del triángulo y semieje 3/2 metros. Puesto que la longitud de la base es igual para todos los triángulos que construyamos de perímetro 5 metros y base 2 metros, y puesto que el área un triángulo es la mitad del producto de base por altura, entre todos estos triángulos, el de mayor área será el que tenga mayor altura. Es decir, cuando el triángulo sea isósceles y los lados iguales midan 3/2 metros, el triángulo tendrá mayor área.

Tercera explicitación

Ídem a explicitaciones 1 y 2.

Orientación libre

Pretendemos ahora generalizar el resultado anterior: de entre todos los triángulos de perímetro P' metros y base fija de d metros ¿cuál es el de área mayor?

De forma análoga a lo hecho antes, construyamos un triángulo de perímetro P' metros con base fija d metros y llamemos $V1$ y $V2$ a los extremos de la base y $V3$ al otro vértice (figura 4). Si el perímetro del triángulo es P' metros, entonces $a + b = P' - d$; es decir, la suma de las distancias desde $V3$ a $V1$ y, respectivamente, a $V2$, debe ser igual a $P' - d$. Puesto que la longitud de la base es fija, razonando igual que antes, el área será mayor cuando la altura sea mayor. Por tanto, entre todos los triángulos de perímetro P' metros y base fija de d metros, el triángulo isósceles de lados iguales $(P' - d)/2$ metros es el que tiene mayor área.

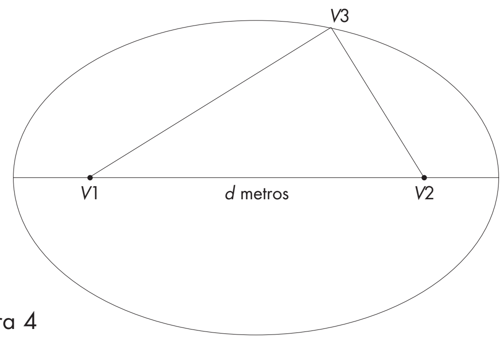


Figura 4

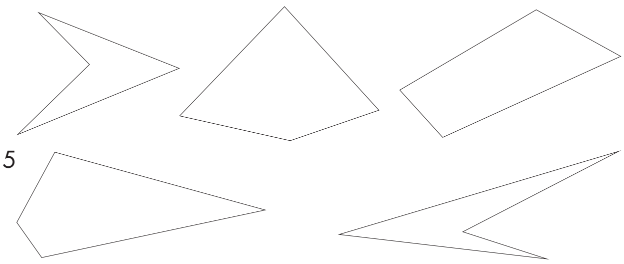
Cuarta orientación dirigida

Veamos ahora cómo justificar que de entre todos los cuadriláteros de perímetro 3 metros, el cuadrado es el de mayor área. Para resolver este problema isopérimetrico comenzaremos dándonos cuenta que el cuadrilátero de perímetro 3 metros con mayor área tiene que ser convexo.

> *Recordar*
>
> Un cuadrilátero es *convexo*, si todo segmento que conecte dos puntos situados en el interior está enteramente contenido en el interior del cuadrilátero.

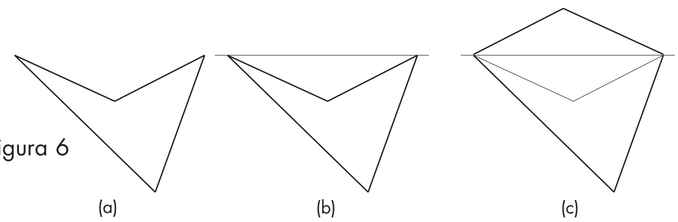
Para entender mejor el concepto de convexidad, los alumnos pueden comparar los cuadriláteros de la figura 5 y decir cuales de ellos son convexos y cuales no.

Figura 5



En primer lugar, hay que observar que a partir de un cuadrilátero no convexo, por simetría podemos generar otro nuevo cuadrilátero cómo se muestra en la figura 6.

Figura 6



El alumnado realizaría el mismo proceso descrito en la figura 6 con los cuadriláteros no convexos de la figura 5.

¿Qué puedes decir de los cuadriláteros de las figuras 6a y 6c? ¿Son convexos? ¿Tienen igual perímetro? ¿Tienen igual área?

El cuadrilátero de perímetro 3 metros que tenga mayor área, ¿será convexo?, ¿por qué?

Veamos, pues, que de entre todos los cuadriláteros convexos, el de mayor área es el cuadrado.

Consideremos un cuadrilátero convexo de perímetro 3 y de lados *a*, *b*, *c* y *d* y vértices *V*1, *V*2, *V*3 y *V*4 (figura 7).

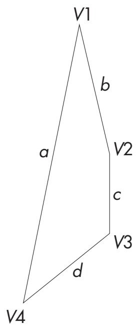


Figura 7

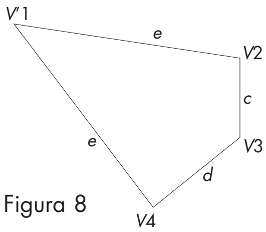


Figura 8

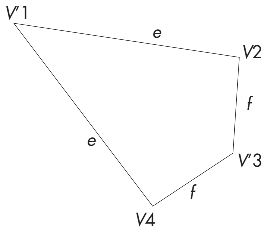


Figura 9

Paso 1: Consideremos el triángulo *V*1*V*2*V*4. Si este triángulo *V*1*V*2*V*4 es isósceles no realizamos este paso pues el triángulo *V*1*V*2*V*4 será el triángulo de mayor área entre todos los que tienen el mismo perímetro que él y base fija *V*2*V*4. En este caso el cuadrilátero del que partíamos es cómo el de la figura 8. En caso contrario, considerando como base de dicho triángulo el segmento *V*2*V*4, entre los triángulos de igual perímetro que el triángulo *V*1*V*2*V*4 y base fijada *V*2*V*4, el que encierra mayor área es el isósceles con lados iguales de longitud $e = (a + b)/2$. Por tanto, si el triángulo *V*1*V*2*V*4 no es isósceles, el cuadrilátero de la figura 8 es un cuadrilátero que tiene el mismo perímetro y mayor área que el de la figura 7.

Paso 2: Razonemos ahora igual con el cuadrilátero de la figura 7. Consideremos el triángulo *V*2*V*4*V*3 de la figura 7. Si este triángulo *V*2*V*4*V*3 es isósceles no realizamos este paso y el cuadrilátero que obtenemos después de realizar el paso 1 es como el de la figura 9. En caso contrario, si la base del triángulo de vértices *V*2*V*4*V*3 es el segmento *V*2*V*4, entre los triángulos de igual perímetro que dicho triángulo y base fija *V*2*V*4, el que encierra mayor área es el isósceles con lados iguales de longitud $f = (c + d)/2$. Por tanto, si el triángulo V2V4V3 no es isósceles, el cuadrilátero de la figura 9 es un cuadrilátero que tiene el mismo perímetro y mayor área que el de las figuras 7 y 8.

Paso 3: Consideremos ahora el triángulo *V'*1*V*4*V'*3 de la figura 9. Tomando como base de dicho triángulo el segmento *V'*1*V'*3, entre los triángulos de igual perímetro que el de vértices *V'*1*V'*3, el que encierra mayor área es el isósceles con lados iguales de longitud:

$$l = \frac{f+e}{2} = \frac{a+b+c+d}{2} = \frac{3}{4}$$

Por tanto, si el triángulo *V'*1*V*4*V'*3 no es isósceles el cuadrilátero de la figura 10 tiene el mismo perímetro y mayor área que los de las figuras 7, 8 y 9. Si el triángulo *V*1'*V*4*V*3' no es isósceles, no realizamos este paso.

Paso 4: Consideremos ahora el triángulo V'1V2V'3 de la figura 10. Considerando como base de dicho triángulo el segmento *V'*1*V'*3, entre los triángulos de igual perímetro que el de vértices *V'*1*V*2*V'*3 y base fija *V'*1*V'*3, el que encierra mayor área es el isósceles con lados iguales de longitud

$$l = \frac{f+e}{2} = \frac{3}{4}$$

Por tanto, si el triángulo *V'*1*V*2*V'*3 no es isósceles, el cuadrilátero de la figura 11 es un cuadrilátero que tiene el mismo perímetro y mayor área que los de las figuras 7, 8, 9, 10 y 11. Si el triángulo *V'*1*V*2*V'*3 es isósceles, no realizamos este paso. Observar que el cuadrilátero de la figura 11 tiene los cuatro lados iguales (rombo).

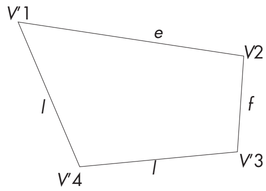


Figura 10

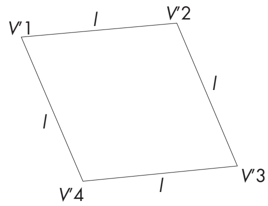
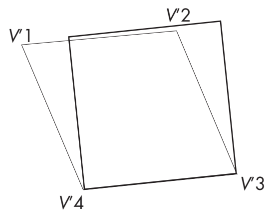


Figura 11

Paso 5: Si el cuadrilátero de la figura 11 no es un cuadrado, construyamos un cuadrado de perímetro 3 metros sobre uno de los lados del rombo de la figura 11 (ver figura 12). Observar que el cuadrado construido sobre uno de los lados de la figura 11 tiene mayor altura que el rombo y por tanto mayor área. En consecuencia cualquier cuadrilátero de perímetro 3 metros tiene área menor o igual que el cuadrado de perímetro 3 metros. En consecuencia, entre todos los cuadriláteros de perímetro dado, el cuadrado es el de mayor área.

Figura 12



Cuarta explicitación

Ídem a explicitaciones 1, 2 y 3.

Orientación libre

Planteamos ahora generalizar el razonamiento anterior para probar que entre todos los cuadriláteros de perímetro fijo *P* metros, el cuadrado de lado *P*/4 metros, es el de mayor área. El razonamiento es completamente análogo al hecho.

Quinta orientación dirigida

Una vez que hemos comprobado que de entre todos los cuadriláteros de perímetro 3 metros es el cuadrado de lado 3/4 metros el de mayor área, podríamos preguntarnos si entre todos los pentágonos de perímetro 3 metros, el pentágono regular es el de mayor área, o si entre todos los hexágonos de perímetro 3 metros, el hexágono regular es el que tiene mayor área, etc. Sin embargo, no es este momento el adecuado para dar respuesta a estas cuestiones.

Otras preguntas interesantes que podemos formularnos son las siguientes:

- ¿Tiene mayor área que el héxagono regular de perímetro 3 m el pentágono regular de perímetro 3 m?
- ¿Tiene mayor área que el octógono regular de perímetro 3 m el héxagono regular de perímetro 3 m?
- En general, ¿qué relación existe entre las áreas de dos polígono regulares con distinto número de lados y de perímetro fijo 3 m?
- Entre todos los polígonos regulares de perímetro 3 metros, ¿existe alguno que tenga área máxima?

Llamemos $Pol(n)$ al polígono regular de n lados de perímetro 3 metros. Obsérvese que para construir un polígono tiene que ser $n \geq 3$. Considerando el centro de dicho polígono, podemos descomponerlo en n triángulos isósceles iguales y como hicimos en la *Ficha Didáctica de Geometría, obtener que el área de Pol*(n) es

$$n\frac{lado \times apotema}{2}$$

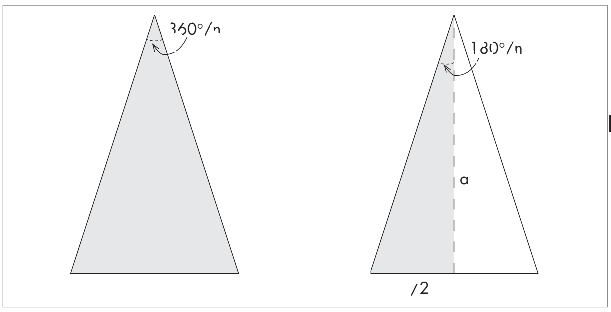


Figura 13

Como el polígono es regular, el lado es $3/n$, y entonces

$$ÁreaPol(n) = \frac{3 \times apotema}{2}$$

Como

$$\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \frac{\frac{3}{2n}}{apotema}$$

resulta que

$$apotema = \frac{3}{2n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}$$

y, en consecuencia

$$ÁreaPol(n) = \frac{3^2}{4n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}$$

Utilizando lo que acabamos de deducir, completar la siguiente tabla:

Polígono	*Perímetro*	*Número de lados*	*Longitud del lado*	Área
Triángulo equilátero	3 metros			
Cuadrado	3 metros			
Pentágono regular	3 metros			
Hexágono regular	3 metros			
Héptágono regular	3 metros			

Ordenando, de mayor a menor, las áreas de los distintos polígonos regulares de perímetro 3 metros de la tabla anterior, ¿qué se puede deducir?

Conjetura 4

Para dos polígonos regulares de perímetro 3 metros, el que tiene mayor área es el que tiene mayor número de lados.

Si $3 \leq m < n$, entonces: $60^\circ = \frac{180^\circ}{3} \geq \frac{180^\circ}{m} > \frac{180^\circ}{n} > 0$

Por lo tanto:

$$\tan\left(\frac{180^\circ}{m}\right) > \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right) > 0$$

Además

$$\left.\begin{array}{l} 3 \leq n < m \\ 0 < \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right) < \tan\left(\frac{180^\circ}{m}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow 4n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right) < 4m\tan\left(\frac{180^\circ}{m}\right)$$

Luego

$$ÁreaPol(n) = \frac{3^2}{4n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)} > \frac{3^2}{4m\frac{\tan(180^\circ)}{m}} = ÁreaPol(m)$$

Acabamos de justificar el siguiente resultado:

Para dos polígonos regulares de perímetro 3 metros, el que tiene mayor área es el que tiene mayor número de lados.

Orientación libre

Hacer lo mismo para polígonos de perímetro fijo P metros.