SUMA 35
noviembre 2000, pp. 55-62

¿Para qué enseñar fórmulas pudiendo enseñar procedimientos?

Una propuesta didáctica para el tratamiento de la Probabilidad en Bachillerato

Santiago E. Gómez Hernández

ARTÍCULOS

En este artículo se presenta una propuesta didáctica que constituye un método alternativo al tratamiento formal de la probabilidad. Conocidas son las dificultades que presentan habitualmente la mayoría de los alumnos en resolución de problemas de Probabilidad, y en particular de Probabilidad Condicionada. El método propuesto aquí está basado en el recurso de los *diagramas de árbol*, convenientemente ampliado mediante un procedimiento que hemos denominado de *renormalización*, el cual permite resolver cualquier problema de Probabilidad Condicionada, *evitando el Teorema de Bayes e incluso manifestando un margen de aplicabilidad mucho más extenso que éste*. El método ya ha sido aplicado en el aula, con una muy buena acogida por parte de los alumnos.

> No debe llenarse la cabeza del joven con hechos, nombres y fórmulas. Para saber eso no necesita ir a la universidad, ya que puede encontrarlo en los libros. Los profesores deberían dedicarse únicamente a enseñar a pensar a los jóvenes y a entrenarles en algo que ningún texto puede hacer.

AUNQUE esta antigua declaración –atribuida a Albert Einstein– está referida a un contexto de enseñanza universitaria, sin duda es también aplicable hoy en día a la enseñanza secundaria, particularmente en los últimos niveles. De hecho, ése es el espíritu de la reforma educativa a la que todos los docentes hemos accedido durante los últimos años: hacer huir al alumno de un aprendizaje meramente memorístico –»hechos, nombres y fórmulas»– y fomentar en él un aprendizaje comprensivo y analizador –»enseñar a pensar»–, es decir, un aprendizaje realmente significativo (Ausubel, 1983). Sin embargo, a pesar de este cambio de paradigma educativo, aún siguen apareciendo en los libros de texto teoremas y fórmulas para resolver problemas, que pueden ser tomados por el alumnado como «recetas», sin más implicaciones cognitivas. Este hecho puede provocar una regresión en los objetivos educativos a los que antes hemos hecho referencia.

Ese es el caso del tema de *Probabilidad*. Centrándonos en el desarrollo que los distintos autores realizan de este tema en el último curso de enseñanza secundaria preuniversitaria (actual 2.° de Bachillerato LOGSE), podemos observar que habitualmente se presenta precedido del tema de Combinatoria, ya que ésta puede ser una herramienta útil para aplicar en el cálculo de probabilidades, y también se cuenta para ello con los conceptos, propiedades, operaciones y leyes de la Teoría de Conjuntos. Tras las primeras definiciones básicas (tipos de sucesos, compatibilidad o incompatibilidad entre sucesos, dependencia o independencia entre los mismos, etc.), el concepto de Probabilidad suele plantearse mediante un enfoque *frecuen-*

cialista que da paso al *apriorístico*: la ley de Laplace. (Los textos del ya casi extinto COU presentan un planteamiento *axiomático* de la probabilidad, con toda su complejidad de pensamiento abstracto basado en axiomas, corolarios y demostraciones de los mismos.)

Es entonces cuando suele presentarse la definición operativa de Probabilidad Condicionada: $P(A / B) = P(A \cap B) / P(B)$ –con la consabida restricción de que B no corresponda al conjunto vacío–, que permite establecer el valor de la probabilidad de la intersección de dos sucesos: $P(A \cap B) = P(A / B) \cdot P(B)$, y redefinir la independencia de sucesos y sus consecuencias: A y B son independientes si y sólo si: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$; A y B son independientes si y sólo si: $P(A / B) = P(B)$ y $P(B / A) = P(A)$ (Arias y Maza, 1998). El tema suele concluirse con los enunciados –y sus correspondientes demostraciones– del Teorema de la Probabilidad Total y del Teorema de Bayes, éste último como instrumento para la resolución de problemas de Probabilidad Condicionada.

Sin duda este enfoque en el tratamiento de la Probabilidad en el último curso de enseñanza secundaria no obligatoria presenta serias dificultades para el alumnado. Ana María Ojeda (1995) autora de una tesis doctoral sobre Didáctica de la Probabilidad y profesora de Matemática Educativa señala que

> ...aunque en los programas de estudio se especifica el tratamiento del Teorema de Bayes, en ocasiones el tema no se trata pues se le considera difícil de entender dado el enfoque formal en este nivel; es usual que se le presente en el lenguaje de conjuntos, a cuyo dominio difícilmente llegan los estudiantes. En caso de que se apoye la enseñanza con medios de representación, éstos son los diagramas de Venn y, ocasionalmente, se emplean diagramas de árbol para ilustrar soluciones a problemas específicos. Lo mismo se puede señalar en lo que se refiere al tratamiento del tema en los libros de texto. Así, atendiendo exclusivamente al planteamiento del tema en los programas de estudio, no se puede asegurar que al final de un curso «tradicional», el estudiante haya adquirido una idea completa de probabilidad condicional.

Obviamente, la supresión del estudio de la Probabilidad Condicionada *no* es la solución al problema derivado de la dificultad intrínseca al planteamiento formal del tema. Se hace necesario desarrollar un método alternativo a las fórmulas y teoremas tradicionales de Probabilidad que sea suficientemente asequible al alumnado, permitiéndole una mejor comprensión de la Probabilidad Condicionada, y con el cual pueda resolverse cualquier enunciado propuesto. Con esta idea nos implicamos en la búsqueda de un procedimiento didáctico que permitiera rehuir el tratamiento formal del referido tema y que fuese más operativo y facilitador de la comprensión en el alumno.

Los diagramas de árbol, cuya institucionalización ha sido propuesta por Parzysz (1990) constituyen una herramienta utilísima en la enseñanza del cálculo de probabilidades, y en nuestra opinión, infrautilizada.

Una herramienta didáctica infrautilizada

Los diagramas de árbol, cuya institucionalización ha sido propuesta por Parzysz (1990) constituyen una herramienta utilísima en la enseñanza del cálculo de probabilidades, y en nuestra opinión, infrautilizada. Proporcionan un medio para distinguir entre intersección de sucesos y sucesos condicionados, permitiendo identificar al evento condicionado del condicionante, y facilitan el orden cronológico en sucesos consecutivos (por ejemplo, lanzamientos sucesivos de una moneda) o el esquema de posibilidades para hechos simultáneos (por ejemplo, lanzamiento de varias monedas simultáneamente). Si el número de casos no es muy elevado constituyen un buen apoyo para resolver problemas de Combinatoria.

A pesar de sus muchas aplicaciones, su utilización en los libros de texto –y, como consecuencia, en las situaciones de enseñanza/aprendizaje en el aula– ha tardado en generalizarse. En un estudio comparativo del tratamiento dado al tema de Probabilidad por los libros de texto pudimos observar que en los textos del casi desaparecido COU, sólo un 10% de los autores hacían referencia a los diagramas en árbol a la hora de resolver algún problema de probabilidad. Afortunadamente, sí se han ido incorporando en la mayoría de los textos actuales de 2.° de Bachillerato LOGSE, pero como un medio para ordenar los datos del enunciado y tener éstos en buena disposición para aplicarlos en las fórmulas correspondientes. Vamos a ver dos ejemplos de ello, correspondientes a textos de 2.° de Bachillerato LOGSE, donde se pone de manifiesto el tratamiento que dichos autores dan al cálculo de la probabilidad condicionada.

Ejemplo 1

Extraído de Arias y Maza (1998), páginas 237 y 238:

> Probamos tres vacunas A_1, A_2 y A_3 en 100 personas; la vacuna A_1 en 30; la A_2 en 20

y la A_3 en 50. Pasado el tiempo adecuado, observamos que del grupo A_1, 23 no han contraído la enfermedad; del A_2, 17 y del A_3, 39. Si elegimos una persona al azar y está sana, ¿qué probabilidad tenemos de que proceda del grupo A_3?

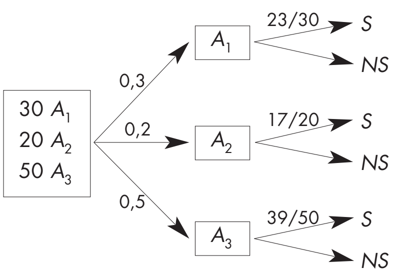

Figura 1

Sea S el suceso «personas sanas». Nos piden $P(A_3 / S)$. Aplicando la fórmula de Bayes, tenemos:

$$P(A_3 / S) = \frac{P(A_3)\cdot P(S / A_3)}{P(A_1)\cdot P(S / A_1) + P(A_2)\cdot P(S / A_2) + P(A_3)\cdot P(S / A_3)}$$

Viendo el árbol anterior, tenemos: Probabilidades *a priori*: $P(A_1) = 0{,}3$; $P(A_2) = 0{,}2$; $P(A_3) = 0{,}5$. Probabilidades *verosimilitudes*: $P(S / A_1) = 23/30 = 0{,}77$; $P(S / A_2) = 17/20 = 0{,}85$; $P(S / A_3) = 39/50 = 0{,}78$. Sustituyendo en la fórmula, tenemos:

$$P(A_3 / S) = \frac{0{,}5\cdot 0{,}78}{0{,}3\cdot 0{,}77 + 0{,}2\cdot 0{,}85 + 0{,}5\cdot 0{,}78} = 0{,}49$$

Luego, la probabilidad a *posteriori* es: $P(A3 / S) = 0{,}49$.

Ejemplo 2

Extraído de Jiménez y otros (1999), página 80:

Tenemos tres cajas, una verde, una roja y una amarilla, y en cada una, una moneda. La de la caja verde está trucada y la probabilidad de que salga cara es doble de la probabilidad de que salga cruz, la moneda de la caja roja tiene dos caras y la de la caja amarilla no está trucada. Se toma una caja al azar y se lanza la moneda que está en esa caja. Calcular razonadamente: a) La probabilidad de que salga cara. b) La probabilidad de que sabiendo que ha salido cara, se haya lanzado la moneda de la caja roja.

Hacemos un diagrama de árbol:

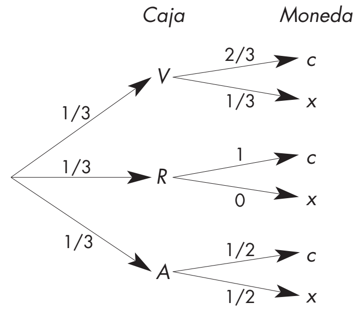

Figura 2

a) Aplicamos la probabilidad total: $P(c) = (1/3)\cdot(2/3) + (1/3)\cdot 1 + (1/3)\cdot(1/2) = 13/18$

b) Aplicamos el teorema de Bayes:

$$P(R / c) = \frac{P(R)\cdot P(c / R)}{P(c)} = \frac{(1/3)\cdot 1}{13/18} = 6/13$$

A la luz de estos dos ejemplos el lector podrá observar, como ya hemos adelantado, que la utilidad que se da a los diagramas de árbol se centra en el ordenamiento de los datos del enunciado (sucesos y probabilidades asociadas a los mismos), haciendo depender la resolución del problema de la aplicación de las fórmulas tradicionales. Con este artículo nos proponemos ampliar sensiblemente los horizontes de aplicabilidad de los diagrmas arbóreos.

Para la construcción de un diagrama de árbol (Esteve y Ramírez, 1994) debe arrancarse del suceso E (espacio total) una rama para cada suceso del primer concepto, acompañada de su probabilidad. De éstas deben partir nuevas ramas, según las posibilidades de sucesos del siguiente concepto en consideración. Los cálculos se realizan en cada caso con arreglo a las correspondientes reglas de la suma de probabilidades –unión de sucesos incompatibles– y del producto de probabilidades –intersección de sucesos– en diagramas de árbol (Engel, 1975).

El alumno debe ser conocedor, por tanto, de los siguientes principios:

1) Las probabilidades que surgen de cada nudo están condicionadas por los sucesos anteriores al mismo.

2) La suma de las probabilidades de las ramas que parten de un determinado nudo debe ser la unidad, y si de un nudo sólo parte una rama, deberá asignársele a ésta una probabilidad unidad.

3) Cada uno de los recorridos posibles representa un suceso distinto, y éstos son entre sí incompatibles dos a dos.

4) La probabilidad de cada suceso posible es el producto de las probabilidades asociadas a los distintos tra-

mos del recorrido que lo describe, pues se trata de la probabilidad de la intersección entre sucesos.

5) La suma de las probabilidades asociadas a los distintos recorridos debe ser la unidad, pues abarcan todo el Espacio Muestral.

Como ya hemos comentado, a pesar de la incorporación de los diagramas de árbol en los textos, este práctico recurso no está siendo totalmente aprovechado, pues continúa haciéndose depender al alumnado de las fórmulas tradicionales para resolver los problemas. Nuestra propuesta es que puede y debe evitarse la aplicación (habitualmente no reflexiva) de las mismas por parte de los alumnos. En este sentido, en las siguientes secciones mostramos cómo aprovechar al máximo las posibilidades que permiten los diagramas en árbol, siempre que se complemente su construcción en la forma que exponemos.

La *suma de probabilidades resultantes* en diagramas arbóreos como alternativa al *Teorema de la Probabilidad Total*

En este apartado vamos a ver cómo puede prescindirse del Teorema de la Probabilidad Total al resolver problemas en los que se solicite la probabilidad de que ocurra un determinado suceso, subconjunto del espacio muestral. Para ello deben darse tres sencillos pasos:

1) Eliminar del diagrama arbóreo todos aquellos recorridos que no culminen en un caso particular del suceso referido.
2) Calcular la probabilidad asociada a cada recorrido que sí culmine en un caso particular del suceso referido.
3) Sumar las probabilidades asociadas a dichos recorridos (recuérdese que se trata de sucesos incompatibles dos a dos).

Veamos dos ejemplos:

Ejemplo 3

> De un determinado país se sabe que el 35% de la población femenina es fumadora, lo cual ocurre en el 55% de la población masculina. Hay igual proporción de hombres que de mujeres (50%). Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea fumador/a?

Este es un enunciado sencillo, típico del nivel de enseñanza al que nos estamos refiriendo (último curso de bachillerato LOGSE). La resolución tradicional de este problema se realiza mediante el Teorema de la Probabilidad Total. Representemos por *H* el suceso «ser hombre», por *M* «ser mujer», por *F* «ser fumador/a» y por *NF* «ser no fumador/a». La aplicación del referido teorema nos conduce a:

$$P(F) = P(F / H)\cdot P(H) + P(F / M)\cdot P(M) = $$
$$= 0{,}55\cdot 0{,}5 + 0{,}35\cdot 0{,}5 = 0{,}45$$

El planteamiento en diagrama de árbol permite resolver el problema sin aplicar dicha expresión, siguiendo los tres sencillos pasos enumerados anteriormente:

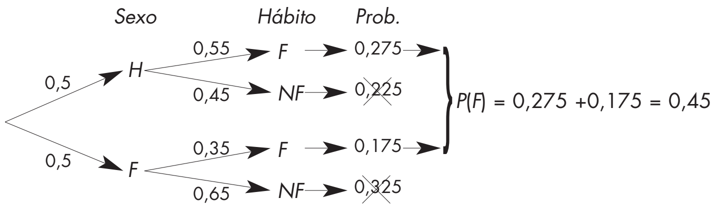

Figura 3

...cómo puede prescindirse del Teorema de la Probabilidad Total al resolver problemas en los que se solicite la probabilidad de que ocurra un determinado suceso, subconjunto del espacio muestral.

Ejemplo 4

> Dos equipos de baloncesto se enfrentan en una final al mejor de tres partidos. La estadística desprendida de los enfrentamientos anteriores muestra que el equipo A ha ganado el 60% de los partidos disputados entre ambos, siendo el otro 40% restante para el equipo B. ¿Cuál es la probabilidad de que la final deba decidirse en un tercer partido?

En este ejemplo hay tres factores a considerar (los tres partidos), a diferencia del ejemplo anterior, en el que sólo había que considerar dos (sexo y hábito). Ello hace que el planteamiento tradicional mediante el Teorema de la Probabilidad Total complique de forma ostensible su resolución. Denotaremos por A_i al suceso «que gane el equipo A el partido i» y por B_i al suceso «que gane el equipo B el partido i»:

$$P(3\text{ partidos}) = P\{A_3 / (B_2 / A_1)\}\cdot P(B_2 / A_1)\cdot P(A_1) +$$
$$+ P\{B_3 / (B_2 / A_1)\}\cdot P(B_2 / A_1)\cdot P(A_1) + P\{A_3 / (A_2 / B_1)\}\cdot P(A_2 / B_1)\cdot P(B_1) +$$
$$+ P\{B_3 / (A_2 / B_1)\}\cdot P(A_2 / B_1)\cdot P(B_1) =$$
$$=0{,}6\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6 + 0{,}4\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6 + 0{,}6\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4 + 0{,}4\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4 = 0{,}48$$

Tal como adelantábamos, la aplicación formal del citado teorema se hace bastante compleja al tratarse de tres factores (1.er, 2.° y 3.er partido), en lugar de dos como la mayor parte de los problemas aparecidos en los textos. ¡Imaginemos el incremento en dificultad de la resolución tradicional si el enunciado considerase la posibilidad de una final al mejor de cinco partidos...!

Mediante un diagrama arbóreo la resolución es mucha más clara y comprensible:

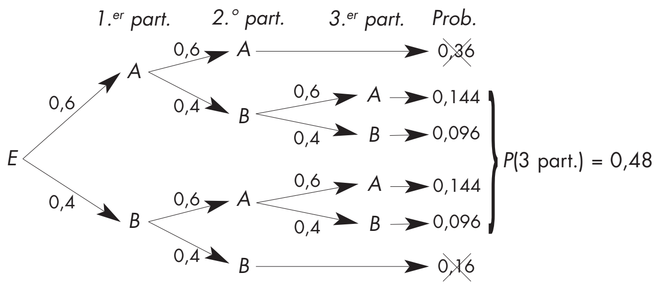

Figura 4

Evidentemente, otra forma de resolver el problema sin necesidad de aplicar el Teorema de la Probabilidad Total ni el Diagrama de Árbol es plantear la probabilidad del suceso contrario:

$$P(3 \text{ partidos}) = 1 - \{P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap B_2)\} = $$
$$= 1 - \{0{,}6 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}4\} = 0{,}48$$

La renormalización en diagramas arbóreos como alternativa al *Teorema de Bayes*

En el caso de que el enunciado del problema aporte una información que restrinja los casos posibles que pueden darse, afirmando que ha ocurrido cierto suceso, las probabilidades resultantes pueden variar. Si la restricción es simple, la resolución tradicional suele realizarse utilizando el Teorema de Bayes. Sin embargo, esta fórmula se hace realmente difícil de aplicar cuando la restricción es compleja, como veremos en la sección siguiente, en cuyo caso suele recurrirse a otras expresiones formales. Nuestra propuesta didáctica *permite resolver cualquier problema de Probabilidad Condicionada* y siempre de una forma procedimentalmente más sencilla.

…esta fórmula [Teorema de Bayes] se hace realmente difícil de aplicar cuando la restricción es compleja…

El método desarrollado por nosotros consiste en una ampliación del método de los diagramas arbóreos, mediante su *renormalización* (Gómez, 1999). La comprensión del fundamento de este procedimiento requiere ciertos conocimientos previos (dominados en su mayoría por los alumnos, llegados a este nivel, o en caso contrario, fácilmente aprendibles mediante ejemplos sencillos). Estos son:

1) Un convenio: $P(E) = 1$. Se trata de la probabilidad del suceso seguro, que abarca todo el espacio muestral. Este concepto se plantea en el principio del tema de probabilidad.

2) Una propiedad: *para normalizar (convertir en 1) una cierta cantidad, basta con dividirla por ella misma* (Ejemplos: 3/3 = 1; 0,8/0,8 = 1, etc.). Esta propiedad se aplica, por ejemplo, en el tema de álgebra vectorial (habitualmente trabajado con anterioridad al de probabilidad), al desarrollar el concepto de vector unitario y su obtención: división de un vector entre su norma, obteniendo otro vector de longitud 1 (unitario, normalizado) en la misma dirección y sentido que el vector original.

3) Generalización de la propiedad anterior: *para convertir un conjunto de valores, en otro con la misma proporcionalidad relativa y cuya suma sea 1 (normalizado), basta con dividir cada valor del conjunto inicial entre el total de éste*. Puede utilizarse el siguiente ejemplo para que los alumnos puedan alcanzar fácilmente esta generalización: «Sea el conjunto formado por los números 1, 3 y 6, cuya suma es 10. Si los comparamos entre sí podemos ver que el segundo es tres veces más grande que el primero, y el tercero es seis veces más grande que el primero y dos veces más grande que el segundo. Si cada uno de ellos lo dividimos entre 10 (la suma de los tres) se obtiene otro conjunto de números: 0,1, 0,3 y 0,6 que guardan entre sí la misma proporción y además suman la unidad.

Una vez establecidos estos prerrequisitos, puede aplicarse el proceso ideado por nosotros, y que hemos denominado *Renormalización*, siguiendo los siguientes pasos:

1) Eliminar del diagrama arbóreo todos aquellos recorridos que no concluyan de forma concordante con la información suministrada en el enunciado (restricción). La suma de las probabilidades asociadas a los recorridos no excluidos, obviamente, ya no será la unidad, por lo que deberemos

2) Renormalizar la probabilidad asociada a cada recorrido no excluido, dividiéndola entre el total de las probabilidades asignadas a los recorridos no excluidos. Puede comprobarse en este momento que la suma de las nuevas probabilidades renormalizadas vuelve a ser la unidad.

3) Buscar, entre los nuevos valores renormalizados, el que aporta (o los que aportan) la solución a la cuestión planteada en el enunciado.

De esta manera, disponemos de toda la información para responder a las cuestiones que el enunciado plantee, sin necesidad de aplicar la expresión formal del Teorema de Bayes, aunque ésta, obviamente, subyace en este tratamiento.

Veamos lo expuesto en dos nuevos ejemplos.

Ejemplo 5

Se dispone de dos urnas idénticas. En el interior de una de ellas hay billetes auténticos (5 billetes de 1000 pts. y 5 de 5000 pts.). En el interior de la otra hay billetes falsos (8 de 1000 pts. y 2 de 5000 pts.). Se desconoce en cuál de las dos están los falsos y en cuál los auténticos. Se elige una urna al azar y extraemos un billete que resulta ser de 5000 pts. ¿Cuál es la probabilidad de que sea falso?

Se trata de dos hechos consecutivos: 1.° elección de urna; 2.° extracción de billete. Se habrá elegido la urna de los billetes auténticos o la de los falsos con probabilidades de 1/2. La probabilidad del billete extraído dependerá de la urna, ya que las proporciones son distintas. Llamaremos *A* o *F* a «haber elegido la urna de billetes Auténticos» o «haber elegido la urna de los billetes Falsos», respectivamente. Denotaremos por *1000* o por *5000* el haber extraído un billete de ese valor. La probabilidad solicitada es la de que haya ocurrido *F*, condicionado a que se sabe que ha ocurrido *5000*.

Al resolver formalmente mediante la fórmula de Bayes se obtiene:

$$P(F / 5000) = P(5000 / F) \cdot P(F) / \{P(5000 / F) \cdot P(F) + P(5000 / A) \cdot P(A)\} =$$
$$= (2/10)(1/2) / \{(2/10)(1/2) + (5/10)(1/2)\} = 2/7$$

El mismo resultado se obtiene si se resuelve por un diagrama arbóreo renormalizado, sin necesidad de recurrir a la fórmula citada, y con mayores posibilidades de éxito en la resolución y en la comprensión del problema. Siguiendo los pasos descritos:

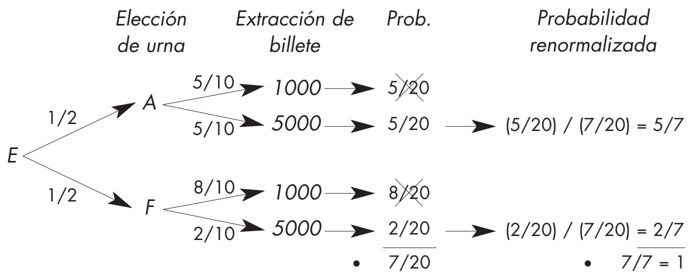

Figura 5

Ejemplo 6

En la ciudad en la que vive Jorge llueve el 20% (2/10) de los días. Jorge es muy perezoso para levantarse de la cama. Ello provoca que a veces pierda el autobús, con lo que le toca ir caminando hasta el instituto y llega tarde a la primera clase. Normalmente, si hace buen tiempo, suele perder el autobús el 30% (3/10) de las ocasiones. Sin embargo, si llueve, se vuelve más perezoso aún para levantarse, y entonces la probabilidad de que pierda el autobús es del 50% (5/10). Un día llegó tarde al instituto. ¿Cuál es la probabilidad de que apareciera hecho una sopa?

Es evidente que la pregunta del enunciado está planteando indirectamente cuál es la probabilidad de que ese día estuviera lloviendo, sabiendo que perdió el autobús. Llamaremos *LL* y *NLL* a los sucesos «llueve» y «no llueve», respectivamente, y denotaremos por *A* y *NA* a los sucesos «coger el autobús» y «no coger el autobús», respectivamente. La probabilidad solicitada es la de que haya ocurrido *LL*, sabiendo que ocurrió NA. Planteando la fórmula de Bayes:

$$P(LL / NA) = P(NA / LL) \cdot P(LL) / \{P(NA / LL) \cdot P(LL) +$$
$$+ P(NA / NLL) \cdot P(NLL)\} =$$
$$= (5/10) \cdot (2/10) / \{(5/10) \cdot (2/10) + (3/10) \cdot (8/10)\} = 5/17$$

Resolvamos ahora este ejemplo mediante un diagrama arbóreo renormalizado:

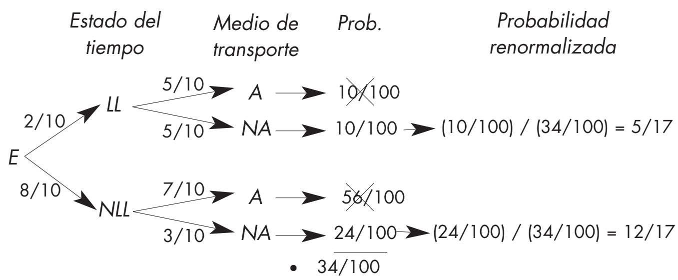

Figura 6

Alcance en la aplicabilidad del método de *renormalización*

Tal como hemos afirmado en la sección anterior, el método alternativo que proponemos permite, además, ser aplicado en otros problemas de Probabilidad Condicionada, como, por ejemplo, el que constituyó parte de un ejercicio de las Pruebas de Acceso a la Universidad (septiembre de 1994) en el distrito de Valencia.

Ejemplo 7

> Jugando a los dardos, la probabilidad de hacer diana de un jugador A es de 1/4, y la de un jugador B es de 1/3. Sabiendo que cada jugador ha hecho un solo disparo y que se ha obtenido exactamente una diana, ¿cuál es la probabilidad de que la haya conseguido el jugador A?

Obsérvese que la restricción que propone el enunciado –que se ha obtenido exactamente una sola diana– es un suceso que abarca dos posibilidades –que haya acertado sólo el jugador A o que haya acertado sólo el jugador B–. Ello hace muy complicada la utilización del Teorema de Bayes. Veamos:

Sea A el suceso «hacer diana el jugador A» y B «hacer diana el jugador B». A' y B' serán los correspondientes complementarios (no hacer diana). Se solicita la probabilidad de que haya acertado A, sabiendo que se ha producido una sola diana. Es decir:

$$P\{A/[(A\cap B')\cup(A'\cap B)]\}$$

Aplicando Bayes:

$$P\{A/[(A\cap B')\cup(A'\cap B)]\} =$$

$$= \frac{P\{[(A\cap B')\cup(A'\cap B)]/A\}\cdot P(A)}{P\{[(A\cap B')\cup(A'\cap B)]/A\}\cdot P(A)+P\{[(A\cap B')\cup(A'\cap B)]/B\}\cdot P(B)}$$

Debemos utilizar ahora la definición de probabilidad condicionada entre dos sucesos (probabilidad de la intersección entre los sucesos condicionado y condicionante, dividido entre la probabilidad del suceso condicionante) en cada uno de los tres elementos del miembro de la derecha de la anterior igualdad. Ello nos lleva, tras realizar las correspondientes simplificaciones, a la expresión:

$$\frac{P\{[(A\cap B')\cup(A'\cap B)]\cap A\}}{P\{[(A\cap B')\cup(A'\cap B)]\cap A\}+P\{[(A\cap B')\cup(A'\cap B)]\cap B\}}$$

que, después de aplicar distributividad entre la unión y la intersección y otras propiedades de operaciones entre conjuntos, esta expresión queda reducida a:

$$\frac{P(A\cap B')}{P(A\cap B')+P(A'\cap B)} = \frac{P(A)\cdot P(B')}{P(A)\cdot P(B')+P(A')\cdot P(B)} = \frac{(1/4)\cdot(2/3)}{(1/4)\cdot(2/3)+(3/4)\cdot(1/3)} = 2/5$$

La solución aportada por el equipo de coordinación del citado distrito, eludía el Teorema de Bayes y aplicaba directamente la definición de probabilidad condicionada (probabilidad de la intersección entre condicionado y condicionante partido por la probabilidad del condicionante). Con la consiguiente utilización de propiedades distributivas entre la unión e intersección entre conjuntos, y considerando que los sucesos ($A \cap B'$) y ($A' \cap B$) son incompatibles entre sí, se obtiene (se omiten pasos):

$$P\{A/[(A\cap B')\cup(A'\cap B)]\} = \frac{P\{A\cap[(A\cap B')\cup(A'\cap B)]\}}{P\{(A\cap B')\cup(A'\cap B)\}} = \frac{P(A\cap B')}{P(A\cap B')+P(A'\cap B)} = 2/5$$

El proceso formal, como puede apreciarse, se hace muy complejo, tanto si se aplica el Teorema de Bayes, como la definición de Probabilidad Condicionada. Creemos que pretender que cualquier alumno de secundaria consiga resolver el problema de una u otra manera es poco menos que utópico.

La resolución es mucho más fácil y comprensible mediante nuestro método de r*enormalización del diagrama arbóreo*:

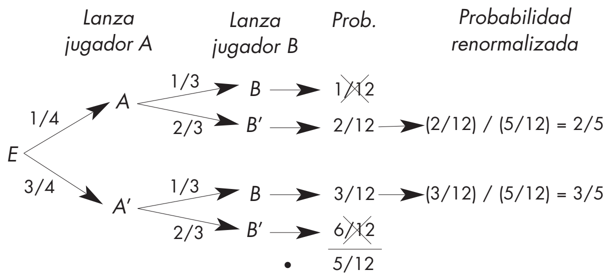

Figura 7

Este procedimiento desarrollado por nosotros puede ser igualmente aplicado en problemas de un nivel de dificultad aún más elevado para los planteamientos formales, como el que proponemos a continuación:

Ejemplo 8

> Luis (empresariales), Ana (fisioterapia) y Javi (telecomunicaciones) son tres amigos que han acabado a la vez sus carreras. La probabilidad de incorporarse al mundo laboral durante los seis meses siguientes es, respectivamente, del 40%, 60%, y 70%. Se sabe que seis meses después, al menos dos de ellos ya estaban trabajando. ¿Cuál es la probabilidad de que Luis fuera uno de los afortunados?

Aquí sólo vamos a resolver este problema aplicando nuestro método. Dejamos para el lector la tarea de resolverlo formalmente, si lo desea.

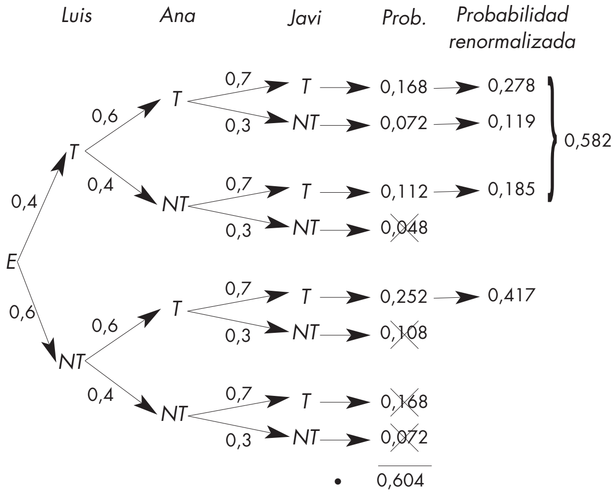

Figura 8

Respuesta ante el método propuesto

Durante los últimos cursos este tema ha sido tratado por nosotros en el aula de enseñanza secundaria preuniversitaria explicando ambos métodos (formal y procedimental) simultáneamente, y hemos podido comprobar que prácticamente la totalidad de los alumnos, al resolver este tipo de problemas, se inclina por utilizar diagramas arbóreos (renormalizados en el caso de probabilidad condicionada) en vez de las expresiones tradicionales. Creemos que ello es debido principalmente a que es mucho más fácil comprender y recordar los pasos de un procedimiento –sencillo y general– que memorizar varias fórmulas cuyo significado preciso no es fácilmente intuible o comprensible. Defendemos que nuestra propuesta instruccional permite al alumnado entender mejor qué es la Probabilidad Condicionada –además de hacer bastante más sencilla la resolución de este tipo de problemas–, a diferencia de las fórmulas tradicionales, cuya aplicación, aunque se produzca de forma correcta, no facilita una comprensión profunda de estos conceptos. Pensamos que la buena acogida que ha tenido el método por parte del alumnado es una evidencia de su claridad y eficacia didáctica.

A la aceptación positiva de nuestro método por parte de los alumnos se une el entusiasmo manifestado por los profesores de matemáticas que han entrado en contacto con el mismo, en aquellos círculos donde lo hemos presentado. Ello nos ha animado a compartirlo con el resto de la comunidad educativa. Pensamos que el procedimiento alternativo expuesto puede ser de gran ayuda al cuerpo de profesores de matemáticas en su actividad docente a la hora de transmitir estos contenidos.

…este tema ha sido tratado por nosotros en el aula de enseñanza secundaria preuniversitaria explicando ambos métodos (formal y procedimental) simultáneamente, y hemos podido comprobar que prácticamente la totalidad de los alumnos, al resolver este tipo de problemas, se inclina por utilizar diagramas arbóreos…

Santiago E. Gómez
Departamento de Ciencias Experimentales.
Universitat Jaume I
de Castellón

Agradecimientos

Deseo manifestar mi gratitud al Dr. Vicente Sanjosé (Dpto. de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Universidad de Valencia) por su importante colaboración y manifiesto interés en que este artículo saliera a la luz. También al Dr. Pedro Huerta y al Dr. Bernardo Gómez, (ambos del Dpto. de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia) por su buena disposición a realizar una revisión crítica del manuscrito de este artículo y aportar valiosas sugerencias al mismo.

Referencias bibliográficas

ARIAS, J. M. e I. MAZA (1998): *Matemáticas, 2.° Bachillerato LOGSE, Humanidades y Ciencias Sociales*, Casals, Barcelona.

AUSUBEL, D. P., J. NOVAK, y H. HANESIAN (1983): *Psicología Educativa: un punto de vista cognoscitivo* (2.ª edición), Trillas, México.

ENGEL, A. (1975): *L'ensegnament des probabilités et de la statistique (Tomo 1)*, CEDIC, París.

ESTEVE, R. y A. RAMÍREZ (1994): *Matemáticas-II COU*, Ecir, Valencia.

GÓMEZ, S.E. (1999): «Resolución de problemas de probabilidad condicionada: renormalización en diagramas arbóreos como alternativa a la fórmula de Bayes», en el Libro de Actas de las *Jornades de Investigació y Educació: Reflexions y Experiències*, Puzol (Valencia).

HUERTA, P. (1999): *Apuntes de Didáctica de la Probabilidad y de Estadística*. Universidad de Valencia, no comercializado.

JIMÉNEZ, P. y otros, (1999): *Matemáticas 2° Bachillerato LOGSE, Ciencias Sociales*, Santillana, Col. Acceso, Las Claves del Bachillerato, Madrid.

OJEDA, A.M. (1995): «Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional», *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, n.° 5, 37-44

PARZYSZ, B. (1990): «Un Outil Sous-estimé: l'Arbre Probabiliste», *APMEP*, año 69, n.° 372, 47-54.