

Algunas dificultades en los problemas aditivos

**Alicia Bruno
Antonio Martín
Fidela Velázquez**

En este artículo se presentan los resultados de una investigación sobre problemas de suma y resta con números positivos en la que se han considerado cuatro clases de problemas: cambio, igualación, comparación y cambio-comparación, siendo estudiada esta última clase por primera vez en este trabajo. La dificultad que tienen los alumnos para resolver los problemas está relacionada con las formas de expresar la diferencia (en los problemas de comparación e igualación) y la variación (en los problemas de cambio y de cambio-comparación), así como con el orden en el que figuran los datos en los enunciados. Esto permite pensar que la expresión utilizada para la diferencia y la variación, y también el orden de los datos, resulta relevante en la comprensión del enunciado del problema, lo que motiva que tenga tan clara influencia en su nivel de dificultad.

LOS PROBLEMAS aditivos simples de enunciado verbal, que son los de suma y resta que se resuelven con $x + y = z$ o $x - y = z$, han sido intensivamente estudiados. En las panorámicas sobre investigaciones de Fuson (1992) y Verschaffel y De Corte (1996) se puede encontrar una amplia bibliografía.

La experiencia y, desde luego, los resultados de las investigaciones nos dicen que cada estudiante tiene éxito distinto en problemas diferentes y que estudiantes distintos tienen éxito diferente en cada problema. Para analizar y explicar estas diferencias se han considerado algunas características de las situaciones problemáticas, lo que ha dado lugar a varias clasificaciones en las que se contemplan diferentes clases de problemas. Son bien conocidas las clases de los problemas de combinación, cambio, comparación e igualación (Carpenter y Moser, 1982; Riley, Greeno y Heller, 1983). En este trabajo estamos interesados en ciertos aspectos de los problemas que pensamos tienen influencia en su dificultad. De cara a ilustrar esos aspectos consideremos los tres enunciados siguientes:

- (1) Antes Andrés tenía 2 pesetas. Después ganó 3 pesetas. ¿Cuántas pesetas tiene ahora?
- (2) Antes Andrés tenía 2 pesetas. Ahora tiene 3 pesetas más que antes. ¿Cuántas pesetas tiene ahora?
- (3) Antes Andrés tenía 2 pesetas. Antes tenía 3 pesetas menos que ahora. ¿Cuántas pesetas tiene ahora?

Los tres problemas se corresponden con una misma situación: antes tenía 2, aumenta lo que tiene en 3 y ahora tiene 5; se diferencian en el modo de expresar lo que aumenta. Pues bien, esa expresión tiene gran importancia en el porcentaje de éxito que hemos obtenido en nuestra investigación: 94% en (1), 93% en (2) y 37% en (3). Ahora nos referimos de manera sucinta a los aspectos de los problemas que pensamos pueden explicar sus diferencias en el éxito.

En ciertas situaciones numéricas nos encontramos con dos *estados* que se comparan: un *estado menor a* («Juan tiene 2 pesetas») y un *estado mayor b* («Pedro tiene 5 pesetas»). Usaremos el *esquema* $a + d = b$, siendo d la *diferencia*. Hay dos formas básicas de expresar la diferencia. En los problemas de *comparación* la diferencia se expresa por medio de «más que» («Pedro tiene 3 pesetas más que Juan») o de «menos que» («Juan tiene 3 pesetas menos que Pedro»). En los problemas de *igualación* se dice cuánto debe aumentar el estado menor para igualar al mayor («Si Juan gana 3 pesetas tendrá lo mismo que Pedro») o lo que debe disminuir el mayor para igualar al menor («Si Pedro pierde 3 pesetas tendrá lo mismo que Juan»).

En otras situaciones tenemos un *estado inicial i* («Antes Juan tenía 2 pesetas»), una *variación v* («luego ganó 3 pesetas») y un *estado final f* («ahora Juan tiene 2 pesetas»). Estos problemas tienen un *esquema* $i + v = f$. Hay dos tipos de expresión de la variación. En los problemas de *cambio* la variación se expresa de manera *simple* («Juan ha ganado 2 pesetas» o «Juan ha perdido 2 pesetas»). En los problemas de *cambio-comparación* se expresa la variación con «más que» o «menos que», de forma similar a los problemas de comparación («Ahora Juan tiene 3 pesetas más que antes»). No conocemos ninguna investigación que se refiera a esta última clase de problemas.

Resumimos en la tabla 1 las anteriores cuatro clases de problemas, que son las que hemos considerado en la investigación que aquí se presenta. La anterior distinción entre esquema y expresión no es habitual. Sería más coherente con esa distinción el uso de una terminología como variación-cambio, variación-comparación, diferencia-cambio y diferencia-comparación, pero, para facilitar su lectura, hemos optado por adaptarnos a la terminología más usual en las publicaciones sobre este tema.

Nuestra investigación se realizó con alumnos de edades entre 8 y 12 años, en tercero, cuarto, quinto y sexto de Educación Primaria en España y consistió en analizar los niveles de dificultad de los problemas de las cuatro clases mencionadas, en particular en relación con las formas de

Nuestra investigación se realizó con alumnos de edades entre 8 y 12 años, en tercero, cuarto, quinto y sexto de Educación Primaria en España y consistió en analizar los niveles de dificultad de los problemas de las cuatro clases mencionadas...

expresión de la variación y la diferencia. Fuson y Willis (1986) ya observaron que los problemas de comparación son, en general, más difíciles que los de igualación; es decir, la expresión de la diferencia tiene influencia en la dificultad. En esta investigación probamos, además, que la expresión de la variación, en los problemas de cambio y en los de cambio-comparación, es relevante. Varias investigaciones han probado la importancia de otras expresiones en los enunciados de los problemas (De Corte y Verschaffel, 1991; Teubal y Nesher, 1991).

Hemos evaluado los resultados de nuestra investigación de acuerdo con ciertas características que consideramos decisivas y que están relacionadas con la expresión de la diferencia y la variación, las cuales podemos resumir así (se detallan más adelante): *I* (el uso de un «lenguaje inconsistente») y *R* (el referente es la incógnita). La combinación de estas dos características (*IR*) puede aparecer en una forma fuerte (*f*) o débil (*d*), según cuál sea el orden de los datos en el enunciado. Los problemas con la característica *IR(f)* son los que tienen más bajo porcentaje de aciertos en las clases cambio-comparación y comparación. La clase de los problemas de cambio-comparación tiene, por tanto, elementos distintivos que la hacen diferente de la clase de cambio y, desde luego, de las de comparación e igualación.

Los porcentajes de éxito que los alumnos logran en los problemas propuestos nos llevan a afirmar que la forma de expresar la variación y la diferencia, así

<i>Expresión</i>	<i>Esquema: i + v = f</i>	<i>Esquema: a + d = b</i>
Simple	Cambio Antes Juan tenía 4 pta. Luego ganó 3 pta. ¿Cuántas pta tiene ahora?	Igualación Juan tiene 4 pta. Si gana 2 pta, entonces tiene lo mismo que Pedro. ¿Cuántas pta tiene Pedro?
Más/Menos	Cambio-comparación Antes Juan tenía 4 pta. Ahora tiene 3 pta más que antes. ¿Cuántas pta tiene ahora?	Comparación Juan tiene 4 pta Pedro tiene 5 pta más que Juan. ¿Cuántas pta tiene Pedro?

Tabla 1. Las cuatro clases de problemas analizadas en la investigación

como el orden de los datos, es decisiva en el nivel de éxito. Nuestra explicación es la siguiente: ciertas formas de expresar la variación y la diferencia, así como el orden en el que se presenten los datos, hacen que resulte más difícil al alumno la comprensión del enunciado del problema e imaginar la situación numérica a la que se refiere, lo que le impide tener éxito en su resolución. Es decir, nuestra explicación se basa en que (en estos problemas simples aditivos con números positivos) el nivel de éxito está directamente relacionado con la comprensión del enunciado.

Hacemos tres últimas observaciones. La primera: los problemas de combinación (la adición de dos estados parciales es el estado total) no se consideran en este estudio, como tampoco otras muchas que se han descrito en la literatura (Bruno y Martínón, 1996, 1997). La segunda: hay muchos contextos en los que es posible encontrar problemas aditivos (temperatura, cronología, longitud, etc.), pero en esta investigación, sin embargo, hemos preferido que todos los problemas sean del contexto «tener dinero» («Juan tiene 2 pesetas», «Juan ha ganado 2 pesetas», etc.), para fijar esa variable y, también, porque el ámbito monetario resulta familiar a los alumnos. La tercera: de cara a simplificar la escritura, escribiremos «pta» en lugar de «pesetas», mientras que las letras J, P, E, T significan nombres de personas.

Tipos de problemas y características relevantes

En esta sección introducimos la terminología que usamos, describimos con algún detalle los tipos de problemas propuestos a los alumnos y precisamos sus características más relevantes.

Antes de hablar de problemas aditivos preferimos referirnos a situaciones o historias aditivas simples (Rudnisky, Etheredge, Freeman y Gilbert, 1995), que son aquellas en las que se describe una situación en la que interviene una suma o resta de dos números. Las que

Consideramos cuatro clases de historias aditivas y, por tanto, cuatro clases de problemas aditivos: comparación, igualación, cambio y cambio-comparación.

Es bien conocido que dos problemas correspondientes a una misma historia pero con incógnitas distintas poseen porcentajes de éxito diferentes

hemos considerado en nuestra investigación son de números positivos, es decir en las que aparece una suma $x + y = z$ o una resta $x - y = z$, siendo x, y, z positivos. Consideramos cuatro clases de historias aditivas y, por tanto, cuatro clases de problemas aditivos: comparación, igualación, cambio y cambio-comparación. Se describen en los siguientes párrafos. Asociados a cada historia o situación aditiva encontramos tres problemas, según cuál sea la incógnita. La historia «J tiene 2 pta y P tiene 5 pta, luego P tiene 3 pta más que J», da lugar a los siguientes tres problemas:

- J tiene 2 pta y P tiene 5 pta. ¿Cuántas pta más tiene P que J?
- J tiene 2 pta y P tiene 3 pta más que J. ¿Cuántas pta tiene P?
- P tiene 3 pta más que J. P tiene 5 pta. ¿Cuántas pta tiene J?

Es bien conocido que dos problemas correspondientes a una misma historia pero con incógnitas distintas poseen porcentajes de éxito diferentes (Carpenter y Moser, 1982; Riley, Greeno y Heller, 1983), lo que en nuestra investigación se confirma.

Comparación (Co)

Consideremos los estados a («J tiene 2 pta») y b («P tiene 5 pta»). Ambos se relacionan mediante la *diferencia* $d = b - a$ («P tiene 3 pta más que J»). Diremos que este tipo de historias tiene el *esquema* $a + d = b$, donde, para evitar confusiones, tomaremos siempre $d > 0$; es decir, a es el *estado menor* y b es el *estado mayor* ($a < b$). Diremos que una historia aditiva (y sus problemas asociados) es de *comparación* si su esquema es $a + d = b$ y la diferencia d se expresa de alguna de las siguientes maneras:

- *Más*: cuando se dice cuánto el estado mayor es «más que» el menor.
- *Menos*: cuando se dice cuánto el estado menor es «menos que» el mayor.

Ejemplo: «J tiene 2 pta y P tiene 5 pta»; la comparación puede expresarse de las siguientes maneras: «P tiene 3 pta más que J» (*Más*) y «J tiene 3 pta menos que P» (*Menos*). Hay tres problemas, según cuál sea la incógnita: a (*estado menor*), d (*diferencia*) o b (*estado mayor*). Así, «J tiene 3 pta menos que P. P tiene 5 pta. ¿Cuántas pta tiene J?» es uno de esos tres problemas.

Igualación (Ig)

En las historias con esquema $a + d = b$ la diferencia d también puede expresarse de las siguientes formas:

- *Añadir*: cuando se dice lo que se ha de añadir al estado menor para igualar al mayor.

- *Quitar*: cuando se dice lo que se ha de quitar al estado mayor para igualar al menor.

Ejemplo: «J tiene 2 pta y P tiene 5 pta». Luego, «Si J gana 3 pta, entonces tiene lo mismo que P» (*Añadir*) y «Si P pierde 3 pta, entonces tiene lo mismo que J» (*Quitar*). Las historias de este tipo se llaman de *igualación*. También en este caso hay tres problemas asociados a una historia. En el ejemplo «Si P gana 2 pta, entonces tiene lo mismo que R. R tiene 6 pta. ¿Cuántas pta tiene P?» la incógnita es el estado menor.

Cambio (Cb)

Ahora consideramos un *estado inicial* i («esta mañana J tenía 2 pta») que sufre una *variación* v («J ha ganado 3 pta») y se obtiene un *estado final* f («J tiene ahora 5 pta»), de modo que $v = f - i$. Diremos que este tipo de historias tiene esquema $i + v = f$. Si la variación se expresa de forma simple («J ha ganado», «J ha perdido»), entonces diremos que es una historia de *cambio* (*Cb*). Consideremos el siguiente ejemplo: «Por la mañana J tenía 2 pta y por la noche tenía 5 pta». Entonces decimos «J ha ganado 3 pta a lo largo del día» (*Simple*). Según cuál sea el signo de v hablaremos de *cambio creciente* (*CbC*) si $v > 0$ («J ha ganado 3 pta») o de *cambio decreciente* (*CbD*) si $v < 0$ («J ha perdido 3 pta»). En los problemas de esta clase la incógnita puede ser i (*estado inicial*), v (*variación*) o f (*estado final*). En el ejemplo «Antes J tenía 5 pta y ahora tiene 2 pta. ¿Cuántas pta ha perdido?» la incógnita es la variación v .

Cambio-Comparación (CbCo)

Una historia de *cambio-comparación* (*CbCo*) es una situación aditiva con esquema $i + v = f$ en la que la variación v se describe usando las palabras «más que» o «menos que», expresiones utilizadas para la diferencia en las historias de *comparación*. Ejemplo: «Por la noche J tiene 3 pta más de lo que tenía por la mañana» (*Más*) y «Por la mañana J tenía 3 pta menos de lo que tenía por la noche» (*Menos*). Los tres problemas asociados a cada historia se determinan según cuál sea la incógnita (estado inicial, variación, estado final). Así, «J tiene por la mañana 2 pta. Por la noche tiene 5 pta. ¿Cuántas pta tiene más por la noche que por la mañana?». En esta clase también se distinguen las historias de *Cambio creciente-Comparación* (*CbCCo*) y *Cambio decreciente-Comparación* (*CbDCo*).

Orden de presentación de los números en el enunciado

En los problemas con esquema $x + y = z$, los datos en el enunciado pueden presentarse siguiendo el orden x, y, z ($x, y; x, z; y, z$) o el orden opuesto ($y, x; z, x; z, y$). Hemos identificado los problemas con orden opuesto marcándolos

los con *. Por ejemplo, los siguientes problemas tienen diferentes orden en los datos:

- Antes P tenía 6 pta y ahora tiene 4 pta. ¿Cuántas pta más de lo que tiene ahora tenía antes?
- (*) P tiene ahora 4 pta y antes tenía 6 pta. ¿Cuántas pta más de lo que tiene ahora tenía antes?

Tipos de problemas

Cada problema será clasificado conforme a las siguientes categorías:

- Tipo de historia: comparación (*Co*), igualación (*Ig*), cambio creciente (*CbC*), cambio decreciente (*CbD*), cambio creciente-comparación (*CbCCo*), cambio decreciente-comparación (*CbDCo*).
- Tipo de expresión: variación simple (*Simple*), comparación más (*Más*), comparación menos (*Menos*), igualar añadir (*Añadir*), igualar quitar (*Quitar*).
- Incógnita: estado inicial (*Inic*), variación (*Var*), estado final (*Final*), estado menor (*Menor*), diferencia (*Dif*), estado mayor (*Mayor*).
- Orden de los datos: orden del esquema, orden opuesto (*).

Por ejemplo, la historia de cambio creciente simple (*CbC-Simple*) «Antes J tenía 2 pta; ahora tiene 5 pta; luego ha ganado 3 pta», da lugar a los siguientes tres problemas:

- *CbC-Simple-Inic*. Después de ganar 3 pta, ahora J tiene 5 pta. ¿Cuántas pta tenía antes?
- *CbC-Simple-Var*. Antes J tenía 2 pta y ahora tiene 5 pta. ¿Cuántas pta ganó J?
- *CbC-Simple-Fin*. Antes A tenía 4 pta. Después ganó 3 pta. ¿Cuántas pta tiene ahora?

Tipos de problemas en la investigación

Los enunciados de los 39 problemas que hemos considerado en nuestra

*Cada problema será clasificado conforme a las siguientes categorías:
Tipo de historia,
Tipo de expresión,
Incógnita y Orden de los datos.*

investigación se recogen en el apéndice y la terminología usada figura en la tabla 2. De los 39 problemas, 9 son de cambio, 6 de igualación, 6 de comparación y 18 de cambio-comparación. A continuación analizamos algunas características relevantes de los problemas.

Característica 1: lenguaje inconsistente

En las publicaciones sobre problemas, se suele decir que un problema tiene *lenguaje inconsistente (I)* cuando las «palabras clave» usadas en el enunciado sugieren un cálculo diferente del que realmente debe hacerse. Por ejemplo, en el problema:

- *Co-Menos-Mayor*. T tiene 2 pta. T tiene 5 pta menos que E. ¿Cuántas pta tiene E?

se debe sumar $2 + 5$, pero la expresión «menos que» puede llevar a ciertos alumnos a restar. De modo similar, en el problema

- *CbC-Simple-Inic*. Después de ganar 3 pta, ahora J tiene 5 pta. ¿Cuántas pta tenía antes?

debemos restar $5 - 3$, aunque el término «ganado» puede sugerir una suma. Es decir, diremos que un problema es de lenguaje inconsistente cuando se debe

... un problema tiene lenguaje inconsistente (I) cuando las «palabras clave» usadas en el enunciado sugieren un cálculo diferente del que realmente debe hacerse.

sumar y aparecen expresiones como «menos que» o «perder», o si se debe restar y se usan expresiones como «más que» o «ganar». En la tabla 3 se indican con *I* los problemas de nuestra investigación que tienen lenguaje inconsistente.

	<i>CbC-Inic</i>	<i>CbC-Var</i>	<i>CbC-Fin</i>
Simple	I	I	
	<i>CbD-Inic</i>	<i>CbD-Var</i>	<i>CbD-Fin</i>
Simple	I		
Simple*	I		
	<i>CbCCo-Inic</i>	<i>CbCCo-Var</i>	<i>CbCCo-Fin</i>
Más	IR(d)	I	
Menos			IR(f)
	<i>CbDCo-Inic</i>	<i>CbDCo-Var</i>	<i>CbDCo-Fin</i>
Más		I	IR(f)
Más*		I	IR(d)
Menos	IR(d)		
Menos*	IR(f)		
	<i>Ig-Menor</i>	<i>Ig-Dif</i>	<i>Ig-Mayor</i>
Añadir	I	I	R
Quitar	R		I
	<i>Co-Menor</i>	<i>Co-Dif</i>	<i>Co-Mayor</i>
Más	IR(d)	I	
Menos			IR(f)

Tabla 3. Características de los problemas

Cambio (Cb)			Igualación (Ig)	
Cb Creciente (CbC)	Cb Decreciente (CbD)			
CbC-Simple	CbD-Simple	CbD-Simple*	Ig-Añadir	Ig-Quitar
CbC-Simple-Inic	CbD-Simple-Inic	CbD-Simple*-Inic	Ig-Añadir-Menor	Ig-Quitar-Menor
CbC-Simple-Var	CbD-Simple-Var	CbD-Simple*-Var	Ig-Añadir-Dif	Ig-Quitar-Dif
CbC-Simple-Fin	CbD-Simple-Fin	CbD-Simple*-Fin	Ig-Añadir-Mayor	Ig-Quitar-Mayor
Cambio-Comparación (CbCo)			Comparación (Co)	
Cb Creciente (CbCCo)	Cb Decreciente (CbDCo)			
CbCCo-Más	CbDCo-Más	CbDCo-Más*	Co-Más	
CbCCo-Más-Inic	CbDCo-Más-Inic	CbDCo-Más*-Inic	Co-Más-Menor	
CbCCo-Más-Var	CbDCo-Más-Var	CbDCo-Más*-Var	Co-Más-Dif	
CbCCo-Más-Fin	CbDCo-Más-Fin	CbDCo-Más*-Fin	Co-Más-Mayor	
CbCCo-Menos	CbDCo-Menos	CbDCo-Menos*	Co-Menos	
CbCCo-Menos-Inic	CbDCo-Menos-Inic	CbDCo-Menos*-Inic	Co-Menos-Menor	
CbCCo-Menos-Var	CbDCo-Menos-Var	CbDCo-Menos*-Var	Co-Menos-Dif	
CbCCo-Menos-Fin	CbDCo-Menos-Fin	CbDCo-Menos*-Fin	Co-Menos-Mayor	

Tabla 2. Tipos de problemas considerados en la investigación

Característica R: el referente es la incógnita

En los problemas de comparación la relación entre los dos estados se expresa tomando uno de ellos como *referente*. Por ejemplo, en el problema:

- *Co-Más-Mayor*. T tiene 2 pta. M tiene 5 pta más que T. ¿Cuántas pta tiene M?

el referente es lo que tiene T. Si la comparación se expresa con «menos», como en el problema:

- *Co-Menos-Mayor*. T tiene 2 pta. T tiene 5 pta menos que M. ¿Cuántas pta tiene M?

el referente es ahora lo que tiene M, que coincide con la incógnita. En los problemas de cambio-comparación también hay un referente. En el problema:

- *CbCCo-Menos-Fin*. Antes A tenía 3 pta. Ahora A tiene 5 pta menos que ahora. ¿Cuántas pta tiene ahora?

el referente es el número de pta que tiene ahora. En los problemas de cambio no consideraremos que haya referente.

En ciertos problemas ocurre que el *referente es la incógnita*. Entonces diremos que tienen la característica R o que son R-problemas. En la tabla 3 se indican con R los R-problemas de nuestra investigación.

Característica IR: lenguaje inconsistente y el referente es la incógnita

Usamos el símbolo IR cuando un problema tiene las dos características anteriores: I y R. Esto sólo puede ocurrir en ciertos problemas de cambio-comparación y de comparación, en los que la incógnita no es ni la variación ni la diferencia (ver tabla 3). En estos problemas, y sólo en ellos, el *referido* es el estado conocido, mientras la incógnita es el referente. En el ejemplo

- *CbCCo-Más-Inic*. Ahora L tiene 3 pta más que *antes*. *Ahora* tiene 5 pta. ¿Cuántas pta tenía *antes*?

el referido es lo que L tiene ahora y el referente es lo que tenía antes. Consideremos además los siguientes problemas, que son también de característica IR:

- *CbDCo-Menos-Inic*. Ahora M tiene 4 pta menos que *antes*. *Ahora* tiene 5 pta. ¿Cuántas pta tenía *antes*?
- *CbCCo-Menos-Fin*. Antes A tenía 3 pta. Ahora A tiene 5 pta menos que ahora. ¿Cuántas pta tiene ahora?
- *CbDCo-Más-Fin*. Antes P tenía 8 pta. *Antes* tenía 3 pta más que *ahora*. ¿Cuántas pta tiene ahora?
- *Co-Más-Menor*. T tiene 5 pta más que M. T tiene 7 pta. ¿Cuántas pta tiene M?
- *Co-Menos-Mayor*. T tiene 2 pta. T tiene 5 pta menos que E. ¿Cuántas pta tiene E?

En los problemas CbDCo-Más-Fin, CbCCo-Menos-Fin y Co-Menos-Menor la IR-característica aparece de forma

*Se pasaron
varios test
a 267
estudiantes
de tercero, cuarto,
quinto y sexto
de la Educación
Primaria
(8-12 años)
a los que
se encuestó
sobre los 39
problemas
aditivos...*

fuerte (*f*), ya que se usan las expresiones repetitivas «Antes... Antes... ahora ... ahora» y «T... T... E... E». Por otro lado, en los problemas CbCCo-Más-Inic, CbDCo-Menos-Inic y Co-Más-Menor la característica IR está en forma débil (*d*): «Ahora... antes. Ahora... antes» y «T... M. T... M». Consideramos de la máxima importancia la diferencia entre las formas fuerte y débil de la característica IR ya que, como veremos más adelante, los enunciados en forma fuerte son más difíciles de comprender para los alumnos que los de la forma débil.

Debe observarse que si se cambia el orden de los datos en el enunciado de CbDCo-Más-Fin [IR(*f*)], entonces el problema se convierte en CbDCo-Más*-Fin [IR(*d*)]:

- *CbDCo-Más*-Fin*. Antes R tenía 3 pta más que ahora. Ahora R tiene 8 pta. ¿Cuántas pta tiene ahora?

Cuando se cambia el orden de presentación de los datos en CbDCo-Menos-Inic [IR(*d*)], entonces se convierte en el problema CbDCo-Menos*-Inic [IR(*f*)]:

- *CbDCo-Menos*-Inic*. Ahora P tiene 5 pta. Ahora P tiene 4 pta menos que antes. ¿Cuántas pta tenía antes?

Por lo tanto, es claro que si se cambia el orden de presentación de los datos en el enunciado de un problema con característica IR(*f*), entonces se obtiene uno de característica IR(*d*), y viceversa.

Algunos autores (por ejemplo Verschaffel, 1994) dicen que un problema tiene lenguaje inconsistente cuando tiene la IR-característica, lo que supone un uso más estricto de esta terminología.

La investigación: resultados y discusión

Se pasaron varios test a 267 estudiantes de tercero, cuarto, quinto y sexto de la Educación Primaria (8-12 años) a los que se encuestó sobre los 39 problemas aditivos a los que nos hemos referido en las secciones previas. Constituían 15 grupos de dos escuelas públicas de Santa Cruz de Tenerife. Hubo diez tests

diferentes, cada uno con seis problemas. Los tests fueron aleatoriamente distribuidos en cada grupo y cada alumno respondió sólo a uno de ellos. De cara a evitar la posible influencia del orden de los problemas, de cada test se hicieron diferentes formatos cambiando el orden de los problemas. La respuesta usual de los estudiantes fue escribir una operación (suma, resta, producto o división) o simplemente la solución, sin ofrecer detalles de las operaciones. Las respuestas fueron clasificadas como bien, mal o en blanco.

El principal objetivo de la investigación fue la confirmación de que la clase de los problemas de cambio-comparación, que hasta ahora no había sido estudiada, contiene suficientes elementos propios que la distinguen de las otras tres (cambio, igualación y comparación) y que le confieren interés didáctico. No se trata sólo de una distinción formal entre clases de problemas, sino que la manera de expresar la variación en los problemas de cambio-comparación y cam-

El principal objetivo de la investigación fue la confirmación de que la clase de problemas de cambio-comparación contiene suficientes elementos propios que la distinguen de las otras tres...

bio es determinante de la dificultad, y que esta dificultad viene influida por las características a las que ya hemos hecho referencia.

En la tabla 4 se recoge el porcentaje de éxito alcanzado en cada problema y la característica que posee. La observación de la tabla nos dice que los resultados son muy diferentes. Así, los problemas de cambio creciente (CbC) y los de cambio creciente-comparación (CbCCo) de incógnita *fin* muestran éxitos de 94%, 93% y 37%, según que la expresión de la variación se haga en las formas *simple*, *más* o *menos*, respectivamente. En el caso de los problemas de cambio decreciente-comparación (CbDCCo) expresados en forma *más*, los porcentajes de éxito se sitúan en el 70%, 95% y 29% según que la incógnita fuera *inic*, *var* o *fin*, respectivamente. Se requiere, por tanto, un análisis algo detallado, lo que hacemos a continuación.

Resultados generales

Es evidente que no se puede establecer un nivel estricto de dificultad entre las cuatro clases de problemas que estamos considerando. La tabla 4 muestra con claridad la relación de las características *I*, *R* e *IR*, especialmente la última, con la mayor dificultad. Se puede apreciar que los problemas *IR(f)* son generalmente los de menor éxito, particularmente en los problemas de cambio-comparación,

		%	Car	%	Car	%	Car
<i>Cambio</i>							
		CbC-Inic		CbC-Var		CbC-Fin	
	Simple	77	I	75	I	94	
		CbD-Inic		CbD-Var		CbD-Fin	
	Simple	78	I	100		91	
	Simple*	81	I	94		94	
<i>Cambio Comparación</i>							
		CbCCo-Inic		CbCCo-Var		CbCCo-Fin	
	Más	65	IR(d)	78	I	93	
	Menos	80		90		37	IR(f)
		CbDCCo-Inic		CbDCCo-Var		CbDCCo-Fin	
	Más	70		95	I	29	IR(f)
	Más*	91		64	I	45	IR(d)
	Menos	47	IR(d)	94		84	
Menos*	21	IR(f)	82		79		
<i>Igualación</i>							
		Ig-Menor		Ig-Dif		Ig-Mayor	
	Añadir	57	I	75	I	91	R
	Quitar	85	R	98		50	I
<i>Comparación</i>							
		Co-Menor		Co-Dif		Co-Mayor	
	Más	63	IR(d)	74	I	80	
	Menos	80		89		59	IR(f)

Tabla 4. Porcentajes de éxito (%) y características (Car) de los problemas

mientras que los $IR(d)$ tienen porcentajes mayores. La mayor influencia de la forma fuerte sobre los bajos resultados se aprecia mejor si nos fijamos en los problemas (*): CbDCo-Más-Fin [$IR(f)$] tiene un porcentaje de éxito de 29% y CbDCo-Más*-Fin [$IR(d)$] de 45%; de modo similar, el problema CbDCo-Menos*-Inic [$IR(s)$] tiene el 21%, mientras que CbDCo-Menos-Inic [$IR(d)$] tiene el 47%. La influencia de la característica IR en los problemas de comparación no es tan marcada como en los problemas de cambio-comparación.

Orden de los datos

El orden de los datos en el enunciado tiene clara influencia sobre el éxito en los problemas de cambio-comparación, aunque poco o nada en los de cambio, tal como se ve en la tabla 4. Ya hemos indicado que el orden de los datos en los problemas IR determina que esa característica sea en forma fuerte o débil, lo que tiene repercusión directa en los porcentajes de éxito.

Estos resultados nos permiten formular conjeturas sobre problemas que no hemos considerado en nuestra investigación. Concretamente, pensamos que los problemas CbCCo-Menos*-Fin y Co-Menos*-Mayor, ambos $IR(d)$, son más sencillos de resolver que sus correspondientes $IR(f)$, los problemas CbCCo-Menos-Fin y Co-Menos-Mayor, respectivamente. De modo similar, creemos que los problemas CbCCo-Más*-Inic y Co-Más*-Menor, ambos $IR(f)$, son más difíciles que sus similares $IR(d)$: CbCCo-Más-Inic y Co-Más-Menor, respectivamente.

Cambio

Los problemas de cambio son los que mejores resultados tienen, entre 75% y 100%. Puede que la mayor atención en la escuela a este tipo de problemas explique parcialmente estos porcentajes. Los más bajos valores están relacionados con la característica I , lo que confirma un resultado que Martínez y Aguilar (1994) obtienen en su investigación. Debe notarse, sin embargo, que los problemas de característica IR o simplemente R no existen en la clase de cambio.

Cambio-comparación

Los tres problemas de esta categoría que poseen resultados de éxito claramente inferiores a los otros (37%, 29% y 21%) tienen la característica $IR(f)$. Los tres siguientes con porcentajes más bajos (65%, 47% y 45%) son los de característica $IR(d)$.

En los problemas de cambio creciente-comparación, el más difícil tras el $IR(f)$ y el $IR(d)$ es el que tiene la característica I : 78%. En los de cambio decreciente-comparación, existe una pauta diferente, ya que tras los $IR(f)$ y los

El orden de los datos en el enunciado tiene clara influencia sobre el éxito en los problemas de cambio-comparación, aunque poco o nada en los de cambio...

$IR(d)$ viene un problema con característica I , pero a él no le sigue el otro con esa misma característica, que llega a alcanzar un porcentaje del 95% de éxito, lo que no podemos explicar claramente.

Comparación

Los dos problemas de comparación con más bajo éxito (63% y 59%) son los de característica IR . También son los que tienen más bajos porcentajes en el estudio de Martínez y Aguilar (1994).

Igualación

En esta clase, los más bajos porcentajes (50%, 57% y 75%) se corresponden con problemas que poseen la característica I , resultado que coincide con lo obtenido por Martínez y Aguilar (1994). Los dos R -problemas (Ig-Quitar-Menor e Ig-Añadir-Mayor) no tienen bajos porcentajes de éxito. En esta clase de problemas, por tanto, los problemas con la característica I son más difíciles de resolver que los de la característica R . Obsérvese que el problema con mayor porcentaje de éxito no tiene ninguna de las características I y R .

Problemas similares

Hay ciertos grupos de problemas que muestran cierta semejanza, ya que tienen porcentajes de éxito similares y, además, sus enunciados pueden obtenerse uno de otro intercambiando ciertas palabras. Así ocurre, por ejemplo, con los problemas CbCCo-Menos-Inic (80%), CbDCo-Menos*-Fin (79%) y Co-Menos-Menor (80%). En efecto, si en el problema:

- *CbCCo-Menos-Inic*. Antes E tenía 4 pta menos que ahora. Ahora tiene 9 pta. ¿Cuántas pta tenía antes?

reemplazamos «antes» y «ahora» por «ahora» y «antes», respectivamente, y las formas verbales se modifican apropiadamente, se convierte en

- *CbDCo-Menos*-Fin*. Ahora J tiene 2 pta menos que antes. Antes tenía 6 pta. ¿Cuántas pta tiene ahora?

	%		%		%
CbCCo-Más-Inic	65	CbDCo-Más*-Fin	45	Co-Más-Menor	63
CbCCo-Más-Var	78	CbDCo-Más*-Var	64	Co-Más-Dif	74
CbCCo-Más-Fin	93	CbDCo-Más*-Inic	91	Co-Más-Mayor	80
CbCCo-Menos-Inic	80	CbDCo-Menos*-Fin	79	Co-Menos-Menor	80
CbCCo-Menos-Var	90	CbDCo-Menos*-Var	82	Co-Menos-Dif	89
CbCCo-Menos-Fin	37	CbDCo-Menos*-Inic	21	Co-Menos-Mayor	59

Tabla 5. Ternas de problemas similares

Si en este último problema, «ahora» y «antes» son reemplazados por «R» y «L», respectivamente, se obtiene:

- *Co-Menos-Menor*. R tiene 3 pta menos que L. L tiene 5 pta. ¿Cuántas pta tiene R?

Existen otras posibilidades similares de conjuntos de problemas, como se muestra en las tablas 5 y 6, aunque no siempre los porcentajes de éxito están tan próximos como en el ejemplo anterior.

	%		%
CbDCo-Menos-Inic	47	CbDCo-Más*-Fin	45
CbDCo-Más-Fin	29	CbDCo-Menos*-Inic	21
CbDCo-Más-Inic	70	CbDCo-Menos*-Fin	79
CbDCo-Más*-Inic	91	CbDCo-Menos-Fin	84

Tabla 6. Pares de problemas similares

Conclusiones

El principal objetivo de la investigación que presentamos en este artículo fue poner de relieve que la *forma de expresar* ciertas sentencias de los enunciados de los problemas también tiene influencia en la resolución.

Una situación aditiva simple puede expresarse de diversas formas. En las situaciones asociadas al esquema $i + v = f$ (estado inicial + variación = estado final), hay tres maneras de

expresar la variación (simple, más que, menos que); los resultados de nuestra investigación muestran que la expresión usada es relevante en el nivel de éxito. Análogamente, si el esquema es $a + d = b$ (estado menor + diferencia = estado mayor), entonces hay cuatro formas de expresar la diferencia (más que, menos que, añadir, quitar) y esa expresión se relaciona con la dificultad del problema. Con el fin de confirmar nuestra idea sobre la importancia de la expresión hemos considerado cuatro clases de problemas aditivos con números positivos, tres de las cuales (cambio, comparación e igualación) eran bien conocidas y una cuarta (cambio-comparación) ha sido estudiada en este trabajo por primera vez. Los problemas de cambio y de cambio-comparación tienen un esquema común ($i + v = f$) pero la expresión de la variación es diferente; también los problemas de comparación y de igualación poseen un mismo esquema ($a + d = b$), pero la diferencia se expresa de maneras distintas. Además, la expresión para la variación y la diferencia son similares en los problemas de cambio y de igualación, y también en los problemas de cambio-comparación y en los de comparación.

Con el fin de estudiar la influencia de la expresión hemos considerado algunas características de los problemas relacionadas con dicha expresión. La característica *I* se refiere a un «lenguaje inconsistente», que aparece cuando se usan palabras en el enunciado que pueden sugerir una suma cuando lo correcto es restar, o una resta cuando lo correcto es sumar. La característica *R* indica que el referente es la incógnita. Los resultados de nuestra investigación muestran que ambas características tienen relevancia en la resolución de los problemas, pero es, sobre todo, la conjunción de ambas (*IR*) la que posee una muy destacada influencia, especialmente cuando el orden de los datos en el enunciado hace que adopte la forma fuerte *IR(f)*.

Los resultados nos permiten establecer que la clase de los problemas de cambio-comparación tiene entidad propia. Por otro lado, los problemas de cambio no tienen la *IR*-característica, mientras que ésta sí aparece en los de cambio-comparación, y consecuentemente los hace más difíciles. Por otro lado, los problemas de cambio-comparación

difieren de los de comparación en que los *IR*-problemas están entre los de menor éxito. Hay otros, sin embargo, con la característica I que tiene éxito similar en ambas clases. Por tanto, se puede decir que la característica *IR* es una condición particularmente negativa en los problemas de cambio-comparación, pero de menor influencia en los de comparación e igualación.

En el ámbito de las clases de problemas estudiadas en esta investigación, creemos que la comprensión de la situación numérica que se describe en el enunciado del problema, de tal forma que resulte posible algún tipo de representación mental, es suficiente para la correcta resolución del mismo. Consecuentemente, pensamos que los menores porcentajes de éxito en ciertos problemas se explican porque tienen enunciados que hacen difícil comprender la situación numérica, de manera que el alumno no es capaz de imaginar esa situación y, entonces, responde al problema, si lo hace, haciendo con los datos la operación que le parece más razonable (usando las palabras clave). Este hecho ya había sido descrito por otros autores en los problemas de comparación y nuestra investigación nos lleva a extender esos resultados a los de cambio-comparación.

Parece necesario complementar esta investigación con los aspectos cognitivos en el proceso de resolución de los problemas por parte de los alumnos. Concretamente, será de mucho interés estudiar los esquemas conceptuales que usan los alumnos y averiguar si utilizan el mismo esquema ante los problemas de cambio-comparación que ante los de cambio, o si, por el contrario, es el mismo que utilizan ante los de comparación. La clarificación de este punto sería decisivo para precisar si, en la resolución de los problemas, lo dominante es la estructura del problema (el esquema) o la forma de expresar la situación.

Podemos obtener de nuestra investigación algunas consecuencias para la enseñanza. Con lo que hemos dicho resulta claro que lo decisivo es que el alumno comprenda el enunciado del problema y que logre hacer una representación mental de la situación numérica. En este sentido, diferentes investigaciones han mostrado que el uso de diagramas y gráficos, o el uso de material manipulativo, puede resultar muy valiosos para la comprensión de los problemas (Riley, Greeno y Heller, 1983). También resulta eficiente el trabajo directo sobre los enunciados, bien redactando con palabras propias un enunciado dado previamente (Verschaffel, 1994) o bien inventando problemas (Rudnitsky y otros, 1995).

Algunos autores (como Rudnitsky et al., 1995) consideran que el conocimiento de las diferentes clases de problemas debe formar parte del currículo escolar y que los alumnos deben ser capaces de identificarlos como de cambio, igualación o comparación. Sin necesidad de llegar tan lejos, si nos parece adecuado para mejorar la habilidad de los alumnos para resolver problemas que conozcan que una

*...sí
nos parece
adecuado
para mejorar
la habilidad
de los alumnos
para resolver
problemas
que conozcan
que una misma
situación
numérica
puede ser
expresada
de muy diferentes
maneras.*

misma situación numérica puede ser expresada de muy diferentes maneras.

Finalmente, las conclusiones de este trabajo refuerzan las ya comentadas en la literatura sobre la importancia que deben conceder los redactores de libros de texto a las expresiones usadas en los enunciados de los problemas. También los profesores deben ser conscientes de la relevancia de la expresión, no sólo a la hora de resolverlos, sino también al analizar las respuestas de los alumnos.

Referencias bibliográficas

- BRUNO, A. y A. MARTINÓN (1996): «Problèmes additifs (1): d'états; (2): de variations; (3): de comparaisons», *Math Ecole* (1) n.º 171, 17-20; (2) n.º 172, 24-27; (3) n.º 173, 33-37.
- BRUNO, A. y A. MARTINÓN (1997): «Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos», *Educación Matemática*, n.º 9, 33-46.
- CARPENTER, T. y J. MOSER (1982): «The development of addition and subtraction problem-solving skills», en T. CARPENTER, J. MOSER y T. Romberg (eds.): *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, LEA, New Jersey, 9-24.
- DE CORTE, E. y L. VERSCHAFFEL (1991): «Some factors influencing the solution of addition and subtraction problems», en K. DURKIN, y B. SHIRE (eds.): *Language in Mathematical Education. Research and practice*, Open University Press, Buckingham, 117-130.
- FUSON, K. C. (1992): «Research on whole number addition and subtraction», en D. A. GROUWS (ed.): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan, New York, 243-275.
- FUSON, K. C. y G. B. WILLIS (1986): «First and Second Grader's Performance on Compare and Equalize Word Problems», en *Proceedings of the 10th International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, University of London, Institute of Education, 19-24.
- MARTÍNEZ MONTERO, J. y M. AGUILAR VILLAGRÁN (1996): «La categoría semántica de igualación. Rasgos distintivos respecto a las de cambio y comparación», *Suma*, n.º 21, 35-39.
- RILEY, M., J. GREENO y J. HELLER (1983): «Development of children's problem-solving ability in arithmetic», en P. GINSBURG, (ed.): *The development of*

mathematical thinking, Academic Press. Orlando, Florida, 153-196. .

RUDNITSKY, A., S. ETHEREDGE, S. J. M. FREEMAN y T. GILBERT (1995): «Learning to solve addition and subtraction word problems through a structure-plus-writing approach», *Journal for Research in Mathematics Education*, n.º 26, 467-486.

TEUBAL, E. y P. NESHER,(1991): «Order of mention vs order of events as determining factors in additive word problems: A deve-

**Alicia Bruno
Antonio Martín
Fidela Velázquez**

Sociedad Canaria
de Profesores
de Matemáticas
«Isaac Newton »

lopmental approach», en K. DURKIN y B. SHIRE (eds.): *Language in Mathematical Education. Research and practice*, Open University Press, Buckingham, 131-139.

VERSCHAFFEL, L. (1994): «Using retelling data to study elementary school children's representations and solutions of compare problems», *Journal for Research in Mathematics Education*, n.º 25, 141-165.

VERSCHAFFEL, L.; DE CORTE, E. (1996): «Number and Arithmetic», en A. J. BISHOP y otros (eds.): *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer, Dordrecht, 99-137.

Anexo: enunciados de los problemas

Cambio creciente

- CbC-Simple-Inic. Después de ganar 3 pta, ahora J tiene 5 pta. ¿Cuántas pta tenía antes?
- CbC-Simple-Var. Antes J tenía 2 pta y ahora tiene 5 pta. ¿Cuántas pta ganó J?
- CbC-Simple-Fin. Antes A tenía 4 pta. Después ganó 3 pta. ¿Cuántas pta tiene ahora?

Cambio decreciente

- CbD-Simple-Inic. Después de perder 3 pta, ahora R tiene 4 pta. ¿Cuántas pta tenía antes?
- CbD-Simple*-Inic. Ahora R tiene 4 pta, después de perder 3 pta. ¿Cuántas pta tenía antes?
- CbD-Simple-Dif. Antes J tenía 5 pta y ahora tiene 2 pta. ¿Cuántas pta perdió J?
- CbD-Simple*-Dif. Ahora E tiene 2 pta y antes tenía 5 pta. ¿Cuántas pta perdió E?
- CbD-Simple-Fin. Antes J tenía 9 pta. Después perdió 4 pta. ¿Cuántas pta tiene ahora?
- CbD-Simple*-Fin. Antes de perder 4 pta, J tenía 9 pta. ¿Cuántas pta tiene ahora?

Cambio creciente-Comparación

- CbCCo-Más-Inic. Ahora L tiene 3 pta más que antes. Ahora tiene 5 pta. ¿Cuántas pta tenía antes?
- CbCCo-Más-Var. Antes L tenía 4 pta y ahora tiene 7. ¿Cuántas pta más tiene ahora que antes?
- CbCCo-Más-Fin. Antes P tenía 5 pta. Ahora tiene 4 pta más que antes. ¿Cuántas pta tiene ahora?
- CbCCo-Menos-Inic. Antes E tenía 4 pta menos que ahora. Ahora tiene 9 pta.

¿Cuántas pta tenía antes?

- CbCCo-Menos-Var. Antes L tenía 5 pta y ahora tiene 9. ¿Cuántas pta menos tenía antes que ahora?
- CbCCo-Menos-Fin. Antes A tenía 3 pta. Antes tenía 5 pta menos que ahora. ¿Cuántas pta tiene ahora?

Cambio decreciente-Comparación

- CbDCo-Más-Inic. Antes L tenía 3 pta más que ahora. Ahora tiene 2 pta. ¿Cuántas pta tenía antes?
- CbDCo-Más*-Inic. Ahora J tiene 2 pta. Antes tenía 3 pta más que ahora. ¿Cuántas pta tenía antes?
- CbDCo-Más-Var. Antes P tenía 6 pta y ahora tiene 4 pta. ¿Cuántas pta más tenía antes que ahora?
- CbDCo-Más*-Var. P tiene ahora 4 pta y antes tenía 6 pta. ¿Cuántas pta más tenía antes que ahora?
- CbDCo-Más-Fin. Antes P tenía 8 pta. Antes tenía 3 pta más que ahora. ¿Cuántas pta tiene ahora?
- CbDCo-Más*-Fin. Antes R tenía 3 pta más que ahora. Antes tenía 8 pta. ¿Cuántas pta tiene ahora?
- CbDCo-Menos-Inic. Ahora M tiene 4 pta menos que antes. Ahora tiene 5 pta. ¿Cuántas pta tenía antes?
- CbDCo-Menos*-Inic. Ahora P tiene 5 pta. Ahora tiene 4 pta menos que antes. ¿Cuántas pta tenía antes?
- CbDCo-Menos-Var. Antes M tenía 9 pta y ahora tiene 5 pta. ¿Cuántas pta menos tiene ahora que antes?
- CbDCo-Menos*-Var. M tiene ahora 5 pta y antes tenía 9 pta. ¿Cuántas pta menos tiene ahora que antes?
- CbDCo-Menos-Fin. Antes A tenía 6 pta.

Ahora tiene 2 pta menos que antes. ¿Cuántas pta tiene ahora?

- CbDCo-Menos*-Fin. Ahora J tiene 2 pta menos que antes. Antes tenía 6 pta. ¿Cuántas pta tiene ahora?

Igualación

- Ig-Añadir-Menor. Si P gana 2 pta, entonces tiene lo mismo que R. R tiene 6 pta. ¿Cuántas pta tiene P?
- Ig-Añadir-Dif. T tiene 3 pta y M tiene 8. ¿Cuántas pta tiene que ganar T para tener lo mismo que M?
- Ig-Añadir-Mayor. R tiene 4 pta. Si R gana 2 pta, entonces tiene lo mismo que P. ¿Cuántas pta tiene P?
- Ig-Quitar-Menor. Si C pierde 5 pta, entonces tiene lo mismo que A. C tiene 7 pta. ¿Cuántas pta tiene A?
- Ig-Quitar-Dif. C tiene 2 pta y A tiene 7. ¿Cuántas pta tiene que perder A para tener lo mismo que C?
- Ig-Quitar-Mayor. A tiene 4 pta. Si C pierde 2 pta, entonces tiene lo mismo que A. ¿Cuántas pta tiene C?

Comparación

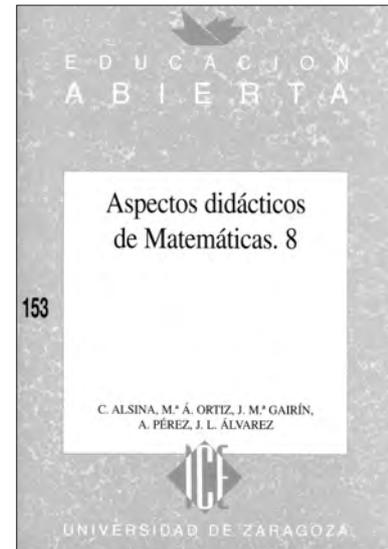
- Co-Más-Menor. T tiene 5 pta más que M. T tiene 7 pta. ¿Cuántas pta tiene M?
- Co-Más-Dif. R tiene 2 pta y A tiene 7 pta. ¿Cuántas pta más tiene A que R?
- Co-Más-Mayor. T tiene 2 pta. M tiene 5 pta más que T. ¿Cuántas pta tiene M?
- Co-Menos-Menor. R tiene 3 pta menos que L. L tiene 5 pta. ¿Cuántas pta tiene R?
- Co-Menos-Dif. P tiene 4 pta y A tiene 6 pta. ¿Cuántas pta menos tiene P que A?
- Co-Menos-Mayor. T tiene 2 pta. T tiene 5 pta menos que E. ¿Cuántas pta tiene E?



INSTITUTO DE CIENCIAS
DE LA EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

Aspectos didácticos de matemáticas. 8



CONTENIDOS

- *Geometría y realidad.* CLAUDI ALSINA
- *El álgebra escolar no es sólo cuestión de contenidos.* MARÍA ÁNGELES ORTIZ
- *Hacer matemáticas: el juego como recurso.* JOSÉ MARÍA GAIRÍN
- *Utilización didáctica del vídeo en matemáticas.* ANTONIO PÉREZ SANZ
- *Recursos de hoy y de ayer para enseñar matemáticas.* JOSÉ LUIS ÁLVAREZ

BOLETÍN DE PEDIDO

Deseo me envíen contra reembolso de 1.200 pesetas más gastos de envío, el libro *Aspectos didácticos de Matemáticas. 7.*

Nombre:

Dirección:

Población: C.P.: Provincia:

CIF o NIF (a efectos de emitir la obligatoria factura):

Remitir a:

Instituto de Ciencias de la Educación. C/ Pedro Cerbuna, 12. 50009 ZARAGOZA. Tno.: (976) 761991. Fax: (976) 761345