SUMA 35
noviembre 2000, pp. 97-10

El problema de los isoperímetros en el Islam Medieval

Grupo Construir las Matemáticas*

TALLER DE PROBLEMAS

ES CURIOSO cómo desaparece una cultura, prácticamente, de la Historia de las Ciencias. Parece como si desde la caída de la Casas de la Sabiduría de Bagdad la civilización islámica no haya hecho ninguna aportación científica a la Humanidad. Sin embargo, no es así. Con esta entrega deseamos rendir un merecido homenaje a cuantos arabistas están dando a la luz excelentes resultados fruto de su investigación. Españoles como José Sánchez Pérez, Juan Vernet, Julio Sansó y Mercé Comas, franceses como Djebar, etc. Merecen ocupar un lugar destacado en cuanto a sus aportaciones en investigación para esclarecer la Historia de las Matemáticas en el Islam Medieval.

A comienzos del s. IX, tanto el *Almagesto* de Ptolomeo como los *Comentarios* de Theón de Alejandría estaban traducidos a la lengua árabe. Estas fueron las fuentes de al-Kindi a quien, parece ser, se atribuye el haberse ocupado del problema de los isoperímetros en el mundo árabe. Recuerda en su *Gran Arte* la influencia de Theón (ms. de Istambul, Aya Sofía 4830, fol. 53r-80v) al escribir que «nosotros lo hemos explicado en nuestro libro sobre esféricas». Pero el biobibliógrafo del s.X al-Nadin añade que al-Kindi dedicó un tratado a este problema en el que concluye que «la esfera es la mayor entre las figuras sólidas y el círculo es mayor que cualquier figura plana». Al igual que otros muchos, los escritos de al-Kindi han desaparecido por lo que no podemos afirmar nada de su contribución ni hacer seguimiento alguno entre sus discípulos. Así llegamos hasta mediados del s.X en el que figura al-Khazin quien, como también sucediera con sus sucesores, parece tener como centro de interés la cosmografía. Al-Khazin escribe un libro con nueve lemas, con los que se pone de manifiesto que conocía los resultados de Zenodoro a través del resumen de Theón, y abre nuevas vías de demostración. Los cuatro primeros lemas tratan de establecer que el área de un triángulo equilátero es mayor que la de cualquier triángulo isósceles de igual perímetro. En el lema quinto demuestra que el área de un triángulo equilátero es mayor

* Los componentes del Grupo Construir las Matemáticas son Rafael Pérez, Isabel Berenguer, Luis Berenguer, Belén Cobo, M.ª Dolores Daza, Francisco Fernández, Miguel Pasadas y Ana M.ª Payá.

que la de cualquier otro de igual perímetro. Con el sexto lema pasa a los paralelogramos y rombos, comparando sus áreas con las de un cuadrado de igual perímetro. El pentágono regular es la figura sobre la que trata en el séptimo lema y demuestra que su área es mayor que la de cualquier otro pentágono de igual perímetro.

Si comparamos el camino de al-Khazin con el de Zenodoro, se observa la diferencia entre ambos. Zenodoro comienza comparando un triángulo cualquiera con uno isósceles de igual base y perímetro para decir que «la suma de dos triángulos isósceles, semejantes entre sí, cuyas bases son desiguales, es mayor que la suma de dos triángulos isósceles, no semejantes entre sí, isoperimétricos a los triángulos semejantes». Por isoperimétrico hay que entender aquí que la suma de los lados, excluyendo las bases, son iguales. Este lema de Zenodoro no es correcto. Coolidge (1940) lo ha puesto de manifiesto al usar un lenguaje diferente para el lema. Trata de buscar el máximo de la suma de áreas de los triángulos de bases 2*x* y 2*y* y alturas *a* y *b*, respectivamente, *ax*+*by*, cuando

$$\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2}=1$$

(se ha tomado como 1 el valor del isoperímetro dado). Es necesario, pues, que $ax'+by'=0$ por lo que $x'/y'=-b/a$; derivando la segunda igualdad:

$$\frac{bx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{ay}{\sqrt{b^2+y^2}}$$

Escribiendo $x = au$ e $y = bv$ queda:

$$\frac{u}{a\sqrt{1+u^2}}=\frac{v}{b\sqrt{1+v^2}}$$

mientras que el enunciado exige que $u = v$.

Es posible que al-Khazin eligiese otro método demostrativo debido a este error de Zenodoro.

Después, al-Khazin demuestra que si dos polígonos regulares, P_1 y P_2, tienen, respectivamente, n_1 y n_2 lados, $n_1 > n_2$, e igual perímetro, el área de P_1 es mayor que la de P_2 y que, entonces, el área del círculo es mayor que la del polígono cuyo perímetro coincide con la longitud de la primera.

Ya podemos ver que el camino seguido por al-Khazin es el siguiente:

1.° Comienza comparando polígonos regulares de igual perímetro y número de lados diferentes.

2.° Compara un polígono regular con un círculo de igual perímetro.

¿Puede ser la evolución histórica hasta aquí presentada un esquema que permita planificar la actuación en clase de la mano del modelo Van Hiele? Es decir, discutir si el área de un triángulo equilátero es mayor que la de cualquier triángulo isósceles de igual perímetro, para el diagnóstico; demostrar que el área de un triángulo equilátero es mayor que la de cualquier otro de igual perímetro, para la orientación dirigida; esta misma reflexión, en este mismo momento del análisis histórico, puesta en boca del alumnado, la explicitación; y demostrar que si dos polígonos regulares, P_1 y P_2, tienen, respectivamente, n_1 y n_2 lados, $n_1 > n_2$, e igual perímetro, el área de P_1 es mayor que la de P_2 y que, entonces, el área del círculo es mayor que la del polígono cuyo perímetro coincide con la longitud de la primera, la orientación libre. Todo está un poco desordenado desde este punto de vista, ¿verdad? A nosotros nos sirve de mucho organizar toda esta información en una ficha con la que analizamos cualquier problema. En las entregas 4.ª y 8.ª presentaremos las dos fichas siguientes:

- Ficha para presentar el problema de los isoperímetros de la mano de los métodos trigonométricos en 3.° de ESO.
- Ficha para presentar el problema de los isoperímetros de la mano de las funciones a lo largo de la ESO.

Volvamos con al-Khazi y sus investigaciones. ¿Cómo abrir el problema de los isoperímetros al espacio? Después de enunciar varios lemas sobre el área de una pirámide y su volumen, así como del cono y tronco de cono, enuncia tres proposiciones. La primera dice que:

«siendo *S* un sólido de revolución, formado por troncos de conos y conos, inscrito en una esfera *E* de radio *R* y circunscrito a otra esfera *E'* de radio *R'* se demuestra que $4{\neq}R'^2$ < área de $S < 4{\neq}R^2$».

En la segunda proposición, demuestra que el área de la esfera es igual a cuatro veces el área de su círculo máximo. En la tercera, determina el volumen de la esfera.

Para finalizar, al-Khazin define un sólido particular inscrito en la esfera y admite la existencia de una esfera tangente a todas las caras del sólido, lo que es inexacto, y, sin embargo, el resultado obtenido es exacto. Acto seguido demuestra la propiedad de volumen máximo de la esfera del modo siguiente:

Sea una esfera de centro *O* y radio *R*, con área *S* y volumen *V*. Un poliedro de igual área *S* y volumen V_1 está circunscrito a otra esfera de radio *R'* y área *S'*. Entonces, $V_1 = (1/3)SR'$; el área S' es inferior a la del poliedro, luego $S > S'$; y, por tanto, $R' < R$ y $(1/3)SR' < (1/3)SR$; es decir, $V_1 < V$.

Aunque el poliedro no está explícitamente descrito, en la demostración se supone circunscrito a la esfera y, por tanto, regular. Así pues, la demostración no es válida en general.

¿Por qué sigue al-Khazin un camino diferente para 3D al de 2D en el análisis de casos posibles? En esta ocasión no compara poliedros de igual área y distinto número de caras sino que obtiene, directamente, un resultado utilizando la fórmula que relaciona el volumen de una esfera con su área, fórmula que obtiene aproximando la esfera por poliedros no regulares.

Casi medio siglo después de que al-Khazin escribiera estos resultados, Ibn al-Haytham retoma este problema y elabora su tratado sobre los isoperímetros. En la presentación justifica el porqué lo hace al escribir que: «Los matemáticos han mencionado esta noción y la han utilizado, pero alguna de las demostraciones dadas no parecen correctas». En este trabajo, Ibn al-Haytham sigue un camino diferente analizando el problema tanto en el plano como en el espacio y, para lo segundo, desarrolló una teoría original del ángulo sólido, la primera en la Historia merecedora de este nombre.

El tratado sobre los isoperímetros de Ibn al-Haytham puede considerarse como vanguardista en la investigación matemática de su momento. Comienza comparando polígonos regulares de igual perímetro y diferente número de lados, llegando a demostrar que:

1.° Sean P_1 y P_2 polígonos regulares con n_1 y n_2 lados, tales que $n_1 < n_2$, de áreas A_1 y A_2 y perímetros p_1 y p_2. Si $p_1 = p_2$ entonces $A_1 < A_2$.

2.° Sea p la longitud de una circunferencia, A el área del círculo que determina, **p**' el perímetro de un polígono regular y A' su área. Si $p = p'$ entonces $A > A'$.

Al contrario de todos sus predecesores, Ibn al-Haytham utiliza la primera proposición para demostrar la segunda. Además, hablando en lenguaje actual, considera el círculo como dominio del plano obtenido como límite de la sucesión de los dominios determinados por polígonos regulares.

A partir de estas dos proposiciones demuestra que, entre todas las figuras planas con un perímetro dado, es el círculo la de mayor área. En su demostración nunca se duda sobre si tal límite existe, lo que no es de extrañar porque estaba asegurada desde que Arquímedes publicara *La medida del círculo*.

El estudio para 3D lo basa en diez lemas que establecen dos proposiciones:

1.ª) Dos poliedros que tienen caras semejantes y áreas iguales, tiene mayor volumen el de mayor número de caras.

Sean A y B los centros de dos esferas circunscritas a cada poliedro. Sean AE y BG las distancias desde cada uno de los centros de las esferas a una cara del poliedro correspondiente. S_A y S_B las áreas de cada poliedro y V_A y V_B sus volúmenes. Se verifica que:

$$V_A = (1/3)S_A \cdot AE \text{ y } V_B = (1/3)S_B \cdot BG$$

Si n_A y n_B son el número de caras de cada uno de los poliedros y, por ejemplo, $n_A = n_B$, al ser, por hipótesis, $S_A = S_B$, resulta que $V_A < V_B$.

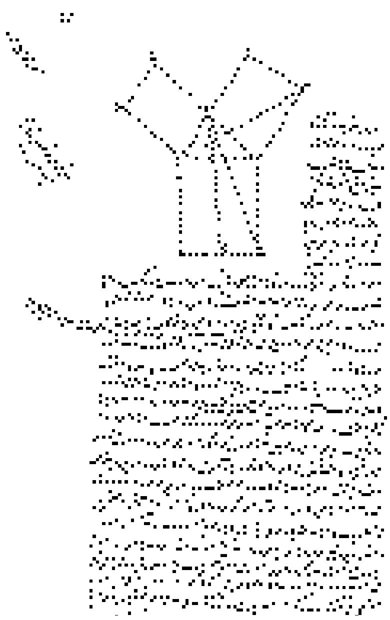
La demostración de Ibn al-Haytham consiste en comparar AE y BG para, a continuación, considerar las bases de las pirámides de vértices A y B que descompone, a su vez, en triángulos. El razonamiento se hace entonces a partir de los resultados, ya establecidos, sobre ángulos sólidos cuyos vértices están en los centros de las esferas.

2.ª) Si dos poliedros regulares tienen por caras polígonos regulares semejantes, y están inscritos en la misma esfera, es el de mayor número de caras el de mayor superficie y volumen.

Las etapas que Ibn al-Haytham sigue en su demostración son las siguientes.

a) Sean P_1 y P_2 poliedros, con n_1 y n_2 caras tales que $n_1>n_2$, de áreas A_1 y A_2 y volúmenes V_1 y V_2. Si A es el centro de la esfera circunscrita a los dos poliedros, existirán n_1 pirámides regulares e iguales con vértice en A asociadas a P_1 y n_2 asociadas a P_2.

b) Sean α_1, s_1 y h_1, respectivamente, el ángulo en el vértice, el área de la base y la altura de una pirámide regular P'_1 asociada al poliedro P_1. Análogamente, sean α_2, s_2 y h_2, respectivamente, el ángulo en el vértice, el área de la base y la altura de una pirámide regular P'_2 asociada al poliedro P_2. Se tiene que $n_1\alpha_1=n_2\alpha_2$ = 8 ángulos sólidos rectos; pero, como $n_1>n_2$, se verificará que $\alpha_1<\alpha_2$.



c) Puede suponerse que las pirámides P'_1 y P'_2 tienen el mismo eje. Al ser $\alpha_1<\alpha_2$, el ángulo sólido de P'_1 es interior al de P'_2, las aristas de P'_1 cortan a la esfera por debajo del plano de la base de P'_2. Los planos de las dos bases son paralelos y cortan a la esfera siguiendo circunferencias circunscritas a las bases; se deduce que $s_1<s_2$ y $h_1>h_2$.

   Por otra parte, $\alpha_1/(8D)=s_1/S_1=1/n_1$ y $\alpha_2/(8D)=s_2/S_2=1/n_2$, de donde $\alpha_2/\alpha_1=(s_2S_1)/(s_1S_2)$.

d) Ibn al-Haytham había establecido en uno de los lemas que $\alpha_2/\alpha_1>s_2/s1$. Se sigue, pues, que $(s_2S_1)/(s_1S_2)>s_2/s_1$, de donde $S_1>S_2$. Además se sabe que $V_1=(1/3)S_1h_1$ y $V_2=(1/3)S_2h_2$. Luego, al verificarse que $S_1>S_2$ y $h_1>h_2$, se sigue que $V_1>V_2$.

¿Qué podemos decir de la demostración de Ibn al-Haytham? Lo principal es que, realmente, bajo esta pretendida generalidad, sólo se está trabajando con los deltaedros regulares –es decir, el tetraedro, el octaedro y el icosaedro- y que si tienen igual área sus volúmenes crecen desde el tetraedro, que sería el menor, hasta el icosaedro. Sin embargo, la intención parece ser la misma que en el caso plano; es decir, a partir de la comparación de poliedros regulares de igual área y un número diferente de caras, se trata de establecer que sería la esfera la de mayor volumen al ser éste aproximado por el límite de la sucesión de volúmenes de los poliedros inscritos. Pero este camino es inútil dado que el número de poliedros regulares es finito.

Las contribuciones de al-Khazin e Ibn al-Haytam están muy por encima de las de otros matemáticos árabes medievales. Ibn Hud, Jabir b. Aflah, Abu al-Qasim, al Sumaysali, etc. son algunos de sus seguidores que se ocuparon también del problema de los isoperímetros.

Los dos primeros son andalusíes y sus aportaciones a las Matemáticas, no sólo en este problema, son de gran interés. Como noticia, diremos que muy pronto será publicado un libro, de Rafael Pérez, en el que figuran los matemáticos andalusíes más destacados como parte de nuestro legado histórico-cultural que, por lo demás, es prácticamente desconocido.

¿Cómo diseñar ahora las fases de Van Hiele para el aprendizaje desde el problema en su visión tridimensional?

Como conclusión, señalaremos el hecho del tratamiento plano y espacial del problema. Actualmente se aconseja que la enseñanza de la Geometría se ocupe simultáneamente de los resultados en 2D y 3D. Aquí tenemos, pues, un buen ejemplo a seguir.

Altura de un triángulo
XI Olimpiada Matemática Nacional
Equipo 8

Thales de subida
XI Olimpiada Matemática Nacional
Equipo 9