SUMA 35

noviembre 2000, pp. 45-54

Una propuesta metodológica para la enseñanza de la Geometría a través de los fractales

Lourdes Figueiras, María Molero,
Adela Salvador, Nieves Zuasti

ARTÍCULOS

La enseñanza de la Geometría es un asignatura pendiente en educación matemática, y nuestra propuesta metodológica es enseñarla siempre dentro del aula y aprovechando todas las oportunidades. En este artículo utilizamos un tema de innovación matemática, los objetos fractales, para sugerir actividades de aula donde se trabaje en Geometría, además de límites, sucesiones, funciones complejas…

REFLEXIONES sobre la enseñanza de la Geometría

La famosa frase de J. Dioudonné «A bas Euclides» pertenece al pasado de la historia de las Matemáticas, sin embargo los efectos que ha producido en la educación matemática de los actuales profesores son impredecibles, ya que ha ido incidiendo, de forma distinta pero siempre nefasta, en muchas generaciones que se han visto privadas, en alguna o en todas, las etapas de su educación de los múltiples y variados recursos que aporta su aprendizaje a la enseñanza de las Matemáticas.

Desde luego aquellos que sufrieron su impacto sólo en la enseñanza universitaria pueden considerarse privilegiados porque al menos disponían de modelos concretos para afrontar el formalismo de las estructuras algebraicas que sustituían al método axiomático deductivo de la geometría euclídea. Sin embargo para todos los que se vieron afectados por este cambio en sus primeras etapas educativas los resultados han sido en la mayoría de los casos irreversibles, y muchos de ellos son en la actualidad profesores de Matemáticas. No hay duda de la educación que se ha recibido cuando en la resolución de un problema se prefiere un método algebraico que se ejecuta de forma automática, manejando variables de forma aleatoria frente a un método geométrico en el que la solución se sintetiza en una sola idea.

Es importante tener en cuenta ese principio biológico aplicado tantas veces a situaciones psicológicas según el cual «la ontogénesis (desarrollo del ser) repite la filogénesis (desarrollo de la especie)» y entre la geometría euclídea y la teoría de conjuntos hay veinte siglos de diferencia. Y aunque la geometría fractal es también un producto del último tercio de este siglo que resalta por su aplicabilidad a la realidad, su especial relación con la naturaleza y su intrínseca belleza, los métodos que se utilizan para su estudio están basados en los principios de la geometría.

En las Matemáticas que se enseñan, aquellas que en la Enseñanza Obligatoria se dice que servirán para adquirir lo que se necesita para desenvolverse en la vida, ¿quién puede negar un sitio a la belleza? ¿pretendemos dejarnos llevar sólo por el dudoso pragmatismo de una matemática recortada tanto en el tiempo disponible para su enseñanza como en la potencialidad de sus valores? En las orientaciones didácticas que sirven de base para los Proyectos Curriculares se insiste en la necesidad de vincular los objetivos pedagógicos a la realidad. El camino aún está por recorrer.

La enseñanza de la Geometría ha sido objeto de numerosos estudios, ha generado variadas experiencias, pero sigue siendo una asignatura pendiente. Cabría preguntarse dónde está el punto débil de la cuestión, ¿por qué se siguen ubicando en los capítulos finales, curso tras curso, los conceptos geométricos básicos, y por qué se mantiene una ordenación que pasa del plano al espacio de una manera fría y poco conectada con la realidad?

En la llamada «pedagogía tradicional» se introducían primero los elementos formales mediante símbolos difíciles de asimilar por los alumnos y las alumnas. Y de la etapa del simbolismo se pasaba a la etapa de representación que en geometría se reducía casi en un 90% al estudio del plano, o del espacio basado en el plano. Para lograr afianzar este sistema formal se recurría entonces a las aplicaciones a la «realidad» (enormes depósitos, esferas, pirámides, etc.). Este proceso en la enseñanza de la geometría es realmente aburrido y conduce en gran parte al fracaso.

La enseñanza de la Geometría debe estar vinculada al entorno para que su estudio y sistematización pueda conseguirse mediante la manipulación de objetos y la observación de los espacios y las formas más cercanas. La toma de contacto con esta realidad ayuda a generar muchas otras percepciones que atañen al campo de la Física, de la Educación Plástica o de la Tecnología. Las aportaciones de la Geometría a estas áreas son fundamentales para la asimilación de conocimientos y procedimientos básicos.

Con frecuencia pedimos a nuestros alumnos y alumnas que sean escrupulosos dibujantes a la hora de reproducir un objeto o una forma geométrica, sin comprobar qué destrezas o conocimientos están utilizando en este proceso. En el fondo la dificultad no es tanto entender lo que ven sino comprender la hoja en blanco en la que tienen que dibujarlo. En los llamados «dibujos libres» que con frecuencia se proponen en las aulas de primaria los alumnos y las alumnas nos dan una clara muestra de su percepción de la realidad y del proceso mediante el cual representan tanto lo que ven como lo que imaginan.

¿Por qué no se pueden ir aprovechando momentos en los que la alusión a una determinada situación, o a un problema, considerado en principio aritmético, permita buscar un enfoque que se apoye en conocimientos geométricos ya adquiridos, favoreciendo una visión más amplia en cuanto a los recursos con los que pueden contar para interpretar aquello que se les plantea?

En Secundaria, la Educación Plástica y Visual es una magnífica aliada de la geometría ya que descubre con belleza y libertad «dentro de un orden» multitud de conceptos, propiedades y relaciones geométricas cuyo estudio resultaría de otro modo tedioso para buena parte del grupo. Si, además, incorporamos en las aulas la observación y realización de pinturas y esculturas veremos cómo se favorece la comprensión de los conceptos espaciales.

Una cuestión que ayuda a romper con dinámicas anteriores es no relegar la aparición de conocimientos o propiedades geométricas a los temas que el libro de texto utilizado señala estrictamente como tales. ¿Por qué no se pueden ir aprovechando momentos en los que la alusión a una determinada situación, o a un problema, considerado en principio aritmético, permita buscar un enfoque que se apoye en conocimientos geométricos ya adquiridos, favoreciendo una visión más amplia en cuanto a los recursos con los que pueden contar para interpretar aquello que se les plantea? ¿No es más lógico posibilitar una fluida conexión entre las informaciones que han ido recibiendo con el fin de que se constituyan en constructos más afianzados?

Resulta curioso advertir que en multitud de enunciados de ejercicios y problemas, a pesar de que se hable de recipientes, terrenos, telas, carreteras, etc., el alumnado acostumbra a enfrascarse en operaciones aritméticas y no está, en general, interesado en cuestionar si cuenta con suficientes datos para poder hacerse una representación mental que tenga visos de realidad. Las carreteras son siempre rectas, los campos rectangulares, los recipientes son rígidos e indeformables, los trajes que hay que confeccionar han de ser iguales, etc. Esta actitud de desentenderse del discurso que sirve de modo rutinario para ejercitarse sobre las fórmulas y expresiones aprendidas, aún es más penosa cuando se dice que el problema es de Geometría. Se puede trabajar calculando volúmenes de todo tipo de cuerpos geométricos, pero a veces se manifiestan incapaces de estimar el de un objeto que tienen delante, y por supuesto esto les separa del cálculo estimado de su masa.

Una cuestión que siempre se menciona cuando se habla de enseñanza de la Geometría es proporcionar una adecuada visión del espacio. Quienes nos interesamos por la coeducación, opinamos que es importante trabajar la visión espacial en el aula, estableciendo acciones compensatorias que permitan que chicos y chicas sean igualmente perceptores de las formas y el espacio que les rodea.

En este artículo nos hemos detenido en una geometría bella y novedosa, la geometría fractal, que por un lado nos encontramos en el entorno próximo como montañas, nubes, costas, coliflores, etc, pero cuyos fundamentos matemáticos son realmente complejos. Esto ocurre con frecuencia en muchos fenómenos físicos o en actividades cotidianas, sencillos de explicar mediante una aproximación intuitiva y que ayudan a desarrollar otros conocimientos y destrezas con más motivación.

El término fractal evoca algo de insólita belleza, irregular, intrincado en que las partes más pequeñas son similares al todo, y que se genera por la repetición de procesos muy simples. La geometría fractal es una herramienta que permite describir objetos considerados como extremadamente complejos y desordenados

La Matemática, hasta ahora, cuando estudia la realidad, la simplifica, bien linealizando las leyes, bien suponiendo que las formas son suaves y regulares. Pero gracias al uso del ordenador, que permite la rápida repetición de procesos, se ha posibilitado ampliar el campo, y estudiar sistemas dinámicos no lineales que dan lugar a fenómenos complejos, al caos, y estudiar esas formas irregulares lo que se denomina «geometría fractal».

La dinámica no lineal supone hoy un cambio de rumbo en la Ciencia, un nuevo paradigma, y ha sido calificada incluso como una tercera revolución. Los sistemas dinámicos estudian la variación de las magnitudes, en ocasiones las magnitudes varían de forma errática y aparentemente impredecible. Es el caos. Caos y fractales están íntimamente relacionados.

Sin embargo el estudio de los fractales no hubiera sido tan importante como lo es en la actualidad si no existieran tantos modelos en la naturaleza a los que se les puede aplicar este tipo de geometría. Encontrar objetos fractales naturales es francamente fácil puesto que la geometría propia de la naturaleza es la geometría fractal. Por ejemplo, la medida de costas con muchos fiordos, los bordes de comunidades vegetales en paisajes no humanizados, los sistemas ramificados como el sistema nervioso, la ramificación de los bronquios en los alvéolos pulmonares, la naturaleza de las fracturas o los sistemas de fallas, la porosidad de las rocas, la estructura de las galaxias, así como en otras ramas de la ciencia y de la técnica como en el mercado de valores o en la extinción de especies naturales donde la dimensión fractal proporciona el grado de predictibilidad del fenómeno.

Los recursos didácticos que se emplean para la enseñanza de las matemáticas son cada vez más ricos y variados. Nosotras queremos aportar algunas ideas en esta línea y os invitamos al atrevimiento de jugar con fractales hasta donde en cada nivel sea posible. Y sobre todo disfrutarlos.

Objetivos

Entre los muchos argumentos que podemos citar a favor de utilizar los fractales, en la clase de Matemáticas como recurso metodológico, posiblemente el más importante sea que nos permite volver a hablar de *Geometría* en el aula desde una perspectiva moderna. Ya que el proceso de construcción de los fractales autosemejantes favorece la adquisición de las *técnicas básicas para dibujar con precisión* figuras geométricas y nos permite diseñar actividades para desarrollar en el alumnado *procesos de inferencia*, descubriendo leyes generales, a partir de la observación de casos particulares. Además su análisis induce al estudio de las *semejanzas* y por consiguiente los *movimientos* y las *homotecias* en el plano, y podemos utilizarlos para profundizar en el concepto de *límite* y en los procedimientos que nos facilitan su cálculo.

El estudio de los fractales es un elemento *motivador* en el alumnado, debido a la estética implícita en sus construcciones y a lo sugerentes que pueden resultar sus diseños. Además es importante tener en cuenta la motivación que todavía tiene la utilización del ordenador. Así, por ejemplo, podemos realizar prácticas con programas informáticos, como *Cabri*, que nos permiten profundizar en el concepto de *recursividad* y en la forma de elaborar un programa informático en un lenguaje de programación estructurado, es decir, dividiendo el objetivo final en subobjetivos, que son realizados de forma independiente por subprogramas,

Encontrar objetos fractales naturales es francamente fácil puesto que la geometría propia de la naturaleza es la geometría fractal.

El estudio de los fractales es un elemento motivador en el alumnado, debido a la estética implícita en sus construcciones y a lo sugerentes que pueden resultar sus diseños.

de forma que con la adecuada secuenciación de éstos se obtiene el programa. Otro programa que podemos utilizar es *Fractint*, mediante el que podemos diseñar actividades para introducir, consolidar o justificar la importancia que tiene el *estudio de los números complejos* en la elaboración de modelos que simulan fenómenos reales.

Además resalta la *aplicabilidad de las matemáticas* y encuentra modelos para fenómenos y elementos naturales que antes era imposible modelizar, lo que pone de manifiesto la interdisciplinariedad de las Matemáticas, relacionándola con otras ciencias como Biología, Geología, Medicina, Geografía, Economía, etc.

Por último, la revolución que ha supuesto en el *concepto de dimensión* el descubrimiento de los fractales es un hecho que nuestros alumnos y alumnas deben conocer.

Comencemos con algo de historia

¿Existen en Matemáticas objetos a los que pueda llamárseles objetos matemáticos «monstruosos»?

Karl Weierstrass en 1872 mostró en la Academia de Ciencia de Berlín una curva de trazo continuo, pero absolutamente irregular, ya que no es derivable en ninguno de sus puntos.

George Cantor en 1877 probó que en el intervalo [0, 1] hay tantos puntos como en el cuadrado [0, 1]x[0, 1]. ¿Qué significa tener «igual» número de puntos en conjuntos infinitos? El resultado de Cantor contradice el principio de Euclides de que «el todo es mayor que cada una de sus partes» y atenta contra la intuición de que en un cuadrado hay más puntos que en un segmento. Esto nos llevará a tener que distinguir entre cardinalidad y dimensión.

Giuseppe Peano en 1890 complica aún más la situación al encontrar una línea, de trazo continuo, que pasa por todos y cada uno de los puntos de un cuadrado. ¿Cuál es entonces su dimensión? ¿Dimensión uno como la de las líneas, o dimensión dos como el cuadrado?

Los años setenta están marcados por las intuiciones de Benoit Mandelbrot que fue el primero en atisbar algunas de las posibilidades de aplicación que este campo presentaba y en proponerlas abiertamente en publicaciones de gran divulgación. Mandelbrot establece las bases para estudiar objetos fractales como el conjunto de Cantor, la curva del copo de nieve o de Koch, el triángulo de Sierpinski o el tetraedro de Sierpinski, entre otros. Algunos autores dieron el nombre de *fractal* (nombre derivado del latín *fractus*, fraccionado) a un objeto de dimensión fraccionaria, no obstante existen ejemplos de fractales con dimensión entera. Mandelbrot dice que un objeto es fractal cuando su dimensión topológica no coincide con su dimensión de Hausdorff.

Esto nos lleva a profundizar en el problema de la dimensión.

Los años setenta están marcados por las intuiciones de Benoit Mandelbrot que fue el primero en atisbar algunas de las posibilidades de aplicación que este campo presentaba y en proponerlas abiertamente en publicaciones de gran divulgación.

¿Qué entendemos por dimensión?

Los fractales han supuesto una revolución en el concepto geométrico de dimensión. Antes de su estudio la dimensión de una figura geométrica estaba perfectamente determinada y se pensaba que los únicos valores que podía tomar eran números naturales.

¿Qué dimensión tiene una recta? ¿Y una circunferencia? ¿Por qué es la misma? ¿Qué otras figuras tienen dimensión uno? ¿Qué figuras tienen dimensión dos? y ¿dimensión tres?

Un conjunto finito tiene dimensión topológica cero, una curva rectificable tiene dimensión uno, una superficie diferenciable tiene dimensión dos. Pero si nos planteamos qué dimensión tiene esa curva de Peano que pasa por todos los puntos de un cuadrado comenzamos a tener dudas, y de hecho hay toda una teoría matemática que se ocupa de calcular la dimensión de objetos, como los fractales, cuya dimensión no es necesariamente un número natural. Si la dimensión topológica de una curva es uno, la dimensión de esas curvas que rellenan el plano ¿será uno? o ¿será dos? Seguimos sin saber cómo medir la dimensión de la curva de Peano pues por ser una curva debería tener dimensión uno, pero al pasar por todos los puntos de un cuadrado debería tener dimensión dos.

¿Podemos conocer cuánto mide la longitud de una costa entre dos lugares? ¿La línea de costa viene dada por una curva rectificable? La medida de una línea de costa es uno de los ejemplos clásicos que aparecen en la bibliografía de fractales. Para medir una costa elegimos una unidad de medida, un kilómetro por ejemplo, y vamos contando el número de veces que hacemos coincidir esa unidad con el borde de la costa. Si la unidad es menor, un metro, la longitud de la costa medida resulta mayor. Se observa que la longitud L de una costa depende de la unidad de medida o tamaño de paso p, y que L es proporcional a una potencia de p, $L(p) = kp^d$, luego $\ln(L) = \ln(k) + d\ln(p)$ por tanto d es la pendiente de la recta, de abscisa, el logaritmo del tamaño del paso, y ordenada, el logaritmo de la longitud de costa medida.

Una «medida» sirve para distinguir el tamaño de conjuntos diferentes, por lo que una medida será adecuada para medir una familia de conjuntos si su valor es mayor que cero y es finito. Ya hemos visto como el «cardinal» no nos sirve para distinguir el tamaño de un segmento del de un cuadrado. Entre 1917 y 1919 Hausdorff construyó la herramienta fundamental para medir estos conjuntos peculiares mediante la introducción de los conceptos que hoy llamamos de «medida y dimensión de Hausdorff». Introduce toda una familia infinita de medidas que llevan su nombre, para distinguir el tamaño de conjuntos claramente diferentes, problema que no resolvía ni la cardinalidad ni la medida de Lebesgue. Besicovitch en los años 20 continúa estos trabajos construyéndose la teoría geométrica de la medida.

Entre 1917 y 1919 Hausdorff construyó la herramienta fundamental para medir estos conjuntos peculiares mediante la introducción de los conceptos que hoy llamamos de «medida y dimensión de Hausdorff».

Las medidas de Hausdorff de un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es una familia de medidas $\{H^s: s \geq 0\}$ donde la medida H^0 de un conjunto coincide con su cardinal, la medida H^1 de una curva rectificable es su longitud, la medida H^2 de una región plana es su área, la medida H^3 de un objeto en $\mathbb{R}^3$ es su volumen… Para un objeto A de $\mathbb{R}^n$ unas de esas medidas valen infinito y otras cero, pero se puede ver que existe un único valor $D \geq 0$, al que llamaremos dimensión de Hausdorff del conjunto A, tal que, si $t < D$, H^t valdrá infinito, y si $t > D$, entonces H^t valdrá cero.

Así

$$D = \dim A = \sup\{t: H^t(A) = \infty\} = \\ = \inf\{t: H^t(A) = 0\}.$$

La dimensión de Hausdorff es difícil de manejar por lo que en objetos autosemejantes podemos calcularla a partir de la *dimensión de semejanza*, utilizando que estos fractales son el punto fijo de un conjunto finito de aplicaciones contractivas.

De esta forma, para calcular la dimensión del conjunto de Cantor, como la razón de semejanza es 1/3 y tomamos dos segmentos se debe cumplir que: $(1/3)^D H^D(C)=(1/2)H^D(C)$, luego $3^D = 2$, por tanto el conjunto de Cantor tiene como dimensión log2/log3, que es un número mayor que cero y menor que uno. Del mismo modo veremos que un objeto como la curva del copo de nieve de Koch, que es un objeto de dimensión intermedia entre la de una línea y la de un plano, tiene de dimensión fractal log4/log3, pues tomamos 4 segmentos de longitud 1/3; y el triángulo de Sierpinski tiene de dimensión log3/log2, pues tomamos 3 triángulos de longitud de lado 1/2.

Llamamos dimensión de semejanza al número calculado así: si el todo se descompone en N partes, las cuales se pueden obtener de él por semejanzas de razón $1/r$, entonces $D = (\ln N)/(\ln r)$. Este número no es realmente una dimensión pues no verifica los axiomas para ello, pero es fácil de calcular y en los fractales autosemejantes coincide con la dimensión de Hausdorff, mucho más difícil de determinar.

Actividades para el aula

Después de esta breve descripción de los conceptos fundamentales y de especificar razones para introducir los fractales en el curriculum de matemáticas en la Enseñanza Secundaria proponemos una serie de actividades para iniciar su estudio

Conjunto de Cantor

Partimos de un segmento, lo dividimos en tres partes iguales y eliminamos la parte central. En los dos segmentos restantes se repite el procedimiento. Y así sucesivamente. A esta figura se la denomina *Conjunto de Cantor* (figura 1).

Hemos aplicado al segmento dos homotecias de centros los extremos del segmento y razón 1/3, volviendo aplicar a la figura obtenida iterativamente dichas homotecias, obteniéndose, en el límite el conjunto de Cantor. El conjunto de Cantor es, pues, el atractor de dos homotecias de razón 1/3.

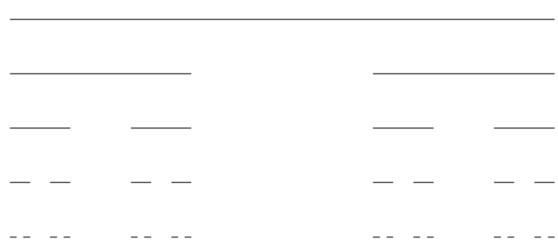

Figura 1. Conjunto de Cantor

Su dimensión de semejanza es menor que uno y mayor que cero: $D = \ln 2/\ln 3$

Si partimos inicialmente de, únicamente, los dos puntos que dividían en tres al segmento anterior y aplicamos iteradamente las dos homotecias ya definidas volvemos obtener, en el límite, el conjunto de Cantor.

Completando la tabla 1 podemos analizar el comportamiento de la figura con el paso al límite.

Etapa	0	1	2	3	4	*n*
Número de segmentos	1	2	4			2^n
Longitud de cada segmento	*L*	*L*/3	*L*/9			$L/3^n$
Longitud de la figura	*L*	2*L*/3				$(2/3)^n L$

Tabla 1

El conjunto de Cantor es no vacío pues los extremos del intervalo que lo generan nunca se eliminan en ese proceso infinito. Está formado por unión infinita de conjuntos cerrados, y está acotado, luego es un compacto.

Su longitud es nula, pues la longitud de su complementario en el intervalo unidad tiene de longitud uno ya que: $1/3 + 2/3^2 + 4/3^3 + ... = (1/3)/(1 - 2/3) = 1$.

Si expresamos los puntos del intervalo unidad en base tres de la forma: $0,a_1a_2a_3...$ donde a_i, vale 0, 1 o 2. Observamos que, por la construcción del conjunto de Cantor, la expresión decimal de sus puntos no contiene la cifra 1, es decir, a_i vale 0 o 2. Luego el cardinal del conjunto de Cantor es no numerable como el cardinal de los números reales. Tenemos pues un conjunto de longitud nula, cuyo cardinal coincide con el de $\mathbb{R}$.

Un conjunto de Cantor en el plano

Partimos de un cuadrado de lado uno. En el primer paso nos quedamos con cuatro cuadrados, uno en cada vértice, y de lado 1/4. En el paso segundo tendremos 16 cuadrado de lado 1/16 y, así sucesivamente.

Es el atractor de un conjunto de cuatro homotecias de razón 1/4. ¿Cuánto vale su dimensión? ($D = \ln 4 / \ln 4$). Al calcular su dimensión observamos que vale $D = \ln 4 / \ln 4 = 1$, es decir, tiene la misma dimensión que una curva, lo que no nos sorprende pues es un conjunto no vacío, compacto, no numerable y de área cero, pero su perímetro vale siempre 4.

Modificando la razón de homotecia se obtienen otros Conjuntos de Cantor generalizados.

El Conjunto de Besicovitch

Partimos también de un cuadrado de lado uno y en el primer paso nos quedamos con 4 cuadrados de lado 1/4, pero situados de otra manera.

En la figura 2 vemos como se repite también el proceso.

Su dimensión de semejanza resulta ser uno, luego tiene la misma dimensión que una curva, pero dicha curva no sólo no tiene tangente en ningún punto sino que de forma sorprendente, su proyección ortogonal sobre casi todas las rectas es de longitud cero.

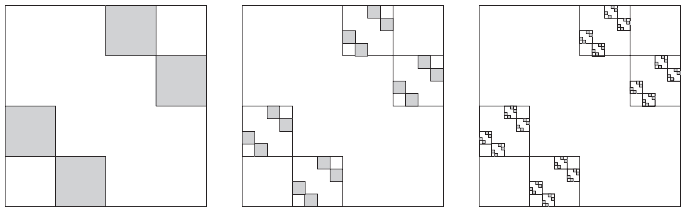

Figura 2. El conjunto de Besicovitch

La curva del copo de nieve

Para dibujar esta curva comenzamos construyendo un triángulo equilátero. Cada lado de este triángulo lo dividimos en tres partes. En la parte central, y de lado esta longitud, dibujamos otro triángulo equilátero borrando el lado que se superpone con el triángulo anterior. Volvemos a repetir este proceso con cada uno de los segmentos de la nueva figura y así tantas veces como nos lo permita el tamaño de los triángulos que vamos dibujando. La curva que obtenemos cuando repetimos este proceso indefinidamente se denomina *curva del copo de nieve* o *curva de Koch* (figura 3).

A partir de las figuras construidas podemos completar la tabla 2, que nos permite analizar el comportamiento de la figura con el paso al límite.

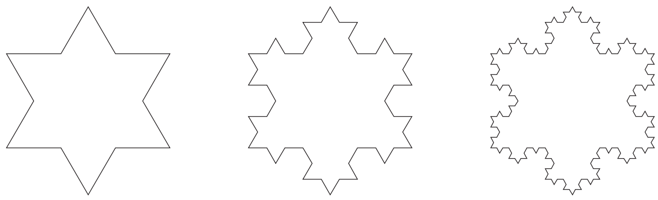

Figura 3. La curva del copo de nieve

Etapa	0	1	2	3	4	*n*
Longitud de un lado	L	$L/3$				
Número de lados	3	4·3				
Longitud de la figura	$3L$	$2L/3$				
Área de la figura	A	$A + A/3$				
Número de vértices	3	3+9				

Tabla 2

¿Cuál es su área? ¿Qué ocurre con su longitud?

En la siguiente práctica dibujamos la curva de Koch utilizando el ordenador, esta curva, mucho antes de hablar de fractales, era un modelo de curva continua que no tiene tangente en ninguno de sus puntos.

> *…la curva de Koch […] mucho antes de hablar de fractales, era un modelo de curva continua que no tiene tangente en ninguno de sus puntos.*

Práctica con Cabri: La curva del copo de nieve o curva de Koch.

Vamos a realizar una *macro* que *divida un segmento en tres partes iguales*. Primero hacemos la construcción utilizando el *Teorema de Tales*, pero observamos que para que *Cabri* pueda definirla como una *macro* la recta auxiliar no puede ser cualquiera. Una posibilidad es elegirla perpendicular. También es importante determinar explícitamente la medida del radio de las circunferencias que vamos a trazar en esta recta eligiendo, por ejemplo, la mitad o la cuarta parte de nuestro segmento.

Definimos la *macro* tomando como *objeto inicial* el segmento que queremos dividir y los *objetos finales* los dos puntos que lo dividen en tres partes iguales y que han sido definidos como *puntos de intersección* entre el segmento y las rectas auxiliares que hemos trazado. Denominamos la *macro* como *divide3* y la guardamos como *divide3.mac*. Archivamos también la figura hasta comprobar que la macro funciona.

Construimos una nueva *macro* que dibuje un *triángulo equilátero* a partir de dos puntos. Recordemos que para dibujar el triángulo tenemos que trazar dos circunferencias con centro en un punto y radio la distancia hasta el otro. Es importante determinar el tercer punto como *punto de intersección* y utilizar *polígono* para dibujar el triángulo. Ocultamos las líneas accesorias, y nos aseguramos que la construcción está bien hecha. Guardamos la figura realizada como *triequi.fig*.

Construimos la *macro* definiendo como *objeto inicial* los dos puntos de partida y como *objeto final* el polígono (triángulo) construido, definimos la *macro* como *triequi*. Modificamos el icono y la grabamos como *triequi.mac*. La macro así creada forma parte del cuadro de herramientas *macro*. Es importante activarla varias veces para comprobar que funciona correctamente.

En un archivo nuevo definimos dos puntos y trazamos el segmento que los une, activamos la *macro divide3* para dividirlo en tres partes iguales. Utilizamos la *macro triequi* para dibujar un triángulo equilátero en la parte central del segmento.

Definimos como objeto inicial el segmento y lo ocultamos para que no salga al activar la *macro*. Dibujamos los dos segmentos extremos del original y los de la parte superior del triángulo que van a ser los objetos finales, definimos la *macro* como *koch* y la guardamos como *koch.mac*.

Archivamos la figura como *koch1.fig* y en un fichero nuevo nos aseguramos que la macro funciona correctamente, activándola repetidamente sobre un segmento. Guardamos la figura como *koch2.fig*.

Con la *macro triequi* dibujamos un triángulo equilátero, determinamos sus tres segmentos y en cada uno de ellos activamos de forma iterativa la *macro koch* obtendremos la curva de Koch o curva del copo de nieve. La guardamos como *koch3.fig*.

Si analizamos el comportamiento de la figura con el paso al límite ¿Cuál es su área? Observamos que su área crece:

$$A + \frac{A}{3} + \frac{A}{9} + \dots + \frac{A}{3^n} + \dots$$

pero está acotada. Es una sucesión geométrica de razón 1/3, luego su suma es

$$\frac{A}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3A}{2}$$

Sin embargo ¿Qué ocurre con su longitud?

a) Con respecto al lado: L, $L/3$, ..., $L/3^n$, ...

b) Considerando el número de lados: 3, 4x3, 4^2x3, ..., 4^nx3 ...

Luego la longitud de la figura N es $(4/3)^n \times 3L$, sucesión geométrica de razón $4/3 > 1$, y por lo tanto la longitud de la figura tiende a ∞. ¿Cómo es posible siendo una figura acotada?

Hemos comentado que los fractales son figuras cuya dimensión no siempre es un número natural, ¿entre qué valores debe estar la dimensión de éste?

No hay ninguna duda que la superficie encerrada por cada una de estas curvas es finita y permanece acotada. Sin embargo, el perímetro de la curva límite es infinito, e incluso puede probarse que es infinita la longitud entre dos cualesquiera de sus puntos.

Triángulo de Sierpinski

En un triángulo equilátero se marcan los puntos medios de los lados, se unen formando cuatro triángulos iguales y quitamos el triángulo central. En cada uno de los tres nuevos triángulos se repite el proceso. Y así sucesivamente.

A la figura formada se denomina triángulo de Sierpinski (figura 4).

El proceso que hemos seguido ha sido aplicar tres homotecias de razón 1/2 y centros los tres vértices del triángulo al triángulo inicial y de forma iterativa a la figura obtenida, de donde el triángulo de Sierpinski es el punto fijo o atractor del conjunto de aplicaciones contractivas formado por las tres homotecias.

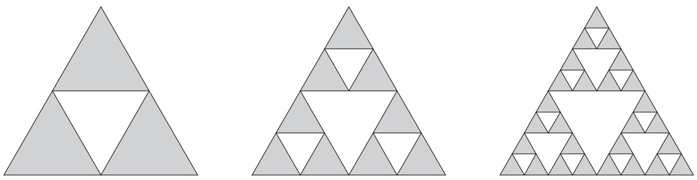

Figura 4. Triángulo de Sierpinski

Si partimos inicialmente de cualquier otra figura y le aplicamos iterativamente las mismas tres homotecias, llegamos a idéntico punto fijo.

A partir de las figuras construidas podemos completar la tabla 3.

Observamos que el número de triángulos crece. ¿Cuál es el límite del número de triángulos cuando *n* tiende a infinito? ¿Cómo varía la longitud de un lado? ¿A qué tiende la longitud de un lado cuando crece *n*? ¿Y la longitud de la figura, crece o disminuye? ¿Cuál es el límite de la longitud de la figura cuando *n* tiende a infinito? ¿Qué ocurre con el área? ¿Y con el número de vértices?

Etapa	0	1	2	3	4	*n*
Número de triángulos	1	3	9			
Longitud de un lado	*L*	*L*/2	*L*/4			
Longitud de la figura	3*L*	9*L*/2				
Área de la figura	*A*	3*A*/4				
Número de vértices	3	3+3	3 + 3+ 9			

Tabla 3

Observamos que la longitud de la figura tiende a infinito y el área a cero, lo que no nos sorprende pues su dimensión de semejanza es menor que dos y mayor que uno: $D = \ln 3 / \ln 2$

En la siguiente práctica dibujamos el triángulo de Sierpinski utilizando el ordenador con el programa *Cabri*.

Práctica con Cabri: Triángulo de Sierpinski

Para realizar esta figura necesitamos dibujar un triángulo equilátero a partir de dos puntos, para lo que vamos a utilizar la *macro triequi* construida en la práctica anterior cargándola en memoria mediante la opción *Abrir...* del menú *Archivo*.

A partir del triángulo equilátero dibujado con la *macro*, determinamos el punto medio de cada lado y dibujamos a partir de ellos cuatro triángulos equiláteros con la *macro triequi* (observamos que es importante el orden de definir los puntos para obtener el triángulo deseado y establecemos una secuencia fija para dibujarlos).

Utilizamos *rellenar* para colorear los tres triángulos que comparten un vértice con el triángulo original.

Definimos una nueva *macro* cuyo objeto inicial sea el triángulo grande y los objetos finales los tres triángulos coloreados. Como hay triángulos superpuestos, según la parte de la pantalla que señalemos, el programa nos puede preguntar cuál es el polígono que queremos utilizar por lo que hay que recordar que el orden en que aparecen escritos coincide con el de su construcción de forma que la primera figura que aparece escrita es la que primero ha sido construida. Definimos la *macro* como *sierpins* y la guardamos como *sierpins.mac*.

Volvemos a dibujar un triángulo equilátero con la macro *triequi*. Activamos la macro *sierpins* y aparecen los tres triángulos coloreados. Repetimos el proceso sobre cada uno de los triángulos coloreados dos veces más y guardamos la figura como *sierpin3.fig*.

Si analizamos el comportamiento del área con el paso al límite observamos que es cero ya que el valor del área de la figura en la etapa n es:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n A$$

Sin embargo el perímetro de la figura crece y podemos comprobar que tiende a infinito calculando su valor en la etapa n, que es igual a:

$$3^{n+1}\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

En la construcción del triángulo de Sierpinski partimos de un objeto plano, un triángulo de área A y sin embargo en el límite el área de la figura es cero ¿Es entonces el triángulo de Sierpinski un objeto de dimensión dos?

También observamos que toda la figura está acotada por el triángulo inicial mientras que su longitud tiende a ∞. Esto nos hace suponer que la dimensión del triángulo de Sierpinski no es ni uno ni dos, sino un número D tal que $1 < D < 2$.

Por su construcción el triángulo de Sierpinski es un conjunto compacto de perímetro infinito y área nula.

Por su construcción el triángulo de Sierpinski es un conjunto compacto de perímetro infinito y área nula.

Tetraedro de Sierpinski

En un tetraedro regular marcamos los puntos medios de las aristas y al unirlos se forman tetraedros de lado mitad. Quitamos la figura central. En cada uno de los cuatro tetraedros restantes volvemos a repetir el proceso sucesivamente.

La forma central eliminada, que es un octaedro regular, es difícil de percibir. En el laboratorio de Matemáticas sugerimos construir cuatro tetraedros iguales y analizar lo que falta para obtener el tetraedro de lado doble de partida.

Completando la tabla 4 se analiza el comportamiento de la figura con el paso al límite.

¿Cómo varía su volumen? ¿Y su superficie total? ¿Qué dimensión le correspondería?

Etapa	0	1	2	3	4	*n*
Número de tetraedros	1	4	16			
Longitud de una arista	*L*	*L*/2	*L*/4			
Número de aristas	6	24				
Longitud total	6*L*	12*L*				
Volumen de cada tetraedro	*V*	*V*/8				
Volumen de la figura	*V*	*V*/4				
Número de vértices	4	4 +4				
Número de caras	4	16				
Superficie de cada cara	4	*A*/4				
Superficie total	4*A*					

Tabla 4

El tetraedro de Sierpinski es el punto fijo del conjunto de cuatro homotecias de razón 1/2 y centros en los cuatro vértices de un tetraedro, luego D = ln4 / ln2 = 2. Es un ejemplo de objeto fractal de dimensión 2, no fraccionaria.

Fractal tipo Newton

El método de Newton nos permite encontrar las raíces de una función de fórmula conocida, calculando de forma iterativa la ecuación de la tangente a su gráfica en puntos cada vez más cercanos a la solución. Si aplicamos este método a funciones complejas de la forma $f(z)=z^p - 1$ obtenemos una figura fractal que podemos utilizar como recurso metodológico en el estudio de los números complejos.

Práctica con Fractint

Empezamos calculando las raíces de la función $f(z)=z^p - 1$ en el cuerpo de los números complejos para p = 5 y las representamos gráficamente en el plano.

Relacionamos el resultado con la imagen obtenida con el programa *Fractint* al elegir el tipo Newton, seleccionando el exponente 5 (figura 5).

Observamos un gráfico en colores en el que hay cinco zonas circulares, y al compararlas con las raíces obtenidas ¿Qué te parecen que representan?

Cuando ampliamos las partes del gráfico que parecen más caóticas, observamos que estas regiones que parecen separar las zonas circulares asociadas a las raíces no las delimitan sino que sus fronteras se entremezclan formando sorprendentes diseños que mantienen la autosemejanza. A partir de esta observación ¿Qué región del plano te parece que alcanzará antes la solución al ser iterada?

Si cambiamos el valor del parámetro p = 5 por 3, 4, 6, etc. ¿Se sigue manteniendo la relación de la figura con las raíces de la ecuación?

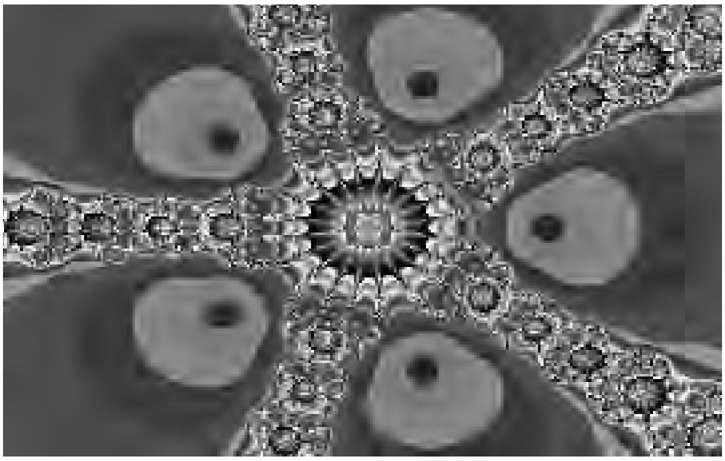

Figura 5. Fractal tipo Newton

Conclusiones

Muchos autores opinan que es probable que caos y fractales, por su belleza y aplicaciones, pronto tendrán cabida en el currículo de la educación secundaria obligatoria, formación profesional y bachilleratos. Actualmente es uno de los temas del Bachillerato Artístico en la asignatura «Matemáticas de la forma».

En este artículo se ha pretendido introducir en dicho campo de innovación en el área de las Matemáticas tanto el aspecto teórico, proporcionando unas ideas sobre el problema de la dimensión y de sus aplicaciones, como el práctico sugiriendo algunas actividades que se pueden incorporar a la clase de matemáticas.

El estudio de fractales hemos visto que puede aparecer en diferentes momentos de la enseñanza secundaria: transformaciones geométricas, homotecias, sucesiones, límites, iteración, azar y probabilidad. Si consideramos varias homotecias, (la homotecia de razón menor que la unidad es un ejemplo de aplicación contractiva), y las aplicamos reiteradamente a determinados conjuntos hemos observado cómo estos se van transformando hasta conseguir un fractal como el punto fijo de un conjunto de aplicaciones contractivas. El fractal viene a ser el producto final de una iteración infinita de un proceso geométrico muy simple. El avance en el estudio de los fractales se debe en parte al uso del ordenador, que permite simular con mucha facilidad estos procesos y especialmente en la construcción de los fractales autosemejantes, es decir, los generados por la repetición de un mismo proceso y en el que una pequeña parte es semejante al todo.

Lourdes Figueiras
María Molero
Adela Salvador
Nieves Zuasti

Bibliografía

BARNSLEY, M. F. (1988): *Fractals Everywhere*, Academic Press.

BRIHUEGA, J., M. MOLERO y A. SALVADOR (1994): *Didáctica de las Matemáticas*, Complutense, Madrid

FALCONER, K. J. (1990): *Fractal Geometry*, John Wiley & Sons, Chichester.

FEDER, J. (1988): *Fractals*. Plenum Press, New York.

FIGUEIRAS, L., M. MOLERO, A. SALVADOR y N. ZUASTI (1998): *Matemáticas en las Matemáticas*, Proyecto Sur de Ediciones, S.A.L., Granada.

GARMENDIA, A. y A. SALVADOR (1993): *Fractal: Punto fijo de aplicaciones contractivas*, VI JAEM, Badajoz.

GUZMÁN, M. DE, M. A. MARTÍN, M. MORÁN y M. REYES (1993): E*structuras fractales y sus aplicaciones*, Labor, Barcelona.

MANDELBROT, B. (1988): *Los objetos fractales* (2.ª ed.), Tusquets, Barcelona.

PEITGEN, H. O., H. JÜRGENS, H. y D. SAUPE (1991): *Fractals for the classroom*. Springer. New York.

ROGERS, C. A. (1970): *Hausdorff measures*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

El número 28, volumen 10 (1), de la revista *Epsilon,* Revista de las S.A.E.M. «Thales», está dedicado por completo al caos y los fractales.