SUMA 37
junio 2001, pp. 95-98

Un ejemplo de demostración en Geometría como medio de descubrimiento

Marcelino J. Ibañes Jalón

ARTÍCULOS

En este artículo se expone un ejemplo de cómo una demostración de un teorema geométrico puede sugerir el descubrimiento de otros resultados.

TRADICIONALMENTE, los profesores de Matemáticas solemos decir en clase que las demostraciones sirven para convencernos de que el resultado que estamos considerando es verdad. Sin embargo, Bell (1976) advierte tres funciones de la demostración matemática: *Verificación o justificación*, concerniente con la verdad de la proposición. *Iluminación*, de tal forma que se espera que una buena demostración proporcione ideas de *por qué* la proposición es cierta. Y, *Sistematización*, esto es, la organización de los resultados en un sistema deductivo de axiomas, conceptos principales y teoremas, así como los resultados derivados de estos.

De Villiers (1993) desarrolla las ideas de Bell y critica la posición tradicional, mostrando casos en los que la verificación no juega un papel primordial y es superada por otras funciones de la demostración. El modelo de De Villiers distingue las siguientes funciones: *Verificación*, concerniente a la *verdad* de una afirmación. *Explicación, profundizando en* por qué es verdad. *Sistematización*, la *organización* de varios resultados dentro de un sistema de axiomas, conceptos fundamentales y teoremas. *Descubrimiento* o invención de nuevos resultados. Y *Comunicación*, la *transmisión* del conocimiento matemático.

Ibañes (1997) adapta este modelo para los estudiantes de bachillerato, y analiza el reconocimiento por parte de éstos de las diversas funciones de la demostración en un teorema.

Aquí, nos centraremos en la función de descubrimiento, exponiendo un ejemplo de demostración geométrica que sugiere nuevas proposiciones. Consideremos el siguiente resultado:

Teorema

Los puntos medios de los lados de un *romboide* definen un *rectángulo.*

Demostración

Del triángulo *ABC* de la figura 1 se deduce que PQ//*AC*, y del triángulo *ACD* se deduce que *SR//AC*; por lo tanto, *PQ//RS*. De la misma forma se prueba que *PS//QR*. Luego *PQRS* es un paralelogramo. Además, puesto que $AC \perp BD$ se tiene que $PQ \perp PS$, y, por consiguiente, *PQRS* es un rectángulo.

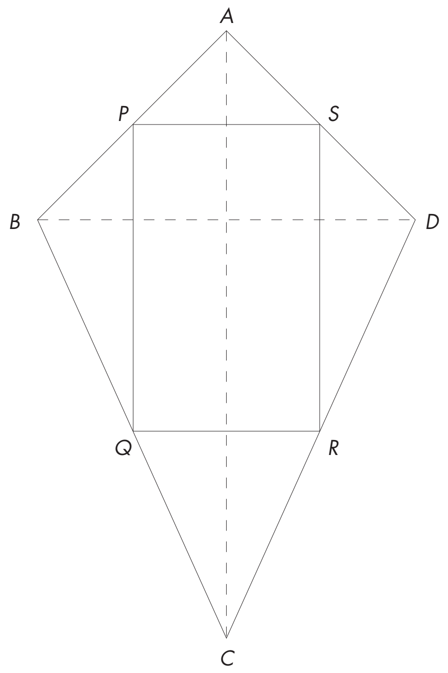

Figura 1

Como hace notar De Villiers (1996), la causa de que *PQRS* sea un paralelogramo es la perpendicularidad de las diagonales del romboide; pero, en la demostración no se ha utilizado el hecho de que el romboide tiene un eje de simetría (AC). Esta observación permite enunciar un nuevo teorema:

Teorema

> Los puntos medios de los lados de un *cuadrilátero ortodiagonal* (cuadrilátero con diagonales perpendiculares) definen un rectángulo. (Figura 2)

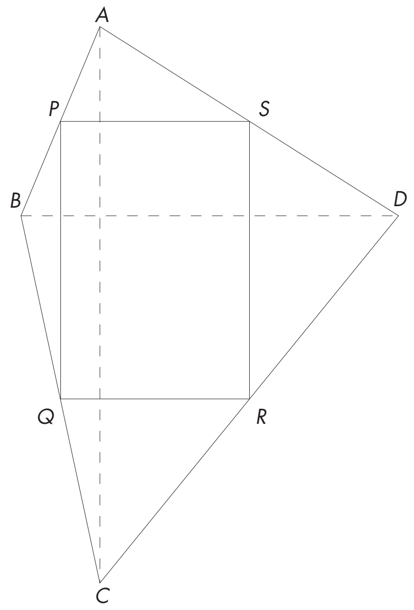

Figura 2

De esta manera, tenemos un primer ejemplo en el que la demostración de un teorema nos ha permitido descubrir un nuevo resultado; pero, nuestro objetivo es obtener un gran número de nuevos teoremas. Para ello, vamos a aplicar las estrategias de descubrimiento que suelen utilizarse en Matemáticas. Polya (1966) menciona *la generalización, la particularización y la analogía*; nosotros, también consideraremos la *dualidad*. Para aplicarlas con éxito al enunciado de un teorema, puede ser útil reflexionar sobre su demostración haciendo las siguientes preguntas que corresponden, respectivamente, a cada una de ellas:

- ¿Cómo afectaría a la demostración prescindir de algunas condiciones?
- ¿Cómo afectaría a la demostración añadir nuevas condiciones?
- ¿Cómo afectaría a la demostración sustituir algunas condiciones por otras análogas?
- ¿Cómo afectaría a la demostración sustituir algunas condiciones por sus duales?

A continuación, ponemos en práctica estas ideas en un proceso que está inspirado en De Villiers (1996), donde se encuentran algunos de los teoremas que se citan a continuación. Partimos del enunciado [1]:

> Al unir consecutivamente los puntos medios de los lados de un *rectángulo* (una clase de cuadriláteros con diagonales iguales), se obtiene un *rombo* (una clase de cuadriláteros con diagonales perpendiculares). (Figura 3)

Su demostración es parecida a la expuesta en el teorema de más arriba, por lo que se propone al lector. Únicamente, destacaremos que, ahora, la causa de que *PQRS* sea un rombo es que el rec-

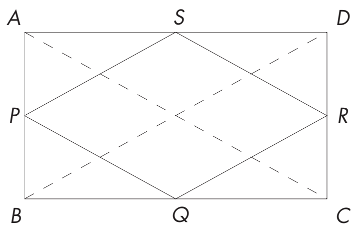

Figura 3

tángulo tiene las diagonales iguales. Considerando como duales los conceptos diagonales iguales y diagonales perpendiculares, si nos preguntamos: ¿cómo afectaría a la demostración sustituir en el cuadrilátero de partida *ABCD* «diagonales iguales» por «diagonales perpendiculares»?, enseguida llegaríamos a la conclusión de que también deberíamos hacer la misma sustitución en el cuadrilátero obtenido *PQRS*. Por lo tanto, a partir de [1], se obtiene, por *dualidad*, [2]:

> Al unir consecutivamente los puntos medios de los lados de un *rombo* (una clase de cuadriláteros con diagonales perpendiculares), se obtiene un *rectángulo* (una clase de cuadriláteros con diagonales iguales). (Figura 4)

De la misma manera, se pueden aplicar también las otras estrategias de descubrimiento, ayudándonos de las correspondientes preguntas. Así, generalizando [1] y [2] se obtienen, respectivamente, [3] y [4]:

> Al unir consecutivamente los puntos medios de los lados de un *cuadrilátero equidiagonal* (cuadriláteros con diagonales iguales), se obtiene un *rombo* (una clase de cuadriláteros con diagonales perpendiculares). (Figura 5)

> Al unir consecutivamente los puntos medios de los lados de un *cuadrilátero ortodiagonal* (cuadriláteros con diagonales perpendiculares), se obtiene un *rectángulo* (una clase de cuadriláteros con diagonales iguales). (Figura 2)

Obsérvese que [3] y [4] son *duales*.

Particularizando estos dos últimos resultados se obtienen, respectivamente, [5] y [6]:

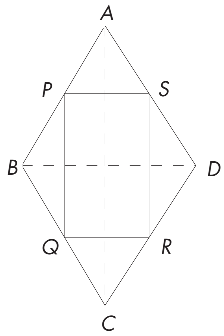

Figura 4

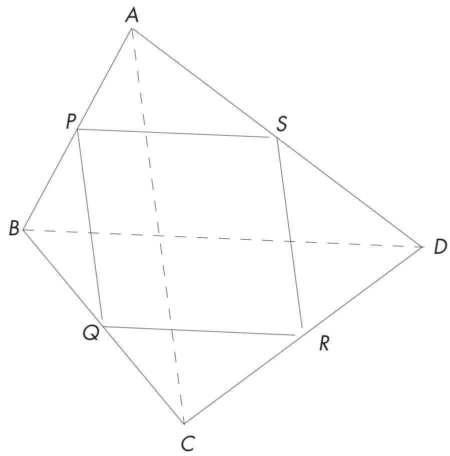

Figura 5

> Al unir consecutivamente los puntos medios de los lados de un *trapecio isósceles* (una clase de cuadriláteros con diagonales iguales), se obtiene un *rombo* (una clase de cuadriláteros con diagonales perpendiculares). (Figura 6)

> Al unir consecutivamente los puntos medios de los lados de un *romboide* (una clase de cuadriláteros con diagonales perpendiculares), se obtiene un *rectángulo* (una clase de cuadriláteros con diagonales iguales). (Figura 1)

Obsérvese también que [5] y [6] son *duales*.

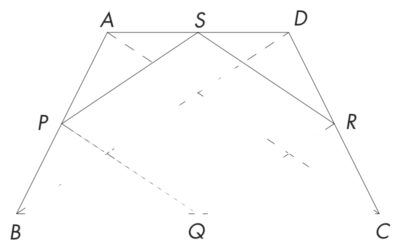

Figura 6

Una clase especial de particularización es la *conjunción*. Por conjunción de [1] y [2], se obtiene [7]:

> Al unir consecutivamente los puntos medios de los lados de un *cuadrado* (una clase de cuadriláteros con diagonales iguales y perpendiculares), se obtiene un *cuadrado.* (Figura 7)

Y, por conjunción de [3] y [4], se obtiene [8]:

> Al unir los puntos medios de los lados de un *cuadrilátero equiortodiagonal* (cuadriláteros con diagonales iguales y perpendiculares), se obtiene un *cuadrado* (una clase de cuadriláteros con diagonales iguales y perpendiculares). (Figura 8)

Todo el proceso anterior se resume en el esquema de la figura 9.

Finalmente, debe destacarse que algunos de estos teoremas no son fácilmente imaginables, por lo que, posiblemente, no se hubieran podido enunciar de no seguir este camino. Así pues, gracias al análisis cuidadoso de las demostraciones, y aplicando las estrategias de descubrimiento citadas, se han descubierto nuevos resultados, y se podrían obtener algunos más; entre ellos, el conocido teorema de Varignon:

Teorema

> Al unir consecutivamente los puntos medios de un *cuadrilátero* cualquiera se obtiene un *paralelogramo.* (Figura 10)

Referencias bibliográficas

BELL, A. W. (1976): «A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations», *Educational Studies in Mathematics*, n.° 7, 23-40.

IBAÑES, M. (1997): «Alumnos de Bachillerato interpretan una demostración y reconocen sus funciones», *Uno*, n.° 13, 95-101.

POLYA, G. (1966): *Matemáticas y razonamiento plausible*, Tecnos, Madrid.

VILLIERS, M. de (1993): «El papel y la función de la demostración en Matemáticas», *Epsilon*, 26, 15-30.

VILLIERS, M. de (1996): *Some Adventures in Euclidean Geometry*, University of Durban-Westville, South Africa.

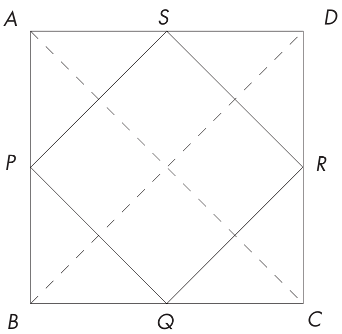

Figura 7

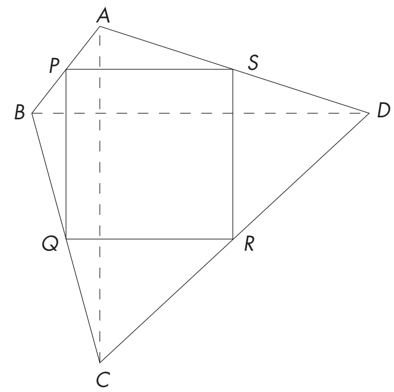

Figura 8

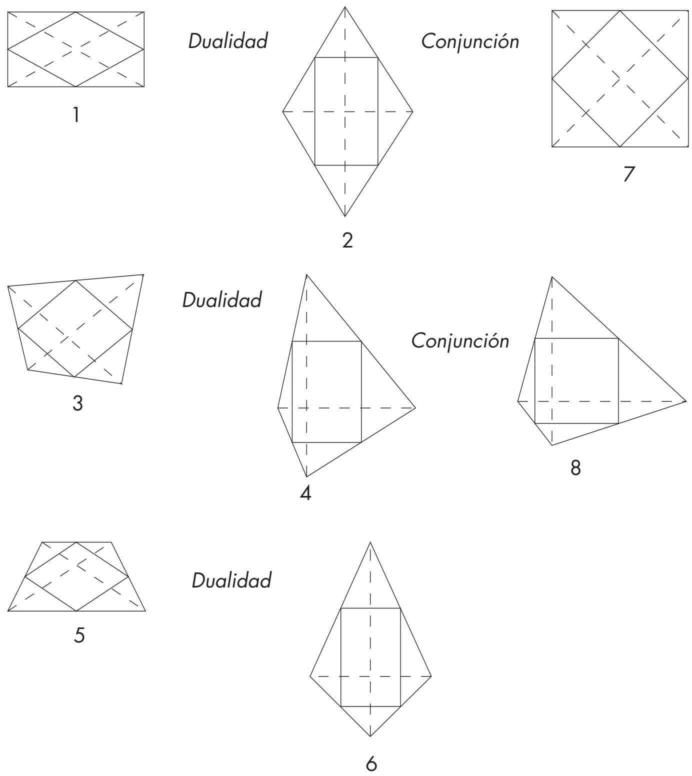

Figura 9

Marcelino J. Ibañes
IES Vega del Prado.
Valladolid

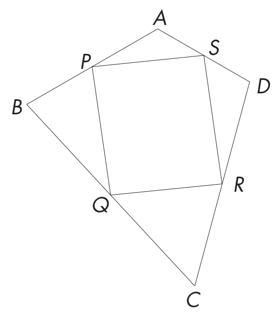

Figura 10