SUMA 35

noviembre 2000, pp. 63-69

El algoritmo de la raíz cuadrada. Dos tipos distintos de aproximación heurística

Guido Ramellini

IDEAS Y RECURSOS

Detrás de los algoritmos y de los contenidos más aburridos de las matemáticas se esconden a veces ideas e intuiciones ricas y fascinantes. Si dejamos a un lado la pura mecánica y damos preferencia a las actividades de laboratorio, a una metodología heurística y a una aproximación geométrica, podemos encontrar contenidos y estimular habilidades importantes e inesperadas. Este trabajo lo intenta con algo tan aburrido y mecánico como el algoritmo de la raíz cuadrada, que puede sorprendernos y ayudarnos a entender más y mejor no sólo unos contenidos (relaciones entre polígonos, el concepto de área, etc.), sino algunos errores de nuestros alumnos.

Un matematico è qualcuno che non ha mai estratto a mano una radice quadrata, se non nei compiti dei propri figli.[1]

Tullio Lombardo Radice

SI HICIERA falta, después de la cita inicial, declaro que el objetivo del artículo es muy distinto al de obligar a los alumnos de primero de ESO a extraer raíces cuadradas con papel y lápiz, aplicando esa lista de instrucciones que resulta mágica como un arcano, compleja como un trabalenguas y más abstracta que la lógica formal.

Pero,

a) *el algoritmo de la raíz cuadrada* –sin duda complicado– *¿es realmente tan abstracto y mágico?* Y,

b) dejando a un lado el aspecto práctico, que las calculadoras resuelven tan satisfactoriamente, *un trabajo en clase sobre este tema ¿puede desarrollar habilidades matemáticas importantes?*

Aparte el encanto de la experiencia personal de un autor como Italo Calvino[2] o de los enfoques de un pedagogo como Rudolf Steiner[3], pocos profesores estarían dispuestos a dedicar parte del exiguo tiempo del programa de matemáticas a enseñar el algoritmo de la raíz cuadrada, aun cuando se reconozca un valor pedagógico a la concentración, al rigor y a la autodisciplina que comporta.

Teniendo en cuenta que se puede conseguir que los alumnos adquieran estos hábitos en casi todas las actividades matemáticas que les proponemos, este trabajo no tiene un valor específico, ni por contenido ni por metodología, pero permite evidenciar unos aspectos que me parece útil subrayar, a saber:

a) Que hay un significado, a veces oculto, bajo las fórmulas o las instrucciones matemáticas que muy a menudo aceptamos de manera mecánica.

1 Un matemático es alguien que nunca ha extraído con papel y lápiz una raíz cuadrada, sino en los deberes de sus hijos.

2 Dicen que Calvino solía extraer raíces o resolver largas divisiones con la intención de mantener ocupado el hemisferio racional y dejar al creativo libre de buscar la inspiración literaria.

3 Fundador de la Antroposofía y de las escuelas Waldorf, en donde la enseñanza del algoritmo de la raíz cuadrada tiene un lugar en el currículo de matemáticas.

b) Que hay métodos de aproximación heurísticos que merece la pena investigar.

c) Además, el trabajo de analizar las instrucciones del algoritmo de la raíz cuadrada puede permitir a los profesores entender más profundamente las razones de unos errores muy comunes entre los estudiantes.

Las potencias y, por consiguiente, las raíces parecen desempeñar el papel de señalar el paso de la escuela primaria a la secundaria. Las fórmulas para calcular el área del cuadrado, su diagonal y los teoremas de Pitágoras y Euclides introducen definitivamente estas nuevas operaciones en el bagaje del estudiante de la E.S.O.

Los profesores resuelven el problema de calcular las raíces cuadradas de tres maneras:

a) utilizando las *tablas numéricas*;

b) a través de la *descomposición en factores primos*;

c) usando las *calculadoras*.

Cada cual insistirá más en uno o en otro de los tres procedimientos, consciente de las ventajas y de los defectos que tienen:

a) *Tablas numéricas*: son muy fáciles de utilizar para números pequeños (normalmente, hasta mil); después (números más grandes o decimales) se hace más complejo consultarlos y hay que desarrollar estrategias y prever aproximaciones y redondeos. Estos son los aspectos que más gustan a los profesores y menos a los estudiantes y, desafortunadamente, permanecen por un tiempo muy limitado entre las habilidades de los alumnos.

b) *Descomposición en factores primos*: aunque permite aplicar las propiedades de las potencias y constituye una técnica dúctil, a la que se puede recurrir cada vez que un cálculo se nos presenta largo y complicado, mantiene los problemas de repetición y mecánica que nos hacen rechazar tener que enseñar el algoritmo de la raíz cuadrada.

c) Cuando por fin dejamos que el alumnado utilice la *calculadora* en clase (porque en casa la utilizan desde siempre y ya han conseguido adquirir los típicos vicios: abuso, mecanicidad, superficialidad, etc.), las dos técnicas anteriores desaparecen de la memoria, como si nunca las hubieran visto.

¿Es esta pérdida de contenidos tan grave? ¿Se ha consolidado alguna de las habilidades que hemos intentado desarrollar? ¿Cuántos alumnos cometen todavía los errores más clásicos que se registran cada vez que se debe calcular el lado del cuadrado sabiendo su área: dividir por 2, o por 4, o por un número que no saben encontrar? ¿Cómo juzgamos estos errores tan radicados, tan difíciles da eliminar que parecen «fósiles»?

Las potencias y, por consiguiente, las raíces parecen desempeñar el papel de señalar el paso de la escuela primaria a la secundaria.

No soy tan ingenuo como para pensar que tengo un remedio infalible o que existe una terapia completamente eficaz, pero creo que desmontar con los alumnos el algoritmo de la raíz cuadrada nos puede ayudar a comprender mejor el significado de la operación y el origen de muchos errores.

Para ello propongo dos tipos de aproximación, que no son alternativos y que, por el contrario, se integran y tienen en común un talante heurístico.

El método geométrico

Nos preguntábamos al inicio del artículo si las instrucciones para desarrollar el algoritmo de la raíz cuadrada eran realmente tan abstractas y mágicas. Intentamos contestar a la pregunta buscando el significado geométrico de cada una de ellas (Glenn y Johnson, 1960).

Objetivos

Además de los objetivos estrictamente disciplinares, hay otros con carácter más transversal, como el de transmitir a los alumnos el gusto (o por lo menos insinuar la sospecha) que detrás de procedimientos aparentemente mecánicos hay adquisiciones, trucos y estrategias que merecen la pena ser investigados, aun cuando requieren un pequeño esfuerzo.

Habilidades desarrolladas

Capacidad de:

a) organizar un razonamiento coherente;

b) reconocer analogías estructurales;

c) individuar estructuras básicas;

d) comprender y utilizar el cálculo aproximado;

e) analizar las relaciones entre cuadrado y rectángulo.

Actividad: empezamos calculando la raíz cuadrada de un número pequeño: 588.

a) La primera operación es la de dividir el número en grupos de dos cifras, empezando por la derecha. Esto se explica considerando que el cuadrado de un número de una cifra varía entre $1^2 = 1$ y $9^2 = 81$. Así, de forma aproximada, del grupo de dos cifras de la derecha obtendremos la cifra de las unidades del resultado y, moviéndonos hacia la izquierda, resultarán las cifras de las decenas, de las centenas, etc.[4]

b) Así:

$$\sqrt{588} = \sqrt{5.88}$$

y ya sabemos que el resultado será un número de dos cifras; además, dado que $20^2 = 400$ y $30^2 = 900$, el resultado será comprendido entre 20 y 30, o sea:

$$20 < \sqrt{588} < 30$$

En términos geométricos, si un cuadrado tiene el área 588 u^2, su lado medirá entre 20 y 30 unidades. Así que dentro de nuestro cuadrado podemos dibujar otro cuadrado más pequeño de lado 20 u. El área restante corresponderá a dos rectángulos de lados 20 y x_1, y un cuadrado de lado x_1 (figura 1).

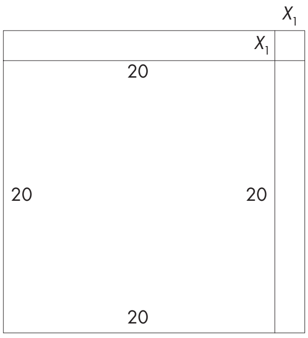

Figura 1

Dado que $x_1 < 20$, el área del cuadrado x_1^2 será mucho más pequeña que el área del rectángulo $20 \cdot x_1$, así que momentáneamente podemos hacer como si el cuadrado pequeño (x_1^2) no existiera. Entonces, $588 - 400 = 188$ u^2 será lo que miden las áreas de los dos rectángulos, o sea: $188 = 2 \cdot 20 \cdot x_1$.

Será muy fácil obtener que

$$x_1 = 188 / (2 \cdot 20) \approx 4.$$

Por $x_1 = 4$ u, el área de cada rectángulo será 80 u^2 y la del cuadrado pequeño (x_1^2) será 16 u^2.

En total habremos asignado otras 176 u^2.

O sea, que dentro del cuadrado del que hemos partidos es posible dibujar otro cuadrado de lado 24 u y todavía nos sobrará una pequeña área de 12 u^2 (figura 2), y podremos ser más precisos repitiendo los pasos vistos antes:

$$12\ u^2 = 1200\ du^2$$

$$24\ u = 240\ du$$

$$\textit{Área de cada rectángulo} = 1200 / 2 = 600\ du^2$$

$$x_2 = 600 / 240 \approx 2\ du.$$

O sea, que dentro de nuestro cuadrado se puede dibujar otro cuadrado de lado 24,2 u y continuar de este modo si queremos ser todavía más precisos.

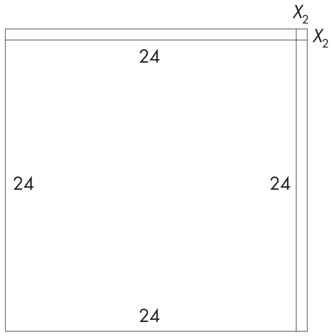

Figura 2

Creo que es fácil darse cuenta de que el algoritmo de la raíz cuadrada,[5] salvo unos ajustes puramente aritméticos,[6] sigue paso a paso el desarrollo geométrico presentado.

Estoy convencido y además lo he comprobado en clase, que muy pocos alumnos habrán podido seguir y comprender todo el desarrollo precedente. De hecho, no era éste nuestro objetivo pero, si algún profesor quisiera dedicarle un poquito más de tiempo y aumentar el nivel de comprensión, las dos actividades previas que aquí presento resultan muy efectivas.

Es fácil imaginar que el profesor presente el tema *Área/lado del cuadrado* preguntando algo como:

Calculad el área del cuadrado de lado 5 cm.

Sigue un dibujo (figura 3), y unas posibles soluciones.

Si procede, otro dibujo (figura 4) facilita encontrar la solución correcta.

Rápidamente podemos recorrer todas las soluciones: las más elementales (contar los cuadrados) y la primera fórmula (*base · altura*), hasta llegar a utilizar las potencias:

4 Es interesante observar que extrayendo la raíz sin muchos miramientos, aprovechando al máximo las aproximaciones, se obtienen resultados sorprendentemente precisos.

Por ejemplo:

$$\sqrt{20.25} \Rightarrow \sqrt{20} \approx 4$$

y $$\sqrt{25} = 5$$

entonces:

$$\sqrt{2025} \approx 45$$

No siempre las cosas resultan tan acertadas, pero el error queda entre límites muy aceptables. Por ejemplo: $321^2 = 103041$; o sea:

$$\sqrt{10.30.41} \Rightarrow \sqrt{10} \approx 3$$

$$\sqrt{30} \approx 5$$

$$\sqrt{41} \approx 6$$

Así que:

$$\sqrt{103041} \approx 356$$

El error cometido es aproximadamente del 10%.

Otro ejemplo: $7899^2 = 62394201$; o sea:

$$\sqrt{62.39.42.01} \Rightarrow \sqrt{62} \approx 7$$

$$\sqrt{62} \approx 7$$

$$\sqrt{39} \approx 6 \quad \text{y} \quad \sqrt{42} \approx 6$$

$$\sqrt{01} \approx$$

Así que:

$$\sqrt{62394201} \approx 766$$

Con un error del 3%.

Dejo que cada profesor juzgue los riesgos que comporta esta divagación.

Cuando los alumnos posean algún instrumento de álgebra se les podrá demostrar de dónde sale la aproximación: $45^2 = (40 + 5)^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 5 + 5^2 = 1600 + 400 + 25$. Obviamente, la aproximación no tiene en cuenta el doble producto.

5 Muy esquemáticamente:

$\sqrt{5.88}$	24,2
4	$2^2 = 4$
18.8	18 : (2 · 2) = 4
176	44 · 4 = 176
120.0	120 : (24 · 2) = 2
964	482 2=964
236	

6 a) En vez de dividir el área entre los dos rectángulos se multiplica por dos el lado conocido.

b) Se introduce el valor del área del cuadrado pequeño automatizando la operación correspondiente al cálculo algebraico: $2 \cdot lado \cdot x + x^2 = x \cdot (2 \cdot lado + x)$.

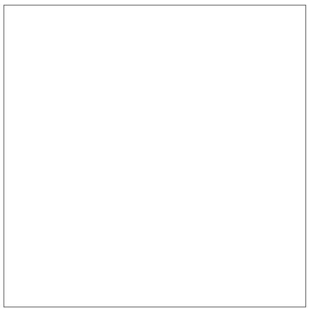

Figura 3

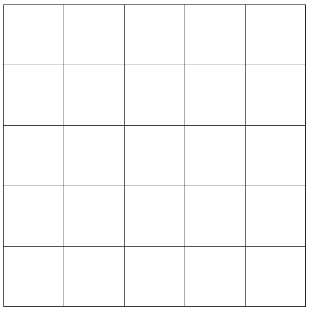

Figura 4

Área del cuadrado = lado^2 = 5^2 = 25 cm^2.

Después de unos cuantos ejemplos, podremos enfrentarnos con el problema opuesto, o sea el de calcular el lado de un cuadrado conociendo su área.

Unos cálculos y unas simples construcciones geométricas, con valores del lado o del área muy fáciles, nos permiten confirmar los conceptos fundamentales:

- el área del cuadrado se obtiene elevando el lado a la segunda potencia;
- el lado del cuadrado se obtiene extrayendo la raíz cuadrada del área;
- la operación de la raíz es opuesta a la potencia.[7]

Antes de enfrentarnos con situaciones en las que calcular la raíz del área no sea tan fácil y se deba recurrir a algún método de cálculo, podemos organizar una actividad de acercamiento al problema que permita su comprensión y resolución al mayor número de alumnos.

Podríamos suministrar un breve cuestionario con tres preguntas.

> a) ¿Cuál es el área de un cuadrado de lado 7 metros?
> b) ¿Cuánto aumenta esa área si el lado aumenta 2 metros?
> c) Se dan dos cuadrados: Q_1, de lado 5 m, y Q_2, de lado 8 m. Si se aumenta 1 m el lado de cada cuadrado, ¿es correcto afirmar que las áreas de Q_1 y Q_2 aumentarán el mismo valor, o sea 1 m^2?

…el problema opuesto o sea el de calcular el lado de un cuadrado conociendo su área.

Será interesante recoger y confrontar las respuestas y las estrategias utilizadas.

Normalmente encontraremos dos tipos de respuestas a las preguntas b) y c):

1) 4 m^2 y sí; o

2) 32 m^2 y no.

La respuesta 1) corresponde a una visualización del problema en el que el cuadrado grande se obtiene sumando las áreas de los cuadrados de lado 7 m y 2 m. De este modo, la contestación a la pregunta c) resulta coherente.

La respuesta 2) corresponde a una estrategia del tipo:

$$S_1 = 7^2 = 49 \text{ m}^2$$
$$S_2 = (7 + 2)^2 = 81 \text{ m}^2$$

Así que:

$$S_2 - S_1 = 81 - 49 = 32 \text{ m}^2$$

Confrontando las dos respuestas será fácil convencer los alumnos de que la estrategia 2) es la correcta.[8]

Estamos preparados para preguntar lo siguiente, con la referencia de la figura 4:

> ¿Cómo cambiará el área de un cuadrado si se aumenta su lado (*l*) en *x* cm?

No obstante los ejercicios resueltos, encontrar la solución es más complejo de lo que parece.

Merece la pena recoger las hipótesis que los alumnos propongan antes de comprobarlas con la ayuda de una nueva construcción geométrica (figura 5):

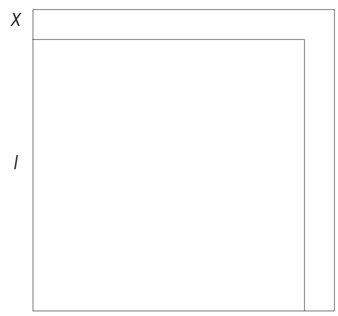

Figura 5

7 Cada profesor evaluará si es el caso de ampliar la explicación a exponentes y raíces de orden mayor y si introducir el concepto de logaritmo, o si dejarlos para otro momento.

8 Podríamos comprobar cuánto han entendido los alumnos suministrando un nuevo cuestionario y preguntado:

a) ¿Cuál es el área de un círculo de radio 5 m?

b) ¿Cuánto aumentará este área si el radio aumenta 2 m?

c) Se dan dos círculos, C_1, de radio 6 m, y C_2, de radio 10 m. Si se aumenta el radio de cada círculo 2 m, ¿es correcto afirmar que el área de los dos círculos aumenta el mismo valor, o sea 4 m^2?

Puede que ahora más de un alumno sepa ver cómo, aumentando *x* cm el lado del cuadrado, en su área aparecen *dos rectángulos* de área $l \cdot x$, y *un cuadrado* de área x^2 (figura 6).

(Hemos escogido una *x* bastante más pequeña que *l*, para que sea lo más parecido a lo que sucede en la resolución del algoritmo de la raíz cuadrada).

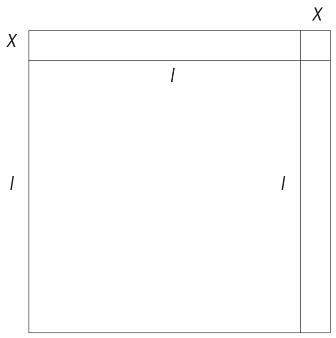

Figura 6

Podemos comprobar que todo marcha bien atribuyendo valores numéricos a *l* y a *x*.

Por ejemplo:

$$\text{si } l = 10 \text{ y } x = 2 \Rightarrow S = 12^2 = 144$$

o sea,

$$10^2 + 10 \cdot 2 + 10 \cdot 2 + 2^2 = \\ = 100 + 20 + 20 + 4$$

Después de unos cuantos ejemplos de este tipo, podemos intentar que los alumnos calculen el valor del incremento *x*, sabiendo las medidas de *l* y del área final. Por ejemplo: $l = 12$ cm y $S = 225$ cm^2.

Es probable que los alumnos necesiten ser guiados. Hacemos que observen atentamente en la figura 6 qué polígonos forman el cuadrado grande.

Es evidente que el cuadrado interno mide 144 cm^2; entonces el área restante (225 – 144 = 81 cm^2) se debe a los dos rectángulos y al cuadrado pequeño.

Si dejamos momentáneamente a un lado el área de este último, mucho más pequeña que la de los rectángulos, es mucho más fácil calcular un valor aproximado de *x*:

$$x = S / (2 \cdot l) = 81 / (2 \cdot 12) = 3{,}375$$

Si aceptamos la aproximación por defecto, es fácil comprobar que:

$$(12 + 3)^2 = 15^2 = 225,$$

o sea que $x = 3$.

Está claro que no hemos hecho otra cosa que resolver como cuestión aislada lo que probablemente representa el principal obstáculo cognitivo para la comprensión del significado geométrico del algoritmo de la raíz cuadrada.

He comprobado que después de este ejercicio, un número muy superior de alumnos es capaz de seguir el desarrollo del procedimiento completo.

…después de este ejercicio, un número muy superior de alumnos es capaz de seguir el desarrollo del procedimiento completo.

En todo caso, me gustaría subrayar que la cuestión referente al incremento de *x*, tiene validez por sí sola y pone en movimiento habilidades matemáticas de alto nivel, como: aproximar, formular y comprobar hipótesis, controlar el error, etc.

El método estadístico

Una vez comprobada la eficacia de un método basado en la aproximación para salir del paso, dejando para un momento posterior el precisar los resultados, parecería fácil introducir un procedimiento que se funda sobre los conceptos de *media* (Glenn y Johnson, 1960) y el *proceder por intentos*, especialmente si podemos utilizar una *hoja de cálculo.*

Las adquisiciones más interesantes no son, como ocurre a menudo, las más tradicionales, sino las habilidades más originales de los nuevos currículos de secundaria y constituyen algo que se podría definir como «bricolaje matemático».

Las tareas de laboratorio matemático permiten a los profesores entender el origen de algunos errores típicos. Algunos de estos errores son muy ricos en conocimientos a veces aplicados de forma incorrecta o superficial, y permiten planear una estrategia personal y más eficaz.

Los errores más comunes que los alumnos cometen para encontrar el lado a partir del área del cuadrado son:

- dividir por cuatro;
- dividir por dos;
- dividir por algún número que no saben expresar.

Hay quien evidentemente confunde el perímetro del cuadrado con el área, pero la mayoría de los errores dependen de la complejidad de la operación de raíz que los empuja a recurrir a la –más conocida– división.

¿Estos errores dependen de faltas de conocimientos o hay algo importante detrás?

Si en el ámbito aritmético la operación de raíz tiene evidentes relaciones con la división, en el ámbito geométrico las relaciones son menos evidentes, pero igualmente importantes.

El alumno que intenta calcular el lado a partir del área a través de una división, está tratando el cuadrado como si fuera un rectángulo, pero ¿qué es el cuadrado sino un rectángulo un poco especial?

Esto es el punto de partida del método estadístico.

Actividad

Pongamos que debemos otra vez calcular $\sqrt{588}$

El primer paso será siempre el cálculo aproximado, aunque esta vez no importa si es por exceso o defecto ni, como veremos, que la primera aproximación se aleje bastante del resultado exacto.

Partimos otra vez del 20.

Si estuviéramos trabajando con un rectángulo, poniendo que la base (b_1) sea 20, sería fácil encontrar el valor aproximado de su otra dimensión:

$$b_1 = 588 : 20 = 29{,}4$$

Para que el rectángulo se transforme en un cuadrado, sus dimensiones tienen que ser iguales, o sea que la base debe achicarse y la altura crecer.

No hay mejor manera para obtener este efecto que hacer la *media* entre las dos dimensiones:

$$b_2 = \frac{b_1 + b_1}{2} = \frac{20 + 29{,}4}{2} = 24{,}7$$

En la tabla se pone de manifiesto cómo el grado final de exactitud depende de la primera aproximación…

A este valor de la base le corresponderá una altura:

$$b_2 = 588 : 24{,}7 = 23{,}8056\ldots$$

El procedimiento se puede repetir muchas veces, encontrando valores cada vez más cercanos al exacto:

$$b_3 = \frac{b_2 + b_2}{2} = \frac{24{,}7 + 23{,}8056\ldots}{2} = 24{,}2528$$

Este valor representa ya una óptima aproximación al lado del cuadrado: $24{,}2528^2 = 588{,}12$, con un error del 0,02%.

Si hiciera falta (pero, ¿para qué?) calcular la raíz de números más grandes, deberíamos aceptar unos resultados menos aproximados o repetir más veces el procedimiento.

Esto no es un problema si podemos utilizar una *hoja de cálculo* (tabla 1).

Una vez insertados en la primera columna el número del cual queremos calcular la raíz cuadrada y en la segunda el valor aproximado, en tan sólo tres pasos se obtienen aproximaciones del orden del 1%.

En la tabla se pone de manifiesto cómo el grado final de exactitud depende de la primera aproximación: es suficiente acertar con el orden, o sea, otro concepto importante y otro buen ejercicio de análisis y previsión de resultados para nuestros alumnos.

Número	*B1*	*H1*	*Error%*	*B2*	*H2*	*Error%*	*B3*	*H3*	*L*	*Error%*
588	10	58,8	–124,4871131	34,4	17,093	–64,6583214	25,7474	22,838	24,292	–0,17966802
588	20	29,4	–21,24355653	24,7	23,806	–92,3408018	24,253	24,245	24,249	–1,445E–06
12345678	1000	12346	–251,3641701	6672,1	1850,1	–52,6156248	4261,5	2897	3579,3	–1,86756999
12345678	3000	4115,2	–17,12139002	3557,6	3470,2	–98,7237732	3513,9	3513,4	3513,6	–2,9003E–07
0,004567	0,1	0,04567	32,42041728	0,0728	0,0627	1999,87946	0,0678	0,0674	0,0676	–0,00039247
0,004567	0,06	0,0761	–12,63263786	0,0681	0,0671	1993,36739	0,0676	0,0676	0,0676	–3,1042E–08
9,89899E+14	1E+07	1E+08	–214,6266025	5E+07	2E+07	–57,7349976	4E+07	3E+07	3E+07	–1,03630021
9,89899E+14	3E+07	3E+07	–4,875534161	3E+07	3E+07	–99,886795	3E+07	3E+07	3E+07	–2,0579E–11

Tabla 1

Conclusiones

En el transcurso del artículo he planteado y repetido las observaciones que me parecen didácticamente importantes, así que, para terminar, me limitaré a resumirlas brevemente:

- los pasos metodológicamente más significativos (aproximación, previsión de resultados, medición del error, evaluación de los intentos, etc.) pueden ser desarrollados en muchas ocasiones, sin necesariamente trabajar sobre este tema;
- lo mismo se puede decir de los contenidos: área/perímetro, potencia/raíces, raíces/división, rectángulos/cuadrado, propiedades de las operaciones, etc.;
- las técnicas didácticas tampoco presentan grandes novedades: el método constructivo en la geometría, las actividades de laboratorio, el desarrollo heurístico de los contenidos, la utilización de las nuevas tecnologías... ya son patrimonio común de los docentes.

Me parece importante dejar un espacio propio al análisis de los errores de los alumnos, en especial de los que al principio del artículo he llamado «fósiles», por profundos, aparentemente superados por el aprendizaje de nuevos conceptos y habilidades, pero que se presentan con frecuencia. En este trabajo hemos vistos varios errores –y más todavía se podrían encontrar confrontando las experiencias de más docentes– muy comunes. Más allá de una primera evaluación negativa, estas equivocaciones esconden un modo propio de cada alumno de «ver» la situación cognitiva: los contenidos, las preguntas, las formas geométricas, el desarrollo de las estrategias resolutivas, la comprobación consciente o inconsciente de los resultados, que pueden dar a los profesores importantes pistas para conducir a los alumnos hacia la solución correcta o –mejor todavía– las soluciones correctas.

Me parece importante dejar un espacio propio al análisis de los errores de los alumnos…

Las actividades presentadas en este trabajo nos pueden ayudar a entender algunos de estos errores:

- pasar del área de cuadrado al lado dividiendo por 4 esconde evidentemente una confusión entre los conceptos de área y perímetro. Emma Castelnuovo (1979)[9] tiene muchas interesantes y eficaces propuestas de trabajo sobre este problema;
- intentar dividir por dos significa haber asimilado, aún de un modo un poco superficial, el concepto de igualdad de las dimensiones del cuadrado;
- el intento de resolver el problema a través de una división deriva de los fuertes vínculos entre las operaciones (y los algoritmos) de división y raíz, y los rectángulos y el cuadrado. Efectivamente, con la hoja de cálculo hemos trabajado de este modo, transformando la ecuación $x^2 = n$ en $x = n/x$, asignando valores arbitrarios a x, tales que resultara $n = x$.

Otro aspecto desarrollado que me parece muy importante, porque a menudo está poco presente en el programa de matemáticas, es el de la aproximación, que en esta etapa los alumnos asocian al error. De hecho, nuestros alumnos están acostumbrados a trabajar las matemáticas en contextos tan artificiales, en los que los resultados son tan rotundos que, en la mayoría de los casos, un resultado decimal parece sospechoso o alarmante. Trabajando más a menudo en un contexto real, midiendo objetos concretos, nos acostumbraríamos a aceptar valores decimales, con la necesidad de aproximarlos por razones concretas, con relación a las unidades de medidas utilizadas.

Puede que los pocos lectores que han llegado hasta aquí se pregunten: ¿merece la pena dedicar tanta atención al algoritmo de la raíz cuadrada?

Quizá muchos profesores decidan que no. Entonces, ¿qué quedaría de este trabajo?

Quizás lo más importante sería el comprobar cómo este modo de trabajar permite transformar en algo interesante y didácticamente productivo un tema aparentemente tan obsoleto como el algoritmo de la raíz cuadrada, y sin que ningún matemático haya tenido que extraer a mano raíces, ni siquiera en los deberes de sus hijos.

9 Dos grupos de profesores de la Sociedad «Emma Catelnuovo» de Madrid están utilizando esto material para realizar un laboratorio itinerante.

Guido Ramellini
Scuola Media Italiana
de Madrid
Sociedad Madrileña
de Profesores de Matemáticas
«Emma Castelnuovo»

Bibliografía

CASTELNUOVO E. (1976): *Matematica nella realtà*, Boringhieri.

GLENN, W. H. y JOHNSON, D. A. (1960): *The Pythagorean Theoreme*, Webster Publishing Company.