SUMA 36
febrero 2001, pp. 17-22

Requeteoremas: reinventando Teoremas en Geometría con Cabri II

José M. Pichel Cosme

ARTÍCULOS

En este trabajo se trata de responder a las preguntas: ¿Es posible desarrollar en la enseñanza básica un espíritu creativo de manera que un alumno o alumna se convierta en generador de información válida desde el punto de vista de las matemáticas? ¿Podemos desarrollar en el alumnado la creatividad científica?

UN ENFOQUE del aprendizaje en el que el alumno o alumna es un mero receptor de información, limita las posibilidades individuales y colectivas de contribuir al desarrollo de las ciencias. ¿Es posible desarrollar en la enseñanza básica un espíritu creativo de manera que un alumno o alumna se convierta en generador de información válida desde el punto de vista de las matemáticas? ¿Podemos desarrollar en el alumnado la creatividad científica?

Esta preocupación por la creatividad no es extraña en matemáticos profesionales, como en el caso de Hadamard cuando trata la naturaleza de la Invención o el de Wiener sobre la gestación y el cultivo de las Ideas. Desde otros campos científicos, de la llamada ciencia dura, también se ocupan del «extraño tema». Gerd Binnig es un físico que en 1986 recibió el premio Nobel por sus trabajos sobre el microscopio de efecto túnel. En su libro *Desde la Nada* reflexiona sobre la creatividad en el hombre y la naturaleza. Dice:

> … el mejor método para el aprendizaje es llegar a comprender el material mediante el juego, porque «resulta divertido», es placentero; por otro lado resulta que «el músculo creativo» tiene que ejercitarse. El pensamiento creativo debe aprenderse y practicarse. En mi caso resolví esa deficiencia dedicándome durante mis estudios a otras actividades que nutrían mi afición al juego. Compuse música, escribí versos y pinté cuadros. Hoy día me consta cuan valioso fue todo eso para mi –incluso para mi formación científica–, ya que los mecanismos que conducen a la creatividad en el arte son exactamente los mismos que conducen a la creatividad en la ciencia. El material es distinto, pero el juego que se entabla con él es el mismo.

Un proceso educativo orientado al desarrollo de la creatividad, necesariamente debe estar abierto a que se produzcan muchas «ideas basura», para poder encontrar las «ideas fértiles». Esta apertura a recibir de manera tolerante ideas nuevas, debe ir seguido por procesos de análisis estrictos, que permitan depurar las propuestas creativas. Aún más, la creatividad es un fenómeno colectivo; es raro el tipo de personas eficaces al mismo tiempo produciendo ideas y depurándolas, ambas cualidades se encuentran más fácilmente en grupos. Y existen diferentes obstáculos a la creatividad: el dogmatismo, la falta de libertad, el dominio opresivo del conocimiento, el miedo y otras barreras psíquicas.

Tal como dice Binnig, es imprescindible educar a la gente en los procesos de investigación para que la condición «ser humano» progrese, ya que en definitiva:

> Creatividad es la capacidad de evolucionar, y sin evolución no habría vida ni tampoco humanidad.

La creatividad está ligada al concepto de belleza; las sensaciones durante un proceso creativo tienen que ver con la estética, tema no muy lejano a las Matemáticas. Un libro clásico habla del «placer estético de las matemáticas».

Y viceversa: la belleza está ligada a los procesos de creatividad, ya sea la que desarrolla la propia Naturaleza o del ser humano en los distintos campos científico, artístico o técnico; estos procesos creativos son básicamente idénticos sea cual sea el campo en el que operan.

Las increíbles antenas de la hembra del *Cerambiphidus betullinus*, las fractales formas de las hojas del helecho *Phegopteris vulgaris* o las formas geométricas de la pirita son modestos ejemplos de la creativa belleza de la Naturaleza.

¿Y la conducta estética del ser humano? Tan necesaria nos es que en épocas de restricción de libertades, en la profunda Edad Media, siempre quedo a salvo de los estrictos sistemas morales imperantes. Así los artesanos de la Alhambra realizan sus mosaicos usando todas las estructuras geométricas posibles ante la imposibilidad de otro tipo de representaciones; Escher se inspira en estas obras y elabora sus teselas; los matemáticos formulan la Teoría de Grupos Cristalográficos Planos; todo esto forma la Cultura Común de la sociedad y está ligado a la creatividad general, el desarrollo de diferentes lenguajes y la búsqueda apasionada de la belleza-verdad-conocimiento-comprensión y recreación de nuestro entorno.

¿La construcción de las matemáticas es una tarea reservada para unos pocos afortunados con altísima capacidad? Si la respuesta es sí, ser creativo en matemáticas, entonces, no estaría al alcance de un alumno normal en proceso de formación, salvo pequeñas libertades en aspectos procedimentales, estrategias y así. Lo conceptual, la elaboración de conceptos, la investigación de regularidades matemáticas originales, la formulación de «pequeños teoremas» no sería por tanto un objetivo de la formación matemática. ¿Sería posible cambiar esta actitud frente a las matemáticas?

Esto no es así en otras áreas, muy especialmente en las Lenguas. Cuando el profesorado se plantea sus objetivos de área se tiene como referencia el trabajo y la producción profesional, sin que la modestia de recursos de los aprendices, alumnos y alumnas jóvenes, sea una traba para experimentar con su creatividad. Los alumnos y alumnas escriben poesía, sin que sean poetas, fabulan una historia, sin que sean novelistas, interpretan un documento histórico sin que sean historiadores, dibujan, sin que sean pintores… En Matemáticas repiten procesos consolidados sin mucho margen para la alegría, salvo pequeñas cositas. ¿Sería posible que los alumnos y alumnas crearan matemáticas? Diversas propuestas recogidas en materiales innovadores, como el libro de Alsina sobre *Matemáticas de la Forma*, avanzan en este sentido, pero es necesario profundizar y ampliar este enfoque a la totalidad de la educación matemática.

Los alumnos y alumnas pueden reflexionar sobre el número, el infinito, el cero, inventar categorías de números, jugar a la criptografía, pueden inventar operaciones, estrategias, fabular en geometría, analizar en estadística, inventar problemas en topología, diseñar funciones, analizar juegos,…

La historia de las Matemáticas es una fuente de propuestas en este sentido. Escritos de Galileo, por ejemplo, aportan una idea del trabajo matemático de esa época. Por un lado los titubeos, errores conceptuales, y aciertos ponen al alcance de la comprensión de los alumnos el trabajo matemático, lo humanizan, pero sobre todo permiten que el alumnado sienta una cierta accesibilidad en la construcción de las matemáticas. Los alumnos y alumnas pueden reflexionar sobre el número, el infinito, el cero, inventar categorías de números, jugar a la criptografía, pueden inventar operaciones, estrategias, fabular en geometría, analizar en estadística, inventar problemas en topología, diseñar funciones, analizar juegos, «recrear» en fin; pero lo más interesante es el análisis de regularidades matemáticas en situaciones novedosas, en principio.

Veamos un ejemplo: algunas reflexiones de Galileo sobre la continuidad usan, digamos, métodos geométrico-dinámicos. Hace rodar hexágonos. En esa y posteriores épocas, y muy ligado al nacimiento del cálculo diferencial e integral, está el estudio de la cuadratura de la cicloide. ¿Cuál es la superficie que la cicloide limita sobre la recta por la que rueda sin deslizar una circunferencia de radio *r*? Como es sabido la respuesta es $3\pi r^2$, es decir el triple del área del círculo que la genera. Para tener una idea sobre la respuesta al problema, Galileo comparaba, mediante una balanza, el peso de un círculo con el peso, recortado en el mismo material que el círculo, del área que abarcaba la cicloide. Tan heterodoxo procedimiento no daba una respuesta matemática, pero hacia más fácil saber por donde tirar. Las herramientas informáticas hoy nos permiten una capacidad de experimentación que ni soñaría el bueno de Galileo, y por añadidura posibilita que cualquier alumno de secundaria construya pequeños teoremas, encontrando regularidades que detectaría experimentalmente.

Las herramientas informáticas hoy nos permiten una capacidad de experimentación que ni soñaría el bueno de Galileo,

Idea: hagamos rodar polígonos regulares (para trabajar con alumnos de ESO, manipulativamente y con *Cabri* II)

Triángulo equilátero

Trazamos un triángulo y dibujamos las tres posiciones por las que pasa cuando rueda a lo largo de una recta. Para facilitar el ejercicio a los alumnos que tengan más dificultades de visualización espacial, se podría recortar el triángulo en papel o cartulina. Señalando el vértice izquierdo se sitúan las tres posiciones por las que pasa el vértice: inicial en la recta, media por encima de la recta y final otra vez en la recta. Trazado el triángulo resultante el ejercicio ahora es demostrar que el área es triple del área del triángulo inicial. Con *Cabri* se puede realizar el ejercicio pero es suficientemente trivial como para que cualquier alumno identifique la igualdad del área de los tres triángulos en que se descompone, llamémosle, el *trioide*: el área depende solo de la base y la altura, no de la forma (figura 1).

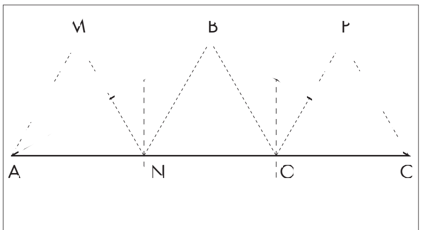

Figura 1

Cuadrado

Dibujamos un cuadrado, y seguimos el mismo procedimiento que antes. Al rodar el cuadrado pasa por cuatro posiciones, y el vértice inferior izquierdo en la posición inicial, define un cuadrilátero, al unir las cuatro posiciones, que llamaremos *tetroide* (figura 2).

El tetroide contiene dos cuadrados completos y dos medios cuadrados, luego de nuevo:

$$AEFC = 3 \cdot ADCB$$

El área del tetroide es triple de la del cuadrado.

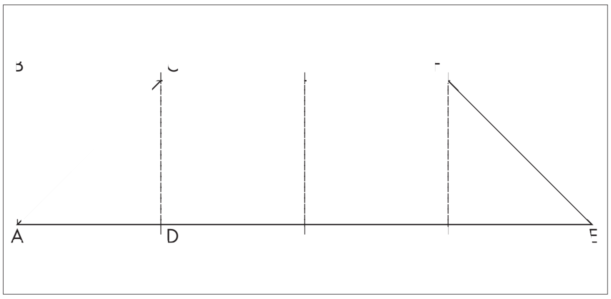

Figura 2

Pentágono

Seguimos el mismo procedimiento: dibujo del pentágono, elaboración del modelo en cartulina, trazado de las cinco posiciones del polígono al rodar, definición del polígono *pentoide*, trazado del movimiento con *Cabri*. Hacemos el análisis de la figura resultante (figura 3). (Si tenemos interés, podemos encontrar en ella la razón áurea.)

El pentoide contiene un pentágono central y dos figuras simétricas (pentágonos también).

Obviamente los triángulos AEA_1 y AED tienen la misma área y por tanto la misma que el triángulo FGH. Asi que el polígono $AFIA_2A_1$ tiene la misma área que el polígono. Luego:

$$AA_1A_2A_3A_4 = 3 \cdot AEDCB$$

El área del pentoide es triple de la del pentágono.

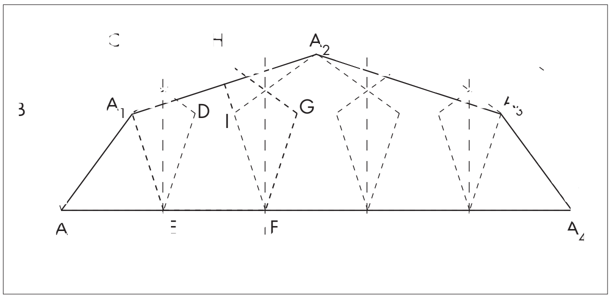

Figura 3

Hexágono

Construimos un hexágono en la forma habitual o bien usamos una parrilla de triángulos equiláteros, y hacemos rodar la figura. Obtenemos un *hexoide*. Analizamos el área por simple descomposición en triángulos (figura 4).

El hexoide contiene 16 triángulos equilateros y dos isósceles A_1EA_2 y $A_3E_1A_4$.

Obviamente $A_1EA_2 = A_1ED$.

Luego el hexoide tiene 18 triángulos y el hexágono 6.

El área del hexoide es triple de la del hexágono

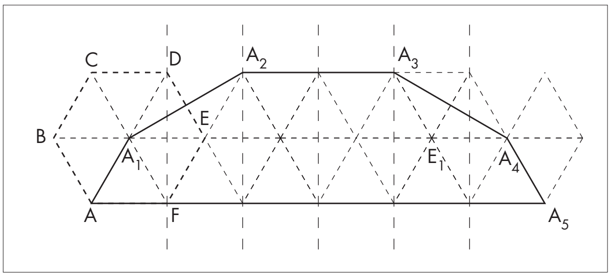

Figura 4

Hasta aquí sería el tipo de actividades que un alumno podría trabajar para comprobar la regularidad. A partir de aquí sería un ejercicio más complejo que en todo caso se podría abordar con *Cabri II*.

Tendríamos una oportunidad de hacer distinguir entre comprobación y demostración. La demostración no es el objetivo de esta propuesta didáctica, sino la Formulación de un pequeño teorema. Sigamos con el heptágono, el octógono,…

Heptágono

Construimos con *Cabri II* el *heptoide* (figura 5). Pedimos el área de ambas figuras. De nuevo el área del heptoide triplica la del heptágono

Proponemos esta actividad para los «mayores». De igual forma para el *octoide* (figura 6).

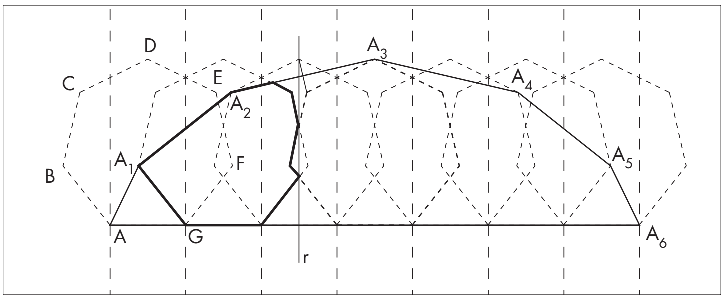

Figura 5

¡Admirable regularidad! Descompongamos las figuras, relacionemos de manera abierta. ¿Por qué la igualdad de tales áreas? ¿Por qué el alineamiento de tales vértices. Y en el límite, la bella Helena, la cicloide, ¿no encierra en sí misma un infinito de regularidad? Hablemos de las justas matemáticas de los siglos XVII y XVIII, el nacimiento de nuevas ciencias, el imperio del rigor…

Y ahora un poco de atrevimiento para formular un pequeño teorema:

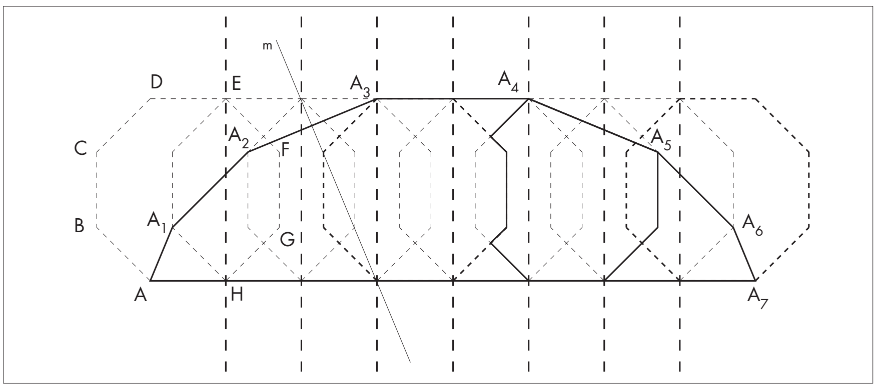

Figura 6

El área del *n*-polígono generado por un polígono regular de *n* lados al pasar por las *n* posiciones estables que se generan al rodar, sin deslizar, sobre una recta, es triple del área del polígono regular que lo genera.

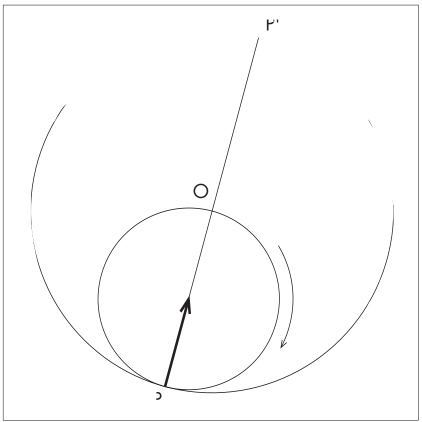

Figura 7

Tratando de explicar de manera creativa algo parecido a lo que en este escrito propongo, en una reciente reunión de las JAEM-99 en Lugo, recordé un *teorema clásico: Si por el interior de una circunferencia de radio* R *rueda sin deslizar otra circunferencia de radio* R/2*, un punto P de la circunferencia interior describe un diámetro* POP' (figura 7).

Idea: ¿Qué pasa si hacemos rodar polígonos regulares por el interior de la circunferencia? ¿En que condiciones estarán alineadas las sucesivas posiciones de un vértice?

Probamos que pasa si tratamos con polígonos de un número impar de vértices y uno de ellos está en el centro de la circunferencia (figura 8).

Parece que, en efecto, al igual que con circunferencias, el punto ocupa posiciones en el diámetro.

Probemos ahora con polígonos de un número par de vértices, tal que el punto medio de un lado esté en el centro de la circunferencia. Veamos con el cuadrado, exágono, el octógono…. (figura 9)

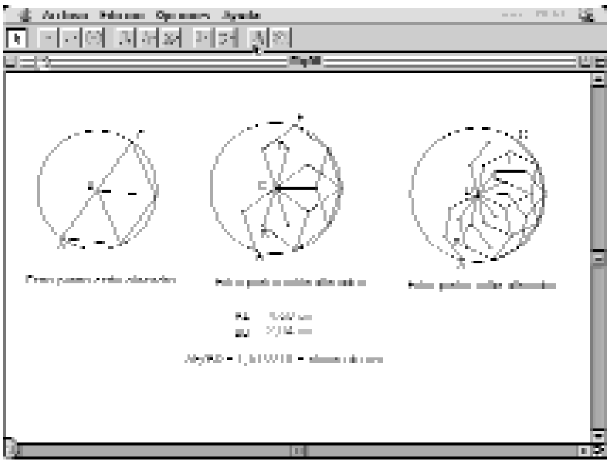

Figura 8

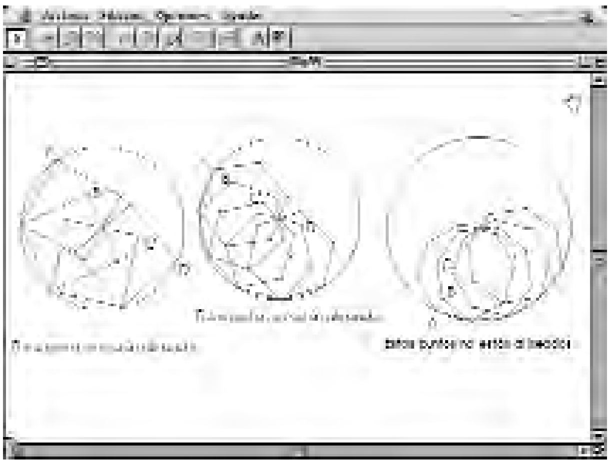

Figura 9

Nada, esto no va. ¿Y si volvemos atrás, a las circunferencias? Definamos los polígonos inscritos en una circunferencia, aunque no tangente interior, que pase por el centro de la mayor y tal que el los vértices de un lado del polígono estén en la circunferencia mayor. Mejor una imagen (figura 10).

Seguimos probando, veamos con el octógono (figura 11)

¡Bien! Ya estamos en condiciones de aventurar el *Requeteorema*:

> Si un polígono… las sucesivas posiciones de un vértice están sobre el diámetro

Demostraciones aparte, hemos cumplido lo que pretendíamos, formular pequeños teoremas con visos de verosimilitud, y quizás del análisis de la partición del diámetro según el polígono, se nos podría ocurrir…

José M. Pinchel
IES A Barcala
Cambre (A Coruña)

Bibliografía

ALSINA CATALÁ, C. (1993): *Matemáticas de la forma*, MEC-Edelvives, Zaragoza

BINNIG, G. (1996): *Desde la nada. Sobre la creatividad de la Naturaleza y del ser humano*, Galaxia Gutenberg-Círculo de lectores, Barcelona 1996.

BOYER, C. B. (1986): *Historia de la Matemática*, Alizanza Universidad Textos,Madrid.

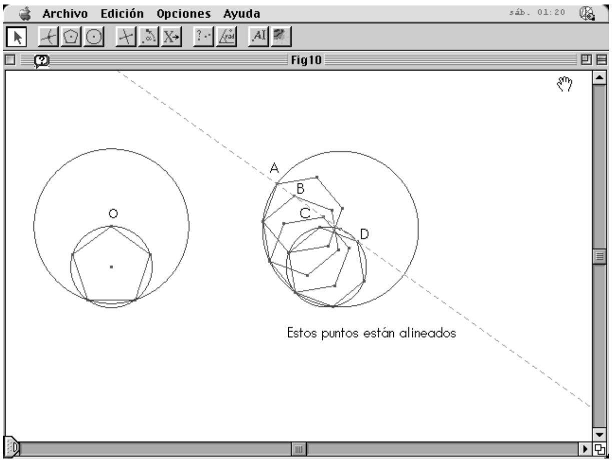

Figura 10

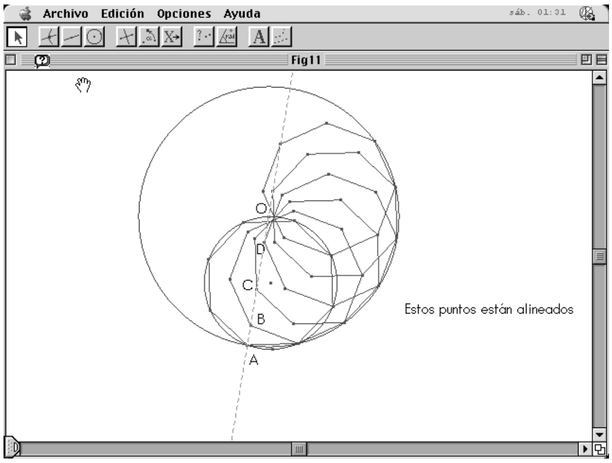

Figura 11