SUMA

REVISTA SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

n.º 34

JUNIO

2000

SUMA 34

junio 2000

Índice

Edita
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Diseño portada
José Luis Cano
Diseño interior
Concha Relancio y M.ª José Lisa
Maquetación
E. Palacián, J. Sancho, D. Sierra

Revista SUMA
ICE Universidad de Zaragoza
C. Pedro Cerbuna, 12
50009-ZARAGOZA

Tirada: 6.500 ejemplares
Depósito Legal: Gr. 752-1988
ISSN: 1130-488X
Impresión: INO Reproducciones. Zaragoza

MISCELÁNEA

RINCONES

Las ilustraciones de este número, proporcionadas por F. Martín y E. Palacián, están dedicadas a Puig Adam.

SUMA 34
junio 2000

Puig Adam, el Día Escolar de las Matemáticas y... Florencio

EDITORIAL

EL 12 DE MAYO de este Año Mundial de las Matemáticas se ha cumplido el primer centenario del nacimiento de Pedro Puig Adam. Ha sido una de las figuras significativas de la matemática española del siglo XX. Catedrático de Instituto, además de profesor en la Universidad, dedicó una buena parte de sus esfuerzos a reflexionar sobre la enseñanza de esta disciplina; sus aportaciones en este campo son notables y reconocidas internacionalmente. Sus ideas sobre la didáctica le colocaron dentro de las corrientes más modernas de su época, de tal modo que muchas de ellas han resistido perfectamente el paso del tiempo.

En este número se evoca a Puig Adam en varias colaboraciones y, de alguna manera, es el pequeño homenaje de SUMA a su figura.

Uno de los propósitos que se persiguen con la celebración del Año Mundial de las Matemáticas es transmitir a la sociedad que no se trata de una ciencia extraña y alejada de la realidad y que tiene una gran importancia para el desarrollo humano, social y tecnológico. La Federación es consciente de que se deberá continuar en el empeño en los próximos años y, por ello, ha juzgado conveniente instituir la celebración, cada curso, de un Día Escolar de las Matemáticas, para profundizar en este objetivo dentro del ámbito escolar. Había que elegir una fecha para esta conmemoración y, precisamente, se ha elegido la del 12 de mayo, como reconocimiento a la figura de Puig Adam.

En este «Día» se persigue mostrar la «existencia» de las matemáticas más alla de las aulas, mediante la realización de actividades en las que éstas sean el centro de atención. Para el primer año se ha sugerido, como actividad central de la jornada, la elaboración de poliedros a imagen del que en 1952 construyó con sus alumnos Puig Adam en el patio del Instituto

San Isidro. Pero también se trataría de conseguir que en otras disciplinas se introdujera algún aspecto que se relacionase con la presencia de las matemáticas: su historia, las prácticas matemáticas de otros ámbitos culturales, los modelos e instrumentos matemáticos que usan esas disciplinas...

Es deseable que esta celebración se extienda por el máximo número de centros y que implique cada vez a un mayor número de alumnos y profesores en la realización de actividades de este tipo. También habrá que hacer un esfuerzo en lo sucesivo para conseguir que las instituciones educativas se involucren en la celebración, difundiendo la iniciativa, animando a su celebración y dando facilidades para la realización de las actividades que se programen.

Ya se ha completado el ciclo de renovación de cargos en la Federación con la incorporación de Claudia Lázaro a la Tesorería, que se hace cargo de las responsabilidades que durante tanto tiempo ha venido desarrollando Florencio Villarroya. Estamos convencidos de que Claudia lo va a hacer «por lo menos» tan bien como Florencio.

A Florencio lo tenemos lo suficientemente cerca como para no despedirnos de él. Sí que deseamos dejar constancia de la importancia que para nosotros tuvo en su día sus ánimos para hacernos cargo de la dirección de SUMA, así como la ayuda que nos ha brindado en tantos momentos y en muy diversos temas.

SUMA 34
junio 2000, pp. 5-7

Carta a don Pedro Puig Adam (1900-1960)

Claudi Alsina Català

ARTÍCULOS

En esta carta evocamos la figura de Don Pedro Puig Adam, con motivo del centenario de su nacimiento, revisando la actualidad de su decálogo de 1955.

ADMIRADO PROFESOR,

Ahora se cumplen cien años que usted vino a este mundo y, desgraciadamente, hace ya cuarenta que nos dejó. No sabe usted cómo lo hemos echado de menos. Estamos ya en el año 2000, que ha sido declarado Año Mundial de las Matemáticas, y por esto debe brillar especialmente en este año la celebración de su centenario.

El que suscribe no tuvo ni la oportunidad ni el honor de conocerle. Sin embargo su figura siempre me ha acompañado. Ya como alumno de primaria, usted era citado reiteradamente por mi madre como un mítico matemático al que tuvo la suerte de tener como profesor siendo una adolescente. Muchas veces me recitó de memoria una entrañable carta que usted le envió durante la guerra civil y que mi madre conservó siempre en el cajón de los documentos para el recuerdo, y en la memoria de la gratitud. Algunas veces yo también he leído aquella carta en algunas conferencias y ahora, fallecida ya mi madre, aún sigue aquella carta bien guardada en el patrimonio de los escritos más queridos.

Así pues, mi primer recuerdo de usted fue como profesor de matemáticas, eficiente y sensible. Pasaron los años y entonces lo conocí como autor, fue en un quinto curso de mi bachillerato en que disfruté consultando como texto uno de sus últimos libros para aquel curso. Quizás aquella obra influyó, en parte, en mi interés por las matemáticas. Ya en la universidad, sus libros de Geometría Métrica, Cálculo Integral y Ecuaciones Diferenciales, tan claros y completos, contrastando con la mediocre bibliografía autóctona editada después del 60, siguieron siendo de enorme ayuda.

Sus abundantes libros de bachillerato son ya incunables de las bibliotecas que nadie reedita, aunque todo el profesorado añora. Sin embargo sus libros universitarios siguen milagrosamente vivos, consultados, referenciados... son ya, con derecho propio, clásicos dentro de la bibliografía matemática española.

Me gustaría ahora comentar uno a uno su famoso decálogo de 1955 para así poder automeditar hacia dónde debíamos ir y dónde hemos llegado.

1. No adoptar una didáctica rígida, sino adaptada en cada caso al alumno, observándolo constantemente.

A hoy esto se le denomina atención a la diversidad y se considera un tema docente pendiente pues poco se ha avanzado en él. Es una lástima que esto se piense hoy en referencia a las dificultades o para mejorar resultados evaluadores. Sospecho que en su enunciado usted también estaba pensando en la atención humana, cálida y confidente con la que deberíamos captar el aprecio y la confianza del alumnado. E intuyo que si colocó este enunciado como el primero en su decálogo fue para remarcar que eran los alumnos lo esencial a mirar.

2. No olvidar el origen concreto de la Matemática ni los procesos históricos de su evolución.

Ahora parece que empiezan a abrirse camino los temas de historia de la matemática como instrumento docente y las inclusiones de aplicaciones como motivación o ejemplificación, aunque el platonismo aún campa por sus fueros.

3. Presentar la Matemática como una unidad en relación con la vida natural y social.

Interdisciplinariedad y globalización son los referentes actuales. El problema sigue siendo la división artificial del pastel docente y la necesidad, en muchos casos, de dar prioridad a los intereses del alumnado por encima de los egoísmos o los gustos personales.

4. Graduar cuidadosamente los planes de abstracción.

He aquí todo un reto. No siempre se trabaja el conocimiento viable en cada etapa ni se gradúan efectivamente las dificultades. A menudo la precipitación formal o la obsesión por los algoritmos nos lleva a presentaciones abstractas que deberían ser un puerto de llegada natural pero resultan ser un mal punto de partida.

5. Enseñar guiando la actividad creadora y descubridora del alumno.

¡Gran actualidad! Creatividad, descubrimiento y el papel del profesorado como guía de la enseñanza, siguen siendo grandes caballos de batalla. Seguramente ahora se añadiría en este punto la falta de tiempo para hacer todo esto posible. Aunque la vida se haya acelerado, el aprendizaje no puede seguir el mismo ritmo y por tanto el tema de la «agenda escolar» es hoy francamente preocupante.

Sus abundantes libros de bachillerato son ya incunables de las bibliotecas que nadie reedita, aunque todo el profesorado añora. Sin embargo sus libros universitarios siguen milagrosamente vivos, consultados, referenciados... son ya, con derecho propio, clásicos dentro de la bibliografía matemática española.

6. Estimular esta actividad despertando interés directo y funcional hacia el objeto del conocimiento.

Esto hoy está bien asumido. Sin la captación del interés difícilmente se logra avanzar. Pero la ampliación a los 16 años de los cursos obligatorios lleva a una lucha por el interés no siempre fácil de ganar. También a nivel social y de la administración sería deseable un estímulo al profesorado y al alumnado basado en la valoración justa de lo que la educación hace.

7. Promover en todo lo posible la autocorrección.

Ahora esto se diría una forma de autoevaluación. Pocas veces se presta atención suficiente a la necesidad de que los alumnos aprecien sus errores o aciertos. Las evaluaciones han cambiado mucho en su concepción didáctica teórica... pero las de verdad siguen arrastrando la inercia de las rutinas.

8. Conseguir una cierta maestría en las soluciones antes de automatizarlas.

Hoy a esto se le diría «insistir en la conceptualización antes que en los algoritmos», algo muy necesario en primaria y que no pocos didactas predican como novedad. Con los avances computacionales aparece aún más clara la necesidad de prestar una atención preferente a los conceptos.

9. Cuidar que la expresión del alumno sea traducción fiel de su pensamiento.

Comunicación y lenguaje, necesidad de promover los procesos de visualización, verbalización, etc., son hoy objetivos planteados como imprescindibles.

10. Procurar a cualquier alumno éxitos que eviten su desmoralización.

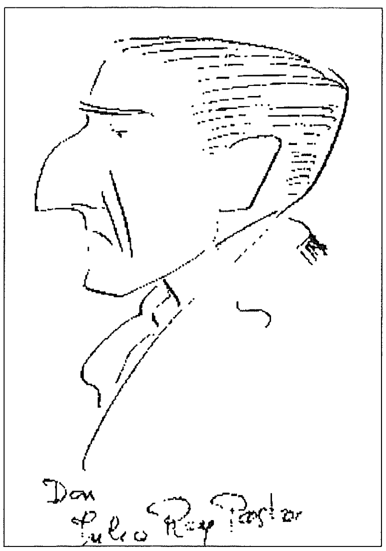
Esto exige siempre la revisión de los instrumentos de evaluación, algo en lo que la práctica anda muy retrasada respecto de la teoría.

Como se observa a partir de lo dicho, resulta que su decálogo, 45 años después, si simplemente se moderniza en los términos, sigue siendo un magnífico resumen de lo que la enseñanza de las matemáticas debería ser. A lograr hacer su decálogo posible se ha llamado hoy «reforma». Y no deja de ser triste que las reformas educativas, que deberían ser una actitud positiva de cambio e innovación, sean tambaleadas por el oleaje de los mil problemas que desde siempre confluyen, a la vez, en la travesía de la educación.

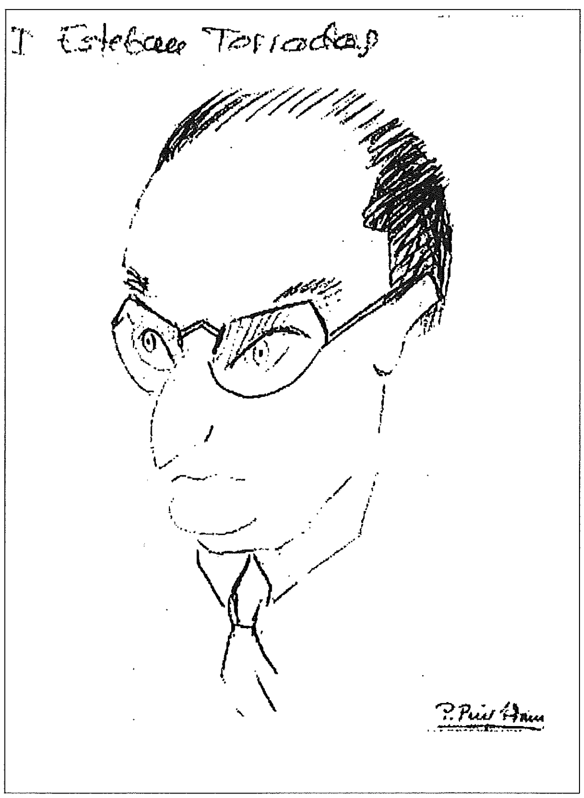
Esta carta, no puede llegar a su destinatario. He decidido, pues, hacerla pública en Suma, como un pequeño homenaje que puedan compartir los muchos profesores admiradores suyos que hoy configuran la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, un movimiento imparable de renovación y de ilusión por intentar lograr, entre todos, una enseñanza matemática mejor.

Como se deduce de estas líneas aquí seguimos hablando de usted, citándolo como referente, inspirándonos en su legado escrito. Sepa que nadie más ha tenido tanta influencia durante tanto tiempo. Y no es temerario pensar que en los años que vendrán «nuestro Puig-Adam» seguirá siendo ese profesor añorado que supo unir a su privilegiada inteligencia, el amor por su labor docente y por todos los jóvenes que con él aprendieron, a la vez, matemáticas y humanidad ¡Gracias por su labor y por su ejemplo! Desde la emoción de la memoria.

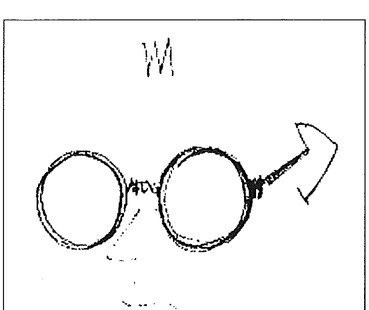
Claudi Alsina
Sec. Matemática e Informática. ETSAB.
Universitat Politècnica de Catalunya.
Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya



Julio Rey Pastor



Esteban Terradas



Sixto Ríos

Caricaturas realizadas
por Puig Adam

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Comisión Ejecutiva

Presidenta: María Jesús Luelmo
Secretario General: José Luis Álvarez García
Vicepresidente: Serapio García
Tesorero: Claudia Lázaro del Pozo
Secretariados:
Prensa: Antonio Pérez Sanz
Revista SUMA: Emilio Palacián/Julio Sancho
Relaciones internacionales: Luis Balbuena/Florencio Villarroya
Actividades: Xavier Vilella Miró
Publicaciones: Ricardo Luengo González

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidente: Xavier Vilella Miró
Apartado de Correos 1306. 43200-REUS (Tarragona)

Organización Española para la Coeducación Matemática «Ada Byron»
Presidenta: Xaro Nomdedeu Moreno
Almagro, 28. 28010-MADRID

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»
Presidente: Antonio Pérez Jiménez
Apartado 1160. 41080-SEVILLA

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo»
Presidente: Florencio Villarroya Bullido
ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12.
50009-ZARAGOZA

Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»
Presidente: José Joaquín Arrieta Gallastegui
Apartado de Correos 830. 33400- AVILÉS (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»
Presidente: Francisco Aguiar Clavijo
Apartado de Correos 329. 38201-LA LAGUNA (Tenerife)

Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas
Presidente: Tomás Ortega
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Villalar, s/n.
09006-BURGOS

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García
Avda. España, 14, 5ª planta. 02006-ALBACETE

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidenta: Remedios Peña Quintana
IES Francisco de Goya. C./ Caravaca, s/n.
30500-MOLINA DE SEGURA (Murcia)

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Luis Carlos Cachafeiro Chamosa
Apartado de Correos 103.
SANTIAGO DE COMPOSTELA

Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»
Presidente: Ricardo Luengo González
Apartado 536.
06080-MÉRIDA (Badajoz)

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»
Presidenta: María Jesús Luelmo
Apartado de Correos 14610.
28080-MADRID

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: Claudia Lázaro del Pozo
CPR de Santander. C./ Peña Herbosa, 29.
39003-SANTANDER

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea Tornamira
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.
Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra.
31006-PAMPLONA

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Despacho 3517. Facultad de Educación.
Universidad Complutense. 28040-MADRID

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas
Presidente: Javier Galarreta Espinosa
C.P.R. Avda. de la Paz, 9. 26004 LOGROÑO

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departament de Didàctica de la Matemàtica.
Apartado 22045. 46071-VALENCIA

SUMA 34
junio 2000, pp. 9-20

Pedro Puig Adam, maestro

Josep Sales Rufí

ARTÍCULOS

Dedicado a doña Emilia Puig

Comentarios sobre las «obritas» que escribió don Pedro para colaborar en la obtención de unas generaciones de alumnos que no odiasen las Matemáticas.

Introducción

No sé si este libro merece prólogo. Quizás sólo lo merezca la intención con que se ha escrito.

Prólogo de *Geometría Métrica* (Madrid, 1947)

Su llama de bondad dejó encendida,
semilla de saber dejó sembrada.
Si corta fue su vida,
no por ello su ejemplo quedó en nada.
La lección que nos dictó no está acabada
¡Y el corazón no olvida!

En la muerte de don José Maria Plans (Madrid, 1934)

Aquí te presentamos, lector querido, a los que han de ser tus compañeros de trabajo: unas tijeras, un ovillo, una regla, un par de escuadras, un montón muy grande de hojas de papel. Ni un solo día debes comenzar la lección de Geometría sin tener al lado éstos tus buenos compañeros, ni terminar de estudiarla sin dejar tu mesa materialmente llena de recortes y de papeles con figuras...

Prólogo de *Geometría Intuitiva* (Madrid, 1928)

Estas espléndidas frases han prologado las «obritas» que escribió don Pedro Puig Adam (Barcelona 1900 - Madrid 1960). Don Pedro llamaba así, con una gran modestia, sus tratados sobre Matemáticas y sus obras didácticas, que han estado en primera línea en la educación matemática de este país desde 1926 hasta la actualidad.

Estas «obritas» han sido avanzadilla de la innovación pedagógica en todos los niveles educativos, desde la Primaria hasta la Universidad y las Escuelas Técnicas. Ellas han servido de aliciente y de base al trabajo de los grupos y personas que han luchado en España, desde las épocas más duras de la dictadura hasta hoy, por obtener una enseñanza digna y basada en el respeto al alumno y a su evolución. Y ello, unido a una estrecha relación del saber matemático con la realidad, que es de donde nace su necesidad y en donde se justifica su aplicación.

Don Pedro Puig Adam fue a la vez propagandista de la investigación didáctica matemática, defensor de una estrecha relación Realidad-Matemática en la clase e investigador matemático de vanguardia (resolvió una ecuación diferencial sobre la estabilidad de las palas del autogiro propuesta por De la Cierva).

Profesor de todos los niveles educativos: del Bachillerato, de la Enseñanza Laboral (Formación Profesional), de la Facultad de Ciencias, de la Escuela Superior de Ingenieros Industriales, de la de Ingenieros Aeronáuticos del ICAI y de otras muchas.

Empezó a estudiar Ingeniería Industrial y Ciencias Exactas en Barcelona, su ciudad natal. Finaliza la carrera de Matemáticas con un doctorado en Madrid sobre *Resolución de algunos problemas elementales en Mecánica Relativista Restringida*, que mereció la máxima calificación.

Su formación y sus maestros

Discípulo de don Antonio Torroja y de don Julio Rey Pastor en lo matemático y de don Josep Estalella en lo pedagógico.

Don Antonio leería el discurso de bienvenida en su recepción a la Real Academia de Ciencias Exactas en 1952, y don Julio sería su maestro y compañero en la redacción de una treintena de obras didácticas desde 1928 hasta su muerte. Con ellas quisieron contribuir a la renovación de la enseñanza de las Matemáticas en nuestro país, tan anquilosada como el panorama general de la Ciencia y su Didáctica en aquellos años.

Admirador de la obra del Institut-Escola, institución modélica de la Generalitat republicana, fundado por el doctor Estalella, en la Barcelona republicana y que tenía como divisa: «Formar hombres buenos, y a poder ser... sabios»

A partir de entonces se concreta su profunda admiración por las ideas pedagógicas de Josep Estalella, con quien había tenido un primer contacto por una carta entusiasta que le escribió con motivo de la publicación, junto a Rey Pastor, del primer libro de la Colección Intuitiva.

Ganó la cátedra del Instituto San Isidro en 1926. Mientras ejercía el magisterio acabó sus estudios de Ingeniería Industrial en la Escuela de Madrid.

Cuando acababa el curso corría a Barcelona, a las colonias que el Institut-Escola organizaba en la sierra del Montseny. Allí don Pedro era feliz: la vida al aire libre, la música, la danza.... confundiendo el placer de vivir y el gozo de aprender.

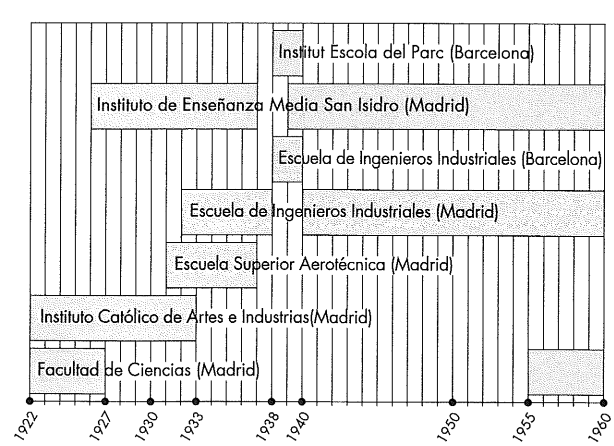
Don Pedro Puig Adam fue a la vez propagandista de la investigación didáctica matemática, defensor de una estrecha relación Realidad-Matemática en la clase e investigador matemático de vanguardia...

Se consideraba discípulo de don Esteban Terradas, que fue maestro en todos los aspectos de la Ciencia, y al cual iba a visitar siempre que los apretados horarios y la diversidad de dedicaciones de ambos se lo permitían, escuchando interesado su docta conversación sobre el último descubrimiento científico.

Quiso regresar a Barcelona tras la guerra civil para salvar lo que se pudiera de la obra pedagógica del doctor Estalella y de su Institut-Escola y fue director durante unos meses. Sólo pudo aportar sus esfuerzos para disminuir los efectos de la represión que se cernió sobre profesores y alumnos. Abandonó desilusionado su proyecto y regresó a Madrid, a su San Isidro y a su docencia en la Universidad.

Don Pedro inició para la docencia española un período muy fecundo de relaciones con los artífices y grupos de más avanzadas ideas sobre la didáctica matemática de la Europa de los años cincuenta: los Gattegno, Fletcher, Servais, Castellnuovo, Campedelli y su organización: la Asociación para el Estudio y Mejora de la Enseñanza de las Matemáticas. A partir de 1955, el profesor Puig se convierte en un miembro muy activo de esta agrupación europea de investigadores en didáctica.

La profesora Castellnuovo ha comentado muchas veces la gran valía del trabajo de don Pedro, y de en su propio país era menos conocido y, en cambio, muy reconocido en otros lugares del mundo.



Su manera de pensar

Sobre el trabajo

Era un trabajador infatigable, impartía muchas horas diarias de clase: en el Instituto de San Isidro, en la Facultad de Ciencias Exactas, en la Escuela de Ingenieros Industriales. Y cuando le hablaban del exceso de trabajo que siempre llevaba encima, solía contestar: «el descanso consiste en cambiar de trabajo...».

Sobre el encasillamiento de las personas

En la muerte del Dr. Estalella, fundador y alma del Institut-Escola, que le causó fuerte impresión, decía:

> ...la simplicidad de las clasificaciones de los hombres en apartados ideológicos, en casillas morales, en cuadros afectivos... me han hecho siempre sonreír con algo de escepticismo....

El Dr. Estalella murió en 1938, y Puig habla en su elogio del maestro de «...las tristes circunstancias actuales...» refiriéndose a la guerra civil.

Sobre la especialización

Aun conociendo la, entonces muy en boga, fiebre de la especialización, rompe lanzas por un nuevo «hombre renacentista» superador del taylorismo, que sea de ciencias o de letras tenga sensibilidad para la belleza y para el razonamiento lógico.

Sobre la belleza

En una conferencia en el Instituto Francés, de Madrid, en 1941, hace un tratamiento de gran erudición de la belleza y los estudios estéticos a lo largo de la historia, recogida en su obra final, *La matemática y su enseñanza actual* (1960). Inicia un tratamiento científico de la belleza, y una búsqueda rigurosa de la misma en el pensamiento matemático. En este tema tiene una gran influencia el doctor Estalella y toda una generación de pedagogos peninsulares progresistas de los años treinta.

...intenta reiniciar aquel espíritu liberal de la única Pedagogía en la que cree: la basada en un respeto al alumno y en el empleo de los métodos activos.

Se nos muestra como un enamorado del progreso y denota una gran intuición sobre los grandes temas que constituirán los nuevos paradigmas científico-técnicos: la cibernética junto a la teoría de la información y la energía del átomo.

En su discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias, el 5 de marzo de 1952, cita a Norbert Wiener y a las primeras aplicaciones de las máquinas que después llamaremos ordenadores.

Y, sin embargo, dice: «...quién osará mecanizar el *esprit de finesse* de Pascal», recuerda un ejemplo de su infancia donde se ejemplifica la recursividad y relaciona la matemática más antigua con la más moderna, en una síntesis personal genético-histórica enlazando las paradojas de Epiménides y Russell.

Sobre el aprendizaje

En una escuela de posguerra, con un «la letra con sangre entra» como casi único recurso pedagógico oficialmente aceptado y utilizado, don Pedro intenta reiniciar aquel espíritu liberal de la única Pedagogía en la que cree: la basada en un respeto al alumno y en el empleo de los métodos activos.

Sobre el progreso

Propagandista, aun sin muchas posibilidades de éxito en esta época, del método genético-histórico, que aúna las teorías sobre evolución psicológica del niño de Piaget con la visión biogenética de la Ciencia:

> Nuestros bachilleres de hoy saben más Química que Lavoisier, pero menos Matemáticas que sus contemporáneos (Lagrange y Laplace)...

Defiende los métodos cíclicos para la enseñanza de las Matemáticas y el uso de la intuición

Utiliza el método heurístico y enseña a practicarlo a partir de lecciones concretas («la didáctica matemática en acción») defendiendo su bondad incluso en las condiciones difíciles del aula de aquellos años, a pesar de las dificultades que apuntaba: La lentitud del procedimiento, la falta de homogeneidad de la clase, el elevado número de alumnos por clase, la obsesión por los exámenes, que él denunció incansablemente.

Parecen problemas que todavía hoy día preocupan profundamente, ¿no es cierto...?

Sobre la aplicación de los conocimientos

Afirmó: «Los únicos conocimientos que en verdad no se aplican son aquellos que no se tienen».

> Las Matemáticas son el filtro a través del cual estudiamos los fenómenos naturales. Hay tres fases en la adquisición de un concepto matemático:
>
> 1. Planteo o abstracción.
>
> 2. Resolutiva, de razonamiento lógico, de transformación formal, a veces automática.
>
> 3. De interpretación o concreción, o sea, traducción de los resultados abstractos al primitivo terreno concreto.

Defiende la utilidad y la belleza de la Matemática

Como razones para su estudio que deben lograr la superación de la «tradicional aversión que sienten los estudiantes» hacia ella.

Sobre la Matemática divertida

Conoce profundamente el tema, busca la motivación por medio de la recreación matemática, dándole un tratamiento riguroso y al mismo tiempo intentando vitalizar los aspectos lúdicos del aprendizaje. juegos de patio, juegos de aula, construcción de modelos y máquinas.

Cita a Martin Gardner y a George Polya, autores noveles en los años cincuenta.

Utiliza el método heurístico y enseña a practicarlo a partir de lecciones concretas...

Solía decir que las mejores ideas didácticas procedían de sus alumnos.

Sobre «los catedráticos»

Es posible que don Pedro no fuera muy feliz entre sus «compañeros de cuerpo», sobre todo desde los años de la posguerra hasta su muerte en 1960.

Toda su teoría didáctica chocaba con la pomposidad y el conservadurismo de la práctica docente de sus contemporáneos.

Su espíritu abierto y su afán renovador le granjearon más de una antipatía.

De hecho, ni en su querido Instituto de San Isidro ha quedado rastro de su obra didáctica, ni del material diseñado por él y construido por su maestro de taller, colaborador inapreciable de su Cátedra.

En la biblioteca actual del instituto hay apenas tres o cuatro obras de don Pedro y unos maravillosos trípticos explicativos de unidades didácticas. Sus inmediatos sucesores en la cátedra no parece que valoraran su obra, acumulada tras largos años de docencia.

En 1953 decía:

> La formación del profesorado de Enseñanza Media había fomentado inconscientemente la falsa idea de que el Instituto era una Universidad en pequeño... ¡Cuánto camino había que recorrer (y falta por recorrer todavía en muchos centros) hasta llegar a la clase taller, a la cátedra sin estrado, a la cátedra sin cátedra, en la que el profesor, sin lugar especial para sí, está, sin embargo, en todas partes!

Esta cita, desgraciadamente, puede ser todavía vigente.

Sobre cómo se genera la didáctica

Solía decir que las mejores ideas didácticas procedían de sus alumnos. Ellos le decían cómo explicarles las cuestiones de manera que se entendieran fácilmente. Sus clases experimentales de los jueves por la tarde en el San Isidro tenían como finalidad la generación y prueba de nuevas ideas y nuevo material.

Decía, en su *Didáctica matemática heurística*:

> ...la didáctica es, ante todo, adaptación al alumno....

Cuántas veces el carácter erróneo de estas espontaneidades (de los alumnos) da lugar a enseñanzas mucho más provechosas que la lección preparada y cuántas otras también los alumnos dan en el clavo, señalando el camino didáctico más eficaz.

Sobre lo inútil

Escribió una *Apología de la Inutilidad,* discurso leído en la inauguración del curso 1945-46 en la entonces Escuela Especial de Ingenieros Industriales de Madrid, en la que en tono sarcástico y con gran seriedad, habla de la dualidad de las matemáticas del matemático y de las del ingeniero, de las Matemáticas «útiles» y de las Matemáticas «inútiles».

Su material didáctico

Don Pedro escribió en *El material didáctico matemático* (Madrid, 1958):

> ...la matemática ha constituido, tradicionalmente, la tortura de los escolares del mundo entero, y la humanidad ha tolerado esta tortura para sus hijos como un sufrimiento inevitable para adquirir un conocimiento necesario; pero la enseñanza no debe ser nunca una tortura, y no seríamos buenos profesores si no procuráramos, por todos los medios, transformar este sufrimiento en goce, lo cual no significa ausencia de esfuerzo, sino, por el contrario, alumbramiento de estímulos y de esfuerzos deseados y eficaces.
>
> ...Toda la educación matemática de que me ufanaba, no me había enseñado a efectuar procesos eficientes de abstracción, de selección de causas predominantes en la que juega más la intuición que la lógica. Y no se escuden los profesores puristas en que ésta es tarea de educación tecnológica posterior. Existe una cuestión de hábito que es preciso educar desde el principio, sin que con ello pretendamos los profesores de matemáticas invadir el campo específico de la tecnología.
>
> ...Este material: modelos, filmes, filminas, visto por los matemáticos situados desde la elevada perspectiva abstracta, son meras concreciones ilustradoras, simple ropaje conveniente para facilitar momentáneamente comprensiones dificultosas; pero para el educador matemático, que no pierde la perspectiva de los procesos iniciales de abstracción, este material es mucho más: Representa algo substancial con su función educativa. Este material estructurado en forma de modelos tiene no sólo la función de traducir ocasionalmente ideas matemáticas, sino también de originarlas, de sugerirlas. Hemos de estudiar la manera pedagógicamente más acertada de conseguirlos y también los materiales más dúctiles para su rea-lización.

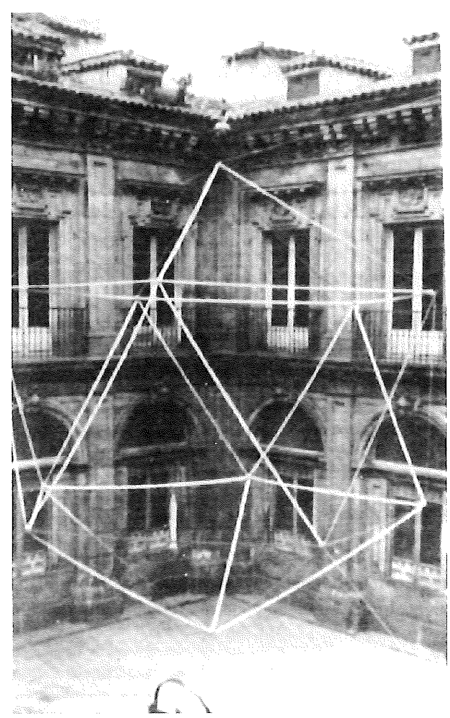
...el icosaedro de un metro de arista que se construyó sobre el pozo del patio renacentista del Instituto San Isidro en la reunión de la CIAEM en 1957.

En esta obra, don Pedro recopila y describe material didáctico matemático diseñado por profesores españoles y extranjeros y presentado en la exposición internacional que tuvo lugar en Madrid en 1957.

Más de 130 modelos fueron presentados y se hallan descritos y fotografiados. Fue destacada la participación de los profesores de los Institutos Laborales.

El profesor Puig Adam fue un entusiasta del diseño y utilización de material didáctico. Participó en la redacción de un libro colectivo internacional sobre material didáctico matemático, de la CIAEM, publicado por Delachaux-Niestlé y traducido al español por Aguilar en 1960.

En la fotografía puede verse el icosaedro de un metro de arista que se construyó sobre el pozo del patio renacentista del Instituto San Isidro en la reunión de la CIAEM en 1957.



Este poliedro fue reconstruido una tarde de sábado de 1985 por un grupo de profesores de Madrid con ocasión de un Seminario dirigido por el Grup Matemàtic Puig Adam en el Instituto San Isidro. En el transcurso del montaje se hallaron restos del cordel empleado por el maestro en 1957 en los balcones del patio. ¡Fue un momento emocionante!

Su profesionalidad y su obra

Don Pedro tenía una maravillosa obsesión por su coherencia personal y la de su obra. Toda nueva elaboración parte de bases anteriormente conquistadas haciendo gala en ocasiones de un fuerte espíritu autocrítico.

Era un hombre con aficiones arraigadas, que jamás abandonó. La armonización musical de poesías propias o de otros autores, la dirección de corales (dirigió composiciones a ocho voces) eran sus pasatiempos, que ejercía con dedicación profesional y que eran goce de sus amigos y discípulos.

Disfrutaba con el dibujo a mano alzada, captando con trazo fácil la fugacidad de un paso de danza o la expresión de una cara.

Sus amigos Pascual Ibarra y Angeleta Ferré han conservado algunos de estos entrañables recuerdos.

El profesor Puig tiene un gran gusto para el juego con el lenguaje. Lo domina y le agrada explicitar los sentidos estricto y figurado utilizándolos e intercambiándolos. Ello aporta una cierta ambigüedad creativa y didáctica a ciertas frases.

Unos ejemplos pueden ser: «la belleza de lo matemático y las matemáticas de lo bello», «la matemática es la ciencia de los esquemas y el esquema de la ciencia», y otras que se encuentran a lo largo de su obra.

Valora al hombre por encima de toda otra consideración, posiblemente a partir de su visión cristiana.

La tecnología, la vida cotidiana junto al disfrutar con el razonamiento puro son, para él mismo y para su práctica docente, las fuentes y motivaciones de la enseñanza y del aprendizaje de las Matemáticas.

Hagamos un breve recorrido por algunos pasajes de su obra a través de los años.

Año 1947, en la *Geometría Métrica*:

> No sé si este libro merece prólogo. Acaso sólo lo merezca la intención con que se ha escrito. Nació de una afectuosa indicación que quise obedecer y de una disconformidad que me acuciaba. Creció entre el afán de lo por lograr y el descontento por lo no logrado.
>
> ...Creo que toda preparación termina en deformación cuando las pruebas que se exige superar se realizan en masa y contra reloj, y, por reacción di en querer hacer, ante todo, un libro formativo. Perdóneseme, pues, la rebeldía y vanidad de mi intento.
>
> ... ¡Quién supiera, pues, escribir un libro capaz de despertar el respeto al rigor sin ahogar la intuición! ¡Quién supiera conjugar en él la honradez científica, el interés formativo y la eficacia práctica! ...Tal ha sido la quimera constante del autor en la encrucijada de su triple tendencia pedagógica, científica y técnica, al acometer, temeroso de su impotencia, el empeño de escribir un libro para escolares, bajo el fuego cruzado de los críticos puros y de los críticos prácticos...

La tecnología, la vida cotidiana junto al disfrutar con el razonamiento puro son, para él mismo y para su práctica docente, las fuentes y motivaciones de la enseñanza y del aprendizaje de las Matemáticas.

Año 1950, en su *Cálculo Integral*, señalaba:

> ... y es que ningún noble empeño es despreciable, ni ningún conocimiento puede tacharse de inútil a perpetuidad. Los únicos conocimientos que no se aplican jamás son los que no se tienen; los únicos esfuerzos baldíos de verdad son los que sólo se quedan en proyecto.
>
> De noble empeño y esfuerzo califico, sin modestia, este libro del que poca gloria espero y menos provecho; pero me consuela pensar que acaso sirva y cumpla su misión; y misión y servicio son los motivos que alientan la vida del profesor.

Año 1956, en *Didáctica Matemática heurística*, decía:

> ...Y termino esta, ya demasiado larga, introducción, previniendo el peligro de un vicio que en ningún modo quisiera fomentar con este libro: el de la imitación; uno de los más graves y frecuentes en pedagogía... no pretenda (el profesor) aplicar en todo momento y ocasión la misma norma como receta conductora, ya que la buena didáctica no admite soluciones rígidas... Aprendan ante todo los profesores a observar atentamente a sus alumnos, a captar sus intereses y sus reacciones, y cuando sepan leer bien en ellos, comprobarán que en ningún libro ni tratado existe tanta sustancia pedagógica como en el libro abierto de una clase, libro eternamente nuevo y sorprendente.

Año 1933, en la *Metodología y Didáctica de la Matemática Elemental*, escribía:

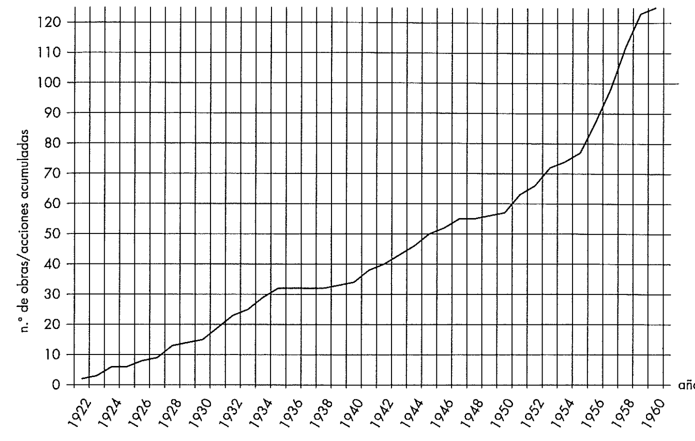
> ...Mientras un maestro de escuela debe considerarse completamente fracasado si sus alumnos salen a la vida sin los pertrechos indispensables, que significa saber leer, escribir y calcular correctamente; en cambio, un bachillerato que no haya dejado en la memoria de los alumnos indeleblemente grabada para siempre ninguna declinación latina, ninguna fórmula trigonométrica, ninguna especie botánica, podrá ser, sin embargo, un bachillerato eficaz si ha logrado despertar en el alumno la afición por la lec-tura de obras literarias, el hábito de razonamiento cuidadoso, el amor a la naturaleza y el sentido de observación, porque, a fin de cuentas, ese imponderable que se llama cultura general no es sino aquello que queda en el espíritu después de haber olvidado todo lo aprendido en el período escolar.

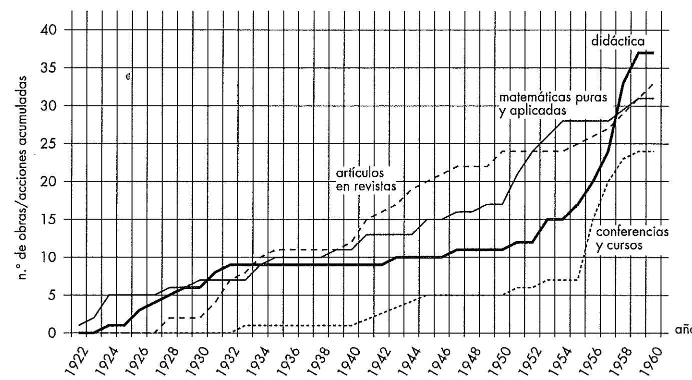
Utilizando un procedimiento matematizador de la realidad, que fue uno de los ejes de la didáctica de Pere Puig Adam, se puede realizar un resumen de su trayectoria profesional y docente. Los resultados conforman dos gráficos temporales como los que se adjuntan.

A través del volumen y la especialización de su obra, el primer diagrama trasluce algunos cambios importantes en su motivación y en sus perspectivas profesionales. Del comportamiento de las cuatro funciones representadas, pueden extraerse las etapas más definidas en la vida de don Pedro. La variable independiente es el tiempo de producción: de 1922 a 1960.

El gráfico evoca la evolución de sus posturas personales y las características y necesidades de cada época histórica que le tocó vivir: Regeneracionismo en los treinta, la guerra civil, la dura posguerra, la renovación del franquismo en los años cincuenta.

En el segundo diagrama se reflejan todas las actividades docentes de Puig Adam entre 1922 y 1960.





En 1995, se publicó una biografía de Pedro Puig Adam, dentro de la obra en dos volúmenes: *Ciència i Tècnica als Països Catalans als 150 anys*, editada en Barcelona por la Fundació Catalana per a la Recerca, escrita por el Doctor Claudi Alsina y el autor de estas líneas

En dicha obra se habla de Don Pedro como de un personaje singular que reúne a la vez cualidades humanas, matemáticas, técnicas y pedagógicas de extraordinarias dimensiones. Su obra escrita es importante y extensa y mantiene una sorprendente vigencia e influencia, muchos años después de la prematura muerte de su autor.

Puig Adam es uno de aquellos hombres en los que la palabra maestro resulta la mejor síntesis de todas las calificaciones posibles. Él, junto a Esteve Terradas, Josep M.ª Plans, Antoni Torroja, Pere Pi Calleja, Lluis A. Santaló, Ernest Corominas y otros, son figuras señeras de la matemática catalana y española contemporáneas. Forman parte de una generación admirable por haber aportado un inmenso esfuerzo al proceso de modernización de la ciencia y la tecnología españolas y a su integración en las corrientes internacionales vigentes. Todos ellos participaron activamente en la tarea regeneradora de la matemática española iniciada por el Institut d'Estudis Catalans (1907) y la Junta de Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas (1908), continuando la obra de los José Echegaray, Zoel García de Galdeano, Leonardo Torres-Quevedo, Eduard Torroja y tantos otros.

Estos matemáticos catalanes tienen una obra importante escrita, desarrollada casi totalmente lejos de Cataluña, en circunstancias muy especiales, marcadas por los acontecimientos históricos españoles del primer tercio del siglo XX.

Estos matemáticos catalanes tienen una obra importante escrita, desarrollada casi totalmente lejos de Cataluña, en circunstancias muy especiales, marcadas por los acontecimientos históricos españoles del primer tercio del siglo XX.

El profesor Puig Adam en el 2000, Año Mundial de las Matemáticas

Dentro de los actos españoles del Año Mundial de las Matemáticas proclamado por la UNESCO, en el Congreso de Educación Matemática (cem2000) a celebrar en Mataró (Barcelona) en julio del 2000 organizado por la FEEMCAT, se realizarán una exposición y una conferencia sobre la vida y la obra de Pere Puig Adam con motivo del centenario de su nacimiento.

Allí, seguramente, se podrá analizar su «decálogo para la didáctica matemática» (1955) que constituye un resumen concreto y esquemático de todo su pensamiento didáctico.

1. No adoptar una didáctica rígida, sino adaptada en cada caso al alumno, observándole constantemente.
2. No olvidar el origen concreto de la Matemática ni los procesos históricos de su evolución.
3. Presentar la Matemática como una unidad en relación con la vida natural y social.
4. Graduar cuidadosamente los planos de abstracción.
5. Enseñar guiando la actividad creadora y descubridora del alumno.
6. Estimular esta actividad despertando interés directo y funcional hacia el objeto de conocimiento.
7. Promover en todo lo posible la autocorrección.
8. Conseguir una cierta maestría en las soluciones antes de automatizarlas.
9. Cuidar que la expresión del alumno sea traducción fiel de su pensamiento.
10. Procurar a todos los alumnos, éxitos que eviten su desmoralización.

Al comparar la vida docente de Puig Adam con la de otros matemáticos contemporáneos resultan remarcados los hechos siguientes: Coincide con todos en la necesidad de destinar una buena parte del tiempo diario a impartir cursos en diversos centros a causa de las precarias remuneraciones de la época y el fraccionamiento de los cargos docentes (encargos de cátedra, auxiliaridad en una asignatura). Trabaja a lo largo de toda su vida en investigaciones de matemática aplicada. Conecta con las tendencias didácticas internacionales vigentes haciendo propuestas de renovación que, si bien, serían hoy calificadas como pioneras de la didáctica, sin embargo en aquellos años no fueron siempre bien comprendidas por sus colegas.

Si se considera a todos los matemáticos que recibieron la influencia de Julio Rey Pastor podría decirse que Puig Adam es el didacta de este grupo y su preocupaciones se centran en la enseñanza secundaria, en los estudios de ingeniería y en la formación del profesorado.

Puig Adam realizó sus estudios y su ejercicio profesional en España, sin ningún problema. No hizo estancias de estudios en otros países europeos (aunque lo intentó por una vez, en 1925) y tampoco vivió las difíciles circunstancias del exilio producto de la guerra civil, que tanto afectó a otros compañeros. Su relación con los matemáticos más avanzados se basaba en la asistencia a los cursos que impartían en España, en la lectura infatigable de revistas y libros y en una extensísima comunicación epistolar. Su hija Doña Emilia Puig está realizando un importante y exhaustivo estudio de esta maravillosa obra epistolar.

Conecta con las tendencias didácticas internacionales vigentes haciendo propuestas de renovación que, si bien, serían hoy calificadas como pioneras de la didáctica, sin embargo en aquellos años no fueron siempre bien comprendidas por sus colegas.

Hay que remarcar el reconocimiento de su tarea y su obra que recibió de las autoridades de la época. Una situación ciertamente singular en relación al trato que recibieron otros matemáticos coetáneos y que procede de su espíritu conservador y de persona de orden, y del gran respeto que mostró siempre por el régimen nacido de la guerra civil.

La obra escrita de Puig Adam se caracteriza por el equilibrio entre la cantidad y la calidad, la diversidad de temas y la diversidad de niveles en un desarrollo sincrónico. Escribe para la secundaria, para universitarios, para formar profesores o para innovar la enseñanza, así como artículos de investigación científica. Su obra investigadora abarca campos tan variados como la mecánica relativista, modelos en ciencias físico-químicas, geometría, teoría de sistemas y cibernética.

En la mayor parte de sus libros de texto, emplea una gran cantidad de imágenes e ilustraciones, una referencia constante a la intuición, un lenguaje serio, claro y sin concesiones, una vertebración de dificultad creciente y una ausencia de bibliografías. Su estilo enciclopédico y autocontenido es otra característica influida por Rey Pastor, del cual también pueden apreciarse influencias en la retórica expositiva. No podría explicarse la redacción de tantos libros de texto de Secundaria si no recordáramos los numerosos cambios de planes de estudios que vivió Puig Adam entre 1926 y 1960 así como las necesidades económicas que sufrió y que le llevaron a la autoedición y venta de sus libros, al margen de las editoriales.

Seguramente sus ideas pedagógicas serán apreciadas y aplicadas durante mucho tiempo. Su vertiente didáctica ha eclipsado en gran parte una importante obra investigadora en matemática aplicada. Han sido numerosos los encuentros de didáctica matemática que han glosado su figura y su obra. Hoy existe, en Madrid, una Sociedad de Profesores de Matemáticas con su nombre.

Como persona, Puig Adam será siempre recordado como un hombre bueno, sentimental y humilde y dedicado intensamente al trabajo.

A menudo parece resonar en pasillos de los institutos de enseñanza secundaria, aquella máxima de don Pedro que podría sintetizar todo su trabajo:

> Educar es, en el fondo, cultivar al mismo tiempo el conocimiento de lo verdadero, la voluntad de lo bueno y la sensibilidad de lo bello.

Mi agradecimiento por la ayuda de personas –algunas de ellas ya no nos acompañan– e instituciones. Angeleta Ferrer, Pascual Ibarra y doña Emilia Puig, que han hablado durante horas del don Pedro que conocieron y amaron. A las bibliotecarias de la Asociación de Maestros «Rosa Sensat», cuya paciencia y profesionalidad fueron inestimables. A Antonio Roca y Guillermo Lusa que me ayudaron a integrar a don Pedro Puig Adam en su generación y en la España de su tiempo. A mis queridos compañeros Pere Roig y Angel Jiménez del Grup Matemátic Puig Adam, que han aportado su colaboración y espíritu critico. Y una mención final para mi amigo, el doctor Claudi Alsina, con quien hemos pasado momentos maravillosos descubriendo la figura y la obra de don Pedro Puig Adam.

Como persona, Puig Adam será siempre recordado como un hombre bueno, sentimental y humilde y dedicado intensamente al trabajo.

Bibliografía de Pere Puig Adam

(1922): «Sobre algunas propiedades de las redes armónicas», *Revista Matemática Hispano-Americana*, Madrid.

(1922*b*): «Resolución de algunos problemas elementales de Mecánica Relativista restringida», *Revista de la Real Academia de Ciencias*, tomo 20, 5.°. de la 2.ª serie, Madrid.

(1923): «Resolución de algunos problemas elementales de Mecánica Relativista restringida», *Publicaciones del Laboratorio y Seminario Matemático*, tomo 4, memoria 3, Madrid.

(1924): «Series divergentes cuyo término general tiende a cero», *Revista Matemática Hispano-Americana*, Madrid.

(1925): «Construcciones métricas y resolución de triángulos esféricos en proyección estereográfica», *Revista Matemática Hispano-Americana*, Madrid.

(1925*a*): «Algunos problemas de mínimo en la catenaria», *Anales de la Asociación de Ingenieros del ICAI*, Madrid.

(1925*b*): «Sobre la catenaria de tensión mínima», en *Actas del Congreso de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias*, Coimbra.

(1926): «Sobre el problema inverso del cálculo aproximado», *Revista Matemática Hispano-Americana*, Madrid.

(1926*a*): «Dos palabras acerca de la pedagogía matemática en la Segunda Enseñanza», *Revista de Segunda Enseñanza*, Madrid.«

(1927): Klein, el Instituto y la Universidad», *Revista Segunda Enseñanza*, Madrid.

(1927*a*) con J. REY PASTOR: *Elementos de Aritmética Intuitiva*, Biblioteca Matemática, Madrid.

(1928): «Sobre la representación cartesiana de funciones homogéneas de dos variables», *Revista Matemática Hispano-Americana*, Madrid.

(1928*a*): «Interpretación gráfica del error en el método de análisis directo», *Revista Matemática Hispano-Americana*, Madrid.

(1928*b*) con J. REY PASTOR: *Elementos de Geometría Intuitiva*, Biblioteca Matemática, Madrid.

(1929): «Notas sobre pedagogía matemática», *Revista Matemática Hispano-Americana*, Madrid.

(1929*a*): «Los conceptos de derivada e integral en la Segunda Enseñanza», *El Instituto*, 1, Madrid.

(1929*b*): «Construcción de una regla de cálculo didáctica», *El Instituto*, Madrid.

(1930): «Oscilogramas de inducción y de torsión en materiales ferromagnéticos», *Anales de la Asociación de Ingenieros del ICAI*, Madrid.

(1931) con J. REY PASTOR: *Lecciones de Algebra y Trigonometría*, Biblioteca matemática, Madrid.

(1932): «Demostración intuitiva de la regla de la raíz cuadrada», *Matemática Elemental*, enero, Madrid.

(1932*a*) con J. REY PASTOR: *Complementos de Álgebra y Trigonometría*, Biblioteca Matemática, Madrid.

(1933) con J. REY PASTOR: *Metodología y Didáctica de la Matemática elemental*, Imprenta de A. de Marzo, Madrid.

(1934): «Sobre la estabilidad de las palas del autogiro», *Revista de Aeronáutica*, Madrid.

(1934*a*): «Nota sobre la determinación de órbitas de estrellas dobles», *Revista del Centro de Estudios Científicos*, San Sebastián.

(1934*b*) con J. REY PASTOR: *Obras de texto de Bachillerato (Plan 1934)*, Biblioteca Matemática, Madrid.

(1935): «Contribución al estudio matemático de la absorción de energía cósmica por la atmósfera», *Revista Matemática Hispano-Americana*, Madrid.

(1938): *Obras de texto de Bachillerato (Plan 1938)*, Biblioteca Matemática, Madrid.

(1939): «Demostración simplificada de la fórmula de Moivre-Stirling y acotación gráfica del error», *Revista Matemática Hispano-Americana*, Madrid.

(1939*a*): «El que podria ésser l'ensenyament de la Matemàtica a l'Institut-Escola», *Butlletí de l'Institut Escola*.

(1941): «Ensayo de una teoría matemática de escalafones cerrados y sus aplicaciones a problemas de Hacienda y previsión», *Revista Matemática Hispano-Americana*, Madrid.

(1942): «Formación y selección del profesorado de Enseñanza Media», en *Actas de la Primera Semana de Enseñanza Media Oficial*, Madrid.

(1943): «La Matemática en la primera exposición de trabajos prácticos de los Institutos de Enseñanza Media», *Matemática Elemental*, Madrid.

(1944) con J. REY PASTOR: *Elementos de Aritmética Racional*, Biblioteca Matemática, Madrid.

(1944*a*) con J. REY PASTOR: *Elementos de Geometría Racional*, Biblioteca Matemática, Madrid.

(1944*b*) con J. REY PASTOR: *Álgebra y Trigonometría*, Biblioteca Matemática, Madrid.

(1945): «De los axiomas de ordenación al teorema de Jordan para recintos poligonales», *Revista Matemática Hispano-Americana*, Madrid.

(1945*a*): «Sobre la individualización de los sentidos en las curvas planas cerradas de Jordan», *Revista Matemática Hispano-Americana*, Madrid.

(1947): «Orientación, selección y deformación», *Revista de Sicología General y Aplicada*, Madrid.

(1947*a*): *Curso de geometría métrica*, Biblioteca Matemática, Madrid.

(1947*b*): *Curso teórico-práctico de Cálculo Integral, aplicado a la Física y a la Técnica*, Biblioteca Matemática, Madrid.

(1948): «La Matemática en la transmisión de la energía eléctrica», *Publicaciones de la Escuela Especial de Ingenieros Industriales*, Madrid.

(1949): «Un teorema general sobre integrales de funciones compuestas y sus aplicaciones geométricas y físicas», *Revista Matemática Hispano-Americana*, Madrid.

(1950): *Curso teórico-práctico de Ecuaciones Diferenciales, aplicado a la Física y a la Técnica*, Biblioteca Matemática, Madrid.

(1951): «La transformación de Laplace en el tratamiento matemático de fenómenos físicos», *Revista Matemática Hispano-Americana*, Madrid.

(1951*a*): «Las fracciones continuas de cocientes incompletos diferenciales y sus aplicaciones», *Revista Matemática Hispano-Americana*, Madrid.

(1951*a*): «Les systèmes lineaires retroactifs en chaîne et les fractions continues», en *Actas del Coloquio Les machines a calculer et la pensée humaine*, Paris.

(1951*b*): «Transformée de Laplace des fonctions empiriquement données», en *Actas del Coloquio Les machines a calculer et la pensée humaine,* Paris.

(1951*c*): «El valor formativo de las Matemáticas en la Enseñanza Media», *Atenas. Revista de Información y Orientación Pedagógica*, marzo, Madrid.

(1952): *Matemática y Cibernética*, Discurso de recepción en la Real Academia de Ciencias, Madrid.

(1952*a*): «Algunas generalizaciones del algoritmo de las fracciones continuas de elementos diferenciales», *Revista Matemática Hispano-Americana*, 4.ª serie, tomo 12, n.° 1, 2, Madrid.

(1952*b*): «Métodos gráfico y algebraico para el proyecto de circuitos electrónicos de cálculo», *Revista de Ciencia Aplicada*, julio-agosto, Madrid.

(1952*c*): «Sobre la formación matemática del ingeniero», *Acero y Energía*, Madrid.

(1953): «Sur les limites de certaines fonctions de partition», *Revista Matemática Hispano-Americana*, tomo 13, n.° 1 y 2, Madrid.

(1953*a*): «Sobre algunas propiedades de las fracciones continuas de elementos diferenciales», *Las Ciencias,* año 20, 2, Madrid.

(1953*b*): «La evolución de la Didáctica Matemática en nuestra generación», *Las Ciencias*, año 20, 1, Madrid.

(1953*c*): «Sobre la enseñanza de la geometría en la Escuela Primaria», *Bordón*, 35, Madrid.

(1954): «Reducidas ascendentes y reducidas descendentes en el algoritmo de fracciones continuas de elementos diferenciales», *Revista de la Real Academia de Ciencias*, Madrid.

(1954*a*): *Obras de texto de Bachillerato (Plan 1954)*, Biblioteca Matemática, Madrid.

(1955): «Sobre algunas propiedades de las funciones convexas», *Gaceta Matemática*, 1.ª serie, n.° 5, 6, Madrid.

(1955*a*): «Decálogo de la Didáctica Matemática Media», *Gaceta Matemática*, 1.ª serie, tomo 7, n.° 5-6, Madrid.

(1955*b*): «La Comisión Internacional para el Estudio y Mejoramiento de la Enseñanza Matemática», *Revista de Educación Nacional*, diciembre. Madrid.

(1956): «Tendencias actuales en la Enseñanza de la Matemática», *Revista de Educación Nacional*, 41, 42 y 43. Madrid.

(1956*a*): «Tres muestras de clases eurísticas en los primeros cursos de Matemáticas del Bachillerato», *Boletín Pedagógico de la Institución de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral*, año 1, n.° 5, Madrid.

(1956*b*): «Una lezione attiva sull'iniziazione alle simemetrie nel piano», *Archimede*, 4-5, Roma.

(1956*c*): «Material pedagógico y experiencias didácticas», en *Actas de la 19 Conferencia Internacional de Instrucción Pública sobre "L'Enseignement des Mathématiques"*, Ginebra.

(1956*d*): «Structures algébriques dans une mosaïque jouet», *Revista de la Societé Belge de Professeurs de Mathématiques, Mathematica & Paedagogia*, 10. Bruselas.

(1956*e*): *Didáctica Matemática eurística*, Institución de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral, Madrid.

(1957): «Un juego de adivinación de carácter matemático», *Gaceta Matemática*, 1.ª serie, tomo 8, n.° 6-7, Madrid.

(1957*a*): «Un nuevo material para la Enseñanza eurística de la Geometría del Espacio», *Enseñanza Media*, 3, Madrid.

(1957*b*): «Dos lecciones de Didáctica Matemática eurística», *Arquímedes*, Madrid.

(1957*c*): «Le Matériel pour l'Enseignement des Mathématiques«, en Delachaux-Niestlé, Paris-Neuchatel, capítulo 11.

(1957*d*) con J. REY PASTOR: *Obras de texto de Bachillerato (Plan 1957)*, Biblioteca Matemática. Madrid.

(1957*e*) con J. REY PASTOR: *Obras de texto de Bachillerato Laboral Elemental (Plan 1957)*, Biblioteca Matemática, Madrid.

(1958): «Sobre la ecuación funcional de Cauchy», *Las Ciencias*, año 24, 3, Madrid.

(1958*a*): «Estructuras matemáticas en un juego solitario», *Gaceta Matemática*, 1.ª serie, tomo 9, n.° 1, Madrid.

(1958*b*): «Sobre la Enseñanza Eurística de la Matemática», *Atenas*, enero-febrero, Madrid.

(1958*c*): «Sobre la formación del Profesorado de Matemáticas de grado medio», *Boletín de la Institución de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral*, abril, Madrid.

(1958*d*): «Les Mathématiques et le concret», *Mathematica & Paedagogia*, 12, Bruselas.

(1958*e*): «La Matemática y lo concreto. Discurso inaugural de la 11ª Reunión de la CIEAEM», *Arquímedes*, año 3, 5-6, Madrid.

(1958*f*): «Modelos matemáticos extraídos de la vida», *Arquímedes*, año 3, 5-6, Madrid.

(1958*g*): «L'aire des polygones au geóplan», *Mathematica & Paedagogia*, 15, Bruselas.

(1958*h*): *El Material Didáctico Matemático actual*, Publicaciones de la Revista de Enseñanzas Medias, Madrid.

(1959): «Un ingenio eléctrico para la resolución de problemas de lógica formal», *Revista de la Real Academia de Ciencias*, enero, Madrid.

(1959*a*): «Un "jouet" electrique pour l'enseignement de la logique des enoncés», *L'enseignement des Sciences*, 2, setiembre-octubre, Paris.

(1959*b*): «La enseñanza de la Aritmética en la Escuela Primaria», *Vida Escolar*, Madrid.

(1959*c*): «La Didáctica Matemática a lo largo de los ciclos medios», *Revista de Educación Nacional*, 95 y 97, Madrid.

(1959*d*): «Un punto de vista cibernético sobre el problema de los problemas», *Enseñanza Media*, 33-36. Madrid.

(1959*e*): «Sobre los films Didácticos Matemáticos», *Boletín de la Institución de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral*, 23, Madrid.

(1960): *La matemática y su enseñanza actual*, Publicaciones de la Revista de Enseñanzas Medias, N.° 72, Madrid.

(1960*a*) *Ampliación de Matemáticas. Curso Preuniversitario*, Biblioteca Matemática, Madrid.

(1967) con A. BIGUENET y otros: *El Material para la Enseñanza de las Matemáticas*, Aguilar, Madrid, 192-209.

Bibliografía sobre Pere Puig Adam

ALSINA, C. y P. SALES (1995): *Pere Puig Adam. Una aproximació biogràfica*, Ciència i Técnica als Països Catalans, Els darrers 150 anys, Fundació Catalana per a la Recerca, Barcelona.

ALSINA, C. (1994): *Pi Calleja, Matemático*, CSIC, Madrid (pendent de publicació)

ALSINA, C. (1991): *¡Los 90 son nuestros! Ideas didácticas para una matemática feliz*, Actas I C.I.B.E.M., Sevilla, Pub. Unesco, París, 41-52.

ALSINA, C. y E. TRILLAS, E. (1985): *Lecciones de Álgebra y Geometría. Curso para estudiantes de Arquitectura*, Gustavo Gili, Madrid.

AUSEJO, E. y A. MILLÁN (1989): «La organización de la investigación matemática en España en el primer tercio del siglo XX: EL Laboratorio y Seminario Matemático de la JAE (1915-1938)», *Llull*, volum 12. Madrid, 261-308.

BAGUÉ, E. y otros (1972): *En el quarantè aniversari de la fundació de l'Institut-Escola (1932-1972)*, Tallers gràfics Ariel, Barcelona.

CASULLERAS, J. (1976): «La formación musical. L'Institut-Escola: 1932-1939», *Grans Temes L'Avenç*, Barcelona, 38-40.

DE CASTRO, A. (1985): «Reflexiones sobre la obra de Pedro Puig Adam», *Thales*, 1, Sevilla, 20-25.

DE CASTRO, A. (1990): «Historia del Instituto de Cálculo», en *Estudios sobre Julio Rey Pastor (1888-1962)*, Instituto de Estudios Riojanos, Logroño, 195-207.

ETSEIB (ESCOLA TÉCNICA SUPERIOR D'ENGINYERS INDUSTRIALS DE BARCELONA): *(1937-1939) Expediente del profesor Don Pedro Puig y Adam.*

FERNÁNDEZ, J. (1985): «La obra científica de Puig Adam», *Nueva Revista de Enseñanzas Medias*, 7, MEC, Madrid, 19-22.

GLICK, T.F. (1986): *Einstein y los españoles. Ciencia y sociedad en la España de entreguerras,* Alianza Universidad, Madrid.

GLICK, T.F. (1990): «Pedro Puig Adam. Un becario de la Fundación Rockefeller», en *Estudios sobre Julio Rey Pastor (1888-1962)*, Instituto de Estudios Riojanos, Logroño, 115-118.

GRUP MATEMÀTIC PUIG ADAM (1990): «Decàleg del professor de Matemàtiques», *Crònica d'Ensenyament*, 46. Generalitat de Catalunya, Barcelona, 36.

GUTIÉRREZ, A. (ed.) (1991): *Área de Conocimiento Didáctica de la Matemática*, Síntesis, Madrid.

INSTITUT-ESCOLA (1977): *Butlletins de l'Institut-Escola 1932-1937*, Imp. spe. 5, Perpinyà.

JEREZ, M. (1985): «Mi relación con un cultivador apasionado de la matemática aplicada», *Real Academía de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, Madrid, 22-27.

LAFUENTE, A. (1978): *La introducción a la relatividad en España*, Tesina Lic. Física.

LORA-TAMAYO, M. (1985): «Palabras finales en la Sesión Necrológica en Memoria del Excmo. Sr. D. Pedro Puig Adam», *Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, Madrid, 36-37.

LUSA, G. (1975): *Las Matemáticas en la ingeniería*, ICE de la Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.

PASCUAL, J.R. (1985*a*): «Rasgos humanos de Don Pedro Puig Adam», *Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, Madrid, 1-11.

PASCUAL, J.R. (1985*b*): «Pedro Puig Adam, maestro», *Thales*, 1, Sevilla, 11-19.

PEDRAZA, F.B. y otros (1985): «Don Pedro Puig Adam, visto por su hija Emilia», *Nueva Revista de Enseñanzas Medias*, 7, MEC, Madrid, 9-17.

PÓLYA, G. (1967): *La découverte des Mathématiques*, Dunod, Paris.

RÍOS, S. (1985): «Obra matemática de Don Pedro», *Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, Madrid, 28-35.

RÍOS, S. (1990): *Julio Rey Pastor, matemático*, Instituto España, Madrid.

ROCA, A. (1987): *Hermann Weyl entre nosaltres. El curs de 1922 i algunes de les seves repercusions.* (Pendiente de publicación).

ROCA, A. (1988): «La ciència internacional a la Catalunya contemporània», en *Història de la Física*, CIRIT Generalitat de Catalunya, Barcelona, 319-332.

ROCA, A. y J.M. SÁNCHEZ RON (1990): *Esteban Terradas. Ciencia y Técnica en la España Contemporánea*, INTA. Ediciones del Serbal, Madrid.

ROCA, A. y J.M. SÁNCHEZ RON (1992): *Aeronáutica y Ciencia*, Algaida-INTA, Madrid.

RODRIGUEZ LESMES, D. (1960): Pròleg del llibre *La Matemàtica y su enseñanza actual*, Publicaciones de la Revista de Enseñanzas Medias, n.º 72, Madrid.

SALADRIGAS, R. (1988): *L'Escola del Mar i la Renovació Pedagògica a Catalunya*, Edicions 62, Barcelona.

SALES, J. (1982): «La geometria i en Pere Puig Adam», *Perspectiva Escolar*, 67, Rosa Sensat, Barcelona, 11-13.

SALES, J. (1985): «Semblanza bibliográfica de don Pedro Puig Adam», *Nueva Revista de Enseñanzas Medias*, 7, MEC, Madrid, 47-56.

SANCHEZ, G. (1992): «Perspectiva histórica de las reformas de los curriculos de matemáticas» *Epsilon*, 26, Sevilla, 31-46.

TORROJA, A. (1952): *Contestación al discurso de recepción del Exmo. Sr. Don Pedro Puig Adam*, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

YELA, M. (1985): «Pedro Puig Adam, maestro», *Real Academía de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, Madrid, 12-21.

WALUSINSKI, G. (1970): *Pourquoi une Mathématique moderne?*, Armand-Colin. Paris.

Josep Sales
IES Lluch i Rafecas.
Vilanova i la Geltrú.
FEEMCAT.

Lugar: Instituto San Isidro de Madrid
Profesor: D. Pedro Puig Adam
Alumno: D. Juan Carlos de Borbón

SUMA 34
junio 2000, pp. 21-25

Una modificación del problema de Arquímedes de las reses del Sol para una clase de resolución de problemas

Tomás Ortega

ARTÍCULOS

El presente artículo contiene el enunciado y una reformulación del problema de las reses del Sol, que fue propuesto por Arquímedes en el siglo III a. C., para que pueda ser tratado dentro del currículo de Bachillerato como una actividad de resolución de problemas. Se destacan los valores didácticos del mismo y se da una solución.

EN LOS CURRÍCULOS españoles de Matemáticas de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y Bachillerato la resolución de problemas es el quinto organizador curricular y, por tanto, se trata de una componente fundamental de articulación del diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas, (Rico, 1977). El propio currículo destaca, tanto en ESO como en Bachillerato, la importancia de estos contenidos, los considera básicamente procedimentales e indica que pretenden desarrollar en el alumno hábitos y actitudes propios del modo de hacer matemático.

Por otra parte, los Reales Decretos 1006/1991 y 1007/1991 establecen que «el currículo precisa reflejar el proceso constructivo del conocimiento matemático, tanto en su progreso histórico como en su apropiación por el individuo», y Sierra (1999) transcribe algunas formas de uso de la historia de la matemática enunciadas por Fauvel (1990) y añade otras propias, de las que transcribo la siguiente:

> Idear ejercicios utilizando textos matemáticos del pasado.

Seguidamente paso a enunciar el problema de Arquímedes del «rebaño de las Reses del Sol» y la modificación que propongo. Transcribo ambas.

Problema de Arquímedes

> Amigo, si has heredado la sabiduría, calcula cuidadosamente a qué número ascendía la multitud de las reses del Sol que en otro tiempo pacían en las llanuras de Trinacria, divididos en cuatro manadas de distinto pelaje: una, de color blanco como la leche, otra de negro lustroso, una tercera

oscura y la cuarta manchada. Los toros, que superaban en número a las vacas, se repartían en cada manada de la siguiente manera: imagina, amigo mío, que los toros blancos eran en igual número que la mitad y un tercio de los negros además de todos los oscuros, mientras que los negros eran en igual número que la cuarta más la quinta parte de los manchados, más todos los oscuros. Considera además que los manchados eran en igual número que la sexta más la séptima parte de los blancos, más todos los oscuros. Las vacas estaban así repartidas por su parte: las blancas eran en igual número que la tercera más la cuarta parte de toda la manada negra, mientras que las negras eran en igual número que la cuarta más la quinta parte de toda la manada manchada; a su vez, las manchadas eran en igual número que la quinta más la sexta parte de toda la manada oscura, mientras que las oscuras eran en igual número que la mitad de la tercera parte más la séptima parte de toda la manada blanca.

Amigo, si me dices cuántas eran las reses del Sol, y, en particular, cuál era el número de toros y vacas de cada pelaje, no se te podrá calificar ni de ignorante ni de inhábil en el manejo de los números, pero aún no podrás contarte entre los sabios. Pues atiende aún a dos distintas maneras en que las reses del Sol solían disponerse: cuando los toros blancos unían su multitud a la de los toros negros, formaban un grupo compacto de igual medida en profundidad que en anchura, que llenaba enteramente las inmensas llanuras de Trinacria. Por otra parte, reunidos solamente los oscuros y los manchados, se agrupaban por filas de tal manera que, estando constituida la primera de ellas por uno solo de ellos, formaban gradualmente una figura triangular, sin faltar ni sobrar ninguno. Amigo, si encuentras la relación oportuna entre todas estas cosas y, en una palabra, si concentrando tu espíritu expresas todas las cantidades correspondientes a esas manadas, podrás vanagloriarte de haber conquistado la victoria y estar convencido de ser juzgado consumado conocedor de esta ciencia.

Se ha transcrito el problema con el mismo estilo retórico con el que se muestra en E. Fernández y M. Banzo (1999) y merece la pena destacar la importancia de cuatro aspectos del mismo: en primer lugar, cabe comentar la importancia del propio texto, la composición de las manadas se narra tal y como surgen los problemas de la vida ordinaria, con lo que se manifiesta el carácter aplicado de las matemáticas; en segundo lugar, si la transcripción del lenguaje verbal al simbólico algebraico es, por sí misma, un ejercicio de cambio de registros sumamente interesante para el alumno, en este problema lo es más por la redacción verbal, aunque la transcripción de la segunda parte no resulte tan sencilla para todos los alumnos; en tercero, el propio problema muestra dos niveles de resolución y, según el propio Arquímedes, aunque el primer nivel requiere cierta habilidad en el manejo de los números, al segundo le considera de un nivel muy superior; finalmente, en cuarto lugar, aparece un aspecto motivador en el propio enunciado del problema, ya que, además de que el texto se muestra como un reto para quien trate de hallar el número de reses del rebaño del Sol, ligados a los dos niveles de resolución se muestran sendos reconocimientos a la capacidad resolutoria: el de habilidad en el manejo de los números, para la primera parte, y el de consumado conocedor de esta ciencia y así poderse contar entre los sabios, para el que obtenga la solución completa.

...considerando los valores didácticos que se han mostrado antes, además de poder hacer referencia a los intercambios culturales en la Antigüedad Clásica, etc., sería interesante redactar una segunda parte del problema, conservando la primera condición, para obtener una solución única del problema, que se pueda obtener fácilmente manejando software muy sencillo o con la calculadora, manejando aritmética entera, incluso manualmente, dejando la solución como producto de factores primos.

En el citado artículo de E. Fernández y M. Banzo, entre otras, se hace una referencia al trabajo de A. Amthor en 1880, se muestra el planteamiento algebraico de la primera parte del problema, que da lugar a un sistema homogéneo de ecuaciones diofánticas, y cómo las dos condiciones de la segunda parte llevan a una ecuación de Pell cuya solución completa, que tiene 206545 cifras, la imprimió, por primera vez, Harry Nelson en 1981, utilizando *software* de ordenador. El artículo termina con la implementación que hicieron E. Fernández y M. Banzo para calcular el número total de reses del rebaño.

Modificación del problema

El enunciado de Arquímedes no tiene mucho sentido para una clase de resolución de problemas de Educación Secundaria, pero, considerando los valores didácticos que se han mostrado antes, además de poder hacer referencia a los intercambios culturales en la Antigüedad Clásica, etc., sería interesante redactar una segunda parte del problema, conservando la primera condición, para obtener una solución única del problema, que se pueda obtener fácilmente manejando software muy sencillo o con la calculadora, manejando aritmética entera, incluso manualmente, dejando la solución como producto de factores primos. Lógicamente hay muchos enunciados alternativos, aquí se propone la modificación que aparece en el siguiente texto:

Amigo, si me dices cuántas eran las reses del Sol, y, en particular, cuál era el número de toros y vacas de cada pelaje, no se te podrá calificar ni de ignorante ni de inhábil en el manejo de los números, pero aún no podrás contarte entre los sabios. Pues atiende aún a dos distintas maneras en que las reses del Sol solían disponerse: cuando los toros blancos unían su multitud a la de los toros negros, formaban un grupo compacto de igual medida en profundidad que en anchura, que llenaba enteramente las inmensas llanuras de Trinacria. Por otra parte, reunidos solamente los oscuros y los manchados, se agrupaban por filas de igual longitud y los toros de una de ellas llenan un cuadrado igual de ancho que la anchura de todas las filas, sin faltar ni sobrar ninguno. Si al resolverlo, amigo, encuentras más de una solución, quédate con la menor de ellas, pues, a buen seguro, que habrá reses más que suficientes para saciar el hambre del mundo entero mientras éste dure. Amigo, si encuentras la relación oportuna entre todas estas cosas y, en una palabra, si concentrando tu espíritu expresas todas las cantidades correspondientes a esas manadas, podrás vanagloriarte de haber conquistado la victoria e irte convenciendo de que estás en el camino de conocer esta ciencia.

La propuesta de este problema debe hacerse para que los alumnos lo trabajen en grupos, siguiendo una metodología de autoaprendizaje guiado, orientándolos por etapas, según propone T. Ortega (1999: 93-95) en su metodología de Educación en la Diversidad, que trata de poner en práctica la orientación curricular de la LOGSE, que su artículo 20, página 28532, BOE de 4 de octubre de 1990, expresa que «La metodología didáctica de la educación secundaria obligatoria se adaptará a las características de cada alumno, favorecerá su capacidad para aprender por sí mismo y para trabajar en equipo,...» A continuación se describen estas etapas:

1. Plantear el sistema de las siete ecuaciones lineales y darse cuenta de la necesidad de encontrar soluciones enteras.

La propuesta de este problema debe hacerse para que los alumnos lo trabajen en grupos, siguiendo una metodología de autoaprendizaje guiado, orientándolos por etapas...

2. Expresar las ocho incógnitas en función de un parámetro.
3. Plantear las ecuaciones cuadrática y cúbica.
4. Determinar la condición que deben cumplir los factores primos para ser los menores cuadrado y cubo.
5. Buscar la población de la tierra y el origen del universo para dar una respuesta a la última afirmación del problema.

Solución del problema modificado

Es evidente que las soluciones de este problema sólo pueden ser números naturales y éste debe ser el primer convencimiento de los alumnos. Denotando por A, B, C y D al número de los toros blancos, negros, manchados y oscuros, y por a, b, c y d al de las vacas del mismo color, la primera parte da lugar a un sistema de 7 ecuaciones con 8 incógnitas, del que las tres primeras ecuaciones forma un subsistema con tres incógnitas:

$$A = (1/2+1/3)B + D \Rightarrow A = 5B/6 + D;$$

$$B = (1/4+1/5)C + D \Rightarrow B = 9C/20 + D;$$

$$C = (1/6+1/7)A + D \Rightarrow C = 13A/42 + D;$$

$$a = (1/3+1/4)(B + b) \Rightarrow a = 7(B + b)/12;$$

$$b = (1/4+1/5)(C + c) \Rightarrow \mathrm{b} = 9(C + c)/20;$$

$$c = (1/5+1/6)(D + d) \Rightarrow c = 11(D + d)/30;$$

$$d = (1/6+1/7)(A + a) \Rightarrow d = 13(\mathrm{A} + a)/42.$$

A la vista de las ecuaciones, su forma hace pensar que sería más fácil, primero, expresar la relación que tienen que cumplir las incógnitas y, después, traducir este simbolismo algebraico al correspondiente enunciado verbal, tarea que resulta muy interesante, para ayudar al alumno a expresar sus ideas en uno y otro lenguaje. El primer subsistema, que es compatible e indeterminado, se transforma fácilmente en otro con coeficientes enteros,

$$6A - 5B = 6D;$$

$$20B - 9C = 20C;$$

$$42C - 13A = 42D;$$

cuya solución, fácil de obtener, depende de una de las incógnitas

$$A = 742D/297;$$

$$B = 178D/99;$$

$$C = 1580D/891.$$

Poniendo $D = 891\lambda$, se obtiene que $A = 2226\lambda$, $B = 1602l$ y $C = 1580\lambda$, siendo λ un número natural arbitrario. Sustituyendo en el segundo bloque de ecuaciones, se tiene:

$12a - 7b = 11214\lambda;$

$20b - 9c = 14220\lambda;$

$30c - 11d = 9801\lambda;$

$42d - 13a = 28938\lambda;$

que nos dan lugar a las soluciones:

$a = 7206360\lambda/4657;$

$b = 4893246\lambda/4657;$

$c = 3515820\lambda/4657;$

$d=5439213\lambda/4657.$

Para obtener soluciones enteras se debe poner $\lambda = 4657\delta$, siendo δ un número natural, que habrá que determinar aplicando las condiciones de la segunda parte del problema, pero de momento permite expresar a todas las incógnitas en función de este parámetro:

$A = 10366482\delta,$

$B = 7460514\delta,$

$C = 7358060\delta,$

$D = 4149387\delta,$

$a = 7206360\delta,$

$b = 4893246\delta,$

$c = 3515820\delta,$

$d = 5439213\delta.$

Conviene tener en cuenta que las cuatro primeras igualdades de éstas, que expresan *A*, *B*, *C* y *D* en función de δ tienen a 4657 como factor. Esta reflexión será utilizada después, para hallar las descomposiciones factoriales del número de toros blancos y negros y del de oscuros y manchados.

Segunda parte del problema

> ...los toros blancos unían su multitud a la de los toros negros, formaban un grupo compacto de igual medida en profundidad que en anchura, ...

Esta condición se mantiene y quiere decir que la suma de los toros blancos y negros es el cuadrado de un número natural y, por tanto, δ debe completar los factores primos para que sean cuadrados. La descomposición factorial se ha hecho con *DERIVE.* Con la calculadora es evidente que, para aislar el número primo 4657, hay que ensayar con todos los números primos hasta el 71. Tampoco es mal ejercicio que los alumnos hagan estas exploraciones numéricas. Siendo cuidadosos en la resolución, se debiera saber que este número es un factor de *A*, *B*, *C* y *D*, ya que

λ es un factor de estos números y, además, $\lambda = 4657\delta$.

$A + B = (10366482 + 7460514)\delta = 17826996\delta = 22{\cdot}3{\cdot}11{\cdot}29{\cdot}4657\delta.$

> ...reunidos solamente los oscuros y los manchados, se agrupaban por filas de igual longitud y los toros de una de ellas llenan un cuadrado igual de ancho que la anchura de todas las filas, sin faltar ni sobrar ninguno.

Esta es la condición que se introduce, sustituyendo a la disposición en forma triangular, y quiere decir que la suma de los toros manchados y los oscuros es el cubo de un número natural y, por tanto, δ debe completar los factores primos para que sean cubos. La descomposición factorial se ha hecho con *DERIVE.*

$C + D = (7358060+4149387)\delta = = 11507447\delta = 7{\cdot}353{\cdot}4657d$

Ahora la exploración numérica es más complicada que antes y podría ser un trabajo «de chinos» si no se aprovecha la información obtenida antes y comprobar que este número, 11507447, es múltiplo de 4657. Con ello, fácilmente, se aísla al número primo 353.

La parte más delicada es la discusión de los valores que puede tomar δ para que cumpla las dos condiciones, es decir, para que pueda completar un cuadrado y un cubo: de la primera condición se deduce que $\delta = 2^{2m}{\cdot}(3{\cdot}11{\cdot}29{\cdot}4657)^{2n+1}{\cdot}k^{2l}$, siendo m un entero positivo, y n, k y l enteros no negativos; y de la segunda, para completar un cubo, forzosamente $\delta = (7{\cdot}353{\cdot}4657)^{3p+2}{\cdot}h^{3q}$, siendo p, h y q enteros no negativos. Finalmente se deduce que los valores que δ puede tomar son:

$\delta = (3{\cdot}11{\cdot}29{\cdot}4657)^3{\cdot}(7{\cdot}353{\cdot}4657)^2{\cdot}m^{6n},$

siendo m y n enteros no negativos.

El menor valor de δ es

117222908778911686972120440635119 41

y con él resulta que el número de reses del rebaño del Sol, $(A + B + C + D + a + + b + c + d)\delta$, es:

$(10366482 + 7460514 + 7358060 + 4149387 + 7206360 + 4893246 + + 3515820+5439213){\cdot}11722290877891168697212044063511941 =$

590675476273910086559650859703916403028162 ≈
≈5.90675·1041

Rebaño de las reses del Sol ≈
≈5.90675·1041 *reses*

La población mundial actual es muy inferior a 10.000.000.000 habitantes, pero suponiendo que cada habitante consumiera 10 reses al año, lo que, sin duda, ya es mucho consumir, habría suficiente comida para $5.90675 \cdot 10^{30}$ años.

Para relacionar esta cifra con la aseveración última del problema sobre el final del mundo conviene saber que, en la actualidad, se estima que el *Big Bang* tuvo lugar hace unos 12.000 millones ($1{,}2 \cdot 10^{10}$) de años, con lo que este número de reses el final de la humanidad por escasez de alimentos no se produciría hasta un número de años del orden de 1018 veces el período que ha transcurrido desde el principio de la existencia del mundo hasta nuestros días.

Lógicamente, el matemático que resuelva esta cuestión sólo está haciendo una aplicación simple de su oficio, resolver problemas, pero el alumno que llegue hasta el final sí que puede ser calificado de habilidoso en el manejo de las ecuaciones y de los números, y suponerle en el camino correcto del aprendizaje de las Matemáticas.

Tomás Ortega
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de las Matemáticas
Facultad de Educación.
Universidad de Valladolid.
Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas

Bibliografía

FAUVEL, J. (1990): *Mathematics through history: a resource guide*, QED Books.

FERNÁNDEZ, E. y M. BANZO (1999): «El problema de Arquímedes del rebaño de las reses del Sol», *Suma*, n.° 31, 67-72.

GUELFOND, A. O. (1979): *Resolución de Ecuaciones en Números Enteros. Lecciones populares de matemáticas*, Mir, Moscú.

NCTM (1991): *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*, S.A.E.M. Editado por Thales, Utrera, Sevilla.

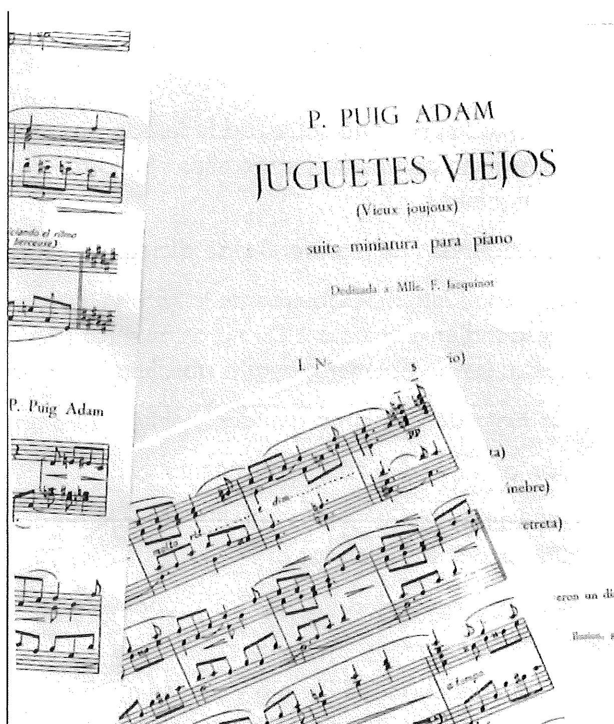
REY PASTOR, J. (1976): *Elementos de Análisis Algebraico*, Biblioteca Matemática, S. L. (Herederos de Julio Rey Pastor), Madrid, 433-441.

ORTEGA, T. (1999): «Educación en la Diversidad. Su evaluación», en T. ORTEGA (ed.): *Temas controvertidos en Educación Matemática*, Universidad de Valladolid, Valladolid.

RICO, L (1997): «Los organizadores del currículo de Matemáticas», en L. RICO (ed.): *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, Horsori-ICE Universitat de Barcelona, Barcelona, 39-60.

SIERRA, M. (1999): «Uso de la Historia de la Matemática en el aula», en T. ORTEGA (ed.): *Temas controvertidos en Educación Matemática*, Universidad de Valladolid, Valladolid.

VERA, F. (1970): *Científicos griegos*, Aguilar, Madrid.



Puig Adam
compositor musical

Convocatoria
II Premio
«Gonzalo Sánchez Vázquez»

La Junta de Gobierno de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas convoca el II Premio «Gonzalo Sánchez Vázquez», en homenaje de quien fue su Presidente de Honor. Se regirá por las siguientes:

BASES

1. Se trata de premiar la labor docente y los «valores humanos»: la entrega desinteresada, el amor, el espíritu tolerante, la buena disposición, etc. hacia sus alumnos, compañeros, amigos y, en general, hacia la enseñanza de la Matemática. Es decir, el magisterio en sentido amplio.
2. La periodicidad del Premio será la misma que la de las Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM).
3. El Premio consistirá en el nombramiento de «Socio de Honor» de la FESPM y placa conmemorativa u objeto alegórico.
4. Podrán concurrir al Premio los profesores dedicados a la enseñanza de las Matemáticas en cualquier nivel educativo.
5. Las candidaturas podrán ser presentadas por una sociedad federada en la FESPM. Los promotores presentarán el currículo e informes que estimen pertinentes, entre ellos el informe de la junta directiva de la sociedad o del conjunto de socios proponentes.
6. El plazo de presentación de candidaturas finalizará el 31 de diciembre de 2000.
7. La concesión del Premio se hará por la Junta de Gobierno de la FESPM. Para ello, el candidato deberá obtener mayoría absoluta en la correspondiente votación. De no alcanzarse mayoría absoluta en primera votación, se procedería a una segunda; de no obtener mayoría absoluta se declarará desierto.
8. Para la concesión del Premio, la Junta de Gobierno atenderá, entre otros, a los siguientes criterios:
   - Su labor docente (dedicación a la enseñanza de la Matemática).
   - Valores humanos (tolerancia, entrega a los demás, talante, espíritu de diálogo, respeto a los compañeros, alumnos, etc.). Constatados por sus avalistas.
   - Currículo con hechos, anécdotas, etc., referidos por los proponentes que pongan de manifiesto estos valores humanos del candidato.
9. SUMA publicará el resultado de la concesión del Premio y una semblanza del premiado.
10. La entrega del Premio se llevará a cabo en el acto de apertura o clausura de las X JAEM que se celebrarán en Zaragoza en septiembre de 2001.

SUMA 34
junio 2000, pp. 27-43

Contenidos matemáticos en la segunda enseñanza española del siglo XX

Alicia Bruno
Antonio Martinón

En este artículo ofrecemos una panorámica de los contenidos de los programas oficiales de matemáticas en la segunda enseñanza española de este siglo, así como las formas en las que un conjunto de libros de texto han presentado a los alumnos ciertos temas que hemos seleccionado: longitud de la circunferencia, área del círculo, área de la superficie esférica, volumen de la esfera, números negativos y noción de límite.

ARTÍCULOS

EN ESTE TRABAJO presentamos un bosquejo de cuáles han sido los contenidos matemáticos en la *segunda enseñanza* española, desde finales del siglo XIX hasta la paulatina implantación de la Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE) aprobada en 1990.

La próxima sección la dedicamos a los contenidos de los programas oficiales, lo cual nos permitirá una primera aproximación a nuestro objeto de estudio. En la sección siguiente sólo nos fijaremos en un grupo de temas seleccionados: longitud de la circunferencia, área del círculo, área de la superficie esférica, volumen de la esfera, números negativos y noción de límite. Veremos las formas en las que un cierto conjunto de libros de texto trata esos temas y ésta será, según se explicará más adelante, la manera que tendremos de conocer cómo esos temas fueron presentados a los alumnos.

Con el término *segunda enseñanza* nos referimos al ciclo educativo que se inicia sobre los 10 años de edad y que se extiende hasta los 16, 17 o 18 años, según los momentos. Durante la mayor parte del siglo XX, estos estudios se iniciaban con la superación de un *examen de ingreso*, se desarrollaban en *institutos*, o centros similares, y su finalización con éxito permitía la obtención del título de *bachiller* y el ingreso en la universidad.

Parece que en los contenidos matemáticos no ha tenido una gran influencia la situación política de cada momento, aunque indiscutiblemente ésta haya sido decisiva en otros aspectos del currículo escolar. Los libros de M. de Puebles (1980) y E. Díaz de Laguardia (1988) relacionan la historia de la educación en España con la de la situación política; un magnífico resumen del primero se encuentra en Puelles (1992). El libro de Lozano (1994) puede servir como referente sobre la educación en muchos países en los siglos XIX y XX

Pese a no ser las matemáticas una asignatura que haya estado, en sus contenidos, fuertemente influenciada por el régimen político, sí que hay aspectos en los que la ideología oficial se ha hecho notar en determinados momentos, especialmente en la época posterior a la Guerra Civil de 1936-1939. He aquí dos enunciados de problemas aritméticos, tomados de libros de texto de entonces (Sopeña, 1994: 49):

> Un hombre bebe cada día un aperitivo que le cuesta 3,75 pesetas. Los domingos toma dos. ¿Cuánto gastará así, inútilmente, al año? Y si economiza esta suma durante treinta años, el capital así reunido, ¿cuánto le produciría prestado al 5 por ciento?
>
> En una caja de ahorros y para su hijito, un trabajador ha resuelto depositar la mitad de las 2 pesetas que en fumar gasta semanalmente. ¿Qué cantidad habrá ahorrado al cabo de 20 años?

La idea de ahorro estaba presente en muchas ocasiones, tal como en este otro ejemplo (Otero, 1996: 85):

> Si cada día del año el niño guardara 10 céntimos, al cabo de los doce meses tendría reunidas 36,50 pesetas. Esta cantidad no es un capital, pero sí puede servir para adquirir libros, para comprar una medicina a la madre enferma, para regalar un abriguito al hermanillo que tirita de frío. Y si no tenemos necesidad de gastar esas pesetas y seguimos juntando a ellas los 10 céntimos de cada día, a los dos años tenemos ya 73 pesetas; a los tres, más de 100; a los diez tendremos ya ¡365 pesetas! Y esto sí que es ya un pequeño capital.

He aquí otra «perla» de la época (Otero, 1996: 69 y 70):

> En casa, entre tus libros, has de apelar a todas las energías de tu voluntad para salir del paso con la lección del día siguiente. Tú también quisieras aprender, quisieras saber cómo se eleva un número al cuadrado y cómo se extrae la raíz cuadrada... pero ¡he ahí!... de repente notas que a la raíz cuadrada le salen ojos, orejas, boca y ¡en un momento ves dibujada en el cuaderno de matemáticas una en cantadora cabecita de muchacha!

En la figura 1 se da una muestra de la presencia de los símbolos del régimen en los libros de texto (Otero, 1996: 153).

Los contenidos oficiales

En los primeros decenios del siglo XIX se fueron configurando sistemas educativos estatales en varios países europeos como resultado de las ideas de la Ilustración (Lozano, 1994). En España, «la difícil implantación del liberalismo político produce un sistema educativo tardío» (Puelles, 1992). Uno de los hechos más relevantes fue la aprobación, en 1857, de la Ley de Instrucción Pública, la conocida como «Ley Moyano». Esta Ley configuró un sistema educativo que producía una dualidad desde los 10 años, ya que a partir de esa edad había dos tipos de alumnos. Por un lado, la mayor parte de los alumnos escolarizados cursaba una educación primaria que no tenía continuación, que no conducía a ninguna parte. Por otro, una minoría comenzaba a los 10 años los estudios de segunda enseñanza, que le podrían conducir al nivel superior (Puelles, 1992). Esta situación se mantiene durante más de un siglo, hasta la Ley General de Educación de 1970.

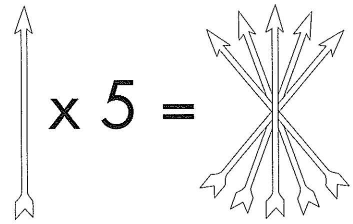


Figura 1. Símbolos del Régimen y aritmética

Uno de los hechos más relevantes fue la aprobación, en 1857, de la Ley de Instrucción Pública, la conocida como «Ley Moyano». Esta Ley configuró un sistema educativo que producía una dualidad desde los 10 años, ya que a partir de esa edad había dos tipos de alumnos.

Para la panorámica que realizamos en este trabajo, agrupamos en tres etapas los años de este siglo hasta la implantación de la LOGSE, aunque, como iremos señalando, sea necesario hacer distinciones dentro de cada una. Las etapas que consideramos son:

- Etapa 1: hasta 1953.
- Etapa 2: desde 1953 hasta 1970.
- Etapa 3: desde 1970.

La principal razón que nos ha llevado a no entrar en la situación actual (LOGSE) es que su nivel de implantación resulta aún insuficiente para hacer un estudio como el que hemos hecho para las etapas anteriores. A ello hay que añadir que la actual configuración del sistema educativo lo diferencia de los anteriores en dos aspectos cruciales:

1. la competencia educativa está transferida a las Comunidades Autónomas, o se está en vías de que así sea; y
2. el currículo es muy abierto, quedando en manos de los profesores, de los departamentos y de los centros la determinación de contenidos y secuencias.

Las disposiciones de carácter legal a las que nos referimos se han tomado, casi siempre de Utande (1964) y, cuando no es así, indicamos la fuente correspondiente.

Etapa 1: hasta 1953

A lo largo de esta etapa se produjeron muchas reformas, de modo que durante ciertos periodos hubo bachilleratos de siete cursos, mientras que en otras etapas sólo duraron seis. El ingreso en la segunda enseñanza se realizaba después de tener cumplidos los 10 años y superar pruebas acerca de la instrucción religiosa, lengua castellana y aritmética («nociones generales y prácticas de las cuatro operaciones fundamentales, con números enteros y fracciones decimales»).

En 1899 se produjo una reorganización de los estudios de segunda enseñanza, estableciéndose un bachillerato de siete años. En la tabla 1 se ofrecen los contenidos de las asignaturas de matemáticas, y se hace con cierto detalle puesto que se mantienen hasta 1934, con más o menos extensión. Se observa que la asignatura de matemáticas figuraba en todos los cursos, salvo en el último, y se puede apreciar la importancia que se le concedía a las prácticas algorítmicas (incluso a la «raíz cúbica») y a la geometría sintética.

El ingreso en la segunda enseñanza se realizaba después de tener cumplidos los 10 años y superar pruebas acerca de la instrucción religiosa, lengua castellana y aritmética…

Poco después de la creación en 1900 del Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes, su titular, Antonio García Alix, planteó una reforma para reducir el periodo del Bachillerato de siete años a seis. Esta reforma afectó a los contenidos de matemáticas de dos maneras destacadas, tal como se refleja en la tabla 2:

1. antes había matemáticas durante 6 cursos, hasta los 16 años de edad, mientras que en el nuevo plan sólo había matemáticas durante los primeros 4 cursos, hasta los 14 años;
2. en el plan derogado coincidían en un mismo curso los contenidos de aritmética y álgebra con los de geometría y trigonometría, mientras que tras la reforma se presentaban las matemáticas de forma menos integrada, de manera que el último contacto de los alumnos con la aritmética y el álgebra se producía en el tercer curso, a los 13 años de edad. Evidentemente, disminuyeron los contenidos matemáticos del plan de estudios.

1.°	Nociones y ejercicios de aritmética.
2.°	Nociones y ejercicios de geometría.
3.°	Aritmética y álgebra.
4.°	Geometría y trigonometría.
5.°	Sin matemáticas.
6.°	Sin matemáticas.

Tabla 2. Reforma de 1900

1.°	*Aritmética práctica.* Las cuatro operaciones fundamentales con números enteros y decimales.
2.°	*Aritmética práctica.* Fracciones ordinarias y decimales, conversión de unas en otras. Sistema métrico. *Geometría.* Líneas rectas. Ángulos. Polígonos. Circunferencia y círculo. Triángulos. Ejercicios variados, sin demostración.
3.°	*Aritmética.* Teoremas fundamentales de las cuatro operaciones (sin demostración). Divisibilidad. Números primos. Máximo común divisor. Mínimo común múltiplo. Elevación a potencias. Cuadrado y raíz cuadrada. Cubo y raíz cúbica (la práctica, sin demostración). *Geometría.* Figuras planas en general. Rectas proporcionales. Semejanza de polígonos. Áreas.
4.°	*Aritmética.* Cantidades proporcionales y proporciones. Regla de tres simple por el método de las proporciones. Aplicaciones. *Álgebra.* Lenguaje algebraico. Las cuatro operaciones con monomios. Fracciones monomias. Ecuaciones de primer grado con una incógnita. *Geometría.* Perpendiculares y oblicuas a un plano. Paralelismo de las rectas y de los planos. Ángulos diedros y triedros.
5.°	*Aritmética.* Interés simple. Descuento. Aligación. Regla conjunta. *Álgebra.* Operaciones fundamentales con polinomios. Sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Geometría. Poliedros. Cuerpos redondos. Áreas y volúmenes.
6.°	*Álgebra.* Repaso de los cursos anteriores. Discusión de las ecuaciones de primer grado con una incógnita. Resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Progresiones, logaritmos y aplicación al interés compuesto. *Trigonometría.* Elementos de trigonometría rectilínea. *Cosmografía.* Cosmografía elemental (sin demostraciones).
7.°	Sin matemáticas.

Tabla 1. Reforma de 1899

En 1901 se realizó una nueva reforma, que a su vez se vio modificada en 1903 (Plan Bugallal), aunque esta última no afectó a las asignaturas de matemáticas. Continuó sin haber matemáticas en 5.° y 6.°, pero aparecieron en un mismo curso contenidos de aritmética y álgebra junto a los de geometría y trigonometría (tabla 3).

1.°	Nociones y ejercicios de aritmética y geometría.
2.°	Aritmética.
3.°	Geometría.
4.°	Álgebra y trigonometría.
5.°	Sin matemáticas.
6.°	Sin matemáticas .

Tabla 3. Reformas de 1901 y 1903 (Plan Bugallal)

El Plan Bugallal duró hasta 1926, cuando fue sustituido por el Bachillerato de Callejo, primero que introdujo la distinción entre Ciencias y Letras (tabla 4). Tenía dos ciclos de tres años: elemental y universitario. El ciclo universitario tenía un año común y dos de «especialidad». Las matemáticas figuraban en tres de los cuatro cursos comunes a todos los alumnos (lo que supuso una disminución en relación con los cuatro del Plan Bugallal) y en los dos de la sección de ciencias. Surgió de nuevo la separación de la aritmética y el álgebra, por un lado, y la geometría y la trigonometría, por otro, salvo en el año común del bachillerato universitario.

Bachillerato elemental	
1.°	Elementos de aritmética.
2.°	Elementos de geometría.
3.°	Sin matemáticas.
Bachillerato universitario	
Año común	Nociones álgebra y trigonometría.
1.° sección ciencias	Aritmética y álgebra.
2.° sección ciencias	Geometría y trigonometría.

Tabla 4. Reforma de 1926 (Plan Callejo)

En 1931, con la II República, se volvió, con adaptaciones, al Plan Bugallal de 1903 y, por tanto, a que no hubiera matemáticas en los dos últimos cursos, aunque sí aparecieron en un mismo año la aritmética y el álgebra junto a la geometría y la trigonometría (véase la tabla 5; obsérvese la gran similitud con la tabla 3).

En 1934 se implantó, de nuevo, un bachillerato de siete años, sin distinción entre ciencias y letras, siendo las mate-

El Plan Bugallal duró hasta 1926, cuando fue sustituido por el Bachillerato de Callejo, primero que introdujo la distinción entre Ciencias y Letras...

1.°	Nociones y ejercicios de aritmética y geometría.
2.°	Aritmética y nociones de geometría.
3.°	Aritmética y geometría.
4.°	Algebra y trigonometría.
5.°	Sin matemáticas.
6°	Sin matemáticas.

Tabla 5. Reforma de 1931 (Plan Bugallal adaptado)

máticas asignatura en todos ellos. Los contenidos, tomados de Rico y Sierra (1992), los sintetizamos en la tabla 6. Tras esta reforma de 1934, los cinco primeros cursos se correspondían, aproximadamente, con los cuatro del Plan Bugallal, pero puede apreciarse una importante innovación en los cursos 6.° y 7.°, apareciendo por primera vez la geometría analítica y los contenidos de análisis, así como los números complejos.

1.°-2.°	Primeras nociones de aritmética y geometría.
3°-4.°	Se inicia la presentación racional de la aritmética y la geometría, sin que se explique de modo abstracto.
5.°	Álgebra y geometría del espacio.
6.°	Número real, límite y continuidad de funciones, logaritmos, progresiones aritméticas y geométricas, matemática comercial, números complejos, trigonometría.
7.°	Continuación del análisis y la geometría analítica.

Tabla 6. Reforma de 1934

En 1938, durante la Guerra Civil, el Gobierno de Franco introdujo una nueva reforma. En el texto legal se indicaba:

> *Matemáticas.* Estudio cíclico desde las primeras nociones de Aritmética y Geometría, hasta la iniciación de la Geometría Analítica y del Álgebra Superior, procurando adiestrar a los alumnos, sobre todo en

los primeros cursos, en el cálculo mental y en los problemas prácticos de carácter métrico de la Aritmética y Geometría.

Los contenidos matemáticos de los siete años figuran en la tabla 7 y se corresponden con la reforma de 1934.

1.°	Aritmética y geometría.
2.°	Aritmética y geometría.
3.°	Aritmética, geometría y elementos de álgebra.
4.°	Ampliación de álgebra y geometría
5.°	Algebra y elementos de trigonometría.
6°.	Álgebra y nociones de geometría analítica.
7°.	Nociones de álgebra superior.

Tabla 7. Reforma de 1938

Etapa 2: 1953-1970

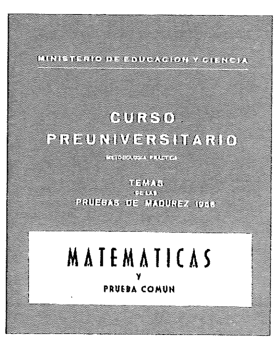
En 1953 se realizó una nueva reforma que conservaba una segunda enseñanza de siete cursos, pero agrupados en tres etapas:

- 10-14 años: Bachillerato Elemental, cuatro cursos.
- 14-16 años: Bachillerato Superior, dos cursos. Especialidades: ciencias y letras.
- 16-17 años: Curso Preuniversitario. Especialidades: ciencias y letras.

El Plan de 1953 sufrió una modificación en 1957. Ya que los contenidos matemáticos de ambos planes eran muy similares, en la tabla 8 sólo indicamos los correspondientes al Plan de 1957.

Llama la atención lo abierto del programa de 5.° curso («desarrollo racional de algún capítulo de aritmética y otro de geometría»), lo que fue aprovechado por algunos profesores y ciertos libros de texto para iniciar la enseñanza de las «matemáticas modernas», con una introducción a la teoría de conjuntos y a las estructuras algebraicas. Por otro lado, figuran por primera vez la combinatoria y la estadística.

El curso preuniversitario (Preu) recibió en los primeros años una programación novedosa. Durante el año escolar se estudiaba con intensidad un solo tema.



1.°	Números naturales, decimales, fracciones. Sistema métrico decimal. Areas. Longitud de la circunferencia y área del círculo.
2.°	Divisibilidad. Proporciones. Raíz cuadrada. Teorema de Pitágoras. Semejanza.
3.°	Números negativos. Ecuaciones de primer grado. Sistemas de ecuaciones. Triángulos. Iniciación a la trigonometría.
4.°	Polinomios. Ecuación de segundo grado. Geometría del espacio. Poliedros, cilindros, conos, esferas, áreas, volúmenes.
5.°C	Iniciación al método racional. Desarrollo racional de algún capítulo de aritmética y otro de geometría. Exponenciales y logaritmos. Progresiones. Vectores. Números complejos. Resolución de triángulos. Estadística. Combinatoria.
6.°C	Número real. Límite de sucesiones. Geometría analítica. Derivadas e integrales.
Preu C	Programa especiales.

Tabla 8. Reformas de 1953 y 1957

El curso preuniversitario (Preu) recibió en los primeros años una programación novedosa. Durante el año escolar se estudiaba con intensidad un solo tema. En los cursos 1957-58 y 1958-59 se trató «Introducción a los métodos estadísticos». En las normas se precisaba que «la Dirección General de Enseñanza Media publicará, además, colecciones de enunciados de problemas, con el fin de orientar la conveniente recapitulación de las distintas partes de las Matemáticas, y para que sirvan de materia del examen oral previsto». A partir del curso 1959-60 las Matemáticas de Preu se convirtieron en asignatura permanente, con un programa que no cambiaba todos los años. Se publicó un cuestionario, cuyo contenido puede resumirse así:

Aritmética y álgebra. Sistemas de numeración. Combinatoria. Divisibilidad. Número racional. Determinantes. Regla de Cramer. Polinomios.

Geometría y trigonometría. Movimientos en el plano. Homotecia y semejanza. Sistemas de circunferencias. Inversión en el plano. Movimientos en el espacio. Áreas y volúmenes. Geometría sobre la esfera. Trigonometría esférica. Introducción a la astronomía.

A este contenido se le debe añadir una parte práctica de la asignatura que incluía un repaso de los cursos anteriores.

En 1963 se produjo una nueva modificación de los contenidos del Curso Preuniversitario, quedando, sintéticamente, de la siguiente manera:

Temario de las clases teóricas. (I) Número natural. Semianillo. Sistemas de numeración. Número entero. Grupo y anillo. Divisibilidad. Número racional. Cuerpo. Sistemas de ecuaciones. Determinantes. Polinomios. Estadística: distribuciones bidimensionales, regresión lineal y correlación. (II) En el plano: movimientos, homotecia, semejanza e inversión. En el espacio: traslaciones, giros y simetrías respecto de rectas, y simetrías respecto de planos. Geometría sobre la superficie esférica. Trigonometría esférica. Introducción a la astronomía.

Temario de clases prácticas (además de los contenidos de las clases teóricas). Función, límite, derivadas, diferenciales, máximos y mínimos. Integración, aplicaciones al cálculo de áreas, longitudes y volúmenes. Trigonometría y números complejos.

Si comparamos los planes de 1953 y 1957 con los anteriores podemos concluir que se consolidan las matemáticas para todos los alumnos hasta los 14 años y que su contenido aumenta de forma significativaen los cursos superiores de la especialidad de ciencias.

Etapa 3: desde 1970

En 1970 se aprobó la Ley General de Educación, que supuso un profundo cambio en la organización de los ciclos educativos, quedando de la siguiente forma (sin Formación Profesional):

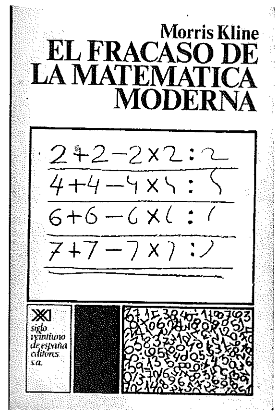
- 2-6 años: Preescolar. No obligatoria.
- 6-14 años: Enseñanza General Básica (EGB), 8 cursos. Obligatoria y gratuita.
  - — 6-10 años: Primera etapa, 4 cursos.
  - — 10-14 años: Segunda etapa, 4 cursos.
- 14-17 años: Bachillerato Unificado y Polivalente (BUP), 3 cursos.
- 17-18 años: Curso de Orientación Universitaria (COU).

Debe observarse que se amplió la duración de la segunda enseñanza en un curso más, retrasando así el ingreso en la universidad, por primera vez, hasta los 18 años de edad.

Sobre la importante transformación que supuso la Ley General de Educación, parece oportuno resaltar ahora tres aspectos.

1. Se acabó con la dualidad de estudios a partir de los 10 años, ya que la Enseñanza General Básica (EGB) era común a todos los alumnos hasta los 14 años, retrasando hasta esa edad la bifurcación del camino educativo.
2. La etapa correspondiente a los 10-14 años constituía antes el bachillerato elemental y se impartía por profesores licenciados, mientras que ahora es la segunda etapa de la EGB.
3. La Formación Profesional se integra plenamente en el sistema educativo.

Las matemáticas estaban presentes en todos los cursos de la EGB y en los dos primeros del BUP. Era asignatura optativa en 3.° de BUP y en COU. Además, en COU había unas matemáticas comunes para todos los alumnos, cuyo contenido consistía en lógica, teoría de conjuntos y estadística En 1987 desapareció esta asignatura común en COU y se introdujeron dos opciones: Matemáticas I, para futuros estudiantes de ciencias, y Matemáticas II, para los que iban a estudiar ciencias sociales.



Los programas sufrieron una altísima influencia de las «matemáticas modernas»: teoría de conjuntos y estructuras algebraicas. En la primera etapa de la EGB los contenidos se referían a lo siguiente: teoría intuitiva de conjuntos; relaciones y aplicaciones; operaciones con números naturales; decimales; fracciones, magnitudes y su medida; geometría elemental del plano con elementos de topología. En la tabla 9 damos un resumen de los contenidos relativos a la segunda enseñanza (Rico y Sierra, 1992).

Al poco tiempo de ponerse en marcha los estudios propios de la Ley General de Educación se extendió la idea de que los contenidos de «matemáticas modernas» en la EGB conducían a un estrepitoso fracaso, motivado, entre otras razones, por la falta de una adecuada preparación científica del profesorado y por los altísimos niveles de abstracción que se alcanzaban. Como consecuencia de ello, en 1977 se inició, con carácter experimental, la implantación de «pro-

5.°-8.° EGB 2.ª etapa (10-14)	Construcción del conjunto de los enteros, operaciones. Construcción del conjunto de los racionales, operaciones. Introducción a las estructuras algebraicas. Estudio de las magnitudes longitud, amplitud, superficie y volumen. Funciones y ecuaciones. Proporcionalidad de magnitudes. Introducción a la estadística.
1.° BUP (14-15)	Combinatoria. Números reales. Polinomios. Funciones polinómicas y su gráfica. Ecuaciones, inecuaciones y sistemas. Progresiones. Estadística. Números complejos.
2.° BUP (15-16)	Geometría vectorial y afín. Sucesiones y límite de sucesiones. Funciones reales de variable real. Límites y continuidad. Funciones circulares, exponenciales y logarítmicas. Derivadas y primitivas.
3.° BUP (16-17) optativa	Producto escalar. Trigonometría. Geometría euclídea del plano. Números complejos. Cálculo diferencial. Cálculo integral. Estadística.
COU C (17-18) optativa	Algebra lineal. Geometría lineal. Análisis. Probabilidad.

Tabla 9. Reforma de 1970

gramas renovados» para la EGB, que se plasmaron de manera oficial en normas de 1981 y 1982. Se llegó a organizar la EGB en tres ciclos:

- 6-8 años: Ciclo inicial. 1.° y 2.° de EGB;
- 8-11 años: Ciclo medio. 3.°, 4.° y 5.° de EGB;
- 11-14 años: Ciclo superior. 6.°, 7.° y 8.° de EGB.

Sin embargo, el ciclo superior nunca llegó a implantarse. Los contenidos no se modificaron de forma importante, pero descendió el peso de las estructuras algebraicas y el enfoque «moderno».

Si nos fijamos en los contenidos de la tabla 9 y los comparamos con los de las reformas de 1953 y 1957 podemos concluir lo siguiente:

1. se afianza la presencia de la probabilidad y la estadística;
2. el análisis mantiene su importante papel;
3. las «matemáticas modernas» aparecen impregnando todos los contenidos, aunque su influencia haya disminuido con los años; y
4. la geometría sufre una espectacular transformación, desapareciendo casi completamente la geometría sintética e introduciéndose los métodos vectoriales; en la EGB la geometría se limita mucho, mientras que en BUP y COU se presta casi exclusiva atención a la geometría lineal, fuertemente vinculada a los espacios vectoriales.

Algunos temas seleccionados

En la sección anterior hemos visto una panorámica de los contenidos matemáticos de los programas oficiales. En la presente sección prestamos atención a la forma en la que algunos de esos contenidos han sido presentados a los alumnos. Concretamente, hemos seleccionado los siguientes temas: *longitud de la circunferencia, área del círculo, área de la superficie esférica, volumen de la esfera, números negativos* y *noción de límite.*

[Los temas elegidos] son buenos indicadores de las formas en las que las matemáticas se han enseñado, reflejando el nivel de abstracción y rigor que se alcanzaba, así como la atribución de significados a ciertos conceptos matemáticos. Además, estos temas se sitúan en diferentes ramas de las matemáticas: geometría, números y análisis.

Como puede observarse, no se trata de temas triviales. Hemos pensado que son buenos indicadores de las formas en las que las matemáticas se han enseñado, reflejando el nivel de abstracción y rigor que se alcanzaba, así como la atribución de significados a ciertos conceptos matemáticos. Además, estos temas se sitúan en diferentes ramas de las matemáticas: geometría, números y análisis.

Como instrumento fundamental para averiguar cómo se presentaban esos temas seleccionados a los alumnos, hemos analizado un conjunto de libros de texto, ya que, como indica Escolano (1992):

> No se puede hoy, en rigor, reconstruir el pasado de nuestra educación sin recurrir al examen de los libros escolares, instrumentos que constituyeron el principal soporte de la enseñanza, tanto en lo que se refiere a las estructuras formales de su organización curricular como en lo que afecta a la misma práctica real de la vida en las escuelas. [...] Los libros escolares constituyeron a buen seguro la principal fuente de inspiración en orden a la planificación y desarrollo del curriculum seguido por nuestras instituciones educativas a lo largo del pasado siglo y de buena parte del presente.

En los últimos años se ha desarrollado un gran interés por los libros de texto. Son objeto de múltiples investigaciones, como el programa francés Emmanuelle (Escolano, 1992) o el español Manes. Tiana (1992) observa que:

> ...los historiadores de la educación han comenzado a dedicar alguna atención a aspectos tales como los textos escolares. El hecho de tratarse de piezas relevantes en el conjunto de la dotación escolar ha invitado a un número creciente de investigadores a acercarse a ellos.

En los últimos años, la Asociación Nacional de Editores de Libros y Material de Enseñanza (ANELE) ha organizado exposiciones sobre libros de texto o que los incluían (*El libro de texto y la escuela*, 1992; *El libro escolar*, 1996).

Los libros de texto que hemos consultados de la primera etapa histórica que consideramos (hasta 1953) no se corresponden exactamente, en la mayoría de los casos, con un determinado curso, sino que tienen un contenido que se usa en distintos cursos, según los planes en vigor. En las dos etapas siguientes, los textos sí indican siempre el nivel educativo para el que están pensados.

Noción de límite

El concepto de límite tiene una formulación difícil, pese a la idea intuitiva que podamos tener. A lo largo del siglo, las definiciones escolares fluctúan entre los dos extremos: el de la definición abstracta y el de la imagen visual.

Estamos interesados principalmente en las primeras definiciones que se presentan a los alumnos sobre la noción de límite, por lo que no nos referimos a las definiciones que se dan en los libros correspondientes al Preuniversitario

(Planes de 1953 y 1957) ni al Curso de Orientación Universitaria (COU), que generalmente ofrecen una formulación abstracta ilustrada con ejemplos.

El texto más antiguo que hemos consultado (Aguayo, 1919, 2.ª edición) no utiliza ni un solo símbolo y se refiere a variables y cantidades:

> Límite de una variable es una cantidad constante a la cual no puede igualar (de un modo permanente) la primera al seguir su ley de variación, pero a la que se acerca indefinidamente, pudiendo llegar a diferir de ella en una cantidad tan pequeña como se quiera.

La anterior definición se funda en la idea de aproximación asociándola a la de pequeñez. El libro de Salinas y Benítez (16.ª edición, 1940; 18.ª edición, 1952) se apoya en la de aproximación:

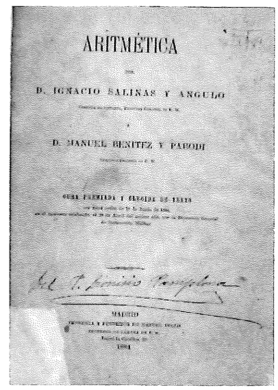
> Cuando una magnitud variable, X, se aproxima indefinidamente a otra fija, A, de tal modo que la diferencia, $A - X$ o $X - A$, pueda ser menor que cualquier magnitud dada, sin reducirse nunca a cero, se dice que A es el límite superior o el inferior de X.

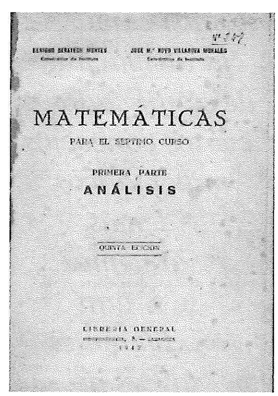
Obsérvese que en las definiciones anteriores quedan excluidas las funciones (variables) constantes.

No hemos encontrado formulaciones modernas de la noción de límite antes del texto de Baratech y Royo (1938, 7.° bachillerato), que lo hace mediante la formulación ε–δ, aunque de una manera deficiente al no quedar claro que δ depende de ε. Reproducimos un párrafo más amplio para ofrecer no sólo la noción de límite, sino también la de función, variable...:

> En el cálculo algebraico representamos los números por letras De una letra que designa un número indeterminado que puede adoptar infinitos valores, decimos que es una *variable*, mientras que a las que representan números determinados se les llama *constantes*.
>
> Cuando una variable, y, depende de otra, x, de manera que, a cada valor particular que tome x corresponde un valor para y, diremos que y, es una función de la variable x. La dependencia entre la variable independiente y la función, se representa simbólicamente, escribiendo
>
> $$y = f(x),$$
>
> expresión en la que la serie de operaciones que es necesario efectuar con la variable independiente para obtener el valor de la función, se indica por una letra f, llamada *característica* de la función.
>
> Dada una función $y = f(x)$, se dice que y tiene límite b, cuando x tiende hacia a, si es posible tomar un número positivo α, tal que para todos los valores x que verifiquen la desigualdad
>
> $$|x - a| < \alpha$$
>
> corresponden valores a y, que cumplen con la condición
>
> $$|y - b| < \varepsilon$$
>
> siendo ε un número positivo, tan pequeño como se quiera.

El siguiente párrafo (Bruño, s.f., 6.° bachillerato) sobre sucesiones convergentes se inscribe en el tipo de definiciones basadas en la pequeñez y posee la particularidad de no usar símbolos:





> Límite de una sucesión es un número fijo tal que la diferencia entre dicho número y cualquiera de los términos que sigan a uno dado pueda hacerse tan pequeña como se quiera en valor absoluto.

Estamos ante una definición moderna, en la que se hace alusión a números, no a cantidades, y se utiliza el valor absoluto para expresar la distancia entre dos números. No obstante, se trata de una definición confusa o errónea, al no establecerse que el término «dado» depende de lo pequeña que se desee hacer la diferencia entre el límite y los términos de la sucesión. Este mismo libro utiliza la convergencia de sucesiones para presentar la noción de límite de una función:

> La función $y = f(x)$ tiene por límite b cuando $x = a$, cuando para todas las sucesiones de valores de x
>
> $$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$$
>
> que tienen por límite a, los correspondientes valores de $f(x)$
>
> $$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots f(x_n)$$
>
> tienen por límite b.

Basándose también en la idea de pequeñez y refiriéndose a sucesiones, define Puig Adam (1964, 6.° bachillerato):

> Se dice que la sucesión indefinida de números reales
>
> $$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$$
>
> o el número real variable α_n tiene por límite el número real fijo α, si la diferencia $\alpha - \alpha_n$ puede llegar a ser, en valor absoluto, tan pequeña como se quiera, desde un cierto valor de n en adelante.

Análogamente, y para sucesiones, Segura (1974, 5.° bachillerato) escribe:

> Se dice que una sucesión indefinida de números tiene por límite L, cuando la diferencia $|L - a_n|$ es menor que un valor positivo arbitrariamente pequeño desde cierto término en adelante.

Utilizando las ideas de aproximación y pequeñez, Ríos y Rodríguez Sanjuán (1962, 6.° bachillerato) dan la siguiente definición:

> El límite de la función $f(x)$, cuando x tiende a a, es el número b, si se verifica que los valores de la función $f(x)$ se aproximan tanto como queramos a b, tomando los valores de la variable x convenientemente próximos a a.

En los años de las «matemáticas modernas» encontramos textos que ofrecen una definición de límite muy general, propia de los espacios topológicos, utilizando para ello los conceptos de entorno y entorno reducido. Por ejemplo, Marcos de Lanuza (1968, 5.° bachillerato):

> Decimos que una función $y = f(x)$ tiene límite l cuando $x = a$, cuando la imagen inversa de un entorno de l es un entorno de a o un entorno reducido de a.

En lugar de usar la imagen inversa de un entorno, como se hace en el texto anterior, Agustí y Vila (1976, 2.° BUP) utilizan la imagen directa, aunque luego se traslada esta definición a una poco precisa formulación ε-δ:

> Diremos que m es el límite de F en a, si para todo entorno B de m se puede encontrar un «entorno reducido» de a:
>
> $$A_0 = A \setminus \{a\}$$
>
> de modo que:
>
> $$B \supset F(A_0).$$
>
> Utilizando la notación del valor absoluto decimos que:
>
> $$lim_a F = m$$
>
> si para todo radio ε de un entorno de m:
>
> $$|F(x) - m| < \varepsilon$$
>
> se puede encontrar un número r, radio de un entorno de a, de modo que
>
> $$0 < |x - a| < r.$$

En el texto de Anzola, Caruncho y Gutiérrez (1977, 2.° BUP) encontramos una definición que hace uso de la idea de entorno, aunque se puede considerar del tipo ε-δ:

> Se dice que la función f tiene por límite el número real L cuando x tiende a a si para todo entorno $E(L, \varepsilon)$ de L de radio ε se puede encontrar un entorno $E_1(a, \delta)$ de a de radio δ tal que si $x \in E_1(a, \delta)$, $x \neq a$, se verifica $f(x) \in E(L, \varepsilon)$.

Rodríguez Vidal (1973, 6.° bachillerato) utiliza varias definiciones, indicando de manera expresa que son equivalentes. Se trata de integrar las diferentes ideas y formulaciones, aunque finalmente convivan sin mucho orden «sabores» muy distintos:

> Se dice que un número es el límite de una sucesión numérica, cuando los términos de la sucesión llegan a ser y a permanecer tan próximos como se quiera a este número.
>
> Sea y una variable función de x. Si la variable independiente x toma una sucesión de valores
>
> $$x_1, x_2, x_3, \dots x_n \qquad [1]$$
>
> la variable función tomará otra sucesión de valores
>
> $$y_1, y_2, y_3, \dots y_n \qquad [2]$$
>
> Pues bien: si para *todas* las sucesiones [1] que tengan por límite un número determinado a, se cumple que las correspondientes sucesiones [2] tienen un mismo límite b, diremos que la función $y = f(x)$ tiene el límite b, para x tendiendo a a.
>
> Diremos que una variable x tiene por límite a, $x \to a$, cuando su ley de variación es tal, que llega a estar y permanecer indefinidamente comprendida entre los valores $a - \varepsilon$ y $a + \varepsilon$ (siendo ε un número positivo arbitrariamente pequeño).
>
> Diremos que $y = f(x)$ tiene por límite b para $x \to a$, cuando fijado un entorno de b tan pequeño como se quiera, sea $[b - \delta, b + \delta]$, se puede encontrar otro entorno de a, sea $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$, de tal modo, que la función $f(x)$ tome un valor comprendido en aquel entorno de b, siempre que la x pertenezca a este entorno de a.

Por su parte, Guzmán, Cólera y Salvador (1988, 2.° BUP) definen límite de la manera siguiente:

> $f(x) \to l$ cuando $x \to p \Leftrightarrow |f(x) - l|$ es más pequeño que un número prefijado ε, para todos los valores de x suficientemente próximos a p.

Posiblemente sea esta la definición que hemos encontrado en la que mejor convivan la precisión, el rigor y las ideas intuitivas.

Después de este recorrido podemos afirmar que durante la primera parte del siglo se utilizan los conceptos de cantidad-magnitud y variable, en lugar de los de número y función. Es decir, la fundamentación de la noción de número sin alusión a cantidades y magnitudes, que se produjo en la segunda mitad del siglo XIX (de la mano de Dedekind y otros muchos), comenzó a tener reflejo en los libros escolares españoles de segunda enseñanza en el segundo tercio del siglo.

La célebre definición ε-δ (debida a Weierstrass) se ha reproducido por algunos autores, aunque con frecuencia de manera incorrecta o poco precisa. La mayoría ha preferido «suavizar» la definición con las más intuitivas ideas de aproximación y pequeñez, aunque otros han optado por usar una definición más general, la propia de los espacios topológicos.

...durante la primera parte del siglo se utilizan los conceptos de cantidad-magnitud y variable, en lugar de los de número y función.

La célebre definición ε-δ (debida a Weierstrass) se ha reproducido por algunos autores, aunque con frecuencia de manera incorrecta o poco precisa. La mayoría ha preferido «suavizar» la definición con las más intuitivas ideas de aproximación y pequeñez...

Números negativos

Los números negativos se presentan siempre después de haber estudiado los números naturales y los racionales no negativos. Normalmente, en un primer curso se introducen los enteros negativos y, en un curso posterior, se realiza la ampliación a los racionales.

En los libros de texto correspondientes a los distintos planes encontramos tres formas de introducir los números negativos, que llamaremos *adjunción*, *definición* y *generalización*, y que a continuación explicamos.

El método que llamamos *adjunción* consiste en añadir a los números positivos sus opuestos, los cuales se introducen mediante la correspondiente notación. Es decir, para cada número positivo x se considera su opuesto que se denota por $-x$. Los textos que hemos consultado correspondientes a los planes de estudio anteriores a 1953 utilizan la forma *adjunción*, forma que también usan algunos libros de la etapa 1953-1970. Por ejemplo, Crusat (1942), Juan (1949) y Ruiz (1950, 3.° Bachillerato). En este último se dice:

> Número entero positivo es el número natural. Número entero negativo es el numero natural precedido del signo –. Los números enteros componen la sucesión:
>
> $$\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

En Crusat (1942) encontramos:

> Los números contenidos en la serie natural, ampliada con la introducción del cero y de los números negativos se llaman números enteros.

La forma de introducir los negativos que hemos denominado por *definición* consiste, básicamente, en decir que los números enteros son los números naturales con signo, de manera que $\mathbb{Z}$ viene dado por

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}.$$

Lo que diferencia esta forma del anterior método de adjunción es que los números enteros positivos ahora tienen un signo, lo que no ocurría con los números naturales. Lo que lleva a contemplar a los naturales y los enteros positivos como si tuvieran una «naturaleza» diferente. En Anta y otros (1986, 7.° EGB) se insiste de forma explícita en este hecho:

> No olvides que los números enteros se representan con un signo delante (+ o –) excepto el cero.

La introducción de los negativos mediante el método de *definición* se puede encontrar en Bruño (1954, 3.° Bachillerato), Achón y otros (1985, 7.° EGB) y Gil y otros (1984, 7.° EGB).

La tercera forma de introducir los negativos, que hemos denominado *generalización*, es la que tiene más sabor de «matemáticas modernas». El primer paso consiste en considerar, en el conjunto de los pares de números naturales $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, la relación de equivalencia $\cong$ definida por

$$(a, b) \cong (c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c.$$

Entonces, el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ se define como el cociente $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \ / \cong$ es decir, un número entero es una clase de equivalencia y en cada una de ellas se elige un representante canónico, precisamente el único par que tiene 0 en alguna de sus dos componentes. El paso siguiente suele ser el establecimiento de otra forma de expresar los números enteros, tala como hace, por ejemplo, el texto de González y Cappa (1977, 7.° EGB):

En cuanto al tratamiento didáctico que reciben los números negativos y sus operaciones se observan cambios a lo largo del siglo.

> Los números enteros cuyo representante canónico tiene el 0 en segundo lugar, se expresan con signo +. Ejemplo, (1,0) se representa por +1. Los números enteros cuyo representante canónico tiene el 0 en primer lugar, se expresan con signo –. Ejemplo, (0,1) se representa por –1.

Una vez presentadas las operaciones de adición y multiplicación junto con sus propiedades, se hace hincapié en que el conjunto de los números enteros tiene estructura de anillo no conmutativo respecto de estas dos operaciones.

La forma *generalización* de introducir los números negativos aparece en algunos textos de los últimos años en los que estuvo vigente el plan de 1953 (Marcos de Lanuza, 1965, 3.° Bachillerato), pero es típica de los primeros años del plan de 1970 (González y Cappa, 1977; Rico y otros, 1983), en el marco de las «matemáticas modernas».

Los métodos generalización y definición tienen en común la creación de «nuevos números positivos» que son distintos de los números positivos de los que se partía. Es por ello, que en el caso de los números enteros se hace necesario establecer un *isomorfismo* entre los enteros no negativos y los naturales (González y Cappa, 1977, 7.° EGB), o bien, es necesario *identificar* ambos conjuntos (Gil y otros, 1984, 7.° EGB; Anta y otros, 1986, 7.° EGB).

En cuanto al tratamiento didáctico que reciben los números negativos y sus operaciones se observan cambios a lo largo del siglo.

En la primera etapa, hasta 1953, el esfuerzo se centra en el cálculo algorítmico, con escasas aplicaciones y alusiones a situaciones concretas. Suele motivarse la necesidad, o al menos la conveniencia, de introducir los números negativos aludiendo a su uso en situaciones concretas en las que están presentes magnitudes con doble sentido, siendo esta la única referencia a situaciones reales que se suele hacer. A partir de ahí, el enfoque de los números negativos es totalmente abstracto, poniendo énfasis en las operaciones y las propiedades de las mismas, de manera que las actividades que se proponen a los alumnos son casi exclusivamente de práctica algorítmica. En algunos casos las reglas se redactan de manera engorrosa y fundadas en la compensación o «aniquilamiento» de cantidades con signo opuesto. Por ejemplo, en Salinas y Benítez (1939, 11.ª ed.) se presenta la siguiente explicación de la regla para sumar números positivos y negativos:

> Es indudable que de la reunión o agregación de dos cantidades de igual signo resulta otra tercera afectada del mismo signo, y cuyo valor numérico es la suma de los valores numéricos de ambas; mientras que, según hemos visto, el efecto de dicha agregación, cuando las dos cantidades consideradas tienen diverso modo de existencia, consiste en la destrucción de una parte de la mayor, igual en valor absoluto a la menor, o bien en su diferencia afectada del signo mayor.

En Crusat (1942) se expresa la misma idea:

> Si se trata de sumar un número positivo con uno negativo o viceversa, en la suma deben reunirse las unidades de los dos sumandos, pero, siendo las del sumando negativo opuestas a las del positivo, cada una de las del primero neutraliza una unidad del segundo, lo que da por resultado un conjunto de unidades igual al exceso de uno de los números sobre el otro.

Los cambios en el plan de 1953 son pequeños, pero se aprecia un mayor esfuerzo didáctico en el tratamiento de los números negativos, lo que se nota en redacciones más simples y claras de las reglas operatorias y, sobre todo, en las aplicaciones de estos números a situaciones reales, no sólo cuando se introducen, sino también al justificar las reglas operatorias. A pesar de ello, la mayoría de las actividades que se le proponen a los alumnos se suelen centrar en la práctica operatoria.

Desde luego, el cambio más espectacular se produjo en los primeros años del plan de 1970, cuando se impuso la construcción del conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ en el marco de las «matemáticas modernas», de forma que ese conjunto se convertía en un ejemplo de anillo, realmente casi el único. Este tratamiento de los números negativos produjo una ausencia de situaciones reales cuando se presentan las operaciones.

Los cambios en el plan de 1953 son pequeños, pero se aprecia un mayor esfuerzo didáctico en el tratamiento de los números negativos, lo que se nota en redacciones más simples y claras de las reglas operatorias y, sobre todo, en las aplicaciones de estos números a situaciones reales...

A medida que se superaba el enfoque estructuralista, durante el plan de 1970, ganaba terreno una mayor conexión de los números negativos con situaciones reales, de forma que el establecimiento de las reglas operatorias se ha hecho a través de cálculos en situaciones sencillas, además de disminuir el uso de las expresiones algebraicas y aumentar los ejemplos numéricos.

Longitud de la circunferencia

A lo largo del siglo, se encuentran libros de texto de los primeros cursos de la segunda enseñanza que *deducen* la fórmula de la longitud L de una circunferencia de radio r,

$$L = 2\pi r,$$

mientras que otros optan por simular un experimento.

En el método *experimental* se dice algo similar a lo siguiente: si se coloca un hilo pegado a la circunferencia, se extiende y se mide su longitud L y luego se mide la longitud de su diámetro $d = 2r$, entonces se obtiene aproximadamente

$$L/d = 3{,}1416;$$

si se repite esta operación con cualquier otra circunferencia, se obtiene siempre el mismo resultado. Ese cociente constante es un número que se llama π (*pi*):

$$L/d = \pi;$$

consecuentemente, resulta que

$$L = 2\pi r.$$

De esta manera proceden los textos de Cenzano (s.f., 1.° bachillerato), Taboas (1935), Bruño (1958, 1.° bachillerato), Marcos y Martínez (1966, 1.° bachillerato; 1966, 2.°

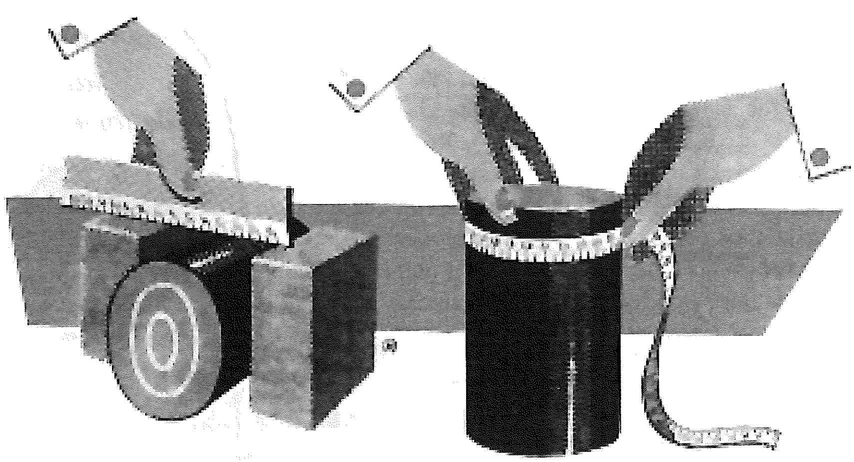


Figura 2. Formas de medir el diámetro y la longitud de la circunferencia

bachillerato), Marcos de Lanuza (1968, 1.° bachillerato), Santillana (1972, 6.° EGB), Aizpún (1974, 6.° EGB), Santillana (1982, 5.° EGB), Santillana (1983, 6.° EGB) y Santillana (1983, 7.° EGB).

En los planes de 1953 y 1957, el método de la experimentación es el que se usa en el primer curso, cuando por primera vez se estudia la longitud de la circunferencia, aunque ya en el curso siguiente se deduce la fórmula. Sin embargo, en la etapa de la Ley General de Educación, a partir de 1970, la forma experimental es la única que aparece en los libros de texto.

La manera de *deducir* la longitud L de la circunferencia es considerarla como límite del perímetro P de un polígono regular inscrito en la circunferencia, cuando el número de lados crece indefinidamente (tiende a infinito) o, equivalentemente, la longitud del lado tiende a cero. Sean L y L' las longitudes de las circunferencias de radios r y r' respectivamente, y P y P' los perímetros de polígonos regulares, del mismo número de lados, inscritos en las respectivas circunferencias. Resulta entonces

$$P/P' = r/r'$$

Como r/r' es constante, al aumentar el número de lados la igualdad anterior sigue siendo válida y en el límite se obtiene

$$L/L' = r/r'$$

es decir, las longitudes de las circunferencias son proporcionales a sus radios. De este resultado se obtiene que L/r es constante y a la mitad de ese número se le llama π (*pi*). Luego

$$L = 2\pi r.$$

El método *deductivo* es el que se utiliza en los libros de Vallín (1896), Aguayo (1923), Xiberta (1926), Llardent (1931), Rodríguez Vidal (1958, 2.° bachillerato), García Roca (1960, 2.° bachillerato) y Bruño (1960, 2.° bachillerato).

En los planes de 1953 y 1957 este es el método de 2.° de bachillerato. No lo hemos encontrado en los libros de texto de EGB que hemos consultado.

Los textos a los que nos hemos referido se centran en el cálculo de la longitud de la circunferencia y suponen conocida ya esa idea. Sin embargo, Rey Pastor y Puig Adam (1935, 2.° bachillerato) estiman que se debe dar una definición de esa longitud, que justifican en que los perímetros de los polígonos inscritos se aproximan a la longitud de la circunferencia aumentando el número de lados, de forma que el cociente L/d es constante:

> Este hecho que la intuición nos dicta se expresa en Geometría dando la siguiente definición abstracta (aplicable también a otras líneas):
>
> *Definición.* Longitud de la circunferencia es el límite del perímetro de un polígono inscrito cuyos lados tienden a cero.
>
> La palabra límite se emplea precisamente para indicar que el error puede llegar a ser tan pequeño como se quiera.

Rey Pastor y Puig Adam (1935, 2.° bachillerato) estiman que se debe dar una definición de esa longitud, que justifican en que los perímetros de los polígonos inscritos se aproximan a la longitud de la circunferencia aumentando el número de lados, de forma que el cociente L/d es constante…

Varios autores posteriores imitan esta forma de proceder. Por ejemplo, García Roca (1960, 2.° bachillerato):

> Este hecho, que la intuición nos dicta, podemos expresarlo dando la siguiente definición abstracta: longitud de la circunferencia es el límite del perímetro de un polígono inscrito cuando la longitud de sus lados tiende a cero.

También Bruño (1954, 3.° bachillerato) da una definición, pero ahora para precisar la noción de circunferencia:

> Vamos a establecer otra definición... Diremos que: la circunferencia es el límite común de los polígonos regulares, inscritos y circunscritos, cuando el número de sus lados aumenta hasta el infinito.

Aunque el autor no lo señala explícitamente, cabe deducir que la «longitud del límite es el límite de las longitudes». Haciendo cálculos concluye que «la medida de la circunferencia es 3,14159… cuando se toma el diámetro por unidad».

Área del círculo

Hasta la reforma de 1970. el tema del área del círculo se estudia en los dos primeros cursos del bachillerato, mientras que en la EGB lo habitual es encontrarlo en 7.° curso.

Entre los autores consultados hay uno (Aizpún, 1974, 6.° EGB) que, sin ningún tipo de explicación, afirma que el área A del círculo de radio r viene dada por la fórmula

$$A = \pi r^2.$$

Sin embargo, casi todos los libros analizados proceden a deducir la fórmula: Vallín (1896), Aguayo (1923), Xiberta (1926), Cenzano (s.f., 1.° bachillerato), Taboas (1935), Llardent (1931), Rodríguez Vidal (1958, 2.° bachillerato), Bruño (1958, 1.° bachillerato; 1960, 2.° bachillerato), Marcos y Martínez (1966, 2.° bachillerato), Marcos de Lanuza (1968, 1.° bachillerato), Santillana (1983, 7.° EGB), Mansilla y Bujanda (1988, 7.° EGB). Consideran el área A del círculo como límite del área de un polígono regular inscrito en la circunferencia, cuando el número de lados crece indefinidamente. Un resultado previo fundamental es el siguiente:

área del polígono = la mitad del perímetro por la apotema

Entonces, en el límite se obtiene

área del círculo =
= la mitad de la longitud de la circunferencia por el radio.

Es decir,

$$A = (1/2)\ 2\pi r r = \pi r^2.$$

Un razonamiento deductivo diferente se encuentra en García Roca (1960, 2.° bachillerato): se divide el círculo en sectores circulares, lo suficientemente pequeños para que parezcan triángulos, de esta forma se obtiene una figura que es «casi» un rectángulo de base la longitud de la semicircunferencia y de altura el radio. Es frecuente que este razonamiento se ilustre con un dibujo como el de la figura 3.

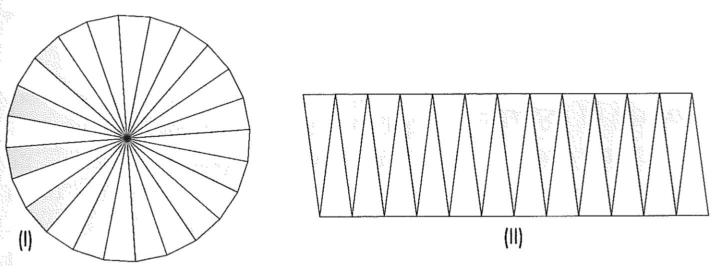


Figura 3. (I) El círculo se descompone en pequeños «triángulos» cuyas áreas suman la del círculo. (II) Los pequeños triángulos se colocan formando un rectángulo

De igual modo que hacían con la longitud de la circunferencia, Rey Pastor y Puig Adam (1935) definen lo que se entiende por área del círculo, ofreciendo una justificación de tal definición, basada en un razonamiento como el anterior de García Roca. Con palabras de los autores:

> Parece pues natural definir el área del círculo como la de un paralelogramo de altura igual al radio r y de base igual a la semicircunferencia (πr).

De ahí se obtiene inmediatamente la fórmula.

Área de la superficie esférica

Para justificar que el área A de la superficie esférica de radio r viene dada por la fórmula

$$S = 4\ \pi r^2$$

los autores de los libros de texto consultados utilizan de nuevo un método *deductivo* o uno *experimental.* Sin embargo, en los textos de los primeros cursos es muy frecuente encontrar la expresión anterior para S sin ninguna clase de justificación: Cenzano (s.f., 1.° bachillerato), Rodríguez Vidal (1958, 2.° bachillerato), Bruño (1960, 2.° bachillerato), García Roca (1960, 2.° bachillerato), Santillana (1983, 7.° EGB).

Cuando se opta por deducir la fórmula, el primer paso que se da es probar que el área S de la superficie engendrada por un segmento que gira alrededor de una recta coplanaria y que no lo corta viene dada por

$$S = 2\pi a h,$$

siendo a la longitud del segmento de mediatriz entre el segmento y la recta, y h la longitud de la proyección del segmento sobre la recta (figura 4).

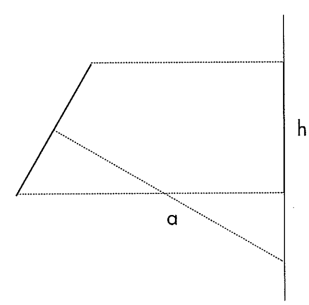


Figura 4. Segmento que gira alrededor de una recta coplanaria

Por ejemplo, Bruño (1960, 4.° bachillerato) enuncia y demuestra el siguiente teorema:

> Si un segmento gira alrededor de un eje del mismo plano y no lo corta ni le es perpendicular, el área de la superficie engendrada por el segmento es igual al producto de su proyección sobre el eje por la longitud de la circunferencia, cuyo radio es la porción de mediatriz del segmento comprendido entre éste y el eje.

Cabe observar el pequeño error que se comete al decir que el eje es «del mismo plano» que el segmento, en lugar de decir que el segmento y el eje son «coplanarios». En la demostración se distinguen varios casos y usa los ya conocidos resultados sobre el área lateral del cilindro, del cono y del tronco de cono.

En segundo lugar se establece que el área S de la superficie engendrada por un polígono regular de radio r y de un número par de lados que gira alrededor de uno de sus diámetros es el producto del diámetro $h = 2r$ por la longitud de la circunferencia cuyo radio es la apotema a del polígono

$$S = 2\pi a 2r = 4\pi ar.$$

En tercer y último lugar, se pasa al límite y resulta que el área de la superficie esférica, que se obtiene al girar una semicircunferencia, es el producto de la proyección $h = 2r$ por la longitud $2\pi r$, luego

$$S = 2\pi r 2r = 4\pi r^2.$$

Este modo de proceder, deduciendo la fórmula, lo usan los siguientes autores: Vallín (1896), Aguayo (1923), Xiberta (1926), Llardent (1931), Bruño (1960, 4.° bachillerato). Algunos autores del plan 1957 lo usan en 4.° de bachillerato. No se usa en la EGB.

Varios autores utilizan un método *experimental*: se enrolla una cuerda delgada alrededor de una semiesfera, hasta cubrirla, y después el cordón se enrolla sobre dos círculos cuyos radios son los de la esfera; se ve que ambos círculos quedan recubiertos (figura 5). Por tanto, (1/2) $S = 2\pi r^2$; luego

$$S = 4\pi r^2$$

Así han hecho Taboas (1935), Marcos y Martínez (1966, 2.° bachillerato) y Mansilla y Bujanda (1988, 7.° EGB).

De nuevo ahora son Rey Pastor y Puig Adam (1935) los únicos que dan una definición del área de la superficie esférica:

> ...definimos diciendo: el área de la superficie esférica es la de la superficie lateral de un cilindro que tiene el mismo radio y como altura el diámetro de la esfera.

De ahí se obtiene la fórmula.

Varios autores utilizan un método experimental: se enrolla una cuerda delgada alrededor de una semiesfera, hasta cubrirla, y después el cordón se enrolla sobre dos círculos cuyos radios son los de la esfera; se ve que ambos círculos quedan recubiertos...

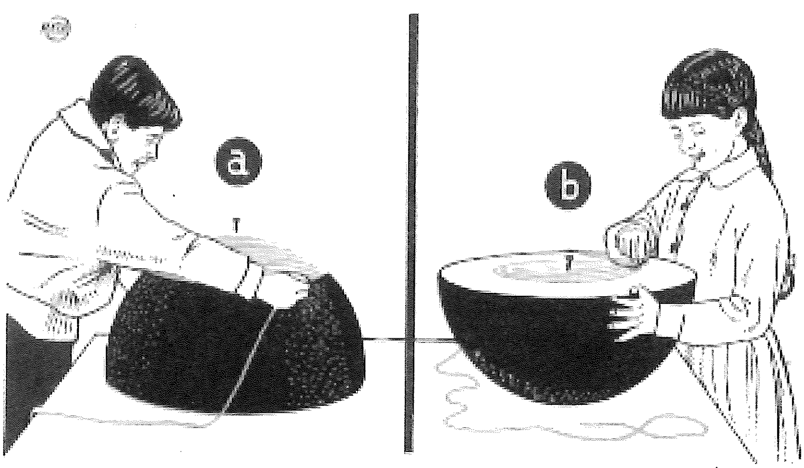


Figura 5. Experimento para ver que el área de la superficie esférica (a) es el cuádruple de la del círculo

Volumen de la esfera

Algunos textos dan la fórmula del volumen de la esfera sin ninguna justificación: Cenzano (s.f., 1.° bachillerato), García Roca (1960, 2.° bachillerato), Rodríguez Vidal (1958, 2.° bachillerato), Bruño (1960, 2.° bachillerato), Aizpún (1974, 7.° EGB).

Los autores que *deducen*, comienzan por enunciar y demostrar que el volumen engendrado por un triángulo ABC que gira alrededor de un eje EB situado en su plano y pasando por uno de sus vértices B es igual a un tercio del producto del área que engendra el lado AC por la altura h relativa a este lado. Como enuncia Bruño (1960, 4.° bachillerato):

> El volumen engendrado por un triángulo que gira alrededor de un eje situado en su plano pasando por un vértice sin cortarle, es igual al tercio del producto del área engendrada por el lado opuesto al vértice fijo, por la altura relativa a este vértice.

De aquí se obtiene, en segundo lugar, que el volumen que engendra un polígono regular al girar alrededor de un diámetro es un tercio del área de la superficie que engendra por el radio. Finalmente resulta el volumen de la esfera como paso al límite:

$$V = (1/3)\ Sr = (1/3)\ 4\ \pi r^2 r = (4/3)\ \pi r^3.$$

Otra forma deductiva consiste en el siguiente razonamiento: se descompone la esfera en pirámides de vértice el centro. La esfera puede considerarse entonces como una pirámide degenerada, cuya «base» es la superficie esférica. Como el volumen de la pirámide viene dada por

volumen de la pirámide = un tercio del área de la base por la longitud de la altura,

se obtiene para la esfera

$$V = (1/3)\ Sr = (1/3)\ 4\ \pi r^2 r = (4/3)\ \pi r^3.$$

El método deductivo lo usan: Vallín (1896), Aguayo (1923), Xiberta (1926), Llardent (1931) y Bruño (1960, 4.° bachillerato). Se suele usar en 4.° del bachillerato del plan de 1957 y no aparece en la EGB.

El dibujo de la figura 6, tomado de Marcos y Martínez (1966, 2.° bachillerato), ilustra un experimento justificativo de que el volumen de la esfera de radio *r* es igual a los 2/3 del volumen de un cilindro circunscrito (que tiene de radio de la base *r* y de altura 2*r*).

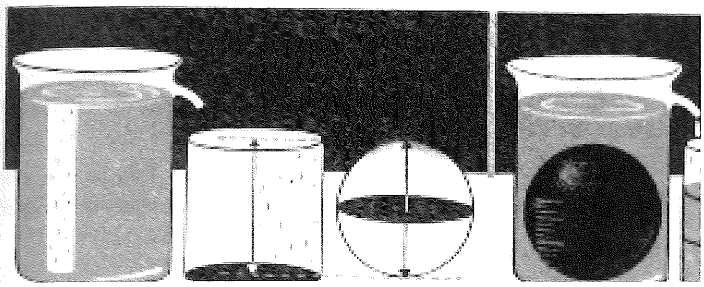


Figura 6. Experimento para ver que el volumen de la esfera es 2/3 del volumen del cilindro circunscrito

Equivalentemente, el volumen de tres semiesferas de radio r es lo mismo que el volumen del cilindro circunscrito a la correspondiente esfera.

Otra forma experimental es comprobar, mediante trasvase, que el volumen de la semiesfera de radio *r* coincide con la suma de los dos volúmenes de dos conos iguales de radio de la base *r* y de altura *r*.

El método *experimental* lo utilizan Taboas (1935), Marcos y Martínez (1966, 2.° bachillerato), Santillana (1983, 7.° EGB) y Mansilla y Bujanda (1988, 7.° EGB).

De nuevo citamos a Rey Pastor y Puig Adam (1935) como los únicos autores que dan una *definición*. Consideran que la esfera puede descomponerse en cuerpos que parecen pirámides de vértice el centro de la esfera. Entonces:

> En virtud de estas consideraciones intuitivas, parece, pues, natural adoptar, a modo de definición, la siguiente regla: el volumen de la esfera es un tercio del producto del área de su superficie por la medida del radio.

Conclusiones

A lo largo del siglo, ha variado mucho el peso de las matemáticas en los planes de estudio (ver tabla 10). Ciertas reformas han limitado el estudio de las matemáticas hasta los catorce años, mientras que otras las han situado en todos los cursos. Sin embargo, en el último medio siglo se ha consolidado la idea de unas matemáticas para todos, antes hasta los catorce años y ahora hasta los dieciséis, y otras matemáticas de especialidad, según las orientaciones de los alumnos. Especialmente esto es así, ahora, con la LOGSE.

Los contenidos matemáticos se han visto sometidos a importantes cambios. En el primer tercio de siglo se centraban en aritmética y geometría, con algunas nociones de álgebra y trigonometría. Como revela lo que ya hemos dicho sobre los números negativos, se trataba de una enseñanza en la que los algoritmos ocupaban un lugar muy destacado, situación que con el tiempo se amortigua, pero que, de una u otra forma, llega hasta nuestros días.

En el Plan de 1934 aparece la innovación de la iniciación del análisis. A partir de entonces, cada reforma ha supuesto una ocasión para aumentar el peso, en los programas oficiales, del estudio de las funciones y del cálculo infinitesimal.

Edad	*1899*	*1900 1901 1903*	*1926*	*1931*	*1934 1938*	*1953 1957*	*1970*
10-11	sí	sí	sí	sí	sí	sí	sí
11-12	sí	sí	sí	sí	sí	sí	sí
12- 13	sí	sí	no	sí	sí	sí	sí
13-14	sí	sí	sí	sí	sí	sí	sí
14-15	sí	no	sí (c)	No	sí	sí (c)	sí
15-16	sí	no	sí (c)	No	sí	sí (c)	sí
16-17	no	—	—	—	sí	sí (c)	sí (*)
17-18	—	—	—	—	—	—	sí (*) si (t)

sí/no: sí/no había matemáticas

si (*): sí, optativa

si (c): si, en la especialidad de ciencias;

sí (t) sí, algunos años

—: no existía ese nivel

Tabla 10. Presencia de las matemáticas en los planes

Veinte años más tarde, en el Plan de 1953, en los programas correspondientes al bachillerato de ciencias, ya figura el estudio de los vectores, de la geometría analítica, de la combinatoria y de la estadística, a lo que hay que añadir, como queda dicho, el cálculo diferencial e integral.

Con la reforma de 1970 aparecen las «matemáticas modernas», cuyo peso disminuye poco después, aunque posiblemente lo más significativo, por haber resultado duradero, fue la brusca disminución de la geometría sintética y, en los cursos superiores, la sistemática utilización de los vectores en la geometría analítica.

Contrasta, durante los años de mayor fuerza de la reforma de 1970, el alto nivel de rigor y abstracción que se alcanza en la construcción del conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ con la ausencia casi general de argumentaciones para justificar las fórmulas de la longitud de la circunferencia, área del círculo y área de la superficie y volumen de la esfera.

Con el avance del siglo la idea de número se ha ido convirtiendo en el pilar de las matemáticas escolares y ha venido a sustituir a las nociones de cantidad y magnitud. Aunque de modo no concluyente, puede decirse que ha retrocedido la importancia de los algoritmos numéricos al tiempo que han ganado espacio las aplicaciones. Por otro lado, la deducción de las fórmulas que dan la medida de los cuerpos geométricos menos simples prácticamente ha desaparecido.

Con el avance del siglo la idea de número se ha ido convirtiendo en el pilar de las matemáticas escolares y ha venido a sustituir a las nociones de cantidad y magnitud. Aunque de modo no concluyente, puede decirse que ha retrocedido la importancia de los algoritmos numéricos al tiempo que han ganado espacio as aplicaciones. Por otro lado, la deducción de las fórmulas que dan la medida de los cuerpos geométricos menos simples prácticamente ha desaparecido.

Bibliografía

General

DÍAZ DE LAGUARDIA, E. (1988): *Evolución y desarrollo de la enseñanza media en España de 1875 a 1930. Un conflicto político-pedagógico*, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid.

El libro escolar (1996): Exposición con motivo del 5.° Congreso sobre «El libro de texto y materiales didácticos», ANELE, Madrid.

El libro y la escuela. Libro conmemorativo de la exposición (1992): ANELE, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid.

ESCOLANO, A. (1992): «El libro escolar y la memoria histórica de la educación», *El Libro y la Escuela*, 77-90.

LOZANO, C. (1994): *La educación en los siglos XIX y XX*, Editorial Síntesis, Madrid.

OTERO, L. (1996): *Al paso alegre de la paz*, Plaza & Janés, Barcelona.

PUELLES BENÍTEZ, M. de (1980): *Educación e ideología en la España contemporánea*, Labor, Barcelona.

PUELLES BENÍTEZ, M. de (1992): «De las Cortes de Cádiz a la LOGSE (1812 1990)», *El libro y la escuela*, 27-40.

RICO, L. y M. SIERRA, M. (1992): «Educación matemática en la España del siglo XX», en: J. KILPATRICK, L. RICO y M. SIERRA (eds.): *Educación matemática e investigación*, Síntesis, Madrid.

SOPEÑA MONSALVE, A. (1994): *El florido pensil*, Crítica, Barcelona.

TIANA FERRER, A. (1992): «El espacio escolar: La escuela y el aula», *El Libro y la Escuela*, 41-58.

UTANDE IGUALADA, M. (1964): *Planes de estudio de enseñanza media*, Dirección General de Enseñanza Media. Ministerio de Educación Nacional, Madrid.

Textos anteriores a 1953

AGUAYO, M. (1918): *Nociones y ejercicios de aritmética y geometría*, Librería Hernando, Madrid.

AGUAYO, M. (1919): *Tratado elemental de aritmética*, 2.ª edición, Librería Hernando, Madrid.

AGUAYO, M. (1923): *Elementos de geometría*, 2.ª edición, Librería Hernando, Madrid.

AGUAYO, M. (1927): *Apéndices de geometría y trigonometría*, Librería Hernando, Madrid.

BARATECH, B. y J. M. ROYO VILLANOVA (1938): *Matemáticas. Séptimo curso del bachillerato. Primera parte. Análisis*, Librería General, Zaragoza.

CENZANO, J. (sin fecha): *Matemáticas. Primer curso*, Madrid.

CORREA, F. (1905): *Elementos de aritmética*, Mariano Escar, Tipógrafo, Zaragoza.

CRUSAT, L. (1942): *Compendio de Aritmética y Algebra*, 4.ª edición. Bosch Casa Editorial, Barcelona.

JUAN, E. (1949): *Teoría elemental de los números reales*, Santa Cruz de Tenerife.

LLARDENT ESMET, A. (1931): *Curso de Geometría*. 5.ª edición, Imprenta de Julio Cosano, Madrid.

REY PASTOR, J. y P. PUIG ADAM, (1934): *Matemáticas. Tercer Curso. Tomo II:*

Lecciones de geometría (método racional), Unión Poligráfica, S. A., Madrid.

REY PASTOR, J. PUIG ADAM (1935): *Matemáticas. Segundo Curso (método intuitivo)*, Unión Poligráfica, S. A., Madrid.

REY PASTOR, J. y P. PUIG ADAM (1935): *Matemáticas. Tercer Curso. Tomo I: Aritmética*, Unión Poligráfica, S. A., Madrid.

RUIZ, F. (1950): *Matemáticas. Tercer curso*, Alma Mater, Barcelona.

SALINAS, I. y M. BENÍTEZ (1939): *Álgebra*, 11.ª edición, Victoriano Suárez, editor. Madrid.

SALINAS, I.; BENÍTEZ, M. (1940): *Aritmética*, 16.ª edición (18.ª edición, 1952), Librería Hernando, Madrid.

SÁNCHEZ VIDAL, B. (1902): *Lecciones de aritmética*, 7.ª edición, Librería Hernando, Madrid.

S. M. (sin fecha): *Nociones de aritmética y ejercicios de cálculo mental*, 3.ª edición. Hijos de Santiago Rodríguez, Burgos.

TABOAS SALVADOR, J. (1935): *Nociones y ejercicios de aritmética y geometría*, Imprenta Moret, La Coruña.

VALLÍN Y BUSTILLO, A. F. (1896): *Elementos de matemáticas. Geometría, trigonometría y nociones de topografía*, Librería Hernando, Madrid.

XIBERTA ROQUETA, M. (1926): *Geometría elemental.* 3.ª edición, Imprenta y Librería de Antonio Franquet y Gusiñé, Gerona

YEVES, C. (1899): *Programas de Primera Enseñanza. Aritmética.* 13.ª edición. Librería Hernando, Madrid.

YEVES, C. (1906): *Programas de Primera Enseñanza. Aritmética*, 15.ª edición, reformada por P. FERRER Y RIVERO. Librería Hernando, Madrid.

Textos 1953-57

BRUÑO (1958): *Matemáticas 1.er curso de bachillerato*, Bruño, Madrid.

BRUÑO (1960): *Matemáticas 2.° curso de bachillerato*, Bruño, Madrid.

BRUÑO (1954): *Matemáticas 3.er curso de bachillerato*, Bruño, Madrid.

BRUÑO (1960): *Matemáticas 4.° curso de bachillerato*, Bruño, Madrid.

BRUÑO (sin fecha): *Matemáticas 6.° curso de bachillerato*, Bruño, Madrid.

GARCÍA ROCA, R. (1960): *Matemáticas. 2.° curso*, 2.ª edición, Editorial Bello, Valencia.

MARCOS, C. y J. MARTÍNEZ, J. (1966): *Matemáticas I*, Ediciones S. M., Valencia.

MARCOS, C. y J. MARTÍNEZ, J. (1966): *Matemáticas 2.°*, Ediciones S. M., Valencia

MARCOS DE LANUZA, F. (1965): *Matemáticas. Tercer curso*, Editorial Gredos. Madrid.

MARCOS DE LANUZA, F. (1968): *Matemáticas 1.°*, G. del Toro, editor, Madrid.

MARCOS DE LANUZA, F. (1968): *Matemáticas. Quinto Curso*, G. del Toro, editor, Madrid.

PUIG ADAM, P. (1964): *Matemáticas. Sexto curso*, Biblioteca Matemática Rey Pastor-Puig Adam, Madrid.

RÍOS, S. y A. RODRÍGUEZ SANJUÁN (1962): *Matemáticas. Sexto curso de bachillerato*, Madrid.

RODRÍGUEZ VIDAL, R. (1958): *Canon. Segundo curso*, Teide, Barcelona.

RODRÍGUEZ VIDAL, R. (1973): *Funciones y gráficas. Sexto curso.* 9.ª edición, Teide, Barcelona.

SEGURA, S. (1974): *Matemáticas 5.°*, E. López Mezquida, editor, Valencia.

Textos Ley General de Educación

ACHÓN, J. y otros (1985): *Eureka. Séptimo curso de Matemáticas*, E.G.B. Onda, Barcelona.

AGUSTÍ, J. M. y A. VILA (1976): *Matemáticas. Vectores. (2.° BUP)*, Vicens-Vives, Barcelona.

AIZPÚN, A. (1974): *Matemáticas 5*, Editorial Magisterio Español, Madrid.

AIZPÚN, A. (1974): *Matemáticas 6*, Editorial Magisterio Español, Madrid.

AIZPÚN, A. (1974): *Matemáticas 7*, Editorial Magisterio Español, Madrid.

ANTA, G. y otros (1992): *7 Matemáticas*, ESLA, Madrid. .

ANZOLA, M., J. CARUNCHO, J. y M. GUTIÉRREZ, M. (1977): *Matemáticas 2 bachillerato*, Santillana, Madrid.

GIL, J. y otros (1984): *Matemáticas 7. E.G.B.*, Santillana, Madrid.

GONZÁLEZ, R. y A. CAPPA (1977): *Nosotros y los números. Matemáticas 7*, Edelvives, Zaragoza.

GUZMÁN, M. de, J. COLERA, y A. SALVADOR (1988): *Matemáticas. Bachillerato 2*, Anaya, Madrid.

MANSILLA, S. y M. P. BUJANDA (1984): *Pitágoras. 7.° EGB. Matemáticas*, S. M., Madrid.

MANSILLA, S. y M. P. BUJANDA (1988): *Pitágoras. 7.° EGB. Matemáticas*, S. M., Madrid.

RICO, L. y otros: *Guía del profesor. Matemáticas 7*, Anaya, Salamanca.

SANTILLANA (1972): *Delta 6*, Santillana, Madrid.

SANTILLANA (1983): *Matemáticas 6*, Santillana, Madrid.

SANTILLANA (1982): *Matemáticas 5*, Santillana, Madrid.

SANTILLANA (1983): *Matemáticas 7*, Santillana, Madrid.

Alicia Bruno
Antonio Martinón
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna.
Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»

X JAEM

Zaragoza

10, 11 y 12 septiembre
2001

Convoca:

- Federación Española de Sociedades
  de Profesores de Matemáticas.

Organiza:

- Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas
  «Pedro Sánchez Ciruelo».
- Instituto de Ciencias de la Educación.
  Universidad de Zaragoza.

J A E M

X JORNADAS PARA EL APRENDIZAJE
Y LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

SUMA 34
junio 2000, pp. 45-51

Formación y desempeño práctico en educación matemática de los profesores de primaria

Luis Rico

ARTÍCULOS

Organizado por la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales tuvo lugar el 16 de octubre de 1999, en Madrid, un seminario de trabajo con el título: *The training and performance of primary teachers in mathematics education*. En este seminario participaron como ponentes expertos en formación de profesores de primaria de cinco países europeos (Alemania, Holanda, Hungría, Suecia y España). Los expertos extranjeros invitados procedían de países donde la educación matemática en primaria funciona adecuadamente. De ahí el interés por comparar sus planes y prácticas de formación con los usuales en nuestro país.

EL OBJETIVO principal del encuentro era obtener información útil relativa a los planes de formación inicial de profesores de primaria sobre educación matemática en diferentes países europeos y compararlos con la situación actual en España.

La reunión estaba dirigida a profesores de matemáticas, formadores de profesores y otras personas interesadas en el tema. Para lograr una amplia participación se hizo una convocatoria por medio de las sociedades españolas de matemáticos, de investigadores en matemáticas y en educación matemática y de profesores de matemáticas.

Los ponentes presentaron el tema de trabajo según la experiencia de sus países respectivos. Cada una de las presentaciones realizadas fue seguida por un debate en que intervinieron los asistentes.

La reunión se desarrolló de acuerdo con el siguiente programa:

- 9:00-9:15h. Presentación de la reunión por el profesor Miguel de Guzmán (Universidad Complutense de Madrid, España).
- 9:15-10:30h. Intervención del profesor Erich Wittmann (Universidad de Dortmund, Alemania).
- 10:30-11:00h. Pausa.
- 11:00-12:15h. Intervención del profesor Fred Goffree (Instituto Freudenthal, Holanda).
- 12:15-13:30h. Intervención de la profesora Julianna Szendrei (Centro de Formación de Profesores de Budapest, Hungría).
- 16:30-17:45h. Intervención del profesor Bengt Johansson (Universidad de Gothenburg, Suecia).
- 17:45-18:00h. Pausa.

- 18:00-19:15h. Intervención de los profesores Luis Rico (Universidad de Granada, España) y José Carrillo (Universidad de Huelva, España).

Los textos originales de las ponencias se pueden encontrar en la dirección web: http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman

Intervención del profesor Wittmann

El profesor Wittmann comienza agradeciendo a la Academia de Ciencias la invitación recibida. Destaca la enorme importancia de la educación primaria y el interés en debatir sobre la formación en educación matemática del profesor de primaria en un contexto europeo.

Pasa a señalar los cinco puntos en que ha estructurado su ponencia:

1. Algunos datos sobre el sistema educativo y la formación de profesores en Alemania.
2. Materias que estructuran el currículo de primaria y la formación del profesor de primaria.
3. Currículo de matemáticas en educación primaria en el estado de Nor-Westfalia.
4. Formación en educación matemática para profesores de primaria en Nor-Westfalia.
5. Programa de formación en matemáticas para profesores de primaria en la Universidad de Dortmund.

En relación con el primer punto señala la diversidad de opciones que se presentan en Alemania, donde la educación es competencia de los estados federados (Länder). Por este motivo sus referencias van a centrarse en el estado de Nor-Westfalia, lugar donde trabaja, que es el estado de mayor población y que desempeña un papel de liderazgo en la enseñanza de las matemáticas en primaria y en la formación en educación matemática de los profesores de primaria. La duración de la educación primaria en Alemania oscila entre 4 y 6 años, según los distintos estados y los tipos de educación secundaria establecidos.

La duración de la educación primaria en Alemania oscila entre 4 y 6 años, según los distintos estados y los tipos de educación secundaria establecidos.

En relación con el segundo punto muestra la estructura general de los cuatro primeros años de educación primaria en Alemania, con 7 materias diferentes y una escolaridad semanal entre 21 y 25 horas; la asigatura de matemáticas viene a ocupar un 20% del tiempo escolar, sólo superado por lengua. Los estudiantes alemanes de primaria suelen expresar un alto aprecio por las matemáticas, sólo superado por educación física.

El profesorado imparte todas las materias en estos niveles y, usualmente, trabaja con los mismos alumnos a lo largo de los 4 años; no obstante, los planes para su formación difieren mucho entre distintos estados. La organización de los estudios para profesor de primaria tiene dos fases: una teórica (universitaria de 3 años, en la mayoría de los estados) y otra práctica (de 2 años, en seminarios especiales independientes de la universidad).

En el estado de Nor-Wetfalia cada estudiante para profesor debe cursar 4 materias a lo largo de los 3 años de formación teórica, de las cuales son obligatorias Lengua, Matemáticas y Educación General. El porcentaje para Matemáticas puede oscilar entre el 21% y el 38% de la carga docente total.

Respecto al tercer punto destaca que los tres contenidos del programa de matemáticas para educación primaria son Aritmética, Geometría y Magnitudes. Ejemplifica los contenidos por cada uno de los niveles y señala su carácter tradicional. Destaca tres rasgos innovadores del currículo de matemáticas de primaria.

- *Primero:* su fundamentación constructivista, orientada hacia un descubrimiento guiado; para ello se enuncian algunas recomendaciones que deben orientar la actuación del profesor.
- *Segundo:* los cuatro objetivos generales que establece para todos los niveles: matematizar, explorar, razonar y comunicar.
- *Tercero:* la conexión destacada entre las estructuras matemáticas y sus aplicaciones.

A continuación muestra ejemplos de enseñanza mediante la resolución de problemas tomados de textos escolares, tanto de aritmética como de geometría.

El cuarto punto lo dedica a presentar el plan de formación en matemáticas para los profesores de primaria en Nor-Westfalia. Este plan de formación comprende 3 cursos de matemáticas y 2 cursos de didáctica de la matemática, cada uno de ellos estructurado en 2 horas semanales de clase y otras 2 horas de trabajo práctico durante un semestre. A esto hay que añadir 2 cursos de 2 horas de estudios prácticos. Destaca el modo en que los cursos están organizados como algo importante. Señala dos tradiciones diferentes: una de orientación psicológica prioritaria y otra que establece su predominio en la actividad matemática.

Finalmente presenta el programa de matemáticas para la formación de profesores de primaria de la Universidad de Dortmund, basado en un trabajo de investigación, el proyecto «Mathe2000», y que se fundamenta en el diseño y experimentación de entornos de aprendizaje. Presenta los principios generales del proyecto, que ejemplifica mediante una serie de materiales, uno sobre cuadrados mágicos y otro sobre teselaciones regulares y semiregulares. Concluye con una valoración general del plan de formación que vienen desarrollando en su universidad.

Presentación del profesor Goffree

También el profesor Goffree comienza agradeciendo a la Academia la invitación recibida. Señala que el trabajo que va a presentar *Estándares para la Formación de Profesores de Matemáticas de Primaria*, fue realizado por un equipo del «Freudenthal Institute», y viene siendo objeto de investigación desde 1996.

Estructura su ponencia en cuatro apartados:

1. Antecedentes históricos.
2. Algunos datos importantes.
3. Práctica real en el aula.
4. Requisitos para la formación del profesor de matemáticas de primaria.

En relación con el primer punto señala que la educación primaria en Holanda abarca la formación de los niños desde los 4 a los 12 años. Hay 8.000 centros de primaria y 38 institutos de formación de profesores de primaria en todo el país. El profesor de primaria debe impartir todas las materias y su formación dura 4 años, 3 de ellos comunes y el último de especialización, bien en la formación de niños de 4 a 8 años o en la de niños de 8 a 12 años. Destaca la influencia de Hans Freudenthal en la evolución del currículo de matemáticas para primaria y para la formación de profesores de este nivel.

[En Holanda] Destaca a influencia de Hans Freudenthal en la evolución del currículo de matemáticas para primaria y para la formación de profesores de este nivel.

Para entender el estado actual de la formación del profesorado de primaria señala alguna de las etapas que han marcado la evolución de estos estudios. Entre ellas señala la consideración de los estudiantes para profesor como aprendices en el aula y los planes de formación como estudiantes de secundaria. Una segunda etapa consistió en diversificar la formación entre el aula y la clase de primaria. Otra etapa puso el énfasis en una formación teórica exhaustiva sobre tópicos educativos, llegando a convertir los centros de formación de profesores de primaria en Academias Pedagógicas en la década de los setenta.

En relación con el segundo punto destaca algunas marcas o piedras miliares que han tenido importancia como antecedentes para el desarrollo del currículo actual de matemáticas de primaria y en la formación de su profesorado. Señala el proyecto «Arithmetic and Didactic» de 1965, el proyecto «Wiskobas» entre 1971 y 1981, la investigación entre 1975 y 1979 sobre formación de profesores de matemáticas de primaria, y el proyecto «PUIK» realizado entre 1990 y 1995. En cada uno de estos casos analiza las limitaciones de los modelos diseñados para formación de profesorado y las dificultades para su realización, al mismo tiempo que destaca el impulso central que predomina en estos proyectos: poner el foco de atención en el desarrollo profesional de los estudiantes para profesor.

En relación con el tercer punto se presenta una secuencia de trabajo en el aula con escolares de los últimos niveles que sirve para ejemplificar los tres principios sobre los que se fundamenta la educación matemática holandesa: reflexión, construcción y narración. Estas secuencias de trabajo comentadas sirven como materiales para los cursos de formación de profesores de primaria, ya que permiten ejemplificar diversos problemas significativos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y discutir sobre el modo de abordar su tratamiento y resolución. El material presentado ilustra al profesorado en formación sobre los principios considerados.

Sobre el cuarto punto se presentan una serie de condiciones para la cualificación del profesor de matemáticas de primaria. Entre ellas destacan: una cierta maestría respecto a las destrezas numéricas, un conocimiento del currículo de la escuela primaria, tanto en conocimiento práctico específico de la materia, en conocimiento del repertorio de métodos pedagógicos para las matemáticas, como en la utilización adecuada de materiales y libros para la enseñanza de las matemáticas. Condición importante es la capacidad para dar forma a distintas propuestas de formación matemática, reflexionar y anticipar. El carácter de proyecto de investigación en curso hace que el profesor Goffree pueda ofrecer una visión crítica, señalando algunas de las limitaciones detectadas y los esfuerzos que se están llevando a cabo para su superación.

Presentación de la profesora Szendrei

Despues de agradecer la invitación recibida para participar en el Seminario, la profesora Szendrei pasa a presentar su informe sobre la formación matemática del profesor de primaria en Hungría y la enseñanza de la práctica.

En primer lugar presenta el sistema educativo húngaro, en el cual la educación obligatoria comprende 8 años, articulada en dos etapas de 6 y 2 años, respectivamente. El sistema para la formación de profesores presenta gran diversidad. Primero: *Colleges* para Profesores de Primaria, generalistas en el periodo de primer a quinto grado (6 a 10 años de edad), con una materia de especialización para los cursos de estudiantes de 10 a 12 años. El plan de formación es de 4 años y trabajan como Academias Pedagógicas. Segundo: *Colleges* de formación de Profesores de distintas materias para los grados quinto a octavo (10 a 14 años), especialistas en una o dos materias; el plan de formación también es de 4 años. Tercero: las universidades, que forman a los profesores de los grados quinto a duodécimo (10 a 18 años) en una o dos materias de especialización, con un plan cuya duración es de 5 años.

En segundo lugar, presenta el plan de formación para los Profesores de Primaria, que se desarrolla en el *College* de Formación de Profesores de Primaria de Budapest. Este plan tiene una duración total de 3300 horas de formación y abarca 14 materias distintas, debido a que los profesores de Primaria son generalistas y deben impartir las diferente disciplinas. La formación se lleva a cabo a lo largo de 8 semestres, cada uno de ellos de 15 semanas de clases lectivas. La formación está dividida en clases teóricas y clases prácticas, orientadas al trabajo en el aula de primaria. La formación en matemáticas y en didáctica de la matemática comprende un total de 210 horas lectivas, para aquellos estudiantes cuya especialización no va a ser de matemáticas.

En tercer lugar presenta el programa completo para la formación en matemáticas del profesorado de Primaria, estructurado en 6 materias diferentes y discute algunos de los principios en los que se sostiene su implementación. El interés por mejorar la cualificación matemática de los estudiantes para profesor,. los esfuerzos por conectar la enseñanza tradicional de las matemáticas con las innovaciones pedagógicas procedentes del campo de la educación matemática y la necesidad de integrar el dominio de la matemática con el trabajo práctico en el aula de primaria son algunas de las características destacadas.

En cuarto lugar, reconoce la extensión del programa diseñado y las dificultades para su desarrollo completo. Marca algunos criterios para la selección de tópicos, entre los que menciona la necesidad de presentar productos simples pero bien elaborados.

Continúa con la presentación de diversos materiales para trabajar con los profesores en formación, entre ellos destaca un material articulado sobre el cubo y la pirámide y sus desarrollo en el plano, y un segundo relativo a los distintos usos del número. Sobre los materiales presentados muestra diferentes aplicaciones didácticas.

Concluye comentando algunos de los principales objetivos de la formación de los profesores de primaria y su conexión con el interés tradicional que el profesorado húngaro ha tenido por la buena formación matemática de los escolares.

El interés por mejorar la cualificación matemática de los estudiantes para profesor, los esfuerzos por conectar la enseñanza tradicional de las matemáticas con las innovaciones pedagógicas procedentes del campo de la educación matemática y la necesidad de integrar el dominio de la matemática con el trabajo práctico en el aula de primaria son algunas de las características destacadas.

Presentación del profesor Johansson

El profesor Johansson comienza manifestando su agradecimiento a la Academia de Ciencias por la oportunidad de participar en el «Seminario». Pasa a presentar el guión de su ponencia, articulado en seis puntos:

1. Sistema escolar sueco.
2. Escuela básica obligatoria.
3. Escuela secundaria postobligatoria.
4. Educación superior.
5. Formación inicial del profesorado.
6. Currículo, tipos de estudio y especialidades.

En primer lugar hace una presentación general del sistema educativo sueco, con los distintos niveles de competencias, responsabilidad y control, así como el calendario escolar. Muestra las cuatro grandes etapas del sistema educativo sueco: educación preescolar, educación obligatoria (7 a 16 años), secundaria postobligatoria (16 a 19 años) y educación superior.

En segundo lugar hace un descripción general de la escuela básica obligatoria. La última reforma curricular es del año 1994; este nuevo currículo establece los objetivos básicos y las orientaciones generales; también indica los contenidos y objetivos propios para cada una de las disciplinas. Dentro de las horas asignadas la enseñanza de las matemáticas ocupa el segundo lugar, después de la enseñanza del sueco, con un 14% del total del tiempo lectivo asignado.

En tercer lugar hace una descripción global de la enseñanza secundaria postobligatoria y de la enseñanza superior. En secundaria hay 16 programas nacionales diferentes, la mayor parte de ellos orientados hacia estudios vocacionales; en todos los programas las matemáticas son una de las materias obligatorias.

En cuarto lugar pasa a presentar el actual plan de formación de profesorado, que procede de una reforma realizada en 1988. La formación del profesor de primaria tiene dos modalidades.

- *Primera:* profesor para los niveles 1.° a 7.° (primaria), cuya valoración es de 140 puntos (3,5 años de duración), y que se basa en una primera especialización entre humanidades y ciencias.
- *Segunda:* profesor para los niveles 4.° a 9.° (secundaria inferior), cuya valoración es de 180 puntos (4,5 años de duración) y que presenta cinco especialidades diferentes, una de ellas matemáticas.

Finalmente, presenta el nuevo centro de formación de profesorado establecido en Gothenburg, dedicado a conectar el desarrollo curricular y la investigación. También presenta el currículo de matemáticas para la escuela obligatoria, aprobado en 1994, con lo objetivos generales y parciales de la asignatura.

Situación en España

La presentación de la situación española queda dividida en dos partes. En la primera parte el profesor Rico hace un balance de la situación actual de la formación inicial del profesorado de primaria en España. En la segunda parte, el profesor Carrillo presenta un balance de perspectivas y señala los retos que tiene abiertos la formación inicial de profesores de primaria en educación matemática.

Presentación del profesor Rico

El profesor Rico estructura su presentación en cinco partes:

La responsabilidad de la universidad, la desaparición de las Escuelas Normales y los nuevos planes de estudio, han convertido a los centros de formación de profesores de primaria en Academias Pedagógicas. Esto ha producido un incremento desmesurado de las disciplinas psicopedagógicas y un abandono de la formación en las disciplinas básicas del currículo de primaria.

1. Sistema educativo español y regulación actual
2. Situación formativa del actual profesorado de primaria
3. Antecedentes históricos y nueva regulación
4. Marco institucional de la formación inicial del profesor de primaria.
5. Dificultades estructurales de la formación inicial del profesor de primaria en educación matemática.

En primer lugar presenta la organización actual del Sistema Educativo Español derivado de la Ley General de Organización del Sistema Educativo (LOGSE) de 1990. La educación primaria comprende a los escolares de 6 a 12 años de edad, y está organizada en 3 niveles; las matemáticas son asignatura obligatoria en este periodo con un 12% de carga lectiva. Enuncia los objetivos generales de la educación primaria y presenta algunos datos demográficos relevantes del curso 1997-98: 2.610.041 estudiantes, 97.760 profesores y 14.289 centros en educación primaria. El 6,8% de la población española está implicada directamente por la educación primaria.

En segundo término destaca que los profesores actualmente en ejercicio en educacion primaria proceden de 4 planes de estudios muy diferentes, los correspondientes a los años 1950, 1967, 1971 y 1991. Esta diversidad de planes muestra los grandes cambios experimentados en la formación de los profesores de primaria en España en los últimos 50 años y la disparidad de las distintas orientaciones que los han informado.

En tercer lugar, en una revisión histórica de la formación de los maestros (profesores de primaria) en España, enuncia y describe cinco grandes periodos generales, ya concluidos, y un sexto, que acaba de comenzar. No obstante las diferencias entre los planes de formación correspondientes a cada uno de estos periodos, detecta una serie de carencias que se mantienen a lo largo de los distintos planes y periodos.

En cuarto lugar pasa a presentar el marco institucional en que se lleva a cabo la formación actual del profesor de primaria. La duración de los estudios para profesor de primaria es de 3 años y se organiza en 200 créditos. Hay cuatro especialidades diferentes para conseguir la titulación de Maestro de Primaria, una de ellas general y las otras tres de especialización: Lengua Extranjera, Educación Física y Educación Musical, respectivamente.

Finalmente, pasa a señalar las dificultades y limitaciones que tiene el actual plan de estudios, especialmente para la formación en matemáticas y su didáctica de los maestros. La responsabilidad de la universidad, la desaparición de las Escuelas Normales y los nuevos planes de estudio, han convertido a los centros de formación de profesores de primaria en Academias Pedagógicas. Esto ha producido un incremento desmesurado de las disciplinas psicopedagógicas y un abandono de la formación en las disciplinas básicas del currículo de primaria. En la especialidad de Maestro de Primaria, la formación en matemáticas y su didáctica apenas alcanza el 8% de la carga lectiva total; en el resto de las especialidades sólo es del 2%. Considera críticamente la actual situación y denuncia el panorama desolador que se percibe, lo cual hace inteligible la preocupación social que se viene manifestando sobre la degradación de la enseñanza de las matemáticas en primaria, una de cuyas causas principales es la escasa y deficiente preparación de su profesorado.

Presentación del profesor Carrillo

El profesor Carrillo estructura su disertación en tres apartados:

1. Revisión de los contenidos, objetivos, metodología y evaluación del plan actual de formación.
2. Criterios que debieran orientar el perfil de la formación del profesor de primaria.
3. Retos abiertos a la formación en educación matemática del profesor de primaria.

En primer lugar presenta el debate actual entre los especialistas en formación inicial de profesores de matemáticas. Destaca un consenso general sobre los contenidos que deben tener las materias de los actuales planes de estudio y, al mimo tiempo, señala las distintas finalidades que se plantean. Formación centrada sobre los contenidos, sobre la metodología, sobre actitudes y creencias, sobre diseño de materiales curriculares y sobre la práctica profesional, son algunas de las opciones en las que se viene trabajando en la actualidad; presenta algunos estudios realizados y discute sus limitaciones. Después muestra algunas reflexiones y trabajos recientes sobre la evaluación del profesorado en formación.

En una segunda parte pasa a discutir la tensión entre el conocimiento declarativo que debe recibir el profesor en formación –conocimiento pedagógico del contenido– y el conocimiento práctico. Hace una revisión detallada de las principales aproximaciones teóricas a esta cuestión, de proyectos y aportaciones hechas por distintos grupos y expertos españoles en formación de profesorado. Después de una amplia discusión, enumera una serie de competencias y habilidades que considera elementos necesarios en un esquema para estructurar la formación del profesorado. Esta reflexión le lleva a evaluar la escasa viabilidad de un plan adecuado de formación en educación matemática para los profesores de primaria, en las circunstancias y con las limitaciones actuales.

En tercer lugar establece la noción de integración como un concepto adecuado para abordar las tensiones detectadas, la diversidad de opciones y la disparidad de necesidades; concluye con una serie de recomendaciones para llevar adelante esta propuesta de integración.

España es el único país en que la formación del profesor de primaria tiene una duración de 3 años. En el resto de los casos la duración es de 4 años, y en Alemania de 5 años.

Balance

Por encima de la diversidad de las tradiciones culturales, académicas y educativas de los distintos países y de las diferencias en la organización de sus respectivos sistemas educativos, se reconocen elementos comunes entre todos ellos relativos al tema de estudio del seminario, lo cual permite establecer comparaciones y señalar opciones distintas. De ahí que resulte posible establecer algunas carencias significativas de la situación actual en España respecto a los países europeos analizados y hacer una valoración de algunos cambios en curso.

Un primer dato de reflexión es la duración de estos estudios. España es el único país en que la formación del profesor de primaria tiene una duración de 3 años. En el resto de los casos la duración es de 4 años, y en Alemania de 5 años.

En la actualidad se está discutiendo en España el cambio de titulación de los estudios de magisterio del grado de diplomado al grado de licenciado, con una amplicación de su duración a 4 años. Parece que esta medida va en la línea de homologar la preparación de los profesores de primaria españoles con los europeos y, en este sentido, resulta una medida acertada, independientemente de otras ventajas de orden social.

Un segundo dato es la orientación dada a los planes de formación. El profesor de primaria en todos los países tiene una sólida preparación general sobre la materias del currículo de primaria y sus didácticas. La formación especializada tiene un carácter de iniciación, en la mayor parte de los países.

La situación actual en España mantiene un sistema mixto, donde conviven titulaciones muy especializadas, en las que predominan las materias de especialización, junto a una titulación general de primaria. Sin embargo, todos los titulados tienen competencia para la docencia en cualquier nivel y para cualquier materia de primaria. Esta situación crea disfuncionalidades apreciables en los planes, en los centros de formación y en los centros de primaria.

Parece conveniente adoptar un modelo único para la formación de los profesores de primaria españoles. Hay dos opciones generales: adoptar un modelo basado en una única titulación general o bien ampliar el modelo actual de diversas titulaciones, pero considerando una especialidad propia para cada una de las áreas del currículo de primaria. El paso al nivel de licenciatura permitiría conjugar una formación general sólida común para todos los profesores de primaria con un inicio de especialización, que contemplase de manera diferenciada todas las áreas del currículo.

Un tercer punto es la situación común de cambio en los planes de formación de profesores de primaria en todos los países y la búsqueda, aún no definitivamente resuelta, de un equilibrio entre las tensiones propias de esta formación. En todos los países se considera una etapa superada la organización de los centros de formación de profesores de primaria como Academias Pedagógicas. El predominio de materias psicopedagógicas y el exceso de erudición sobre teorías educativas es algo específico del plan español actual de preparación de profesores de primaria. Parece necesario revisar a fondo el desnivel actualmente existente entre los conocimientos del profesor de primaria sobre las áreas curriculares y sus didácticas y sus conocimientos pedagógicos generalistas para tomar las medidas correctoras necesarias.

El cambio de titulación para la formación inicial de los maestros españoles basado en una orientación fundamentalmente pedagógica daría lugar a un título subordinado al de pedagogo, con profesionales de escasa autonomía intelectual, cuya cualificación sufriría un empobrecimiento preocupante. En especial, aumentaría el desconocimiento de las áreas curriculares y de sus didácticas, que sería reemplazado por un discurso generalista e ideologizado, desligado de los conocimientos profesionales y prácticos necesarios.

Otra de las características destacada por todos los ponentes es la creciente importancia del trabajo práctico para los profesores en formación, contemplado en los horarios. Este trabajo práctico comprende la preparación y diseño de materiales didácticos, el estudio de materiales existentes, el visionado y análisis de clases dadas por expertos, la preparación de clases prácticas y su implementación. La preocupación por el desarrollo profesional y práctico deben formar parte de las asignaturas de educación matemática y no estar al margen de las clases de primaria de matemáticas.

Parece necesario revisar a fondo el desnivel actualmente existente entre los conocimientos del profesor de primaria sobre las áreas curriculares y sus didácticas y sus conocimientos pedagógicos generalistas para tomar las medidas correctoras necesarias.

Este trabajo práctico resulta viable en los países europeos considerados debido a la apreciable cantidad de horas lectivas que tienen las asignaturas de educación matemática en los horarios de sus planes. Se observa un alto interés por la práctica en los centros escolares, conectada con las disciplinas del currículo.

La escasez de horario para matemáticas y su didáctica en España hace inviable el desarrollo de un trabajo práctico adecuado, como pusieron de manifiesto los ponentes españoles. También esta escasez de horario conecta con las dificultades para fundamentar planes de formación mediante desarrollo de programas de innovación y proyectos de investigación.

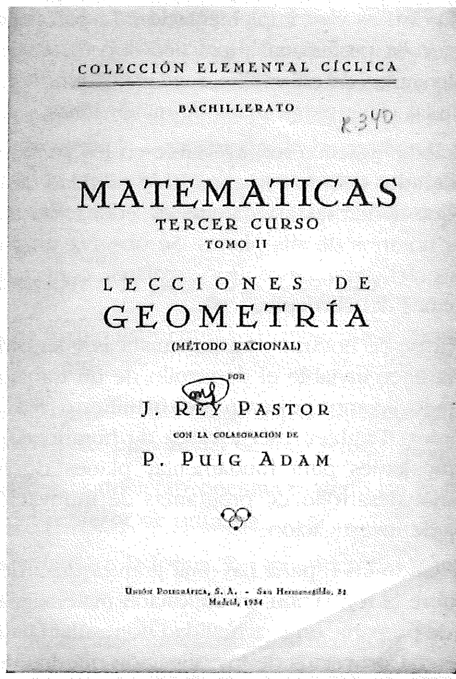
Aun cuando en España hay una gran riqueza de reflexiones sobre la formación en educación matemática del profesor de primaria, en la actualidad no resulta factible poner en marcha proyectos de investigación que los desarrollen y evalúen. Una de las limitaciones es la escasez de recursos, entre ellos el tiempo. Otra razón importante es la ausencia de centros de investigación en Didáctica de la Matemática, dedicados a la innovación curricular y a la formación del profesorado. El ejemplo de la mayor parte de los países europeos indica que una formación adecuada del profesorado de primaria se sostiene sobre programas y centros específicos de investigación.

Diferencia destacable entre el plan español de formación inicial para maestro de primaria con los planes europeos considerados ha sido el escaso tiempo dedicado a la educación matemática en los planes españoles, lo cual pone en peligro la preparación profesional de estos profesores para impartir las asignaturas de matemáticas. Idéntica reflexión puede hacerse para el resto de las materias del currículo de primaria.

Mientras que el profesorado europeo tiene una formación básica garantizada en matemáticas y su didáctica, y dedica parte importante de su tiempo al trabajo práctico en el aula, a tareas de innovación y proyectos de investigación, el profesorado español dispone de un tiempo escaso y una orientación poco práctica.

Los profesores de primaria tienen una preparación deficiente, que apenas les proporciona competencia para atender a los objetivos del currículo de primaria. El prestigio social del conocimiento matemático y la satisfaccion con su empleo parecen tener aquí una de sus fuentes de alimentación, escasamente cultivada por el sistema educativo español en la actualidad. Los asistentes al seminario mostraron su preocupación por el deterioro apreciable de la formación en matemáticas y su didáctica de los profesores de primaria y su repercusión en las aulas.

Luis Rico
Universidad de Granada.
Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
«Thales»


COLECCIÓN ELEMENTAL CÍCLICA

BACHILLERATO

R 340

MATEMATICAS
TERCER CURSO
TOMO II

LECCIONES DE
GEOMETRÍA
(MÉTODO RACIONAL)

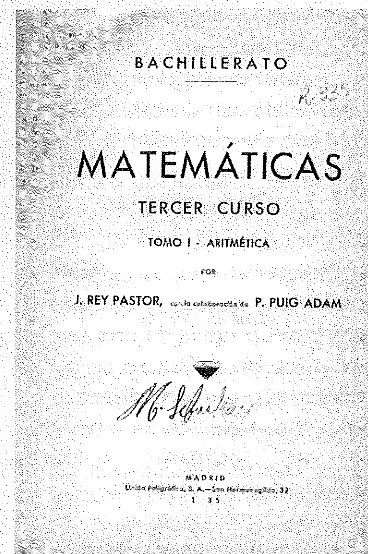
POR

J. REY PASTOR

CON LA COLABORACIÓN DE

P. PUIG ADAM

Unión Poligráfica, S. A. - San Hermenegildo, 32
Madrid, 1934


BACHILLERATO

R 339

MATEMÁTICAS
TERCER CURSO
TOMO I - ARITMÉTICA

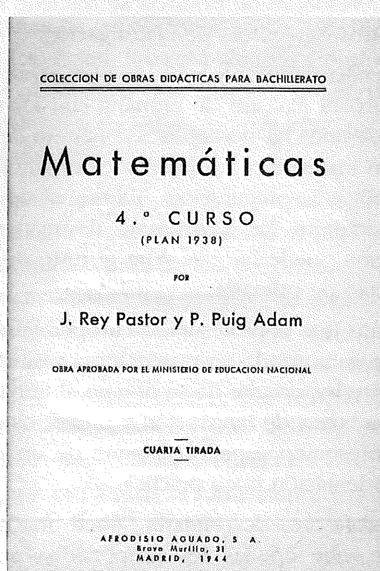
POR

J. REY PASTOR, con la colaboración de P. PUIG ADAM

M. Sebastián

MADRID
Unión Poligráfica, S. A.—San Hermenegildo, 32
1 35

Libros de Bachillerato de Puig Adam
en colaboración con Rey Pastor


COLECCION DE OBRAS DIDACTICAS PARA BACHILLERATO

Matemáticas

4.° CURSO
(PLAN 1938)

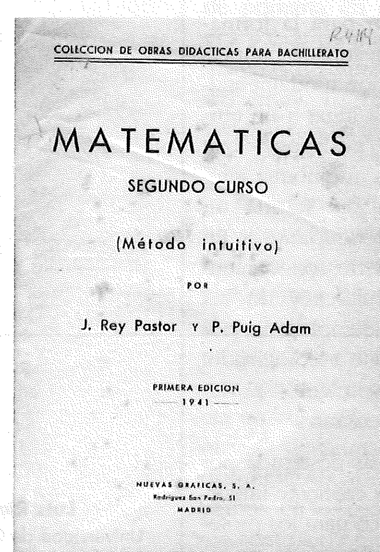
POR

J. Rey Pastor y P. Puig Adam

OBRA APROBADA POR EL MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL

CUARTA TIRADA

AFRODISIO AGUADO, S. A.
Bravo Murillo, 31
MADRID, 1944


R 419

COLECCION DE OBRAS DIDACTICAS PARA BACHILLERATO

MATEMATICAS
SEGUNDO CURSO

(Método intuitivo)

POR

J. Rey Pastor y P. Puig Adam

PRIMERA EDICION
1941

NUEVAS GRAFICAS, S. A.
Rodriguez San Pedro, 51
MADRID

SUMA 34
junio 2000, pp. 53-58

Cálculo geométrico del límite de sucesiones trigonométricas

Juan Carlos Cortés López
Juan Ángel Aledo Sánchez

ARTÍCULOS

En la actualidad el cálculo del límite de una sucesión, tanto en bachillerato como en los primeros cursos universitarios se viene realizando desde un enfoque exclusivamente analítico-algebraico. En este artículo proponemos un rico enfoque geométrico para iniciar este tema en el aula, particularizando nuestra propuesta a las sucesiones trigonométricas.

EL ESTUDIO de las sucesiones y el cálculo de su límite, cuando existe, constituye un aspecto importante en las programaciones de Matemáticas de los nuevos bachilleratos Logse, así como de cualquier primer curso universitario de caracter científico-técnico. Sin embargo, en todos estos niveles educativos este tema se aborda desde un enfoque exclusivamente algebraico-analítico. En este trabajo proponemos aprovechar la interpretación geométrica que muchas situaciones matemáticas nos brindan para calcular límites de sucesiones trigonométricas. Hemos tratado de aportar un ejemplo de cada una de las distintas formas en que usualmente se nos da una sucesión: mediante una fórmula explícita o mediante una expresión recurrente. Como las funciones equivalentes tienen especial importancia en el cálculo de límites trigonométricos, también daremos un ejemplo de la deducción geométrica de este tipo de límites. Asímismo, a través de un sencillo ejemplo pondremos de manifiesto el «peligro» que acarrea manejar «alegremente» razonamientos geométricos para deducir el valor del límite de una sucesión, pues veremos que nos pueden conducir a paradojas.

Con estas líneas pretendemos proponer una metodología de trabajo para llevarla a la práctica en el aula para iniciar –y más tarde profundizar– en el tema de límites. Maticemos que aunque con ello no defendemos el abandono posterior de las potentes técnicas algebraico-analíticas, es interesante observar que este enfoque geométrico, además de proporcionar una aproximación más intuitiva al concepto de límite, nos permite establecer una conexión natural entre dos partes de la Matemática que usualmente presentamos a nuestros alumnos de un modo disconexo: el Análisis y la Geometría. Además esta línea metodológica invita –y así lo mostraremos en ejemplos posteriores– a que los alumnos discutan el significado de demostración y conjetura, o analicen el porqué de una paradoja. Al mismo tiempo este enfoque permite recuperar razonamientos geométricos de escuelas matemáticas clásicas, como la griega, e introducir de este modo en el aula esa bella pero olvidada parte de la Matemática: su Historia.

Funciones equivalentes

En esta sección obtendremos geométricamente la equivalencia de las funciones sen$x$ y x alrededor del origen, esto es:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \qquad [1]$$

Para ello recordemos que la construcción de un polígono regular de n lados, P_n (o equivalentemente la división de una circunferencia en n partes iguales), se estudia en Dibujo Técnico desde dos puntos de vista distintos (Rodríguez de Abajo, 1995):

1. Fijado el radio de la circunferencia donde está inscrito P_n, calcular el lado del polígono.
2. Fijado el lado de P_n, determinar el radio de la circunferencia en que está inscrito el polígono.

Mediante el primer enfoque y aceptando la siguiente intuición geométrica: al aumentar el número n de lados de P_n la longitud del lado tenderá a cero o lo que es igual, al aumentar n el perímetro de P_n se aproximará a la longitud de la circunferencia en la que está inscrito, Arquímedes de Siracusa (287-212 a. de C.) encontró tomando $n = 96$ que

$$\pi \cong 3 + \frac{1}{7} = 3{,}14$$

(Boyer, 1987). En Cortés (1999) se aprovecha este enfoque clásico para deducir geométricamente los infinitésimos equivalentes:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$$

A continuación usaremos el segundo enfoque para establecer de otra forma [1]. Para ello supondremos fijada la longitud L del lado de P_n (ver figura 1) y deseamos para cada n calcular el radio R_n de la circunferencia en que P_n está inscrito. Usando trigonometría es sencillo probar

$$L = 2R_n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}$$

por tanto:

$$R_n = \frac{L}{2\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}} \qquad [3]$$

Denotaremos por:

- $\alpha_n = 2\pi/n$ el ángulo central de P_n.
- L_n longitud del arco de circunferencia de radio R_n (que abarca el ángulo α_n) en que está inscrito el polígono regular de n lados de longitud L.

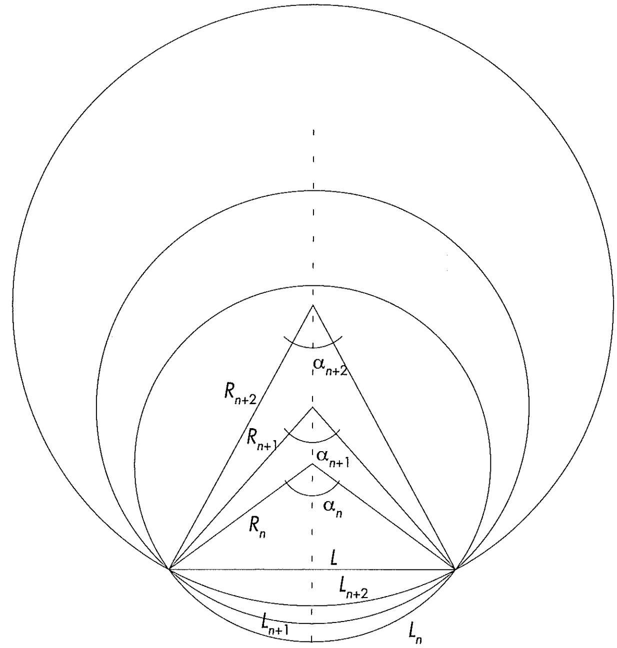


Figura 1. Construcción de un polígono regular fijado el lado

Como L_n es la enésima parte de una circunferencia de radio R_n se tiene:

$$L_n = \frac{2\pi R_n}{n} \qquad [3]$$

Ahora aceptaremos la siguiente intuición geométrica, deducida de la figura 1:

$$\lim_{n \to \infty} L_n = L$$

por lo que usando [3] y [2]:

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{2\pi R_n}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{L}{2\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}} = L \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}$$

luego:

$$1 = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{\pi}{n}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}$$

haciendo el cambio de variable $x = \pi/n$ se tiene:

$$1 = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Es importante observar, (al igual que en Cortés, 1999) que este razonamiento no constituye una demostración de [1], ya que, lo que en realidad hemos hecho (¡y a lo máximo que podemos aspirar con un razonamiento geométrico!), es encontrar una sucesión $\{x_n\}$ = = $\{\pi/n\}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

y

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$$

siendo

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

Obsérvese que el razonamiento geométrico sería una demostración rigurosa de [1] si pudiésemos probar geométricamente que dicho límite existe, pero haciendo uso de la intuición geométrica no sólo no es posible afirmar esto, sino que además este tipo de argumentos basados en la intuición puede conducirnos a conclusiones erróneas. Este es un buen momento para introducir en el aula la aparición de paradojas matemáticas cuando se usan alegremente razonamientos geométricos. En efecto, en la deducción anterior hemos utilizado la convergencia geométrica de los arcos de circunferencia $\{L_n\}_{n\geq 3}$ al segmento L. Sin embargo, veamos como un razonamiento geométrico similar nos puede conducir a la contradicción $\pi = 2$.

Partimos de una circunferencia C de radio R (ver figura 2), cuya longitud es $2\pi R$. Denotaremos por $\overline{AB}$ su diámetro, luego $\overline{AB} = 2R$. Tomaremos primero la semicircunferencia superior C_0 cuya longitud es $Long(C_0) = \pi R$. Tal y como se muestra en la figura 2 trazamos sobre el segmento AB una curva C_1 formada por dos semicircunferencias de radio la mitad que el de C_0. La longitud de la curva C_1 es $Long(C_1) = 2\pi R/2 = \pi R$. Volvemos a trazar sobre AB cuatro semicircunferencias que definen C_2 cuya longitud es $Long(C_2) = 2(2\pi R/4) = \pi R$. Análogamente en el paso n de este razonamiento se tiene $Long(C_n) = \pi R$. Tomamos límites en la última expresión:

$$\lim_{n\to\infty} Long(C_n) = \pi R \qquad [4]$$

pero geométricamente la intuición nos dice que la curva C_n se aproxima tanto como deseemos al segmento AB (ver figura 2), por lo que sus longitudes coincidirán en el límite:

$$\lim_{n\to\infty} Long(C_n) = Long\left(\lim_{n\to\infty} C_n\right) = Long\left(AB\right) = 2R \qquad [5]$$

por tanto de [4] y [5] se deduce $\pi = 2$. ¿Dónde está el error de este razonamiento geométrico? Este tipo de situaciones paradójicas pueden presentarse cuando trabajamos en el aula el cálculo de límites desde esta propuesta geométrica. Lejos de ser esto un incoveniente de esta metodología, cuando esto suceda tendremos la oportunidad de introducir de un modo natural en la clase el atractivo tema de las paradojas y falacias en Matemáticas.

Este tipo de situaciones paradójicas pueden presentarse cuando trabajamos en el aula el cálculo de límites desde esta propuesta geométrica.

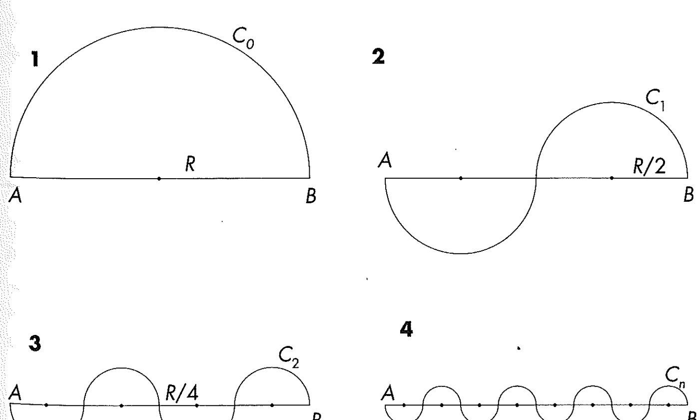


Figura 2. Una paradoja geométrica

Sucesiones dadas en forma explícita

Todavía es posible explotar más, desde este enfoque geométrico, la figura 1. En efecto, recordemos que el área de la porción de círculo de radio R determinada entre la circunferencia y una cuerda AB cuyo ángulo central es φ es

$$A(\varphi, R) = \frac{1}{2} R^2\left(\varphi - \operatorname{sen}\varphi\right)$$

Geométricamente podemos afirmar que el área de los trozos de círculo de radio R_n definidos entre la circunferencia y la cuerda de longitud L_n cuyo ángulo central es $\alpha_n = 2\pi/n$, tienden a cero. Luego con ello deducimos el límite en el infinito de la sucesión trigonométrica cuyo término general es

$$\left\{A(\alpha_n, R_n)\right\} = \left\{\frac{1}{2} R_n^2\left[\frac{2\pi}{n} - \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\right]\right\}$$

esto es usando [2]:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{L^2}{4\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{n}}\cdot\left[\frac{2\pi}{n} - \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\right] = 0$$

Geométricamente acabamos de probar:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2\pi}{n} - \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}}{\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{n}} = 0$$

Nótese que la resolución de la indeterminación {0/0} que aparece en el límite anterior mediante técnicas analíticas clásicas requiere que el alumno conozca la regla de L'Hôpital.

Sucesiones dadas en forma recurrente

En este apartado aprovecharemos el significado geométrico de la bisección (usado para construir un polígono regular de $2n$ lados a partir de un polígono regular de n lados) para calcular límites de ciertas sucesiones recurrentes, por una vía diferente a la habitual. En particular abordaremos la sucesión:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}} \qquad [6]$$

la cual puede definirse recurrentemente como:

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} \quad n \geq 1, \qquad [7]$$

En Rivaud (1975) puede encontrarse el cálculo de su límite. Brevemente, para ello se demuestra que dicha sucesión es convergente, probando previamente que es monótona creciente y acotada superiormente; finalmente llamando

$$L = \lim_{n\to\infty} x_n$$

tomando límites en la fórmula recurrente [7] y teniendo en cuenta que

$$L = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1}$$

se llega a la ecuación algebraica: $L^2 = 2 + L$ cuyas soluciones son $L = -1$ y $L = 2$. Obviamente como se trata de una sucesión de términos positivos, $L = 2$ es el límite buscado.

Nuestro objetivo es calcular el límite de la sucesión [7] usando la interpretación geométrica del método de bisección. Para ello, necesitamos establecer previamente la relación entre la longitud del lado del polígono regular de n lados y la longitud del lado del polígono regular de $2n$ lados construido a partir del anterior por bisección de sus lados. Para simplificar trabajaremos con la circunferencia goniométrica, esto es, de radio unidad.

Es sencillo probar:

$$L_{2n} = \sqrt{2-\sqrt{4-L_n^2}}$$

ya que, aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos *CDB* y *ODB* del la figura 3, obtenemos respectivamente:

$$L_{2n} = \sqrt{\frac{1}{4}L_n^2 + \overline{CD}^2}, \quad \overline{OD} = \sqrt{1-\frac{1}{4}L_n^2}$$

y como $\overline{CD} = 1 - \overline{OD}$ se tiene:

$$L_{2n} = \sqrt{\frac{1}{4}L_n^2 + \left(1-\sqrt{1-\frac{1}{4}L_n^2}\right)^2} = \sqrt{2-\sqrt{4-L_n^2}} \quad n \geq 3 \quad [8]$$

Así, supongamos que sobre la circunferencia goniométrica construimos –de un modo exacto– el cuadrado, cuyo lado es

$$L_4 = \sqrt{2}$$

...aprovecharemos el significado geométrico de la bisección para calcular límites de ciertas sucesiones recurrentes, por una vía diferente a la habitual.

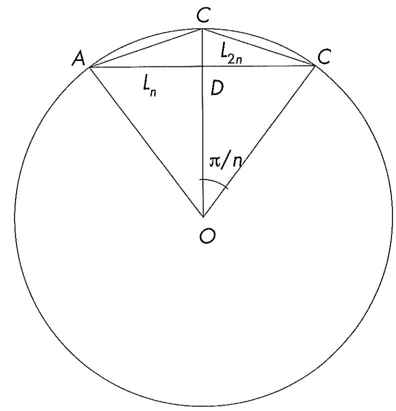


Figura 3. Construcción de un polígono por el método de bisección

y a partir de él, construimos por bisección los polígonos de 8, 16, 32, ..., 2^n, ... lados. Haciendo uso de la interpretación geométrica podemos asegurar que:

$$\lim_{n\to\infty} L_{2^n} = 0$$

pero por otra parte como

$$L_4 = \sqrt{2}$$

usando [8], la sucesión:

$$L_8 = \sqrt{2-\sqrt{4-\left(\sqrt{2}\right)^2}} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$L_{16} = \sqrt{2-\sqrt{4-\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2}} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$L_{32} = \sqrt{2-\sqrt{4-\left(\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)^2}} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

... ...

tiene como límite:

$$\lim_{n\to\infty} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}}} = 0$$

De donde resulta inmediatamente:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}} = 2$$

Además, obsérvese que mediante este razonamiento no sólo calculamos el límite directamente, sin probar previamente su existencia, sino que por la construcción geométrica se deduce claramente que la sucesión $\{y_n\}_{n\geq 0}$:

$$y_n = \sqrt{2-x_n}, \forall n \geq 0$$

donde

$$x_n = \sqrt{2+x_{n-1}}, \forall n \geq 1$$

siendo

$$x_0 = \sqrt{2}$$

es estrictamente decreciente (por representar la longitud del lado del polígono regular construido por bisección) y además la sucesión $\{y_n\}_{n\geq 0}$ está acotada inferiormente por cero (ya que, la longitud es una cantidad positiva); esto nos permite asegurar que la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0}$ es monótona creciente y está acotada superiormente por 2, como pretendíamos probar.

Repitiendo el razonamiento partiendo ahora del triángulo equilátero inscrito en la circunferencia goniométrica, y teniendo en cuenta que

$$L_3 = \sqrt{3}$$

la sucesión de las longitudes de los lados de los polígonos regulares construidos por bisección a partir del triángulo viene dada por:

$$L_6 = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(\sqrt{3}\right)^2}} = 1$$

$$L_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (1)^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$L_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

$$L_{48} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}\right)^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

... ...

Al igual que en el caso anterior, y apoyándonos en la interpretación geométrica podemos asegurar que:

$$\lim_{n\to\infty} L_{3\cdot 2^n} = 0$$

Así pues, razonando como antes a partir de la sucesión $\{t_n\}_{n\geq 0}$definida por:

$$t_n = \sqrt{2 - z_n} \qquad \forall n \geq 0$$

donde

$$z_n = \sqrt{2 + z_{n-1}} \qquad \forall n \geq 1$$

siendo

$$z_0 = \sqrt{3}$$

se tiene que $\{z_n\}_{n\geq 0}$es creciente y acotada superiormente por 2 y además:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 2$$

que coincide con el anterior a pesar de que variamos la condición inicial.

...este enfoque geométrico puede ser también explotado para estudiar cualquier otra familia de sucesiones, como pueden ser por ejemplo las irracionales.

Y, en general, partiendo del polígono regular de k lados que nos proporciona la condición inicial

$$\alpha_0 = L_k = 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{k}$$

se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 2$$

siendo:

$$\alpha_n = \sqrt{2 + \alpha_{n-1}} \quad \forall n \geq 1 \quad \alpha_0 = 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{k} \quad \forall k \geq 3$$

y de nuevo vemos, geométricamente, que el límite no depende de la condición inicial.

Para terminar aprovecharemos este enfoque geométrico para calcular excelentes aproximaciones al número π. En efecto, si $L(P_{2n})$ denota el perímetro del polígono regular de $2n$ lados, como la sucesión de longitudes se aproxima más y más a la longitud de la circunferencia goniométrica, que es 2π, en la cual están inscritos, se tiene, usando que la longitud L_n del lado de un polígono regular de n lados es:

$$2\pi = \lim_{n\to\infty} L(P_{2n}):$$

$$2\pi = \lim_{n\to\infty} L(P_{2n}) = \lim_{n\to\infty} 2n\sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(2\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\right)^2}} = \lim_{n\to\infty} 2n\sqrt{2 - 2\cos\frac{\pi}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\sqrt{2}\,n\sqrt{1 - \cos\frac{\pi}{n}} = \lim_{n\to\infty} 4n\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}$$

esto es:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2n\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}$$

así, para n = 1.000 obtenemos la siguiente aproximación de π: π = 3,1415914 que proporciona cinco cifras decimales exactas.

Sucesiones irracionales

Aunque hemos dedicado el trabajo al estudio de sucesiones de tipo trigonométrico, nos gustaría terminar este artículo señalando que este enfoque geométrico que proponemos puede ser también explotado para estudiar cualquier otra familia de sucesiones, como pueden ser por ejemplo las irracionales. Para comprender mejor esta idea resolveremos geométricamente la indeterminación $\{\infty - \infty\}$ que aparece al evaluar el límite en el infinito de la sucesión irracional

$$\left\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right\}$$

Para ello aprovechamos una interpretación geométrica sobre la espiral pitagórica de la figura 4 (formada por

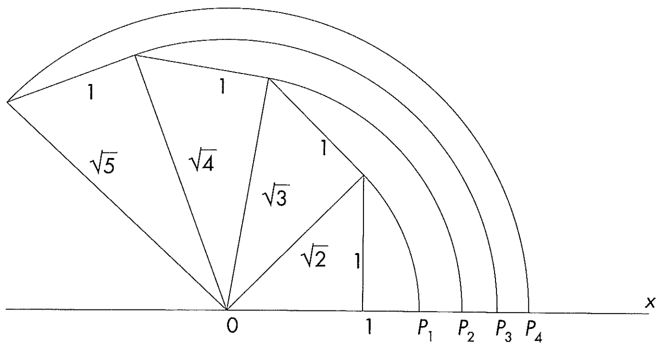


Figura 4. Cálculo geométrico del límite de una sucesión irracional

triángulos rectángulos). En efecto obsérvese sobre el eje X que las hipotenusas de estos triángulos son los radios

$$\overline{OP_n} = \sqrt{n+1}$$

de las circunferencias de centro O y una representación detallada nos indica geométricamente que las longitudes

$$\overline{P_n P_{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

tienden a cero cuando $n \to \infty$, por lo que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$$

tal y como puede comprobarse analíticamente:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

Juan Carlos Cortés
IES Bonifacio Sotos
Casas Ibáñez (Albacete)
Sociedad Castellano-Manchega
de Profesores de Matemáticas

Juan Ángel Aledo
Escuela Politécnica Superior
Universidad de Castilla-
La Mancha (Albacete)
Sociedad Castellano-Manchega
de Profesores de Matemáticas

Bibliografía

BOYER, C. B. (1987): *Historia de la Matemática*, Alianza Universidad Textos, Madrid.

CORTÉS LÓPEZ, J. C. y G. CALBO SANJUÁN: «Infinitésimos desde los polígonos regulares», aparecerá en la revista *Epsilon*.

RIVAUD, J. (1975): *Ejercicios de Análisis. Tomo I*, Aguilar, Madrid.

RODRÍGUEZ DE ABAJO, F. J. y V. ÁLVAREZ BENGOA (1995): *Dibujo Técnico*, Ed. Donostiarra, San Sebastián.

SUMA 34
junio 2000, pp. 59-67

Iteración de funciones e introducción al caos con Mathematica

Ángela Rojas Matas

ARTÍCULOS

En este trabajo se estudia la iteración de punto fijo muy habitual en todos los programas de cálculo numérico y su aplicación en un caso particularmente interesante: *la función logística*. De esta forma se pueden introducir elementos característicos de la teoría del caos: efecto mariposa o exponente de Lyapunov, bifurcaciones por duplicación de periodo, etc. Esta experiencia se ha realizado en la Escuela de Ingeniería Técnica Industrial de Córdoba, usando *Mathematica* por la potencia y versatilidad que posee este *software*.

LA TEORÍA DEL CAOS se ha convertido en un asunto de gran interés y no sólo para la comunidad científica. Películas como la norteamericana *Parque Jurásico* o la española *El efecto mariposa* explican con la teoría del caos el devenir de los acontecimientos en sus respectivas historias. En este trabajo vamos a abordar los aspectos básicos del caos a través del estudio de la iteración de punto fijo de una función particular: *la función logística.*

La iteración es un proceso muy habitual en los programas de ordenador. Los resultados en algunas ocasiones pueden resultar sorprendentes. Así se pueden obtener resultados totalmente dispares a largo plazo aun partiendo de valores iniciales muy próximos. El efecto anterior se conoce como *efecto mariposa* o sensibilidad a las condiciones iniciales y ya fue observada de forma accidental por Edward Lorentz en 1968. Este meteorólogo seguía un proceso iterativo para la predicción del tiempo que le llevaba varias horas de trabajo en un ordenador. Un día repitió los cálculos proporcionando como dato de entrada el mismo valor de otra ocasión anterior, pero, por simplificar, sólo proporcionó seis cifras decimales de precisión y puso el sistema a trabajar. Cuando volvió se encontró con unos resultados totalmente distintos. En un sistema dinámico como la atmósfera cambios pequeñísimos en una variable pueden resultar amplificados y provocar enormes efectos. En teoría, como dijo el propio Lorenz en su artículo *Can the flap of a butterfly's wing stir up a tornado in Texas?* (Peitgen, 1992), el simple aleteo de una mariposa podría provocar un tornado en el polo opuesto del mundo.

Para estudiar este tema es imprescindible el uso del ordenador. Hemos llevado a cabo esta experiencia con alumnos de la Escuela de Ingeniería Técnica Industrial de Córdoba, usando *Mathematica* por la potencia y versatilidad que posee este *software*.

Iteración de una función

Tenemos una función real $f(x)$, partimos de un valor inicial x_0 y generamos una sucesión de valores $\{x_n\}$ de la siguiente forma: $x_n = f(x_{n-1})$. Este tipo de iteración se conoce como *iteración de punto fijo.*

Supongamos que la función f admite p como punto fijo, entonces: $f(p) = p$. Partimos de un valor inicial x_0 y nos interesa saber cuándo se puede asegurar la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ al punto fijo p. En este caso diremos que el punto fijo p es un punto fijo *atractivo* o *estable*. La respuesta nos la proporciona el siguiente teorema:

> Sea f una función definida y con derivada continua en $(p - r_0, p + r_0)$, un entorno del punto fijo. Si $|f'(p)| < 1$, entonces existe un $r < r_0$ tal que para cualquier $x_0 \in [p - r, p + r]$ la sucesión $x_n = f(x_{n-1})$ para $n \geq 1$ es convergente hacia p.

La demostración se basa en el teorema del valor medio:

$$x_n - p = f(x_{n-1}) - f(p) \Rightarrow x_n - p = f'(s)(x_{n-1} - p)$$

donde s es un valor intermedio entre x_{n-1} y p. Como la derivada de f es continua, seguro existe un intervalo $[p - r, p + r]$ donde: $|f'(x)| \leq k < 1$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}|x_n - p| &= |f'(s)| \cdot |x_{n-1} - p| \leq k \cdot |x_{n-1} - p| \\ &\leq k^2 \cdot |x_{n-1} - p| \leq \ldots \leq k^n \cdot |x_0 - p|\end{aligned}$$

de manera que:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = p$$

Una observación útil es que si los errores $e_n = x_n - p$ son no nulos, entonces:

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{x_{n+1} - p}{x_n - p} = \frac{f(x_n) - f(p)}{x_n - p} \to f'(p)$$

por lo tanto, la magnitud de la derivada de la función en el punto fijo nos indica la rapidez de la convergencia de la iteración de punto fijo.

En el caso de que $|f'(p)| > 1$, las únicas sucesiones que convergen al punto fijo son aquellas cuyos términos, de uno concreto en adelante, son siempre iguales a p, ya que por la continuidad de la derivada, será posible encontrar un entorno $[p - r, p + r]$ del punto fijo donde: $|f'(x)| \geq k > 1$. Supongamos que tenemos una sucesión de términos distintos de p que converge a p. Desde un cierto término n_0 en adelante, los términos de la sucesión pertenecerán al entorno anterior y por lo tanto:

$$|x_n - p| \geq k \cdot |x_{n-1} - p| \geq \ldots \geq k^{n-n_0} \cdot |x_{n_0} - p|$$

si n tiende a infinito, las distancias $|x_n - p| > 1$ tienden a infinito, lo cual contradice la convergencia de la sucesión.

Un método gráfico para conseguir visualizar fácilmente la iteración de punto fijo consiste en dibujar simultáneamente la función bajo consideración y la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

Vemos como, en este caso, para x_n próximo a p, x_{n+1} dista más de p que x_n. El punto fijo se llama entonces *repulsor* o *inestable.*

Gráfico de la iteración de punto fijo

Un método gráfico para conseguir visualizar fácilmente la iteración de punto fijo consiste en dibujar simultáneamente la función bajo consideración y la bisectriz del primer y tercer cuadrante. Si buscamos el punto fijo p de una función f, entonces f y la bisectriz se cortarán en el punto (p, p). En la iteración de punto fijo, se parte de un valor x_0 concreto sobre el eje de abscisas. Entonces $x_1 = f(x_0)$ se obtiene levantando una recta vertical desde el punto x_0 hasta cortar a la gráfica de f, obteniendo el punto (x_0, x_1). Por la intersección obtenida se traza una recta horizontal hasta cortar a la bisectriz, en el punto (x_1, x_1). La abscisa de dicho punto de corte es x_1. A continuación se repite el proceso.

Como vimos en el teorema anterior, la sucesión de punto fijo será convergente si $|f'(p) < 1|$. Es fácil comprobar que pueden conseguirse dos tipos de convergencia:

- monótona (creciente o decreciente), como se muestra en la figura 1, cuando $0 < f'(p) < 1$, es decir cuando la función es creciente en p. En este caso, la sucesión se acerca al punto fijo con «una escalera hacia dentro»;

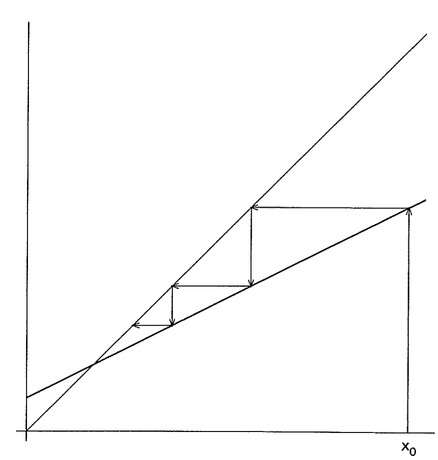


Figura 1. Escalera hacia dentro

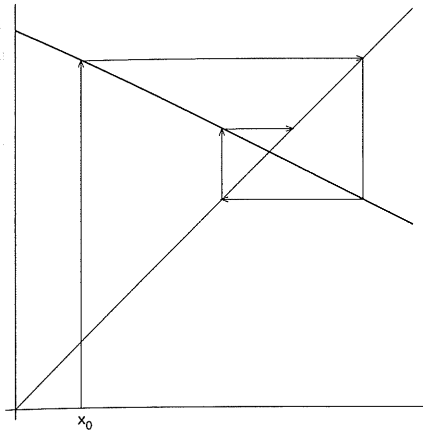


Figura 2. Espiral hacia dentro

- oscilante, como se muestra en la figura 2, cuando $-1 < f'(p) < 0$, es decir cuando es decreciente. En este caso, la sucesión se aproxima a p con «una espiral hacia dentro».

Análogamente, si $|f'(p)| > 1$, la sucesión de punto fijo será generalmente divergente (sólo «accidentalmente» será convergente, como comentamos anteriormente), pudiendo ser también:

- monótona, como se muestra en la figura 3, cuando $1 < f'(p)$, la sucesión diverge (se aleja del punto fijo p) con «una escalera hacia fuera».
- oscilante, como se muestra en la figura 4, cuando $f'(p) < -1$, la sucesión diverge con «una espiral hacia fuera».

El programa para obtener un gráfico de iteración con *Mathematica* se presenta a continuación. Hay que proporcionar previamente la función, el valor inicial, número de iteraciones y el rango de valores de x para la representación gráfica:

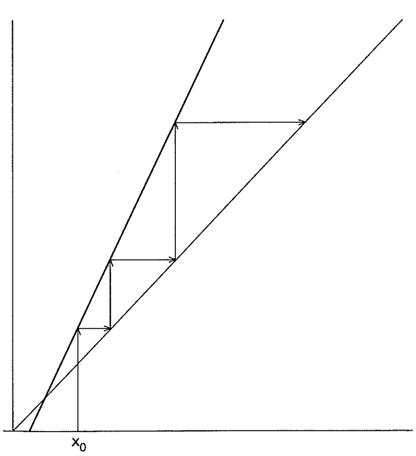


Figura 3. Escalera hacia fuera

Este iterador es muy utilizado en biología para modelar el crecimiento de determinadas poblaciones.

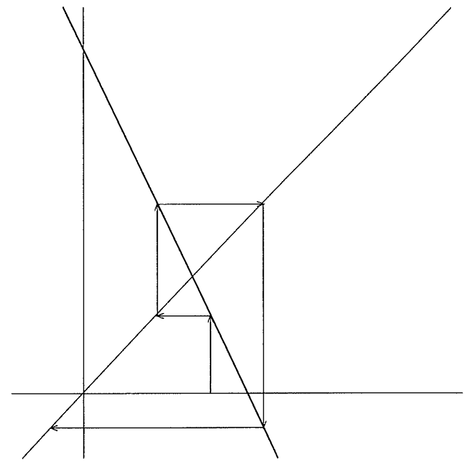


Figura 4. Espiral hacia fuera

```
gra1 = Plot [ { f[x], x}, { x, xmin, xmax }, DisplayFunction -> Identity];
ptos = { };
lista = NestList [ f, x0, nitera ];
PrependTo [ ptos, { x0, 0 }];
For [ i =1, i <= nitera, i++,
    AppendTo [ ptos, { lista[[ i]], lista[[ i+1]] } ];
    AppendTo [ ptos, { lista[[ i+1]], lista[[ i+1]] } ];];
gra2 = ListPlot [ ptos, PlotJoined -> True, DisplayFunction -> Identity ];
Show [ gra1, gra2, DisplayFunction -> $DisplayFunction ]
```

Función logística: diagrama de bifurcación

Vamos a estudiar una función concreta, conocida como *función logística*:

$$f:[0,1] \to [0,1]$$
$$x \to rx(1-x)$$

Este iterador es muy utilizado en biología para modelar el crecimiento de determinadas poblaciones. La imagen de esta función es una parábola invertida que tiene su máximo en $(1/2,\ r/4)$. Para confinar las iteraciones al intervalo $[0,\ 1]$, tiene que verificarse: $0 \le r/4 \le 1$. Por lo tanto, el rango de posibles valores del parámetro será: $0 \le r \le 4$.

Si $0 < r \le 1$, la parábola cae enteramente por debajo de la bisectriz del primer cuadrante. En este caso, sólo habrá un único punto fijo en p_1, ya que éste será el único punto de corte de la gráfica con la bisectriz. Para $r > 1$ existen dos puntos de intersección de la función con la bisectriz. Resolviendo la ecuación: $rx(1-x) = x$, se obtienen los dos puntos fijos:

$$p_1 = 0 \ \text{y} \ p_2 = \frac{r-1}{r}$$

para $r > 1$.

Como $f'(x) = r - 2rx$, entonces $f'(0)$ y

$$f'\left(\frac{r-1}{r}\right) = 2 - r$$

De manera que:

- si $0 < r < 1$, entonces p_1 es un punto fijo atractivo o estable en escalera. Las sucesiones generadas por iteración, también llamadas *órbitas*, serán atraídas por p_1, cualquiera que sea $x_0 \in (0, 1)$. Para $r = 1$, el teorema anterior no afirma nada porque $f'(p_1) = 1$, pero es fácil comprobar que también es estable en ese caso.
- si $1 < r < 3$, p_1 deja de ser atractivo y pasa a ser atractivo el otro punto fijo p_2. El atractor de todas las órbitas generadas por iteración de punto fijo pasa de ser el punto p_1 a ser ahora el punto p_2. Concretamente si $1 < r < 2$, la convergencia hacia p_2 será en escalera y si $2 < r < 3$ será en espiral. En $r = 3$, $f'(p_2) = -1$, el teorema anterior sobre convergencia no afirma nada, pero también puede probarse fácilmente la estabilidad.
- Si $3 < r \leq 4$, el punto p_2 perderá también su estabilidad, será repulsor con espiral hacia afuera.

En la figura 5 se representa un gráfico de iteración correspondiente a $r = 0{,}75$ y a $x_0 = 0{,}7$ en la que se aprecia la convergencia en escalera hacia p_1. En la figura 6, $r = 1{,}75$ y $x_0 = 0{,}1$ pudiendo observar la convergencia en escalera hacia el punto fijo, mientras que en la figura 7, $r = 2{,}75$ y $x_0 = 0{,}1$ se observa la convergencia en espiral. Por último, el gráfico de la figura 8 representa la iteración para $r = 3{,}5$ con el punto p_2 repulsor.

Para $r > 3$, ambos puntos fijos pierden su estabilidad. En el gráfico de la figura 9 se representan las iteraciones obtenidas cuando $r = 3{,}3$ y partiendo de $x_0 = 0{,}1$. Como se observa, a largo plazo las iteraciones se estabilizan alrededor de dos valores concretos: 0,479 y 0,823. Lo mismo ocurre con cualquier otro valor inicial. De forma que el

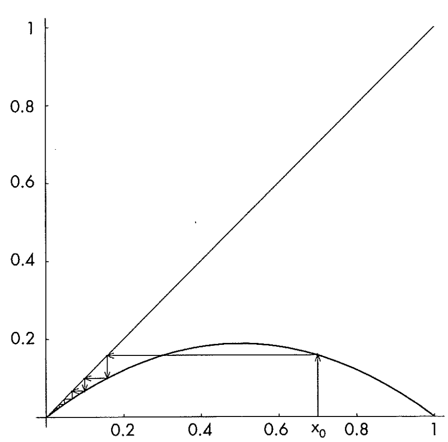


Figura 5

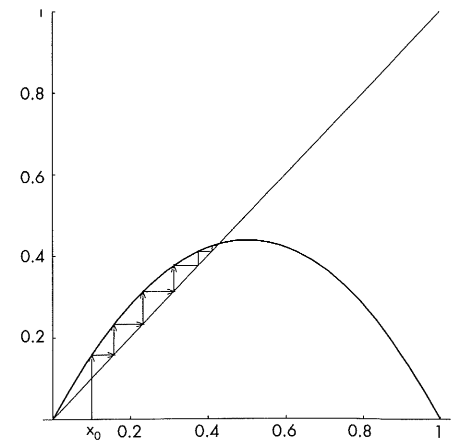


Figura 6

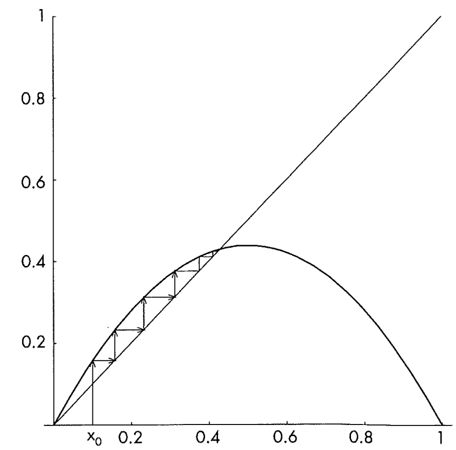


Figura 7

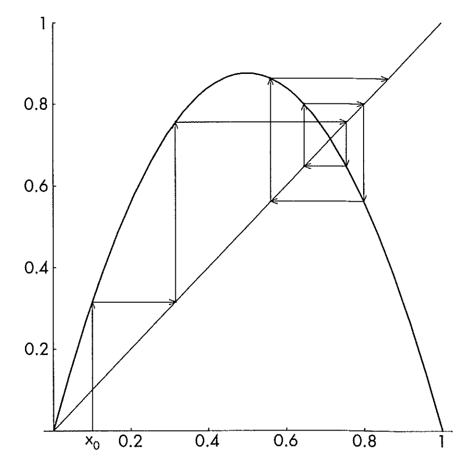


Figura 8

atractor de las órbitas generadas es: {0,479, 0,823}.

En este caso se pasa a un 2-ciclo o periodo de orden 2 estable. El atractor de las

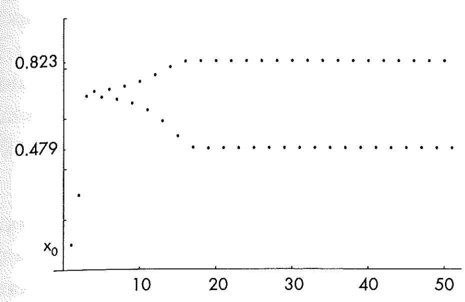


Figura 9

órbitas generadas por iteración es un conjunto con dos puntos: {a, b}, de modo que $f(a) = b$ y $f(b) = a$. Por lo tanto, $f^2(a) = f(f(a)) = a$ y análogamente: $f^2(b) = f(f(b)) = b$. Es decir, tanto a como b son puntos fijos de f^2. En la figura 10 se representa el gráfico de iteración para $r = 3{,}3$, tomando como valor inicial 0,1. Se representa conjuntamente la bisectriz del primer cuadrante, la función f y la función f^2. Se observa cómo efectivamente las iteraciones oscilan entre dos puntos fijos de la función f^2 (los otros dos puntos fijos de f coinciden con los de f^2, pero ambos perdieron su estabilidad).

El atractor estable de un sistema dinámico puede encontrarse numéricamente de forma simple poniendo el ordenador a trabajar con un número elevado de iteraciones.

Hallamos los puntos fijos de f^2, resolviendo: $f(f(x)) = x$. Esta ecuación es de cuarto grado. Las raíces son los dos puntos periódicos y los dos puntos fijos de f, $p_1 = 0$ y $p_2 = (r-1)/r$. Al conocer de antemano dos soluciones, el cálculo de las otras dos se reduce a la resolución de una ecuación de segundo grado. Resultando ser:

$$a,\ b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2r} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{r}\right)\left(1-\frac{3}{r}\right)}$$

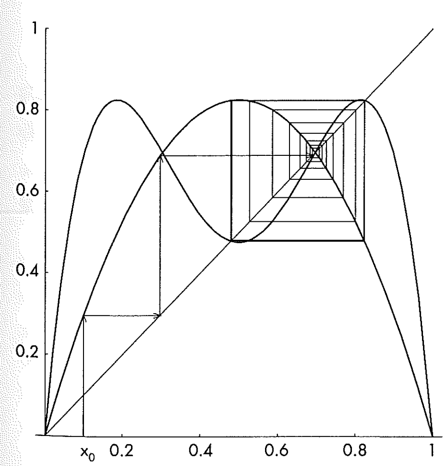


Figura 10

La estabilidad del 2-ciclo depende del la derivada de f^2 en dichos puntos:

$$(f^2)'(a) = f'(f(a))f'(a) = f'(b)f'(a) = 4 + 2r - r^2$$

y

$$(f^2)'(b) = (f^2)'(a)$$

El valor absoluto de la derivada será menor que 1 si:

$$3 < r < 1 + \sqrt{6} \approx 3{,}449489743$$

La división de un punto fijo estable como p_2 en un 2-ciclo cuando $r > 3$ se llama *bifurcación*. A medida que r crece aparecen más bifurcaciones. Así, es de esperar otra bifurcación cuando se supere la cota:

$$r = 1 + \sqrt{6}$$

En efecto, con $r = 3{,}5$ se comprueba experimentalmente con *Mathematica* la aparición de un periodo estable de orden 4. Para encontrarlo de forma exacta habría que resolver la ecuación $f^4(x) = x$.

Cuando r sobrepasa el valor

$$r_2 = 1 + \sqrt{6}$$

el periodo de orden 2 pierde su estabilidad y aparece un periodo de orden 4 estable hasta $r_2 = 3{,}544\ldots$, donde ocurre de nuevo una bifurcación por duplicación de periodo. Estas circunstancias se repiten conforme r va creciendo, dando lugar a una sucesión de valores:

$$r_1 = 3,\ r_2 = 3{,}449489\ldots,\ r_3 = 3{,}544090\ldots,$$
$$r_4 = 3{,}564407\ldots,\ r_5 = 3{,}5699456\ldots,$$

donde se van produciendo bifurcaciones por duplicación de periodo.

Supongamos que notamos por $d_k = r_{k+1} - r_k$, la distancia entre dos puntos de bifurcación consecutivos. Entonces, en el límite la razón d_k/d_{k+1} tiende a una constante 4,669201... Este número fue descubierto en octubre de 1975 por el profesor americano Mitchell J. Feigenbaum. Posteriormente se demostró que esta constante es siempre la misma para un amplio rango de iteradores y no sólo para la función logística, por ejemplo

$$f(x) = rx^2\mathrm{sen}(\pi x)$$

o la función

$$f(x) = \begin{cases} rx & \text{si } x \le 1/2 \\ r(1-x) & \text{si } x \ge 1/2 \end{cases}$$

funciones con forma parecida al iterador logístico.

El atractor estable de un sistema dinámico puede encontrarse numéricamente de forma simple poniendo el ordenador a trabajar con un número elevado de iteraciones. Para cada valor de r, escogeremos un valor inicial x_0 cualquiera y calcularemos 10000 iteraciones, con lo que se supone que ya tendremos un valor del atractor final. Ignoraremos lo que ocurre en esas primeras iteraciones y grabaremos las 100 iteraciones siguientes entre 10001 y

10100 (si el atractor final es un 4-ciclo, serán cuatro puntos repetidos cada uno 250 veces). Podemos ahora dibujar los atrayentes para diferentes valores de r en un gráfico llamado *diagrama de bifurcación*. En el eje horizontal se representan los valores de r, mientras que en el eje vertical se representan los valores de las 100 iteraciones obtenidas.

El tiempo de computación del gráfico depende del número de iteraciones y del número de valores de r para los que tiene que buscar el atractor correspondiente. El uso de la función f previamente compilada disminuirá de forma significativa el tiempo necesario para hacer los cálculos. A modo ilustrativo, el diagrama de bifurcación de la figura 11 necesitó unos 50 segundos, pero puede llevar varios minutos si el número de iteraciones es mayor o si el incremento de los valores de r es muy pequeño. Para conseguir el diagrama de bifurcación se aplicó para cada valor de r:

1. la función Nest, para averiguar el valor de la iteración 10000. Este valor ya será un elemento del atrayente final.
2. Con este valor y usando la función NestList, se consigue una lista con los valores de las 100 iteraciones siguientes.
3. Se eliminan los valores repetidos de la lista anterior y la lista resultante será el atrayente final.

El programa *Mathematica* completo para conseguir los datos necesarios para dibujar el diagrama de bifurcación de la figura 11 es el siguiente:

```
f = Compile [{{ x, _Real, 1},{ r, _Real, 1}}, r x (1-x) ];
bifurcacion : = Module [ { }, rmin = 2.8; rmax = 4. ;
incrementor = 0.003; primera = 10000; nitera = 100; x0 = 0.1;
R = Table [ r, { r, rmin, rmax, incrementor } ];
prov = Nest[ f [ #, R] &, x0 + 0. R, primera + 1 ];
prov = NestList [ f [ #, R] &, prov, nitera - 1];
prov = Map [ Union, Transpose [ prov ] ] ;
datos = Flatten [ MapThread [ Thread [ { #1, #2}] &, { R, prov} ], 1 ] ; ]
```

El tiempo de computación se consigue con Timing[bifurcacion] y usando el comando ListPlot se representan los pares de puntos almacenados en datos.

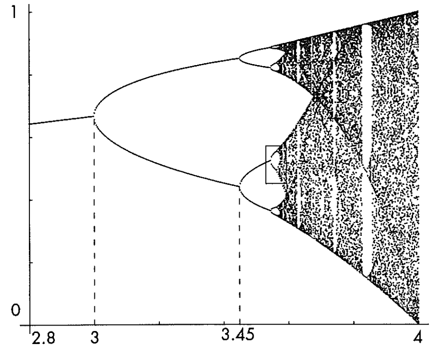


Figura 11

El diagrama de bifurcación muestra que hay «ventanas» dentro de la región caótica donde el atractor vuelve a ser finito, es decir vuelve a haber orden dentro del desorden.

Después de todas las bifurcaciones de 2^n-ciclos a 2^{n+1}-ciclos, llegamos a un valor límite de r a partir del cual el atractor es un conjunto infinito. Comienza el caos, justo al final de la cascada de bifurcaciones doblando el periodo.

La figura obtenida posee unas propiedades muy interesantes. Si ampliamos detalles de la figura 11, obtendremos «copias» idénticas de la figura global a la escala que se quiera. Esta propiedad de «auto-semejanza» es característica de los fractales. En la fig. 12 se representa el diagrama de bifurcación para valores de $r \in (3{,}53,\ 3{,}593)$, donde se amplía el recuadro señalado en la figura 11. Si se hicieran también ampliaciones de los recuadros que aparecen en la figura 12, se obtendrían «copias» de la misma imagen a diferentes escalas.

Existe un *software* de distribución gratuita *Fractint* (http://spanky.triumf.ca/www/fractint/fractint.html) que permite obtener este fractal (además de muchos otros) directamente en la pantalla de un PC y hacer zoom sobre la figura para observar detalles ampliados de ella, sin necesidad de programar.

El diagrama de bifurcación muestra que hay «ventanas» dentro de la región caótica donde el atractor vuelve a ser finito, es decir, vuelve a haber orden dentro del desorden. Una ampliación detallada del diagrama nos hará más explícitas estas ventanas. Por ejemplo, en la figura 13 se presenta el diagrama de bifur-

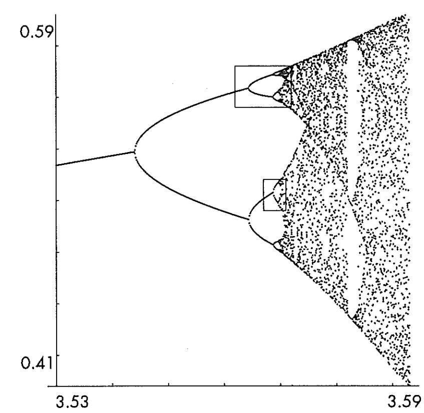


Figura 12

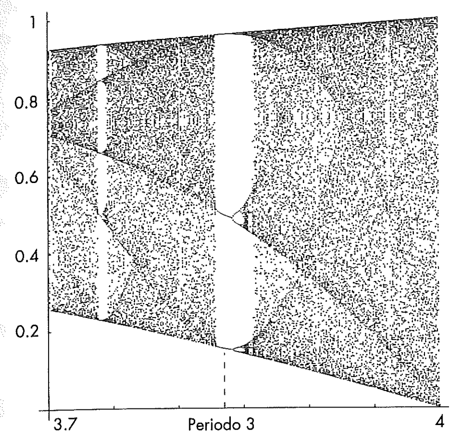


Figura 13

cación para valores de $r \in (3,7, 4)$ donde se aprecia más claramente una ventana correspondiente al periodo 3.

¿Pero qué es exactamente el caos? Desde el punto de vista matemático (Romero, 1994; Peitgen, 1992), diremos que una función f: $V \rightarrow V$ es *caótica en V* si verifican tres propiedades:

1. Sensible a las condiciones iniciales.
2. Debe tener puntos con todos los periodos posibles y éstos deben ser densos en V.
3. Debe ser topológicamente transitiva en V.

En las siguientes secciones vamos a abordar experimentalmente estas propiedades estudiando concretamente una función que las verifica: la función logística con $r = 4$.

Primera propiedad de una función caótica: sensibilidad a las condiciones iniciales

Esta propiedad es conocida popularmente como «efecto mariposa». Supongamos que conseguimos dos iteraciones de punto fijo $\{x_n\}$ y $\{x_n^*\}$ del iterador logístico con $r = 4$ comenzando en valores distintos aunque muy próximos: x_0 = 0,232 y $x_0^* = x_0$ + 0,00001. Las primeras iteraciones son parecidas pero pronto comienzan a haber grandes diferencias. Así, por ejemplo, la iteración 25 en el primer caso toma el valor 0,991, mientras que en el segundo caso es 0,209. Teniendo en cuenta que el rango de valores de la función es [0, 1], las diferencias son muy importantes, tan grandes como la propia función.

Usando Mathematica *se puede calcular una aproximación del exponente de Lyapunov mediante un número finito de iteraciones.*

En la figura 14 se representan las diferencias entre las iteraciones obtenidas en ambos casos, mientras que en la figura 15 se muestra como en el curso de la iteración las diferencias se van incrementando substancialmente aunque los valores iniciales estén próximos.

El exponente de Lyapunov (Peitgen, 1992) sirve para cuantificar la sensibilidad a las condiciones iniciales. Se calcula como:

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \ln(|f'(x_k)|)$$

Usando *Mathematica* se puede calcular una aproximación del exponente de Lyapunov mediante un número finito de iteraciones. Es interesante, calcular dicho exponente para distintos valores de r. Donde el exponente es negativo, hay un punto fijo o ciclo estable y, por lo tanto, valores próximos convergen a los puntos estables. Sin embargo, cuando es positivo implica divergencia en condiciones iniciales próximas. Concretamente, el siguiente programa:

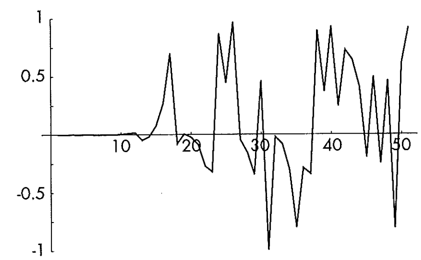


Figura 14

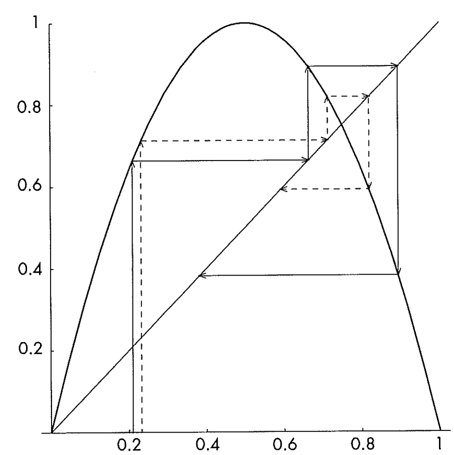


Figura 15

```
f [ x_]: = 4 x (1-x); val = 0.232; expon = 0.0; nitera = 10000;
For [ i = 1, i < nitera, i++,
expon = expon + Log [ Abs [f ' [ val ] ] ];
val = f [ val ];]
expon = expon / nitera
```

proporciona como valor del exponente

$$\lambda(0,232) \approx 0,693$$

Segunda propiedad de una función caótica: puntos periódicos densos

Vamos a comprobar otra propiedad característica de una función caótica: debe tener puntos periódicos con todos los periodos posibles y deben ser densos en el intervalo de definición.

En la función $f(x) = 4x(1-x)$ hacemos el cambio de variable:

$$x = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} v\right)$$

con $0 \le v \le 1$. Usando el comando

Plot[(Sin[(Pi/2) v])^2, {v, 0,1}],

veremos la gráfica (figura 16)correspondiente al cambio efectuado.

Supongamos que generamos una sucesión iterando la función anterior partiendo de

$$x_0 = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} v_0\right)$$

entonces:

$$x_1 = f(x_0) = 4x_0(1-x_0) =$$

$$4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} v_0\right)\cdot\left(1-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} v_0\right)\right) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} 2v_0\right)$$

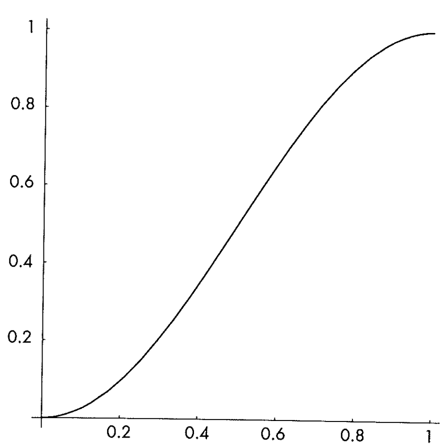


Figura 16

...otra propiedad característica de una función caótica: debe tener puntos periódicos con todos los periodos posibles y deben ser densos en el intervalo de definición.

y así sucesivamente, de modo que las iteraciones se pueden calcular directamente como:

$$x_n = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} 2^n v_0\right)$$

Un punto x_0 será periódico de periodo n si $f^n(x_0) = x_0$, entonces:

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} 2^n v_0\right) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} v_0\right)$$

Son soluciones de la ecuación anterior:

$$\frac{\pi}{2} 2^n v_0 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} v_0 + k\pi \Rightarrow v_0 = \dfrac{2k}{2^n-1} \\ k\pi - \frac{\pi}{2} v_0 \Rightarrow v_0 = \dfrac{2k}{2^n+1} \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{N}$$

Si

$$x_0 = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{h}{2^n-1}\right)$$

con h par, la iteración de punto fijo se convierte en un n-ciclo ya que: $x_n = x_0$.

Si

$$x_0 = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{h}{2^n-1}\right)$$

con h impar, entonces:

$$x_1 = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{h}{2^n-1}\right)$$

será un punto periódico de periodo n porque $x_{n+1} = x_1$, aunque en este caso el punto de partida x_0 no es un elemento del ciclo. Así que los puntos de la forma:

$$v = \frac{h}{2^n-1}$$

con $h = 1, 2, \ldots, 2^n-1$, dan lugar a órbitas de periodo n. Análogamente para

$$v = \frac{h}{2^n+1}$$

Admite la función puntos periódicos de todos los periodos posibles y además son densos en el intervalo [0, 1,] ya que dado cualquier punto w es posible encontrar un punto x_0 periódico todo lo cerca que se quiera de w. Vamos a comprobarlo con un ejemplo: $w = 0,36$ y $\delta = 0,01$. Usando *Mathematica*, comprobaremos que el primer valor de n para el que todos los subintervalos del tipo

$$\left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{k}{2^n-1}\right), \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{k+1}{2^n-1}\right)\right]$$

son de amplitud menor δ es $n = 8$. La amplitud del subintervalo mayor es

0,00615 y además w caerá seguro dentro de uno estos subintervalos. Concretamente:

$$w = 0,36 \in \left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{104}{2^8-1}\right), \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{105}{2^8-1}\right) \right] \approx [0,3572, 0,3632]$$

siendo el extremo izquierdo del subintervalo un punto de periodo 8.

Tercera propiedad de una función caótica: topológicamente transitiva

Diremos que la función f es *topológicamente transitiva* en [0, 1] si para cualquier par de subintervalos abiertos I y J de [0, 1], que pueden ser todo lo pequeños que se quiera, se puede siempre encontrar un valor en I que al iterar por f se transforma en una determinada iteración en un elemento de J.

Una forma intuitiva de justificar que la función logística con $r = 4$ verifica esta propiedad consiste en subdividir [0, 1] en intervalos pequeños y comprobar que por iteración se puede obtener a partir de cualquier subintervalo de entrada cualquier subintervalo de llegada. Si esta condición se satisface para cualquier subdivisión finita (por pequeña que sea), está claro que la función será topológicamente transitiva.

Supongamos que dividimos el intervalo [0, 1] en 10 partes iguales:

Ángela Rojas
Departamento de Matemáticas
Escuela Universitaria Politécnica
Universidad de Córdoba
SAEM «Thales»

$$I_k = \left[\frac{k-1}{10}, \frac{k}{10} \right]$$

con $k = 1,\ldots, 10$

Consideremos un subintervalo concreto: I_2 = [0,1, 0,2] e iteramos 5 veces.

En la tabla 1 podemos ver como en sólo 4 iteraciones ya se pasa por los 10 subintervalos de [0, 1]. Se obtiene un resultado similar de haber escogido cualquier otro subintervalo distinto de I_2, o de haber subdivido en 100, 1000 o un millón de partes. Además f^5([0,1; 0,2]) = [0, 1], lo que quiere decir que cualquier elemento de [0, 1] tiene una preimagen en el pequeño intervalo I_2.

Iteración	*Intervalo origen*	*Intervalos visitados*
0	[0,100; 0,200]	I_2
1	[0,360; 0,640]	$I_4\ I_5\ I_6\ I_7$
2	[0,922; 1,000]	I_{10}
3	[0,000; 0,289]	$I_1\ I_2\ I_3$
4	[0,000; 0,822]	$I_1\ I_2\ I_3\ I_4\ I_5\ I_6\ I_7\ I_8\ I_9$
5	[0,000; 1,000]	$I_1\ I_2\ I_3\ I_4\ I_5\ I_6\ I_7\ I_8\ I_9\ I_{10}$

Tabla 1

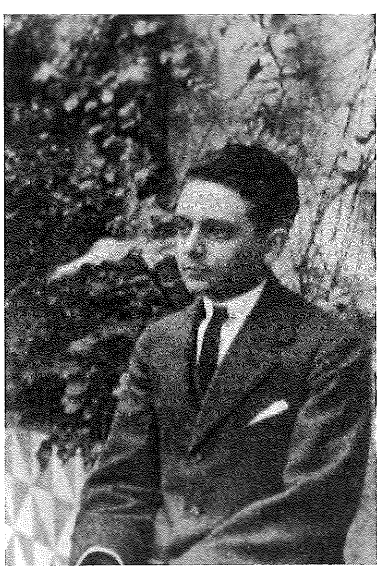
Bibliografía

PEAK y FRAME (1994): *Chaos under control. The art and Science of Complexity*, W. H. Freeman and Company, New York.

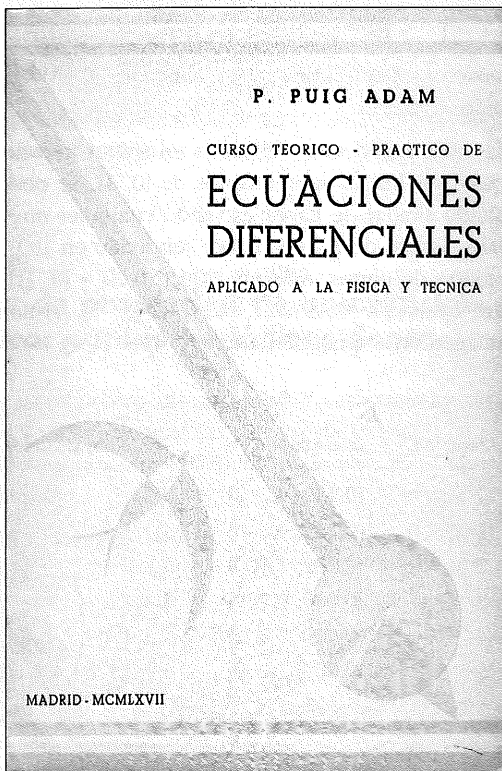
PEITGEN, JURGENS y SAUPE (1992): *Chaos and Fractals. New Frontiers of Science*, Springer-Verlag, New York.

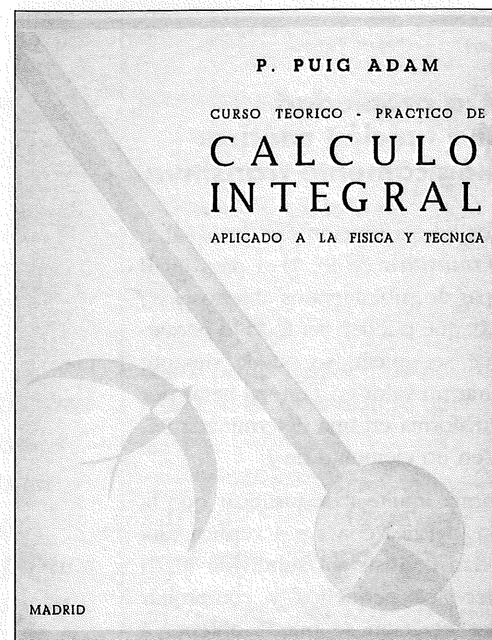
ROMERO, J. L. (1994): «Introducción al caos», *Epsilon*, n.° 28, vol. 10(1), 55-80.

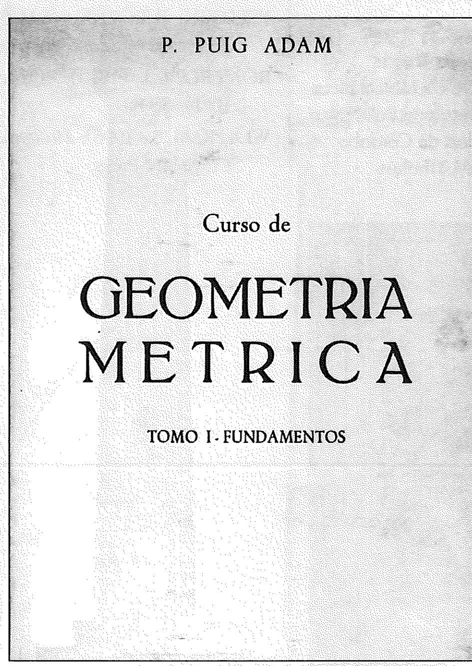
WOLFRAM, S. (1996): *Mathematica Book*, Wolfram Media/Cambridge University Press.



Puig Adam a los 20 años







Los tres manuales universitarios clásicos de Puig Adam

SUMA 34
junio 2000, pp. 69-71

La regla de los signos

Antonio José Varo Gómez de la Torre

ARTÍCULOS

En este trabajo presentamos una interpretación geométrica de la regla de los signos para el producto, que complementa su definición formal. Todos conocemos la necesidad de la mencionada regla para que la multiplicación de números positivos y negativos cumpla las mismas propiedades que la multiplicación de números positivos.

ESTE TRABAJO PRETENDE DIVULGAR que la definición formal del producto (y en consecuencia de la regla de los signos) admite una interpretación gráfica fundamentada en la semejanza de triángulos de la geometría euclídea. Para ello nos serviremos de unas construcciones inspiradas en las que Hilbert ideó para definir el producto de «puntos» sobre la recta (J. Dieudonné, 1987). El proceso algorítmico que las describe es el siguiente:

Sean a y b dos números positivos.

1. Representémoslos en la recta y llamemos U, A y B a los afijos de 1, a y b, respectivamente:

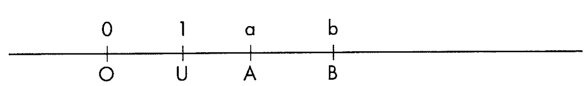


Figura 1

2. Tracemos una recta r, que pase por O y no esté incluida en la recta numérica, y marquemos sobre ella un punto cualquiera X:

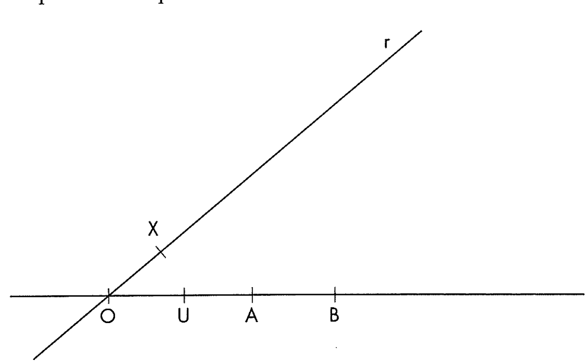


Figura 2

3. Unamos X con U y con A:

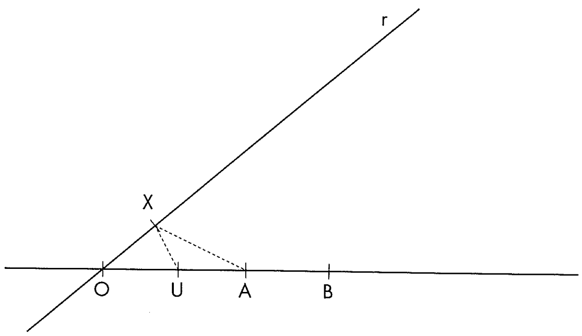


Figura 3

4. Por B tracemos una paralela a XU, y llamemos B' al punto donde corta a r:

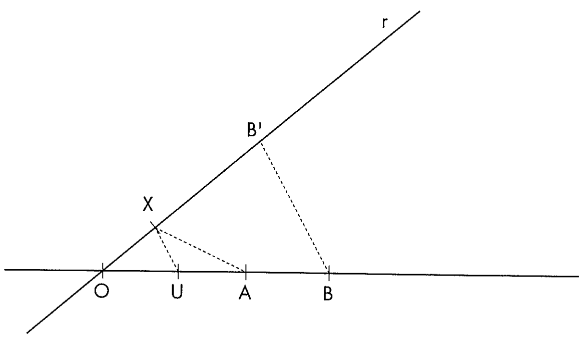


Figura 4

5. Por B' tracemos una paralela a XA, y llamemos P al punto donde corta a la recta numérica:

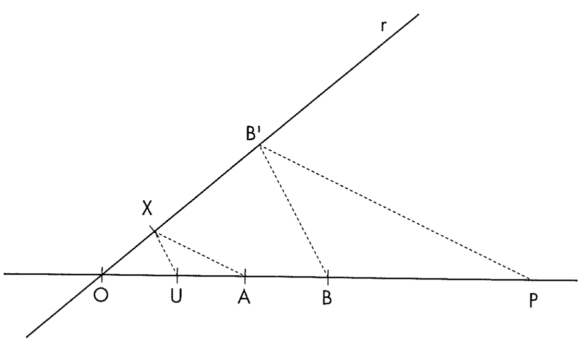


Figura 5

De las construcciones anteriores se deducen las siguientes semejanzas de triángulos:

$$\widehat{OUX} \approx \widehat{OBB'}$$

$$\widehat{OAX} \approx \widehat{OPB'}$$

De la primera relación de semejanza, deducimos:

$$\frac{OU}{OB} = \frac{OX}{OB'} \Leftrightarrow \frac{1}{b} = \frac{OX}{OB'} \quad \text{[I]}$$

De la segunda semejanza de triángulos:

$$\frac{OA}{OP} = \frac{OX}{OB'} \Leftrightarrow \frac{a}{OP} = \frac{OX}{OB'} \quad \text{[II]}$$

De [I] y [II] se deduce que:

$$\frac{1}{b} = \frac{a}{OP} \Leftrightarrow OP = a \cdot b$$

Podemos, pues, afirmar que:

el producto de a por b es la abcisa del punto P, obtenido aplicando el algoritmo descrito.

Si en lugar del producto $a \cdot b$ hubiésemos considerado $b \cdot a$, el punto P, obtenido hubiese sido el mismo (el producto es conmutativo), como se puede apreciar en la figura siguiente:

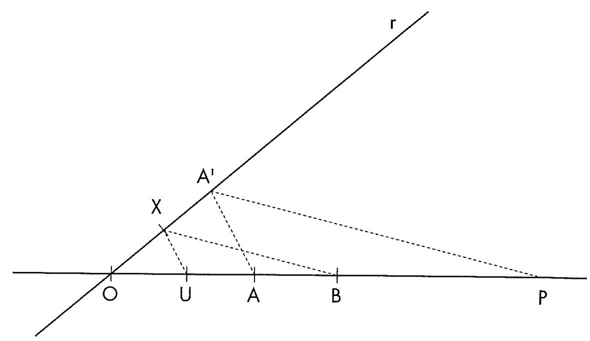


Figura 6

Todo lo anterior es cierto sean cuales sean los números positivos a y b, no necesariamente mayores que 1; así:

a) Si $0 < a < 1$ y $b > 1$, y A y B son los afijos respectivos de a y b:

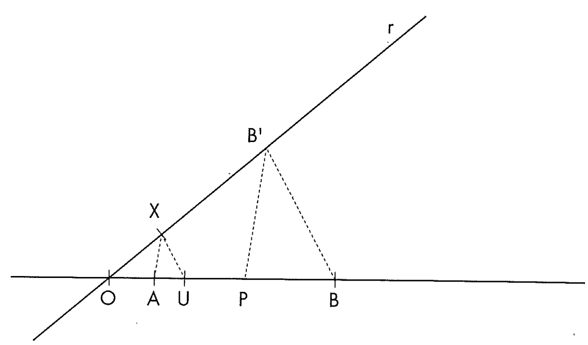


Figura 7

$$\widehat{OUX} \approx \widehat{OBB'} \quad \text{y} \quad \widehat{OAX} \approx \widehat{OPB'}$$

$$a \cdot b = \text{Abscisa de } P$$

(Obsérvese cómo P queda a la izquierda de B: multiplicar no siempre significa aumento).

b) Si $0 < a < 1$ y $0 < b < 1$, y A y B son los afijos respectivos de a y b:

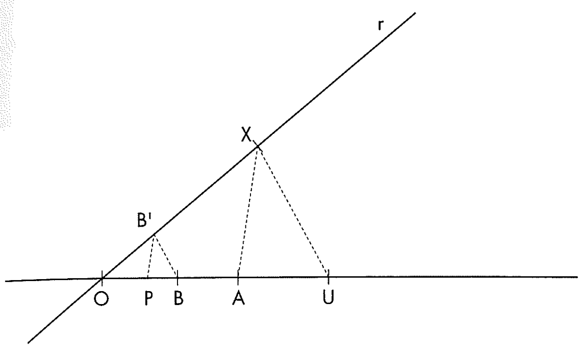


Figura 8

$$\widehat{OUX} \approx \widehat{OBB'} \quad \text{y} \quad \widehat{OAX} \approx \widehat{OPB'}$$

$$a \cdot b = \text{Abscisa de } P$$

c) Si $a = 1$ y $b > 0$, y B es el afijo de b, resulta trivial comprobar que $P \equiv B$.

Si consideramos ahora todos los números (positivos y negativos) y ampliamos a todos los puntos de la recta numérica la aplicación del algoritmo anterior, así como la conclusión final ($a \cdot b$ = Abscisa de P), se obtiene una interpretación geométrica del producto de dos números cualesquiera, que «ilustra» la regla de los signos. En efecto:

caso 1)

"+" × "–" = "–"

Sean $a > 0$ y $b < 0$, y A y B sus afijos respectivos; entonces:

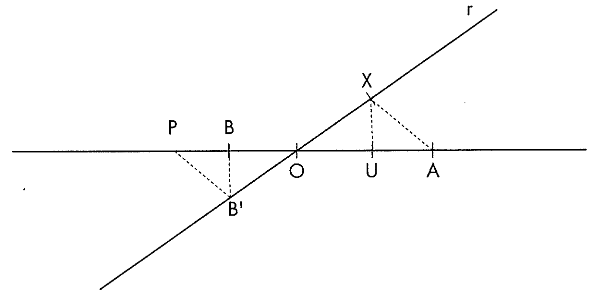


Figura 9

$a \cdot b$ = Abscisa de P (negativa)

(Téngase en cuenta, además, que, por semejanza de triángulos, se obtiene que: $|a| \cdot |b|$ = Medida del segmento OP)

Caso 2)

"–" × "–" = "+"

Sean $a < 0$ y $b < 0$, y A y B sus afijos respectivos; entonces:

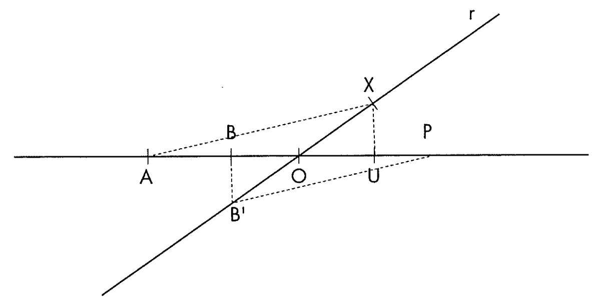


Figura 10

$a \cdot b$ = Abscisa de P (positiva)

(Al igual que antes, y por la misma razón, $|a| \cdot |b|$ = Medida del segmento OP)

Antonio José Varo
IES Vicente Aleixandre.
Sevilla

Bibliografía

BELL, E. T. (1985): *Historia de las matemáticas*, Fondo de Cultura Económica, México.

DIEUDONNÉ, Jean, (1987): *En honor del espíritu humano*, Alianza Editorial, Madrid.

XVI Cursos sobre Aspectos Didácticos en la Enseñanza Secundaria

INSTITUTO DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

MATEMÁTICAS

Zaragoza, 11, 12 y 13 de septiembre de 2000

- *Geometría y realidad*
  Claudi ALSINA CATALÀ. Universidad Politécnica de Cataluña
- *El álgebra escolar no es sólo cuestión de contenidos*
  M.ª Ángeles ORTIZ CAPILLA. IES Cardenal Cisneros de Madrid
- *Hacer Matemáticas: el recurso del juego*
  José María GAIRÍN SALLÁN. Universidad de Zaragoza
- *El vídeo como recurso didáctico en la clase de Matemáticas*
  Antonio PÉREZ SANZ. CPR Ciudad Lineal de Madrid
- *Recursos de hoy y de ayer para enseñar Matemáticas*
  José Luis ÁLVAREZ GARCÍA. IES n.º 5 de Avilés

Coordinador: Emilio PALACIÁN GIL
Secretaria: Ana GÓMEZ OPLA

Curso homologado por el Departamento de Educación y Ciencia del Gobierno de Aragón: 20 horas (2 créditos de formación)
Fecha límite de inscripción: 9 de septiembre de 2000
Importe: 4.000 pta (incluidas actas)

BOLETÍN DE INSCRIPCIÓN

XII CURSOS SOBRE ASPECTOS DIDÁCTICOS EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA. **MATEMÁTICAS**

Nombre: . . . . DNI . . . .

Dirección: . . . .

Población: . . . . CP: . . . . Provincia: . . . .

Inscripción: 4.000 pta (actas incluidas). ☐ En metálico ☐ Giro postal N.º . . . .

Remitir a:

Instituto de Ciencias de la Educación. C/. Pedro Cerbuna, 12. 50009 ZARAGOZA. Tno.: (976) 761494. Fax: (976) 761345

SUMA 34
junio 2000, pp. 73-80

Una experiencia con Cabri: las curvas cónicas

Isabel García García
Carmen Arriero Villacorta

En este artículo se utiliza el progama interactivo de geometría, Cabri, para el estudio de las cónicas, en una experiencia enfocada a alumnado de 4.° de ESO y Bachillerato.
Con la ayuda del programa se construyen fácilmente lo que permite hacer un estudio global de estas curvas, tanto desde el punto de vista de la geometría clásica como de la geometría analítica.

IDEAS Y RECURSOS

LAS CURVAS CÓNICAS aparecen de forma tan frecuente en la Naturaleza, en la Ciencia y en la Tecnología que resulta sencillo despertar interés acerca de ellas

Con la ayuda del programa Cabri se construyen fácilmente lo que permite hacer un estudio global de estas curvas, tanto desde el punto de vista de la geometría clásica como de la geometría analítica.

En un primer acercamiento, el programa ayuda a trabajar con las cónicas sin necesidad de la geometría analítica, ofreciendo la posibilidad de tratar este contenido en niveles de Secundaria Obligatoria en los que el alumnado aún no ha adquirido gran destreza en el cálculo.

Así, a partir de la definición de cada cónica como lugar geométrico se procede a su construcción. Una vez dibujada, se estudian sus elementos característicos (focos, ejes, simetrías, excentricidad,...).

En el caso particular de la elipse se realiza una simulación del elipsógrafo, instrumento utilizado para dibujar elipses. El procedimiento empleado se aprovecha para justificar, con un razonamiento matemático sencillo, la ecuación de esta curva.

Además, aprovechando el dinamismo del programa, se pueden dibujar las curvas cónicas como envolventes de rectas. Este método de construcción resulta atractivo y novedoso por su sencillez y por la elegancia con que el programa realiza el estudio global de estas curvas.

A continuación, se muestran algunas de las actividades que hemos desarrollado para el aprendizaje de las cónicas, enfocadas a un alumnado de 4.° de la ESO o de Bachillerato.

El nivel de conocimientos del programa requerido para llevar a cabo la experiencia es medio. Por ello, la primera sesión se dedicará a presentar el *Cabri* y a manejar los comandos que se van a utilizar con más frecuencia. A partir de aquí los alumnos realizarán las actividades que se proponen.

Para llevar a cabo estas actividades se facilita a los alumnos unas hojas-guión en las que se les indican los pasos que hay que seguir para realizar las construcciones.

En primer lugar, para incidir en el concepto de lugar geométrico como conjunto de puntos del plano que cumplen una determinada propiedad, realizan el siguiente ejercicio:

La escalera

Una escalera, apoyada simultáneamente en la pared y sobre un suelo resbaladizo, se viene abajo con un cubo de agua que se encontraba sobre ella. ¿Cuál es la trayectoria seguida por el cubo en su caída?

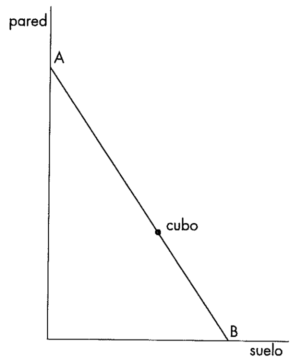


Figura 1

Para averiguar la curva que describe este movimiento, se representará con *Cabri* la situación mediante una simulación del problema.

Sigue, para ello, los siguientes pasos:

1. Dibuja un segmento y mide su longitud. Este segmento representará la escalera.
2. Transfiere la medida de la longitud de la escalera a otra semirrecta (será el suelo sobre el que se apoya). A continuación, dibuja un segmento en la semirrecta de igual longitud que la de la escalera.
3. Activa Punto sobre objeto y dibuja un punto *B* sobre este segmento. Este punto representará el pie de la escalera.
4. Para dibujar la pared, haz una recta perpendicular al segmento en uno de sus extremos.
5. Con Compás traza la circunferencia de centro *B* y radio la longitud de la escalera. El punto de corte de ésta con la pared, *A*, dará el otro extremo de la escalera.
6. Activa Segmento, une los puntos *A* y *B* para dibujar la escalera apoyada en la pared. Con Mostrar/Ocultar oculta los extremos del segmento situado sobre el suelo que limita el movimiento del punto *B*.
7. Con Puntero desplaza el punto *B* para observar el deslizamiento de la escalera.

Para llevar a cabo estas actividades se facilita a los alumnos unas hojas-guión en las que se les indican los pasos que hay que seguir para realizar las construcciones.

8. Activa Punto sobre objeto y construye un punto *C* sobre la escalera, será el cubo.

   Para visualizar el movimiento del cubo al caer de la escalera sigue los siguientes pasos:

   - Activa **traza** y selecciona el punto *C* (se habrá seleccionado cuando el punto elegido esté parpadeando).
   - Con Puntero desplaza el punto *B*. Aparecerá la traza del cubo cuando cae de la escalera.
   - CRTL + F elimina la traza de la pantalla.
   - Una vez activada la **traza**, elige **animación** y señala el punto *B* con el ratón y arrástralo hasta que aparezca un muelle, luego suéltalo. Se observará una animación, con traza, del cubo cuando se cae la escalera. Para parar la animación pulsar el ratón o barra espaciadora.
   - Quita la **traza** con CRTL + F y activa **traza activada/desactivada** para deseleccionar el punto *C*.

9. Elige lugar geométrico, señala el punto *C* y luego el *B* para dibujar la curva (elipse) que describe este fenómeno. Si el cubo lo sitúas en otras posiciones de la escalera aparecerán otras elipses. Observa qué ocurre cuando el cubo se encuentra en la mitad de la escalera.

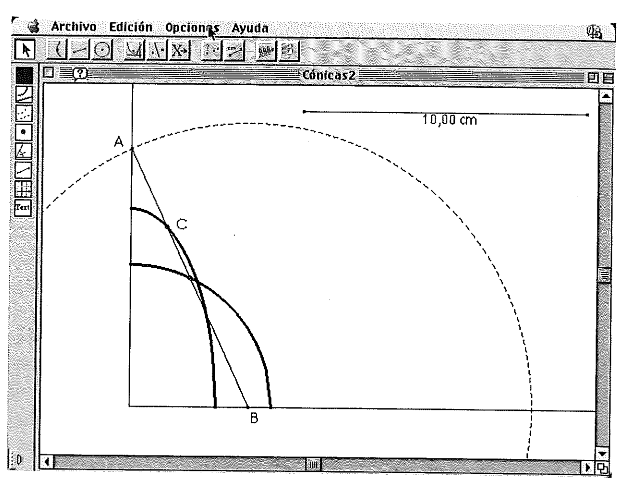


Figura 2

Cónicas

Elipse. Método del jardinero

Una vez que los alumnos están familiarizados en el manejo del programa, se procede al estudio de las curvas cónicas. Se comienza por la construcción de la elipse empleando el método del jardinero.

Se comienza por la construcción de la elipse empleando el método del jardinero.

Construiremos una elipse teniendo en cuenta su definición como lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

1. Dibuja una recta definida por los focos de la elipse F y F'.
2. Construye un segmento auxiliar AB, cuya longitud será $2a$, por lo que debe ser mayor que la distancia focal $2c$.
3. Construye un punto X sobre AB y define los segmentos AX y XB.
4. Activa **Compás** y construye dos circunferencias: una centrada en F' y radio la longitud del segmento AX y otra circunferencia con centro en F y radio XB.
5. Construye los puntos de intersección P y P' de las dos circunferencias. Estos dos puntos pertenecen a la elipse ya que:

$$PF + PF' = AB = 2a, \text{ y}$$
$$P'F + P'F' = AB = 2a$$

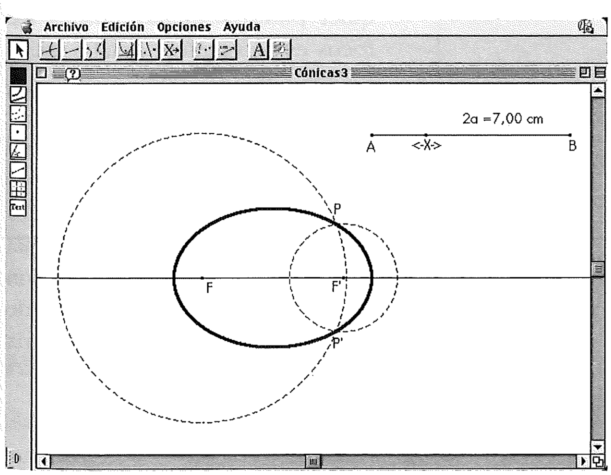


Figura 3

6. Para dibujar la elipse activa **Lugar geométrico**, señala P y acto seguido el punto X. para dibujar la otra parte de la elipse, con Lugar geométrico activado, señala P' y posteriormente el punto X.
7. Activa **Cónica** y señala cinco puntos del lugar geométrico, *Cabri* dibujará una elipse.
8. Modifica los datos iniciales y observa como se transforma la elipse.
9. Une los puntos F y F', llamados focos de la elipse, con un punto arbitrario P de la elipse por medio de los segmentos FP y FP', estos segmentos llevan el nombre de radios vectores focales del punto P.

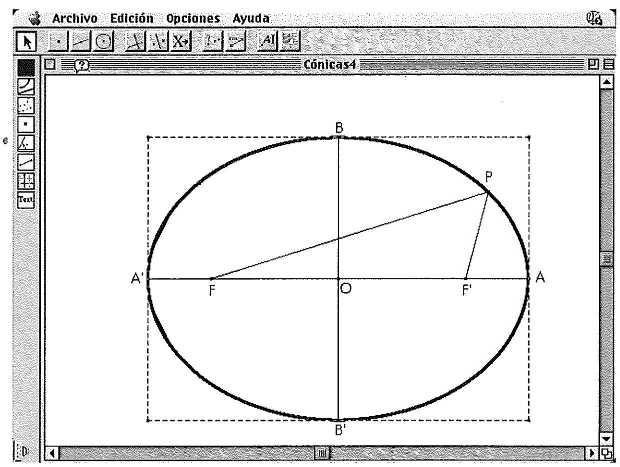


Figura 4

El punto medio O del segmento $FF' = 2c$ es el centro de simetría de la elipse. La recta que pasa por los focos es el eje de simetría y se denomina *eje focal*. La recta que pasa por el centro O y es perpendicular al eje focal también es el eje de simetría. La elipse se corta con los ejes en los puntos A, A' y B, B' llamados *vértices de la elipse*. Ellos son los puntos medios de los lados del rectángulo circunscrito. El segmento $AA' = 2a$ del eje focal se denomina *diámetro mayor de la elipse*. El segmento $BB' = 2b$ lleva el nombre de *diámetro menor de la elipse*.

10. Comprueba que en una elipse se verifica: $a^2 = b^2 + c^2$

La *excentricidad* es un número que mide el achatamiento mayor o menor de la elipse. Se define así:

$$e = c/a, \ c < a$$

11. Con la opción **Calcular**, calcula el valor de la excentricidad de la elipse que tienes dibujada. Mediante el comando **Puntero** modifica la elipse y observa la relación que hay entre el valor de la excentricidad y la forma de la curva.

¿Qué valores máximo y mínimo tiene la excentricidad de una elipse?

Elipse. Método del carpintero

A continuación se realiza con *Cabri* una simulación de un *elipsógrafo* (figura 5). Este instrumento se utiliza desde hace tiempo para dibujar elipses. Su mecanismo es muy sencillo, consta de dos ejes perpendiculares y una varilla con una punta para dibujar en uno de sus extremos. Esta varilla está fijada con dos tuercas situadas cada una de ellas en un eje. Estas tuercas se deslizan por los ejes produciendo en la varilla un movimiento cuyo trazo corresponde al de una elipse.

Construye, simulando un elipsógrafo con *Cabri*, una elipse de semiejes mayor y menor, 5 cm y 2 cm, respectivamente.

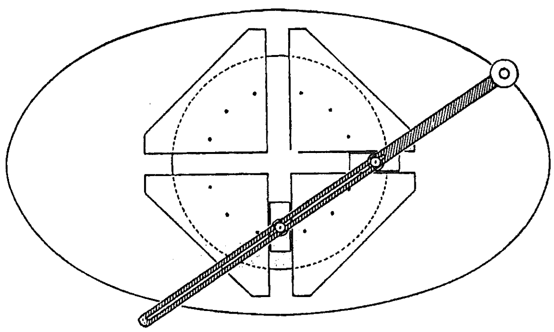


Figura 5. Elipsógrafo

1. Dibuja tres puntos A, B y C situados en una recta de forma que:

$$AC = a = 5 \text{ cm},$$
$$BC = b = 2 \text{ cm}$$

2. Muestra los ejes y sitúa un punto A sobre el eje OY.
3. Dibuja con **Compás** una circunferencia con centro A y radio $AB = a - b = 5 - 2 = 3$ cm.
4. Obtén B como punto de intersección de la circunferencia con el eje OX.
5. Construye la semirrecta de origen A que pasa por B.
6. Utilizando **Transferencia de medidas** sitúa un punto C sobre la semirrecta r tal que la longitud $AC = a = 5$.
7. Activa con **Traza** el punto C y desplaza el punto A. Observa que todos los puntos que aparecen están situados sobre la mitad de una elipse.

   Para obtener la otra mitad de la elipse construye el punto C', simétrico de C respecto del eje OY, y activa **Traza** sobre C' (figura 6).
8. Regenera el dibujo, Ctrl+F, y desactiva las trazas
9. Construye el lugar geométrico de los puntos C y C' cuando A se desplaza sobre el eje OY.
10. Señala 5 puntos del lugar geométrico y activa **Cónica** (figura 7).

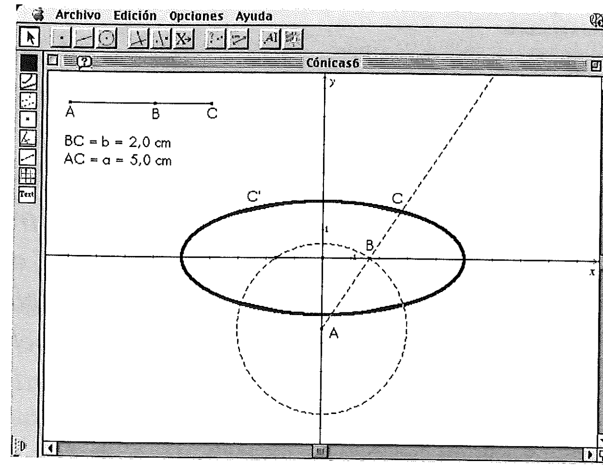


Figura 6

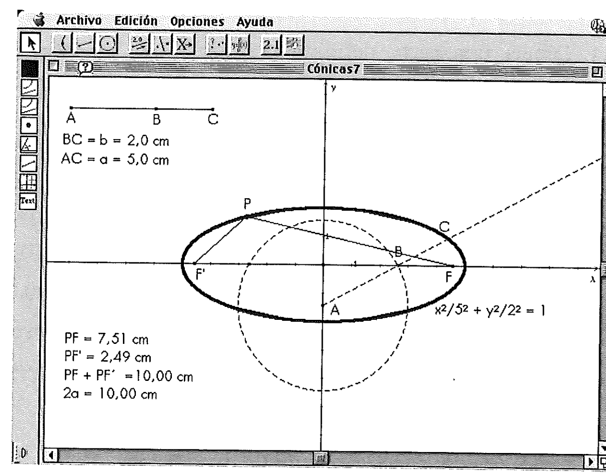


Figura 7

11. Utilizando la relación pitagórica $a^2 = b^2 + c^2$ encuentra los focos, F y F' de la elipse y comprueba que la suma de las distancias de cualquier punto P de la elipse a los focos es constante e igual a $2a$.
12. Comprueba con *Cabri* que la ecuación de esta elipse es:

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

Resulta sencillo a partir de esta construcción demostrar la ecuación de la elipse, bien por semejanza de triángulos o bien por trigonometría (figura 8).

Demostración 1

$$CD = x;\ AE = x$$
$$CE = \sqrt{5^2 - x^2}$$

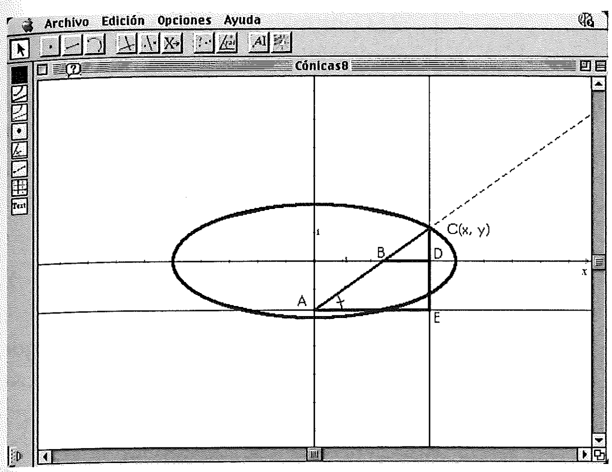


Figura 8

Por ser semejantes los triángulos ACE y BCD, se cumple:

$$\frac{CE}{AC} = \frac{CD}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{5^2 - x^2}}{5} = \frac{y}{2} \Leftrightarrow$$
$$\frac{5^2 - x^2}{5^2} = \frac{y^2}{2^2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

Demostración 2

$$\left.\begin{array}{r} \angle CBD = \angle CAE = \theta \\ \text{sen}\angle CBD = \dfrac{y}{2} \\ \cos\angle CBD = \cos\angle CAE = \dfrac{X}{5} \end{array}\right\}$$

y en consecuencia:

$$\left[\text{como } \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1\right] \Rightarrow$$
$$\left| \Rightarrow \frac{y^2}{2^2} + \frac{x^2}{5^2} = 1\right.$$

En general, los puntos del plano $C(x, y)$ que satisfacen la ecuación:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

con $a > b$ están sobre una elipse centrada en el origen de coordenadas, con el eje mayor de longitud $2a$ sobre el eje OX y el eje menor de longitud $2b$ sobre el eje OY.

Hipérbola

Siguiendo una estructura similar a la realizada con el estudio de la elipse se procede a las construcciones de la hipérbola y la parábola como lugares geométricos. Hay que señalar que, aunque los alumnos ya han adquirido una destreza suficiente en el manejo del programa, el método de construcción de la hipérbola no resulta tan intuitivo como el de la elipse, por lo que se recomienda que el profesor ayude al estudiante a justificar el porqué del procedimiento empleado.

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

1. Los datos iniciales son:

   Distancia focal: $FF' = 2c$

   Constante de la hipérbola: $AB = 2a$
2. Dibuja los dos focos de la hipérbola F' y F.
3. Construye un segmento auxiliar $F'C$ de longitud mayor que la distancia focal.
4. Obtén el punto B del segmento $F'C$, de forma que la longitud del segmento $F'B$ sea igual a la constante de la hipérbola: $2a$.
5. Considera X un punto cualquiera del segmento BC, y construye sendas circunferencias, una, de centro F' y radio $F'X$, y la otra con centro en el punto F y radio BX.
6. Los puntos de intersección, P y P', de las dos circunferencias son dos puntos de la hipérbola. (Figura 9)

   Efectivamente $PF' - PF = 2a$, ya que:

   $$PF' - PF = F'X - BX = (F'X + XC) - (BX + XC) =$$
   $$= F'C - BC = F'B = AB = 2a$$

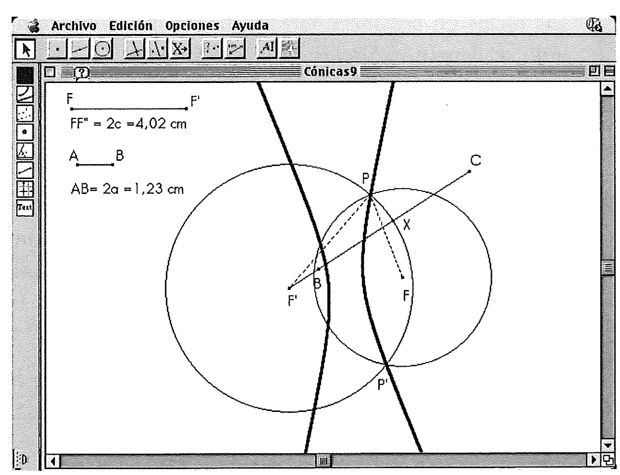


Figura 9

7. Dibuja las dos ramas de la hipérbola, utilizando el comando **Lugar geométrico**.
8. Activa **Cónica** y señala cinco puntos distintos del lugar geométrico, *Cabri* dibujará una hipérbola.

La hipérbola tiene centro de simetría *O*, que divide por la mitad al segmento $FF' = 2c$ y dos ejes de simetría, perpendiculares entre sí. Uno de ellos lleva el nombre de eje focal o real, pasa por los focos y corta a la hipérbola en dos puntos A y A' llamados vértices de la hipérbola; el otro no corta a la hipérbola y se denomina *eje imaginario.* El segmento $AA' = 2a$ recibe el nombre de *diámetro de la hipérbola.*

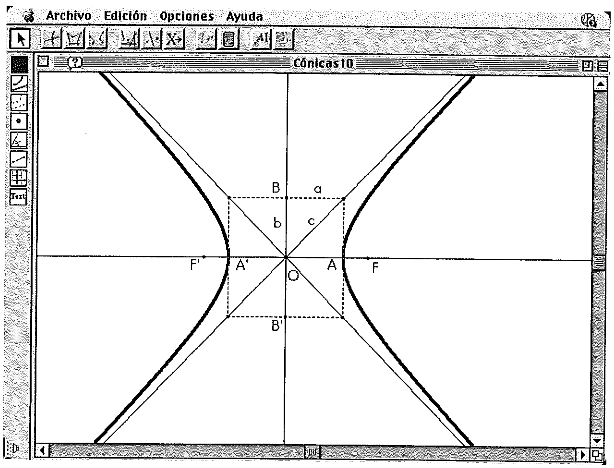


Figura 10

Lo mismo que la elipse, la hipérbola se define totalmente con un rectángulo simétrico con relación a los ejes y que los divide en los segmentos $AA' = 2a$ y $BB' = 2b$.

Comprueba que en una hipérbola se cumple:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Las rectas en las que están las diagonales del rectángulo se llaman *asíntotas* de la hipérbola.

La *excentricidad* es un número que mide la abertura mayor o menor de las ramas de la hipérbola. Se define así:

$$e = c/a, \quad c > a$$

9. Con la opción Calcular, calcula el valor de la excentricidad de la hipérbola que tienes dibujada. Mediante el comando Puntero modifica la hipérbola y observa la relación que hay entre el valor de la excentricidad la forma de la curva

¿Qué valores máximo y mínimo tiene la excentricidad de una hipérbola?

Parábola

La parábola se define como lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de una recta llamada *directriz* y de un punto fijo llamado *Foco*.

1. Dibuja una recta y llámala *Directriz*, y un punto, exterior a esta recta, al que nombras *F*.
2. Construye un punto, *X*, sobre la directriz.
3. El punto, *P*, que se obtiene como la intersección entre la mediatriz del segmento *XF*, y la recta que pasa por *X* y es perpendicular a la directriz, es un punto de la parábola.
4. Arrastra con el ratón el punto *X*, y observa qué curva describe *P*.
5. Para dibujar la parábola activa Lugar geométrico, señala el punto *P* y posteriormente *X* .

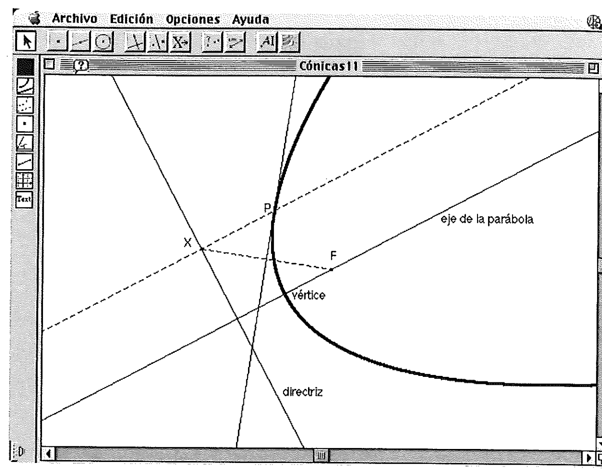


Figura 11

6. Los elementos más importantes de la parábola son:
   Foco es el punto fijo *F*.
   Directriz es la recta fija *d*
   Parámetro es la distancia del foco a la directriz; se designa por $2p$.
   Eje es la recta perpendicular a la directriz y que pasa por el foco.
   Vértice es el punto de intersección de la parábola con su eje.
   Radio vector es un segmento que une un punto cualquiera de la parábola con su eje.

La elipse y la hipérbola como envolvente

En esta última parte se obtendrá cada cónica como envolvente de rectas. Resulta muy interesante que después de realizar esta actividad con el ordenador se utilice el plegado de papel para obtener estas mismas construcciones.

A los alumnos se les pedirá que descubran el porqué geométrico del método empleado en el plegado y su equivalencia con el del ordenador.

1. Dibuja los focos de la elipse $d(F, F') = 2c$.
2. Dibuja un círculo de centro F' y radio $2a$, teniendo en cuenta que $c < a$.
3. Construye un punto cualquiera sobre este círculo con la orden Punto sobre objeto, y llámalo X.
4. Activa Mediatriz y dibuja la mediatriz de los puntos X y F.
5. Activa Traza sobre esta mediatriz y arrastra el punto X sobre la circunferencia. Aparecerá en pantalla la figura:

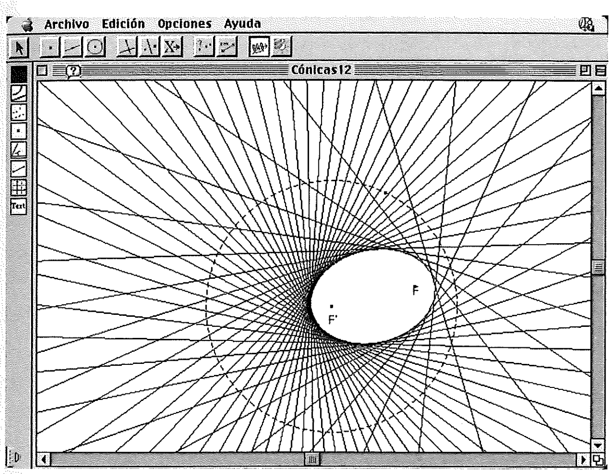


Figura 12

6. Para limpiar la pantalla utiliza la combinación de teclas Ctrl + F.
7. Desactiva Traza.
8. Considera la recta que pasa por los puntos F' y X. Llama P al punto de intersección de esta recta con la mediatriz. Activa Lugar geométrico señala P y luego X, *Cabri* dibujará una elipse (figura 13).
9. Demuestra que, efectivamente, se cumple:

$$d(F', P) + d(F, P) = 2a$$

10. Modifica los datos iniciales y comprueba que cuando $c > a$ la elipse se transforma en una hipérbola (figura 14).
11. Ahora, demuestra que en este caso (figura 15) se verifica que:

$$d(F', P) - d(F, P) = 2a$$

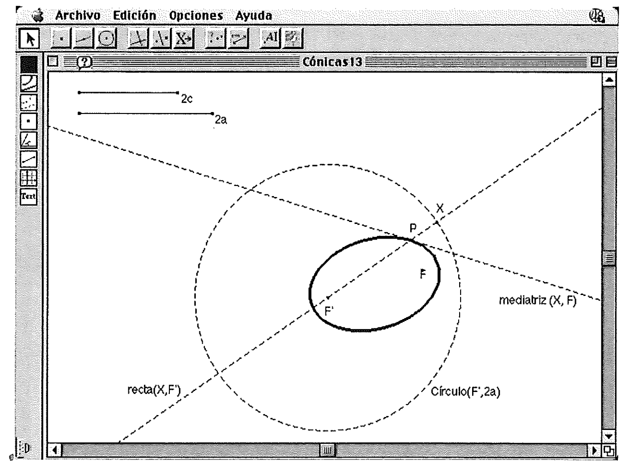


Figura 13

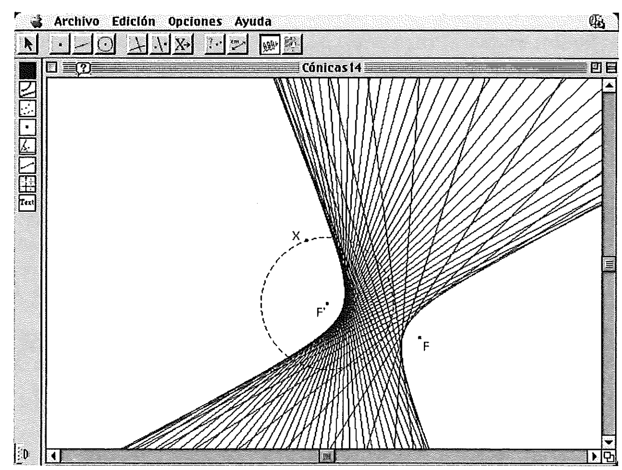


Figura 14

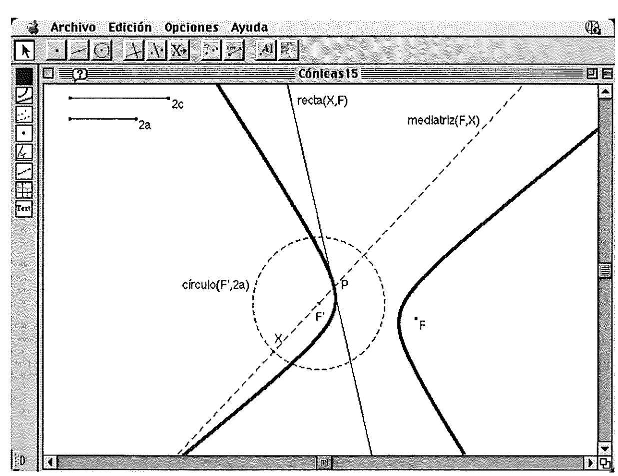


Figura 15

Asíntotas de la hipérbola

La hipérbola es la envolvente de una familia de rectas. De todas ellas, conviene destacar dos rectas que no tienen ningún punto de contacto con la hipérbola y que son aquellas mediatrices *M(X, F)* que son paralelas a las rectas *R(F', X)*. Estas rectas se denominan *asíntotas de la hipérbola.*

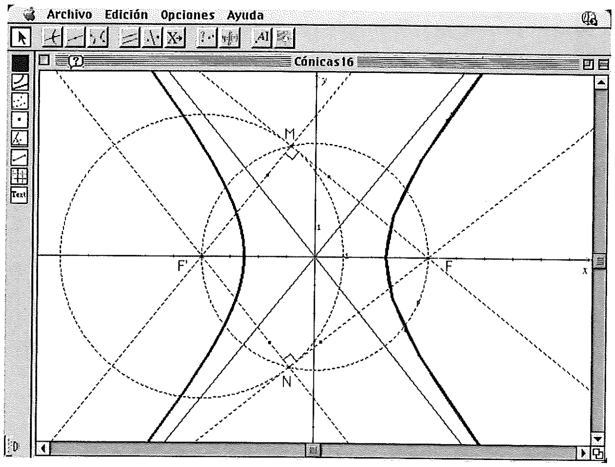


Figura 16

La parábola como envolvente

1. Dibuja una recta y llámala *Directriz*, y un punto, exterior a esta recta, al que nombras *F*, foco de la parábola.
2. Construye un punto, *X*, sobre la directriz.
3. Activa Mediatriz y señala sucesivamente los puntos *F* y *X* para dibujar la mediatriz del segmento *FX*.
4. Activa Traza sobre esta mediatriz y arrastra el punto *X* sobre la directriz. Aparecerá en pantalla la figura 17.
5. Limpia la pantalla.
6. Construye una recta perpendicular a la directriz a través del punto *X*. El punto que se intersección de esta recta con la mediatriz de *XF*, es un punto de la parábola. Activa Lugar geométrico, señala *P* y luego *X*, *Cabri* dibujará la parábola.

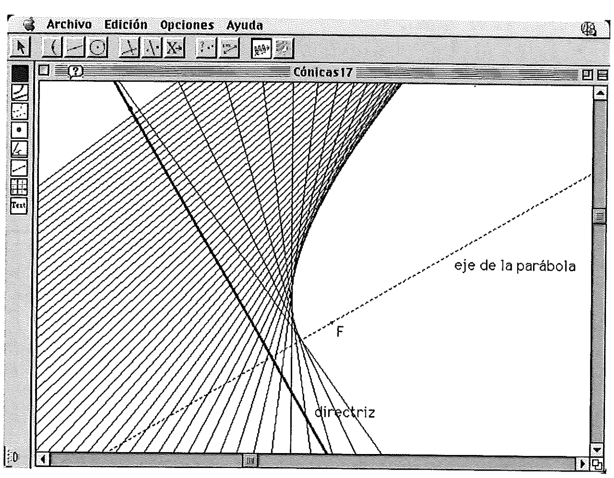


Figura 17

Isabel García
IES Arturo Soria. Madrid.
Sociedad Madrileña
de Profesores de Matemáticas
«Emma Castelnuovo»
Carmen Arriero
IES Ramón y Cajal. Madrid.
Sociedad Madrileña
de Profesores de Matemáticas
«Emma Castelnuovo»

Conclusiones

Los conocimientos previos necesarios para llevar a cabo esta experiencia son mínimos. Esto favorece la atención de la mayoría de los alumnos, incluso de aquellos que en la actividad diaria de la clase de Matemáticas se sienten perdidos, debido en muchos casos a las dificultades que tienen al realizar cálculos algebraicos.

Para la elaboración de las curvas cónicas, que en muchos casos se pueden realizar manualmente (cuerdas, plegado de papel, regla, elipsógrafo,...) y de forma sencilla, el ordenador obliga al alumno a profundizar en el razonamiento geométrico y favorece la visualización de relaciones geométricas.

En definitiva, la forma de trabajo con el *Cabri* o programas de ordenador similares conduce a nueva manera de aprender y trabajar en geometría que hasta ahora era impensable. Si se intentara realizar sin estas herramientas el proceso sería largo y laborioso por lo que impediría llegar a las construcciones finales, objetivo de la experiencia. Además estaría destinado, únicamente, a aquellos estudiantes que muestran facilidad para el dibujo técnico.

Con programas de este tipo el aprendizaje de la geometría está al alcance de nuestro alumnado. Esta experiencia no es más que una muestra de las muchas posibilidades que tiene la informática en este área.

Bibliografía

PEDOE, D. (1979): *La Geometría en el arte*, Gustavo Gili, Barcelona.

PUIG ADAM, P. (1952): *Curso de Geometría Métrica*, Tomos I y II, Madrid.

RÍO SÁNCHEZ DEL, J. (1994): *Lugares geométricos. Cónicas*, Síntesis, Madrid.

SCHER D. (1995): *Exploring Conics sections with the Geometer's Sketchpad*, Key Curriculum Press.

SUMA 34
junio 2000, pp. 81-85

Historia de las matemáticas: métodos no algebraicos para la resolución de problemas

Vicente Meavilla Seguí

En épocas pasadas, cuando el álgebra que utilizamos hoy en día no existía como tal o estaba dando sus primeros y balbuceante pasos, la resolución de problemas elementales de primer grado (problemas de móviles, grifos, relojes,...) fue atacada por los matemáticos mediante métodos aritméticos y geométricos (inversión, falsa posición, regla de tres,...) en los que no era preciso utilizar ningún tipo de simbolismo algebraico. En este artículo presentamos algunos de dichos métodos, convencidos de que pueden ayudar a los alumnos no universitarios cuando tengan que enfrentarse a determinados problemas utilizando el álgebra simbólica.

ARTÍCULOS

ANTES DE QUE EL ÁLGEBRA simbólica tomase carta de naturaleza en los manuales dedicados a la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, para la resolución de algunos problemas elementales se utilizaron diversos métodos no algebraicos (inversión, falsa posición, etc.) que, desde una perspectiva histórica, tienen un notable interés y que, en ocasiones, pueden iluminar al profesor de Matemáticas actual en su trabajo diario en el aula.

En este artículo presentamos algunos de dichos métodos, rescatados de viejos libros.

Método de inversión

Para resolver determinados problemas elementales, los matemáticos árabes, hindúes y, posteriormente, los autores occidentales utilizaron el método de inversión, que Aryabhata (476 d.C.) describía así:

> La multiplicación se convierte en división; la división en multiplicación; lo que era beneficio se convierte en pérdida; lo que era pérdida se convierte en ganancia; inversión.

El matemático árabe al-Amuli (1547-1622), refiriéndose al mismo método decía:

> Este procedimiento consiste en hacer lo contrario de lo que propone el enunciado: pide doblar, se semisuma; pide sumar, se resta; pide raíz, se cuadra, etc.; comenzando por la última parte del problema se obtiene la solución.

Dos ejemplos de aplicación del método de inversión

> Encontrar un número tal que si se multiplica por 5 y además por 7, y el resultado se divide por 12, el cociente es 8.
>
> Multiplica 8 por 12 y divide el resultado por 5 veces 7...
>
> (E. de la Roche, *Larismethique*).

Encuentra un número tal que si tomas 1/ 5, de este quinto otro 1/ 5, y de este 1/ 5 otro 1/ 5, el último quinto sea 6.

Haz lo siguiente:

Multiplica 6 por 5, hacen 30; multiplica 30 por 5, hacen 150; multiplica 150 por 5 y serán 750. Y este es el número que se pide.

(Joan Ventallol. *Aritmética*)

Método de una falsa posición

La *regla de una falsa posición* o *regla de falsa posición simple*, que ya fue utilizada por los antiguos egipcios, árabes e hindúes, gozó de una gran popularidad en los textos matemáticos del siglo XVI y todavía se puede encontrar en algunos libros de matemática elemental de la primera mitad del presente siglo.

En general, la regla de falsa posición simple se usaba para resolver algunos problemas de primer grado con una incógnita, sin necesidad de recurrir al simbolismo algebraico.

De hecho, los problemas resueltos por la regla de una falsa posición eran aquellos cuyos enunciados se pueden traducir literalmente a una ecuación del tipo: $a_1x + a_2x + \ldots + a_nx = b$ o, si se quiere, $ax = b$.

Descripción de la regla de una falsa posición

La regla de falsa posicion simple se reduce à tres preceptos.

1. Tomese qualquiera numero, que sea apto, para que en èl se puedan exercitar las operaciones que pide la question. 2. Examinese, si es el numero que se pregunta: y si acaso fuere el mismo, quedarà satisfecha la question; pero si no lo fuere, se formarà una regla de tres, que es el tercero precepto, y se hallarà el numero que se busca.

Exemplo. Pidese, que el numero 100. se divida en tres partes, que la primera sea dupla de la segunda, y èsta sea tripla de la tercera: que es lo mismo que pedir tres numeros, el primero doblado del segundo, y èste tres doble del tercero, que sumados hagan 100. Tomo arbitrariamente un numero, y sea 2. èste supongo ser el menor de los tres, que se piden, para mayor facilidad. Triplico el 2. y serà 6. el segundo; duplico el 6. y tengo 12. sumo estos tres numeros 12. 6. 2. y hacen 20. y porque la suma havia de ser 100. busco otro numero por la regla de tres, diciendo: Si 20. vienen de 2. de quàntos vendràn 100? y hallo vienen de 10. Este pues serà el numero menor: luego el segundo es 30. y el mayor es 60. Con esto queda satisfecha la question; porque he dado los tres numeros 60. 30. 10. de los quales 60. es doblado de 30. y èste triplo de 10. y sumados hacen 100.

(Tomás Vicente Tosca, *Compendio Mathematico*)

Justificación geométrica de la regla de una falsa posición

Por semejanza de triángulos (figura 1) se tiene que:

$$x/b = = x_1/b_1$$

De donde:

$$x = bx_1/b_1$$

La regla de una falsa posición o regla de falsa posición simple, *que ya fue utilizada por los antiguos egipcios, árabes e hindúes, gozó de una gran popularidad en los textos matemáticos del siglo XVI y todavía se puede encontrar en algunos libros de matemática elemental de la primera mitad del presente siglo.*

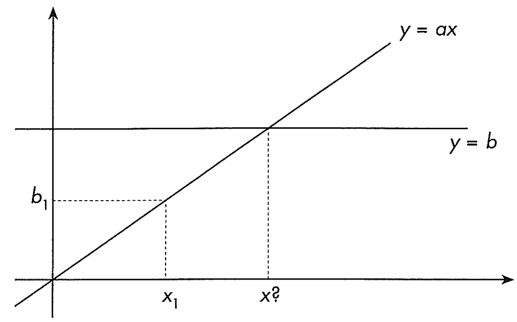


Figura 1

Regla de dos falsas posiciones

Marco Aurel, autor alemán que escribió en 1552 el primer libro de álgebra en castellano, refiriéndose a la regla de dos falsas posiciones se expresaba en los siguientes términos:

En la regla de 2 falsas posiciones: lo mesmo haras como con la vna falsa has visto, en poner vn numero falso, con el que siguiras conforme a la demanda. Y a la postre mira, si lo que viene es mas, o menos delo que hauia de ser, aquello pornas aparte al costado del numero falso a su mano derecha, con la señal de más, o menos, qual fuere, digo la differencia que haura delo que vino, a lo que hauia de venir. Y luego toma otro numero a tu plazer, mayor, o menor delo que primero tomaste (no haze al caso) con el qual haras lo mesmo como con la primera posicion heziste: a la postre mira la differencia si es mas, o memos delo que hauia de ser: y pornas esta segunda posicion debaxo de la primera: y la differencia debaxo de la primera differencia, con su señal, o nombre, si es mas, o menos. Y luego multiplica en cruz la primera differencia con la segunda posicion: y la segunda differencia con la primera posicion, y sigue estas reglas y auisos siguientes:

Nota quando las dos differencias fueren de mas, o las 2 de menos: restaras la vna de la otra, digo la menor differencia has de restar dela mayor, y lo que quedara sera tu partidor. Assi mesmo restaras las 2 multiplicaciones que en cruz multiplicaste: y la resta partiras por el susodicho partidor: y el quociente sera el numero verdadero demandado.

Y si las dos differencias la vna fuere mas y la otra menos, summaras las dichas dos differencias: y tal conjunto sera tu partidor: y las 2 multiplicaciones, que en cruz multiplicaste (como arriba has visto) summaras tambien en vno, y tal suma partiras por tu partidor: el quociente sera el numero verdadero y demandado.

Justificación algebraica de la regla de dos falsas posiciones

Supongamos que pretendemos resolver un problema cuyo enunciado se puede traducir a una ecuación del tipo:

$$ax + b = c \qquad [1]$$

Sea $x = x_1$ la primera suposición.

Entonces:

$$ax_1 + b = c_1 \qquad [2]$$

Si $c_1 = c$, el problema está resuelto.

Si $c_1 \neq c$, sea $c - c_1 = e_1$ (primera diferencia).

Sea $x = x_2$ la segunda suposición.

Entonces:

$$ax_2 + b = c_2 \qquad [3]$$

Si $c_2 = c$, el problema está resuelto.

Si $c_2 \neq c$, sea $c - c_2 = e_2$ (segunda diferencia).

Restando miembro a miembro las expresiones [1] y [2] resulta:

$$a(x - x_1) = e_1 \qquad [4]$$

Restando miembro a miembro las expresiones [1] y [3] se obtiene:

$$a(x - x_2) = e_2 \qquad [5]$$

Despejando *a* de [4] y [5] e igualando los resultados obtenidos se tiene que:

$$e_1/(x - x_1) = e_2/(x - x_2)$$

De donde, multiplicando medios por extremos y despejando la incógnita *x*, se llega finalmente a:

$$x = (e_1x_2 - e_2x_1)/(e_1 - e_2)$$

Esta última expresión contiene toda la casuística contemplada en la descripción de Marco Aurel.

Un ejemplo de aplicación de la regla de dos falsas posiciones

Dame un numero, que añadiendole su mitad y tercio, y mas 9, monte 60.

Para declaración de lo que esta demanda pide, pon por caso, que el numero sea 30, o lo que quisieres. Añade a estos 30 su mitad, que son 15, y su tercio, que son 10, y 9 mas, y montara todo 64. Y porque no quisieras sino 60 pondras los 30 que tomaste por numero falso, y adelante los 4 que vienen mas de los 60 que quisieras desta manera —— 30 mas 4.

Ya que no acertaste con el 30, porque fue grande, tomaras otro. Y sea qualquiera, assi como 36. Añadele su mitad, que son 18, y su tercio, que son 12, y mas 9, como pide la demanda, y montara todo 75. Y porque no quisieras sino 60 pondras el 36 que tomaste, y adelante los 15 que salen de mas, que es la diferencia que ay de los 60 hasta 75, como parece figurado.

30 mas 4

36 mas 15

Hecho esto multiplicaras los numeros falsos con sus diferencias contrarias, conuiene a saber los 30, que es el numero falso, por las 15, que es lo que en el segundo vino de mas, y montara 450. Multiplica assi mismo los 36, que es el segundo numero falso, por 4, que es la diferencia del primero, y montara 144, las quales multiplicaciones pondras delante, como parece.

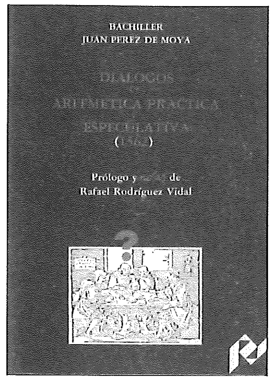
Mas

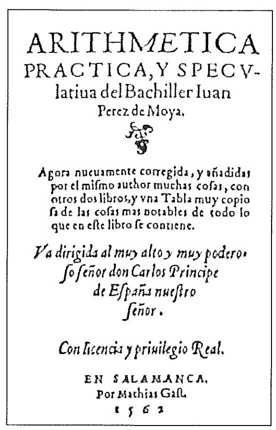
30 ╳ 4 —— 144

36 ╳ 15 450

Hecho esto, restaras las dos multiplicaciones, la menor de la mayor, como son 144 de 450, y la resta sera la particion. Resta mas, la vna diferencia, que es quatro, de la otra, que es 15, y lo que quedare sera partidor. Pues restando 144, que es la vna multiplicacion, de los 450, que es la otra, quedan 306. Resta mas, la vna diferencia, que es 4, de la otra, que es 15, y quedaran 11 (esto es lo que quiere dezir, mas y mas es restar). Parte ahora 306 por 11 y vendra el quociente 27 y 9 onzabos. Y este sera el numero que si le juntas su mitad y tercio y nueue mas montara 60 como la demanda pide.

(Juan Pérez de Moya, *Aritmetica practica y especulativa*)




ARITHMETICA
PRACTICA, Y SPECVlatiua del Bachiller Iuan Perez de Moya.

Agora nueuamente corregida, y añadidas por el mismo author muchas cosas, con otros dos libros, y vna Tabla muy copiosa de las cosas mas notables de todo lo que en este libro se contiene.

Va dirigida al muy alto y muy poderoso señor don Carlos Principe de España nuestro señor.

Con licencia y priuilegio Real.

EN SALAMANCA.
Por Mathias Gast.
1562

Método de aposición-remoción

Este método aritmético fue utilizado para resolver problemas indeterminados que admitían una traducción al simbolismo algebraico moderno del tipo:

$$x + y + z = m$$

$$ax + by + cz = n$$

Desde una óptica algebraica, el método constaba de dos fases:

1.ª fase: Eliminación de una de las incógnitas.

2.ª fase: Cálculo, por ensayo-error, de una solución entera de la ecuación indeterminada resultante.

Un ejemplo de aplicación del método de aposición-remoción

Un hombre quiere hacer un convite y da a su comprador 36 sueldos para que le compre tres clases de aves, como mirlos, tres por un sueldo, gallinas a 2 sueldos la pieza y capones a 3 sueldos la pieza. Y quiere 36 entre todos y que le cuesten 36 sueldos. Os pido: ¿cuántos comprará de cada clase?

Hazlo así:

Compra los 36 de aquellos de menor valor, que son los mirlos, y encontrarás que cuestan 12 sueldos. Quítalos de 36, quedan 24. Primero mira cuanto vale un mirlo y encontrarás que vale 1/3 de sueldo. Ahora mira cuanto vale más una gallina que un mirlo y encontrarás 1 sueldo y 2/3, ponlos aparte. Después, mira cuanto vale más un capón que un mirlo y encontrarás 2 sueldos y 2/3. Ahora haz tercios de todo, es decir: de 1 2/3 y serán 5/3, así como de 2 2/3 y serán 8/3. Y después harás tercios de 24 sueldos y serán 72/3. Ahora de estos 72 haz dos partes tales que la una se pueda partir por 5 y la otra por 8 y que venga justo. Para ello harás lo siguiente: Quita tantas veces 5 de 72 hasta que quede un número que se pueda partir por 8. Y encontrarás que será 32 y el otro será 40. Divide 32 por 8 y vendrán 4. Después divide 40 por 5 y vendrán 8. Y así ves que habrá 4 capones y 8 gallinas, que son 12. Hasta 36 sobran 24, y tantos mirlos habrá. Y así harás todas las semejantes.

(Joan Ventallol, *Aritmética*)

Traducción del método de Joan Ventallol al lenguaje moderno

	Número	*Precio*
Mirlos	x	1/3 sueldos
Gallinas	y	2 sueldos
Capones	z	3 sueldos

Con esto, el problema propuesto se reduce a resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y + z = 36 \\ \dfrac{1}{3}x + 2y + 3z = 36 \end{cases}$$

Ventallol procede del modo siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}y + \dfrac{1}{3}z = 12 \\ \dfrac{1}{3}x + 2y + 3z = 36 \end{cases}$$

De donde, restando miembro a miembro, se obtiene:

$$\frac{5}{3}y + \frac{8}{3}z = 24 = \frac{72}{3} \Rightarrow 5y + 8z = 72 \Rightarrow 5y + 8z = 40 + 32 \Rightarrow \begin{cases} y = 8 \\ z = 4 \end{cases}$$

Por tanto, $x = 24$

Resolución aritmética de algunos problemas clásicos

Problemas de móviles

Uno hace un viaje y cada día camina 30 millas. Cinco días después le sigue otro que cada día camina 35 millas. Pregunto: ¿en cuántos días lo alcanzará?

Mira cual es la ventaja del primero al cabo de 5 días y encontrarás que tiene 150 millas de ventaja. Las cuales deber partir por 5, que es lo que el segundo camina más que el primero cada día, y vendrá 30. Y en 30 días lo alcanzará.

(Joan Ventallol, *Aritmética*)

Vn correo se parte de Madrid para Roma, y no se sabe quantas leguas camina cada dia: pero sabese que otro correo se partio a cabo de 4 dias de la misma Villa de Madrid, y por el mismo camino hazia Roma, el qual caminaua cada dia 20 leguas, y este alcanço al primero correo en 6 dias. Pregunto, quantas leguas caminaba el primer correo cada dia.

Digo que el primer correo caminaua 12 leguas cada dia. La regla es, que mires el segundo correo quantas leguas auia caminado en los 6 dias que alcanço al primero, y hallaras que 6 dias a 20 leguas son 120, que partidas por 10 dias que auia caminado el primero, vendran las 12 leguas que caminaua cada dia.

(Gerónimo Cortés, *Arithmetica Practica*)

El primero de Abril se partieron dos correos, el vno de Valencia para Sevilla, y el otro de Sevilla para Valencia, camino de 84 leguas: y el que parte de Valencia, camina cada dia 10 leguas, y el que parte de Sevilla, camina al dia 14 leguas. Pregunto, en quantos dias se encontraran caminando los dos por un camino.

Digo que en 3 dias y medio se encontraran. La regla es que partas las 84 leguas por las 24 leguas que caminan entrambos cada dia, y saldran los 3 dias y medio en que se encontraran, como esta dicho.

(Gerónimo Cortés, *Arithmetica Practica*)

Son dos mensajeros. Uno sale de Perpiñán hacia Valencia y hace su camino en 9 días y el otro sale de Valencia hacia Perpiñán y hace su camino en 11 días. Os pido: saliendo los dos a la misma hora, ¿en cuánto tiempo se encontrarán?

Hazlo así:

Suma 9 y 11, hacen 20, que es el partidor. Después, multiplica 9 veces 11, hacen 99. Divide 99 por 20 y te vendrán 4 19/20. Y en 4 días y 19/20 de día se encontrarán.

(Joan Ventallol, *Aritmética*)

Comentario

Tomando la distancia entre Perpiñán y Valencia como unidad de longitud, resulta que el primer mensajero recorre 1/9 de dicha distancia en un día, y el segundo 1/11.

Por tanto, en un día los dos mensajeros recorren 1/9 + 1/11 = 20/99 de la distancia que les separaba inicialmente. Entonces, por la regla de tres, para recorrer 99/99 de dicha distancia tardarán 99/20 días.

Problemas de grifos

Es vna bota que tiene tres agujeros differentes, la qual estando llena de agua sale toda por el mayor agujero en 3 horas, y por el mediano en 4 horas, y por el menor en 6 horas. Pregunto, si los tres agujeros se desatapassen juntos, en quanto tiempo se vaziaria la dicha bota?

Digo que en vna hora y vn tercio de hora se vaziaria toda la bota, desatapando los tres agujeros a vn tiempo.

La regla es, que tomes vn numero que juntamente se pueda partir por 6, 4 y 3, y sera 12, que partido por los dichos tres numeros vendran estos otros tres 2, 3 y 4, que juntados hazen 9. Y dirás: si nueue vezes se vazia la bota en 12 horas, vna vez sola en quantas horas se vaziara? Y hallaras que en vna hora y vn tercio de hora, como esta dicho.

(Gerónimo Cortés, *Arithmetica Practica*)

Comentario

El agujero mayor vacía la bota en 3 horas. El agujero mediano vacía la bota en 4 horas. El agujero menor vacía la bota en 6 horas.

m. c. m (3, 4, 6) = 12

El agujero mayor en 12 horas vacía la bota 4 veces. El agujero mediano en 12 horas vacía la bota 3 veces. El agujero menor en 12 horas vacía la bota 2 veces.

Por tanto, los tres agujeros juntos vacían 9 veces la bota en 12 horas.

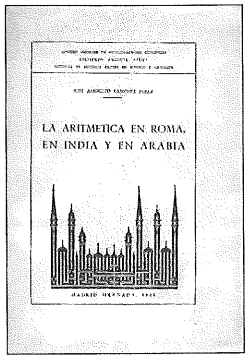
En consecuencia, por la regla de tres, si los tres agujeros juntos vacían la bota 9 veces en 12 horas, para vaciarla una vez tardarán 12/9 = 4/3 horas.

Un grifo llena una fuente en 4 días. Cuando está llena lo cerramos y abrimos un desagüe que la vacía en 11 días.

Estando la fuente vacía, ¿en cuánto tiempo se llenará, abriendo a la vez el grifo y el desagüe?

(Philippi Calandri, *Pictagoras arithmetrice introductor*)

La resolución del matemático florentino, presentada en forma esquemática, sin explicación alguna, se ajusta al siguiente plan:



Vicente Meavilla
IES Francés de Aranda (Teruel)
Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo»

El grifo llena 1/4 de la fuente en un día. El desagüe vacía 1/11 de la fuente en un día.

Por tanto, en un día se llenan 7/44 de la fuente (7/44 = = 1/4 – 1/11) y en 44 días la fuente se llenaría 7 veces.

Entonces, si la fuente se llena 7 veces en 44 días, para llenarla una vez se necesitarán 44/7 días.

Un problema de relojes, sin relojes

Si oy se hallassen dos estrellas, o planetas juntos y en conjuncion, como sabriamos por Arithmetica sin ser Astronomos en quanto tiempo se tornarian a hallar juntos, como sucede en el presente año, entre Iupiter y Saturno, que se hallan juntos la vispera de Nauidad, el qual ajuntamiento llaman los Astronomos, conjuncion magna, por los grandes y terribles effectos que suele causar, segun ellos dizen, y la experiencia lo demuestra.

Essa demanda bien pudieras auer dexado para los Astronomos pues a ellos toca: pero todavia quiero darte contento: y aduierte, que primero se ha de saber quanto tiempo tarda cada estrella, o planeta en dar la buelta a todo su orbe. Y pues has hecho memoria de la magna conjuncion de Iupiter y Saturno, propongamos el exemplo dellos. Y sepas que Iupiter tarda en dar la buelta a su orbe doze años, y Saturno al suyo tarda treynta años, según parecer de Cardano, porque vnos escriuen que tardan mas, y otro menos: y tomando el parecer de Cardano, digo, que multipliques los 12 años de Iupiter por los 30 de Saturno, y montaran 360 años, que partidos por 18, que es la differencia que hay de 12 a 30, saldran 20 años: y acabo de tantos años se hallaran juntos, y en conjuncion los dichos planetas.

(Gerónimo Cortés, *Arithmetica Practica*)

Comentario

Gerónimo Cortés admite que Júpiter y Saturno describen órbitas circulares con el mismo centro.

Júpiter en un año describe 1/12 de su órbita. Saturno en un año recorre 1/30 de su órbita. Por tanto, en un año, Júpiter «adelanta» a Saturno 1/12 – 1/30 = 18/360 = 1/20.

En consecuencia, por la regla de tres, para que Júpiter «adelante» a Saturno una órbita completa (momento de la nueva conjunción) deberán transcurrir 20 años.

Referencias bibliográficas

AUREL, M. (1552): *Libro primero de Arithmetica Algebratica*, J. Mey, Valencia.

CORTÉS, G. (1604): *Arithmetica practica*, J. C. Gárriz. Valencia.

PÉREZ DE MOYA, J. (1562): *Aritmetica practica y especulativa*, F. Serrano, Madrid.

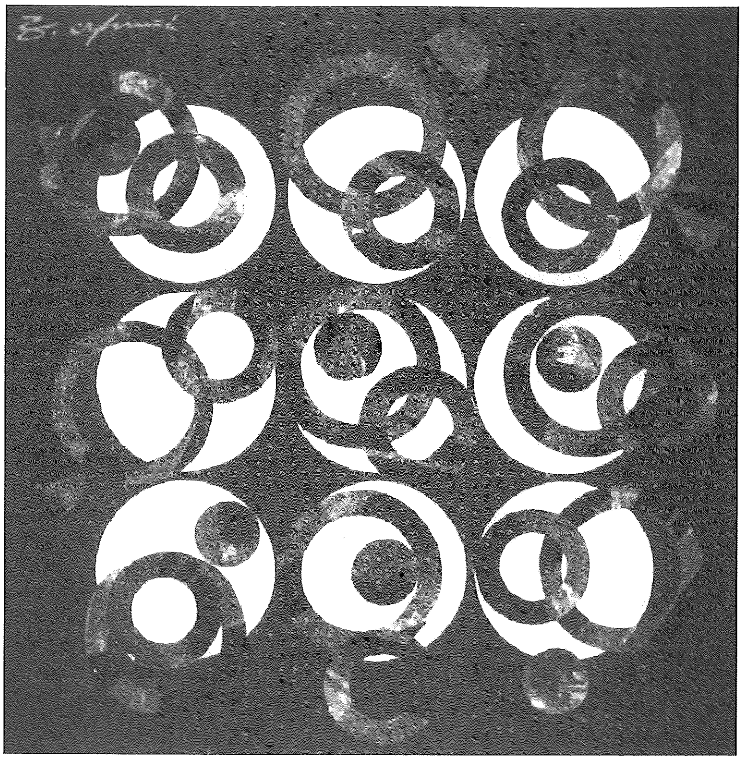
DE LA ROCHE, E. (1520): *Larismethique nouellement composee*, C. Fradin, Lyon.

SÁNCHEZ PÉREZ, J. A. (1949): *La aritmética en Roma, en India y en Arabia*, C. S. I. C., Madrid.

SMITH, D. E. (1958): *History of Mathematics*, Dover, New York.

TOSCA, T. V. (1707-1715): *Compendio Mathematico*, A. Bordázar, Valencia.

VENTALLOL, J. (1521): *Aritmética*.



11 OLIMPIADA MATEMÁTICA NACIONAL

Catalunya,
del 23 al 29-6-2000
TARRAGONA - BARCELONA
GIRONA

SUMA 34
junio 2000, pp. 87-93

Miradas

Miquel Albertí Palmer

MISCELÁNEA

Después de un viaje en tren me planteo:
1. Al observar desde cierta distancia el paso de un móvil, ¿cómo y a qué velocidad gira nuestra mirada?
2. En la misma situación podemos experimentar el efecto Doppler, ¿cómo se escucha y varía el sonido emitido por el móvil?

PRÓLOGO

Pasado el mediodía, la locomotora rasga la llanura con soberbia y arrogancia imparables. Obedeciendo el pacto tácito escrito en mi billete soy su pasajero. Al otro lado de mi ventana el trigal se extiende hasta el horizonte. Ni un árbol, ni un arbusto, ni una loma, ni una casa, nada donde fijar la vista. Si pudiera callar el traqueteo, si pudiera no sentirlo, diría que levito sobre un inmenso plano dorado y caliente. Digo plano, pero sé que no lo es. La planicie que surca el ferrocarril es en realidad convexa, la birreta de un astro. Su corta cabellera se agita con bravura a nuestro paso.

Por fin algo interrumpe el tedio hipnótico de la monotonía. Una mancha negra, diminuta, emerge del mar luminoso junto a la arista del mundo, allí donde se besan el azul y el amarillo. Para saber qué es saco los prismáticos de mi bolsa y la enfoco. El movimiento y las lentes me la acercan, ¿o me acerco yo a ella? Primero no es más que un borrón oscuro, pero poco a poco se afirma el perfil de una persona. Desde la distancia no consigo distinguir sus rasgos. Me mira, o me parece que me mira. Quizás su mirada se dirige a todo el convoy que en aquel instante perturba la siesta del campo. Aún así, mirando al tren también me mira a mí ¿Le permitirán su vista y la distancia distinguir el puntito que soy tras la ventanilla de mi departamento? ¿Podrá ver que le miro? No lo sé. Nunca lo sabré. De nuevo está otra vez muy lejos. Se va rezagando. Consumiéndose despacio hasta desintegrarse entre las innumerables espigas. Ahogada en el mar ocre por la marcha del convoy, mi marcha. Su visión no fue nada más que un destello.

Durante la brevedad del encuentro una recta de luz unió nuestras miradas, o la mía con su cara y la suya con el tren. Este segmento osciló como la aguja de un reloj gigantesco, contando en silencio el transcurrir de nuestra visión. ¿Cuál fue el eje de su giro? ¿Era ella? ¿Era yo? ¿Tal vez algún punto intermedio, imaginario e inexistente, entre ambos? Relatividad del movimiento. ¿Giramos la cabeza siguiéndonos una al otro a la misma velocidad? ¿Fue ésta uniforme o acelerada independientemente de la que llevaba la máquina? Para mí, yo inmóvil. Para ella, ella inmóvil, mientras que yo, móvil, encerrado en la oruga férrea y silbante, ante su mirada –en parte de asombro, en parte hostil–, contribuía a interrumpir algo más que su silencio.

Una vez en casa, ¿se olvidó de mí y de mi nave? Una vez en casa, yo pensé lo siguiente.

Una vez en casa, ¿se olvidó de mí y de mi nave? Una vez en casa, yo pensé lo siguiente.

I

Un móvil T se mueve con velocidad constante v siguiendo una recta r mientras es observado por alguien desde un punto P, situado a una distancia d de la recta r. La mirada del observador en P, al girar siguiendo el móvil, describe un ángulo A determinado por la distancia x a la que se halla T del punto O:

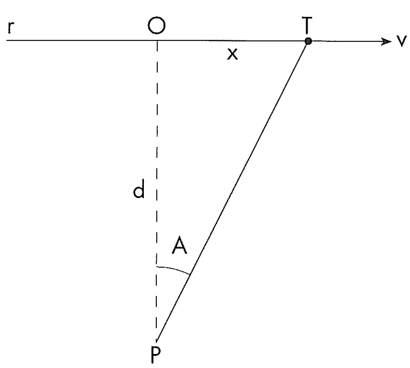


Figura 1

Puesto que el movimiento se hace con velocidad constante v, podemos escribir $x = x_0 + vt$ donde x_0 indicará la distancia a la que se halla éste del punto O (en la figura 1 estaría situado a la izquierda de O) al empezar su recorrido ($t = 0$).

Tendremos

$$A(t) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x_0 + vt}{d}\right)$$

La derivada de esta función proporciona la velocidad instantánea de giro de nuestra mirada:

$$A'(t) = \frac{vd}{d^2 + \left(x_0 + vt\right)^2}$$

Para cada valor de t, $A(t)$ nos da el ángulo con el que se ve T desde P y $A'(t)$ nos dice cuál es la velocidad instantánea de este giro, es decir, la velocidad a la que gira en cada instante la mirada del observador.

Los límites de $A(t)$ son $-\pi/2$ y $\pi/2$, ángulos con los que se vería el móvil si viniese y continuase por la misma recta desde y hasta el infinito. Para valores de t próximos a $t_0 = -x_0/v$, el instante en que el móvil pasa justo por delante de nosotros (el punto O), $A(t)$ no difiere mucho de la recta $y = x_0 + vt$. De hecho, cerca de $t = t_0$, ambas funciones son *equivalentes* y la velocidad de giro de la mirada es *casi* constante: $A'(t_0) = v$.

Siendo además $A'(t_0) = v/d$, tenemos:

$$d \to 0 \Rightarrow A'(t_0) \to \infty$$

$$d \to \infty \Rightarrow A'(t_0) \to 0$$

Esto significa que la velocidad con la que giramos la mirada es pequeña si estamos lejos de la trayectoria del móvil, pero crece hacia infinito cuando nos hallamos muy cerca:

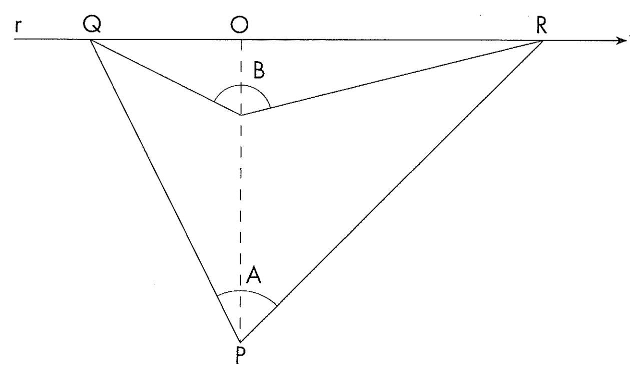


Figura 2

En esta figura puede apreciarse como al mirar el móvil cuando pasa entre dos puntos Q y R el ángulo global de giro aumenta ($A < B$) al disminuir la distancia d que nos separa de su trayectoria. Experimentamos esto cuando viajamos en el metro. El convoy no irá a más de cincuenta o sesenta kilómetros por hora, pero si uno pega las narices a los cristales de la ventanilla verá que los cables y luces que cuelgan de las paredes del túnel pasan a una velocidad vertiginosa, convertidos en luminosos latigazos. Imposible seguirlos con la mirada sin correr el riesgo de autodesnucarse. Un efecto parecido se vive al conducir: no es lo mismo ir a 80 Km/h por una autopista que por una calle estrecha. Si circulamos por una autopista a esa velocidad nos parecerá que vamos muy despacio. La gran amplitud de la calzada de una autopista nos aleja de los puntos de referencia que hay en las cunetas. En cambio, en una ciudad el paso de las fachadas de una calle estrecha, tan próximas, nos provocará la impresión de llevar una velocidad impresionante.

Si la velocidad v con la que se desplaza T no es constante, sino uniformemente acelerada, podemos suponer que

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Las nuevas expresiones $A_a(t)$ y $A_a'(t)$ serán:

$$A_a(t) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}}{d}\right)$$

$$A_a'(t) = \frac{(v_0 + at)d}{d^2 + \left(x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}\right)^2}$$

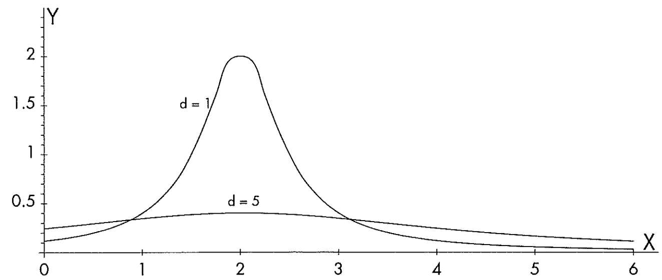


Figura 3. Gráficos de $A'(t)$ para $x(0) = -4$ m, $v = 2$ m/s y dos valores de d: $d = 1$ m y $d = 5$ m

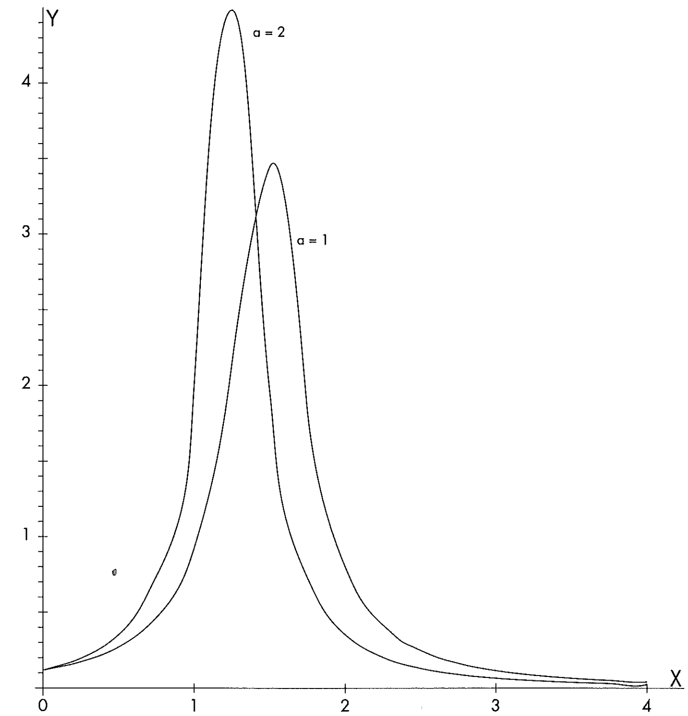


Figura 4. Gráficos de $A_a'(t)$ para $a = 1$ m/s^2, $a = 2$ m/s^2, $d = 1$ m, $x(0) = -4$ m y velocidad inicial: $v(0) = 2$ m/s

II

Al mismo tiempo que giramos la cabeza para seguir con la mirada el paso del tren podemos oír cómo el silbido que emite la locomotora baja súbitamente de tono al pasar junto a nuestra posición. Este efecto es aún más claro en una carrera de coches o motos donde las velocidades que alcanzan los vehículos son muy elevadas. El llamado efecto Doppler también puede *verse* en la desviación hacia el rojo o hacia el azul que experimenta el espectro de luz de una estrella o galaxia al aproximarse o alejarse de la nuestra.

Supongamos una situación como la del apartado anterior, pero en la cual estamos sobre las vías del tren, o sea que ahora $d = 0$. No pensemos de momento en lo que pueda suceder cuando el tren nos pase por encima, tan solo escuchémoslo. Como antes, el convoy se acerca con velocidad constante v y emite un sonido de características físicas: λ, la *longitud de onda*; T, el *período*; y f, la *frecuencia*. Si llamamos u a la velocidad del sonido en el medio (u será de unos 340 m/s en el aire) entonces tendremos las relaciones siguientes:

$$f = \frac{1}{T}, \lambda = uT \quad \Rightarrow \quad f = \frac{u}{\lambda}$$

Cuando el móvil se acerca, el sonido también lo hace con velocidad $u + v$. Y cuando el móvil se aleja, el sonido también a velocidad $u - v$. por tanto, la frecuencia F del sonido percibido será:

$$F = \frac{u \pm v}{\lambda} = \frac{(u \pm v) \cdot f}{u} = f \cdot \left(1 \pm \frac{v}{u}\right)$$

Hay pues una frecuencia de aproximación (F_+) y otra de alejamiento (F_-). La diferencia entre ambas nos da el intervalo sonoro que escucharemos al pasar el tren:

$$F_+ - F_- = \frac{2vf}{u}$$

La bajada de tono tiene que ver directamente con la proporción de la velocidad v respecto de u. Como se ha dicho antes el valor de u es de unos 1224 *km/h*. Moverse a esta velocidad significa romper la barrera del sonido. Si $v = u$ la frecuencia de aproximación se duplica y se oye el silbido una octava más agudo de lo emitido, mientras que la frecuencia de alejamiento se anula.

Cogan y Escot (1976) comparan las frecuencias parciales correspondientes a los armónicos del Do^3 (línea *a*) con las frecuencias de las notas más próximas a estos parciales de nuestro sistema musical temperado (línea *b*). (Véase tabla de la parte inferior de la página).

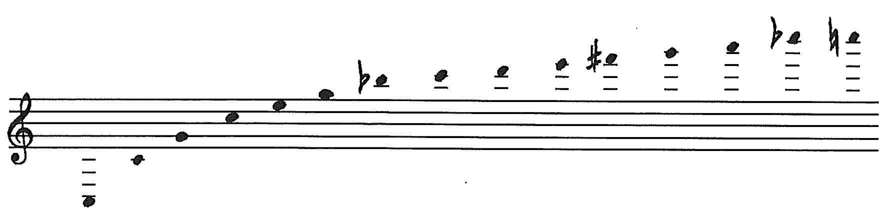


Figura 5

Tomando $v = u/4 \approx 306$ *km/h* (caso en el que podría entrar un tren de alta velocidad como el AVE) y f = 523 *c/s* (C^5), tendremos $F_+ = 653{,}75$ *c/s* y $F_- = 392{,}25$ *c/s*, frecuencias correspondientes a E^5 y G^4, aproximadamente. El efecto sonoro percibido es el de un intervalo descendente de tercera mayor:

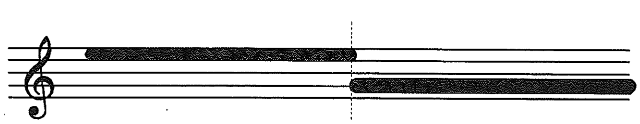


Figura 6

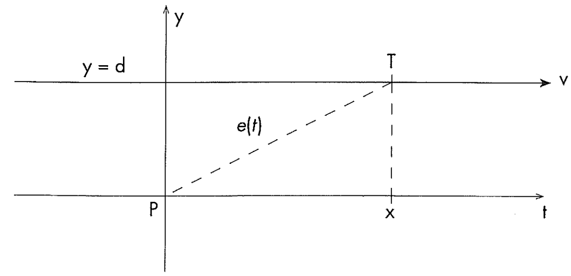


Figura 7

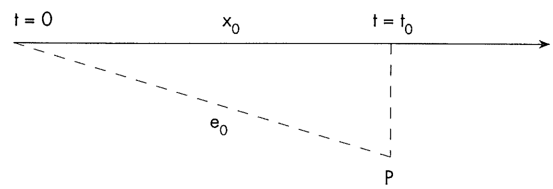


Figura 8

Pero, ¿qué sucede cuando nos hallamos algo apartados de las vías del tren, a una distancia $d > 0$ de la recta que sigue el móvil? Si lo situamos sobre la recta $y = d$ de un sistema de coordenadas con origen en el punto P se tiene la figura 7.

Sean x_0, que será negativo, y $e_0 = e(0)$ las posiciones iniciales. Para $t = 0$ la distancia que nos separa del móvil es (figura 8):

$$e_0 = \sqrt{d^2 + x_0^2}$$

Y para t > 0, tenemos:

$$e(t) = \left|\overrightarrow{OT}\right| = \sqrt{x^2 + d^2} =$$

$$= \sqrt{(x_0 + vt)^2 + d^2}$$

(a):	131	262	393	524	655	786	917	1048	1179	1310	1441	1572	1703	1834	1965
	C^3	C^4	G^4	C^5	E^5	G^5	BG^5	C^6	D^6	E^6	FK^6	G^6	A^6	BG^6	B^6
(b):	131	262	392	523	659	784	923	1046	1175	1319	1430	1568	1760	1855	1976

lo que implica que la velocidad con la que se nos acerca el móvil es:

$$e'(t) = \frac{(x_0 + vt)v}{\sqrt{(x_0 + vt)^2 + d^2}}$$

Podemos distinguir que el móvil se aproxima para $t < t_0 = -x_0/v$ y se aleja para $t > t_0$ escribiendo

$$e'(t) = \frac{-(x_0 + vt)v}{\sqrt{(x_0 + vt)^2 + d^2}}$$

La frecuencia percibida será

$$F(t) = f - \frac{f(x_0 + vt)v}{u\sqrt{(x_0 + vt)^2 + d^2}}$$

y en el gráfico de esta última fracción, a la que llamaré

$$j(t) = \frac{-f(x_0 + vt)v}{u\sqrt{(x_0 + vt)^2 + d^2}}$$

leeremos la variación sonora percibida, es decir, cómo varía la frecuencia del sonido emitido por la locomotora. Fijémonos además en que la recta $y = -fv/u$ es asíntota de $j(t)$ porque

$$\lim_{t \to +\infty} j(t) = -\frac{fv}{u}$$

Y también en que

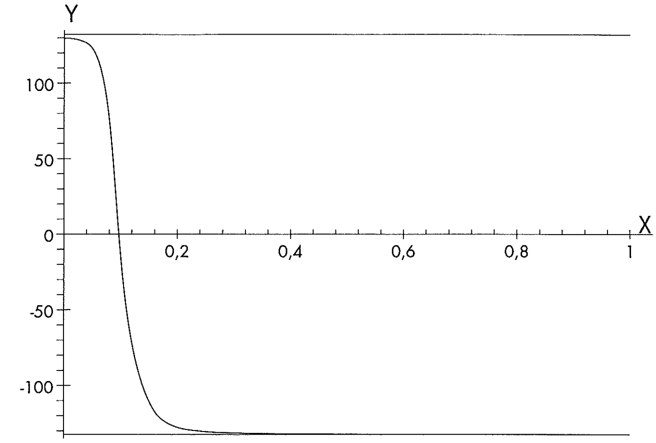
$$j(0) = -\frac{fx_0 v}{ue_0}$$

Todo esto puede verse en la siguiente figura 9. El nivel $y = 0$ del gráfico, el eje x, representa el nivel de frecuencia $f = 523$ c/s. La variación sonora percibida es, más o menos, un descenso de sexta mayor, el intervalo determinado por $F_+ = 655{,}29$ c/s ($\approx E^5$) y por $F_- = 390{,}71$ c/s ($\approx G^4$).

Véase de otro modo en la figura 10.

Ambos sonidos no se escuchan ahora arpegiados, sino que se enlazan de forma continua en un descenso cuya brusquedad depende de f, v y d. Véase en la figura 11 como se mitiga la brusquedad del intervalo sonoro al alejarnos de la trayectoria del móvil y en la figura 12 como se amplía dicho intervalo al aumentar la velocidad.

Figura 9. Gráfico de $j(t)$ y de sus asíntotas para $f = 523c/s$ (C^5), $u = 340m/s$, $d = 2m$, $v = 86m/s = 309{,}6$ Km/h y $x_0 = -10m$



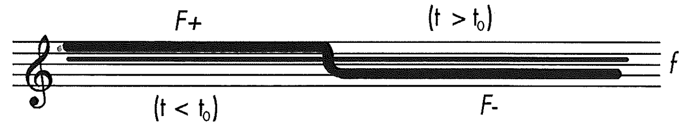


Figura 10

Figura 11. Gráfico de $j(t)$ para $u = 340m/s$, $f = 110c/s$, $v = 340/12 = 28{,}3333m/s$ $x_0 = -10m$ y diferentes valores de d: $d = 2m$, $d = 5m$, $d = 10m$, $d = 20m$

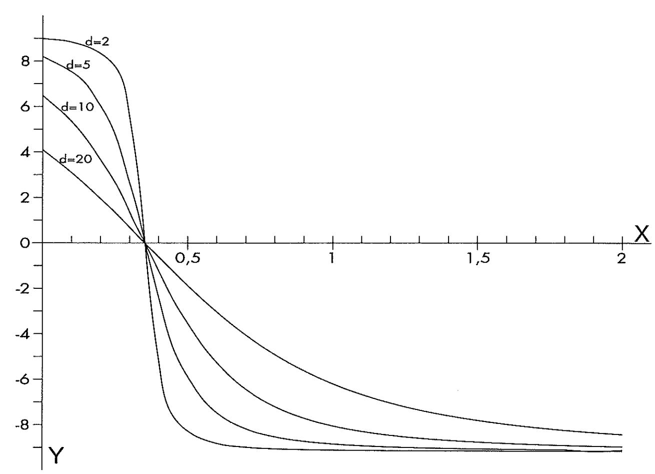
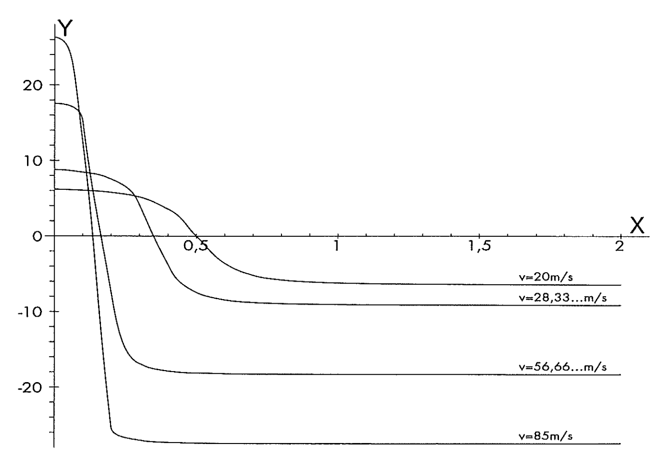


Figura 12. Como antes $u = 340m/s$, $f = 110c/s$, $d = 3m$, $x_0 = -10m$, pero ahora se introducen diferentes velocidades $v = 20m/s$, $v = 28{,}333m/s$, $v = 56{,}666m/s$, $v = 85m/s$



¿Y qué sucede cuando el móvil se desplaza con movimiento uniformemente acelerado? En tal caso no hay más que añadir aceleración en $e(t)$ para obtener la correspondiente expresión de $j(t)$.

$$j(t) = \frac{-f\left(x_0 + v_0 t + \dfrac{at^2}{2}\right)\left(v_0 + at\right)}{u\sqrt{d^2 + \left(x_0 + v_0 t + \dfrac{at^2}{2}\right)^2}}$$

En el caso particular en que $d = 0$ esta expresión se reduce a

$$j(t) = -\frac{f\left(v_0 + at\right)}{u}$$

Su gráfico viene dado en la figura 13.

Para $d > 0$ se observará que la recta y = at es tangente al gráfico de f en el origen de coordenadas, mientras que la recta $y = -at$ es asíntota suya cuando $t \to \infty$ (figura 14).

¿Dónde se alcanza el máximo de esta función? Obsérvese cómo varía para diferentes valores de d (figura 15) y de a (fig. 16):

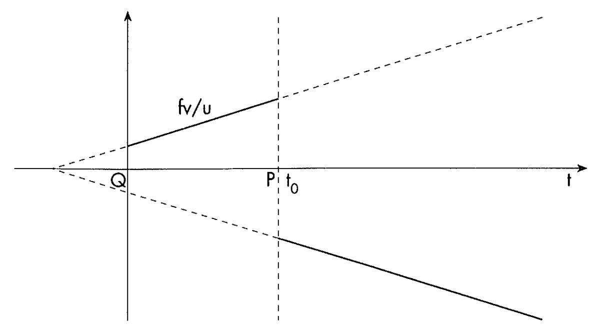


Figura 13

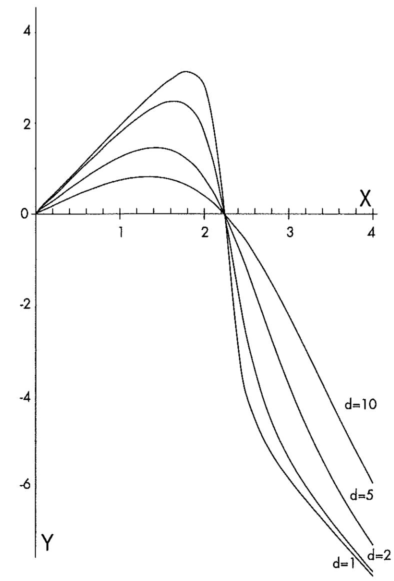


Figura 15. Como el gráfico de la figura 14 para $d = 1m$, $d = 2m$, $d = 5m$, $d = 10m$

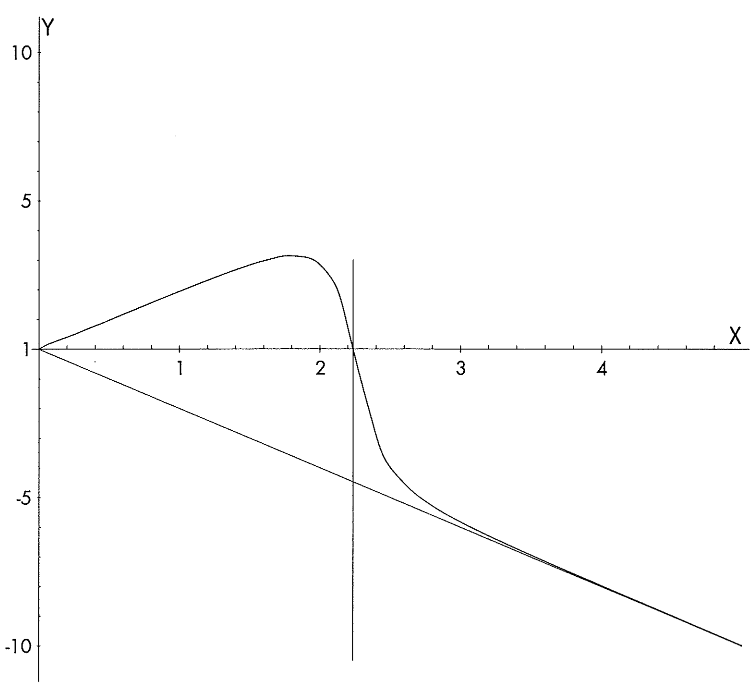


Figura 14. Para este gráfico se ha tomado $a = 2m/s^2$, $d = 1m$, $x_0 = -5m$ y $v_0 = 0$. El instante en el que el móvil pasa de aproximarse a alejarse es

$$t_0 = \sqrt{\frac{2(-x_0)}{a}} = \sqrt{5}$$

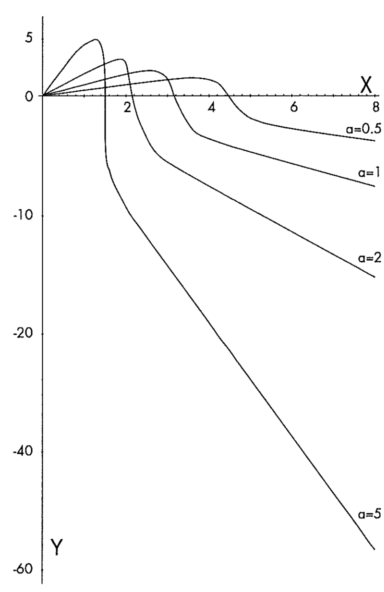


Figura 16. Ahora para $a = 0{,}5$, $a = 1$, $a = 2$, $a = 5$. En todos ellos, como antes, $d = 1\ m$ y $x_0 = -5m$

En resumen, para un observador situado a una distancia positiva de la trayectoria del móvil la audición consiste o bien en un descenso, brusco pero continuo, entre dos notas cuando la velocidad del móvil es constante (figuras 9, 11 y 12), o bien en una modulación variable, también continua, pero ascendente al comienzo y descendente después, en el caso de movimiento uniformemente acelerado (figuras 14, 15 y 16). Cuando el observador se halla sobre la trayectoria del móvil (d = 0), caso de un suicida, se rompe la continuidad. Naturalmente: ¡¡será atropellado y tan sólo escuchará el primero de los sonidos que forman el intervalo!! Tal situación constituye el caso límite de la anterior como puede verse en la figura 17, donde el gráfico está a punto de partirse en dos pedazos.

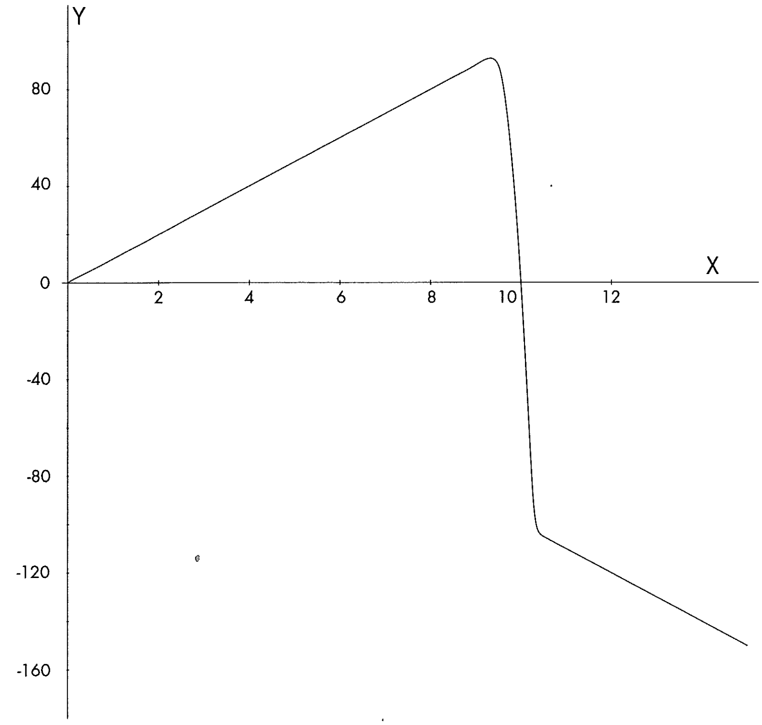


Figura 17

Epílogo

Los puntos de vista que tuvieron el pasajero y el campesino o campesina debieron ser sin duda muy diferentes. Tanto desde el enfoque literal de la expresión «punto de vista» (qué vieron), como desde el enfoque figurado (qué pensaron durante y después de la visión).

El enfoque matemático otorga a un suceso gran objetividad. Sin embargo es esta misma objetividad la que lo despoja de otras circunstancias ineludibles para su comprensión, aislándolo casi por completo de la realidad para encerrarlo en una espacie de cámara mental idónea limitada por una serie de axiomas y leyes forjadas a base de eludir el máximo número de ambig¸edades posible: el laboratorio matemático. El desarrollo técnico expuesto en este artículo sólo es posible tras reducir la escena que lo generó a un esquema que poco tiene que ver con la situación real: el tren ya no lo es, se ha transformado en un punto matemático ideal; la trayectoria que sigue es perfectamente rectilínea; su velocidad, cuando es constante, no varía un ápice en todo su recorrido, y cuando no lo es, varía de un modo absolutamente uniforme; etc.; etc.

Las Matemáticas, igual que cualquier otra materia, enfocan tan sólo a una de les innumerables facetas del problema. Nunca como hoy en día ha estado tan de moda la idea de que la ciencia constituye el paradigma de la imparcialidad y la objetividad y de que es la que más cerca está de la verdad. ¡Este es un hecho casi *científicamente probado*! Pero el científico sabe, si es que no le ha cegado su propio punto de vista, que la verdad no es única.

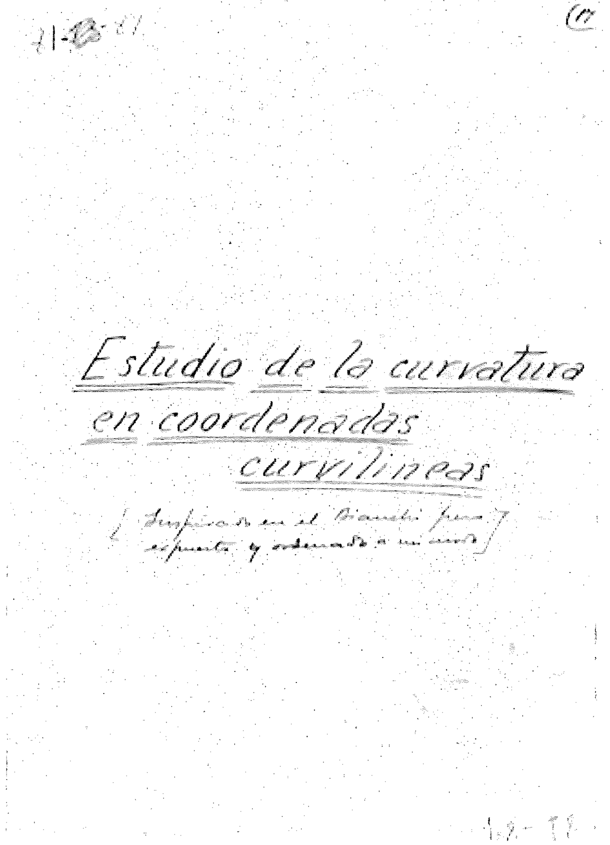
Me planteé las cuestiones formuladas después de vivir el acontecimiento, no antes. Quede claro pues que el presente trabajo no es fruto premeditado de mi imaginación, ni el resultado más o menos fructífero de una búsqueda sobre un determinado tipo de problema que ofrecer a mis alumnos. A pesar de la incomodidad, aversión y, por qué no decirlo, del rechazo que sin duda el desarrollo técnico precedente provocará en un lector ajeno al mundo matemático, espero que su lectura sirva al menos para mostrarle cómo pueden plantearse problemas de Matemáticas viviendo experiencias tan corrientes como la descrita.

Como yo, quien, de conocerla, seguramente me habría formulado preguntas similares a las que se formuló aquella persona, desconocida pero real, cuando una vez el tren irrumpió en su trigal.

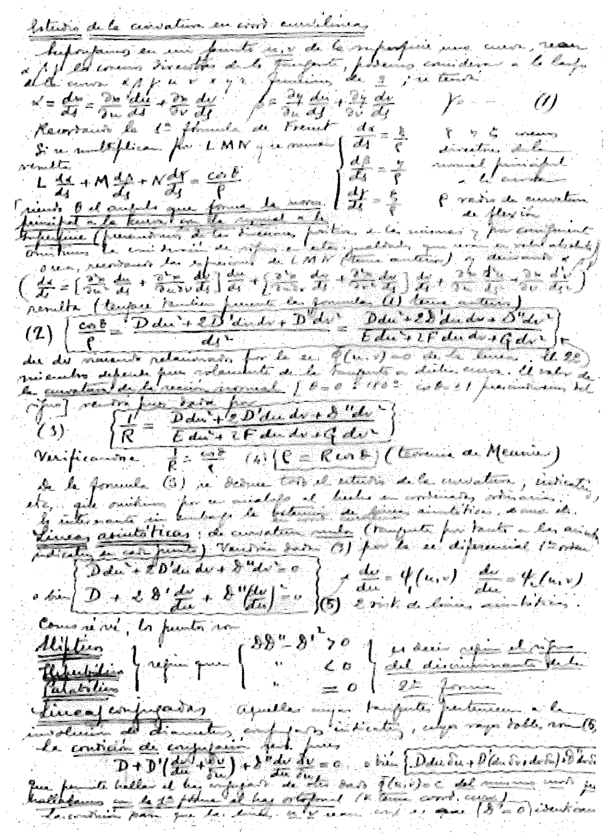
Miquel Albertí
IES Pau Vila
Sabadell (Barcelona)

Referencia citada

COGAN, R. y P. ESCOT (1976): *Sonic design: The nature of sound and music*, Prentice-hall, INC., Englewood Cliffs, New Jersey.



Estudio de la curvatura en coordenadas curvilíneas



Estudio de la curvatura en coord. curvilíneas

Manuscrito de Puig Adam

SUMA 34
junio 2000, pp. 95-98

Isoperímetros en la Grecia Antigua

Grupo Construir las Matemáticas*

TALLER DE PROBLEMAS

Se ha demostrado, no solamente por Aristóteles, sino por Arquímedes y Zenodoro, que, entre las figuras isoperimétricas, la mayor es, entre las planas, el círculo y, entre los sólidos, la esfera (cf. Simplicius, VII, 4/2, líneas 12 a 17).

Simplicius (ca. 520) era realmente un filósofo, excelente comentarista de Aristóteles, que, entre otras cosas contribuyó a dar a conocer en sus libros resultados de otros tratados. Por ejemplo, en sus *Comentarios* incluye un fragmento sobre las cuadraturas de las lúnulas de Hipócrates, que él mismo dice haber copiado de la desaparecida *Historia de la Matemática* de Eudemo.

Investigadores de la Historia de la Ciencia, como J. Mongenet, atribuyen a Zenodoro (ca. 180 a.C.) el haber desarrollado completamente la teoría de los isoperímetros en el s. III a.C. en un tratado sobre las figuras isoperimétricas, hoy desaparecido. Posteriormente, otros pensadores de la Antigüedad se interesaron por este problema. Herón de Alejandría, Ptolomeo, Pappus, Theón de Alejandría, entre otros, dan fe de lo que decimos.

Ptolomeo, en su *Almagesto* (ca. 150), escribe: «Puesto que, entre figuras diferentes pero isoperimétricas, las que tienen más lados son más grande; entre las figuras planas, el círculo es la mayor, y de entre los sólidos, la esfera».

A Zenodoro lo situamos entre Arquímedes (m. 212 a.C.) y Pappus (ca. 320) dado que cita al primero y es citado por el segundo.

Theón de Alejandría (ca. 390) hace alusión al libro de Zenodoro en uno de sus comentarios al primer libro del *Almagesto* diciendo que «vamos a demostrarlo de modo algebraico, siguiendo la demostración que dio Zenodoro en su tratado de figuras isoperimétricas».

¿Por qué ese interés de estos griegos en la circunferencia y la esfera? Antes de que Pitágoras (ca. 580-500 a.C.) mostrara su modelo del Universo, la Tierra fue concebida como un círculo rodeado por el agua de

* Los componentes del Grupo Construir las Matemáticas son Rafael Pérez, Isabel Berenguer, Luis Berenguer, Belén Cobo, M.ª Dolores Daza, Francisco Fernández, Miguel Pasadas y Ana M.ª Payá.

los océanos que, a su vez, estaban cubiertos por una semiesfera celeste en donde se encontraban las estrellas. Las circunferencias y esferas eran figuras geométricas abstractas de aquellas Matemáticas, que reconocemos como tales por estar basadas en ideas y que nacen en la cultura griega entre los siglos VII y VI a.C. Circunferencias y esferas sirvieron para crear un modelo con el que describir el curso de astros y estrellas a través de los cielos. El primer modelo complejo se atribuye a Pitágoras que suponía que las estrellas estaban fijas sobre una esfera de cristal que daba diariamente la vuelta sobre sí misma en torno a un eje que pasaba a través de la Tierra. Así mismo, cada uno de los 7 planetas –Sol, Luna, Mercurio, Marte, Júpiter, Venus y Saturno– estaba fijado en una esfera móvil. Se llegó a creer que, además, las esferas se encontraban a unas distancias unas de otras que permitían establecer razones de longitudes de cuerdas que se correspondían con las que descubrió para explicar la armonía musical. En esta teoría, las esferas celestes producían en su rotación sonidos armoniosos que solamente quienes eran iniciados podían oír. Era *la música de las esferas*, frecuentemente utilizada en la Literatura y a la que el escultor australiano John Robinson ha dedicado recientemente una escultura basada en una superficie tórica con doble orientación y cuya sección viene dada por el conocido alicatado de la Alhambra de Granada llamado «pajarita».

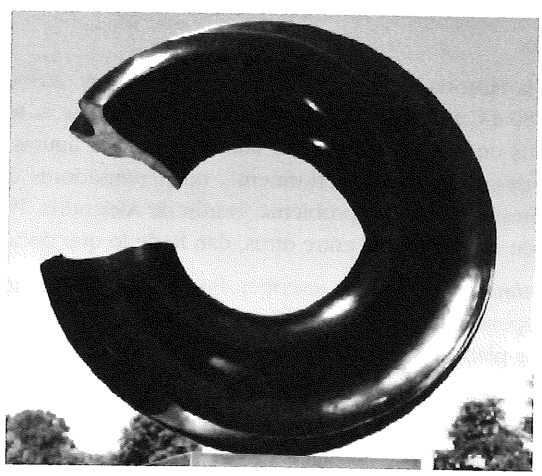


Figura 1. La música de las esferas, J. Robinson

Hagamos un alto en el camino de la Historia para observar un hecho notable: *la visión simultánea del problema de los isoperímetros en 2D y en 3D, la relevancia del círculo y de la esfera.* Hoy en día, la mayoría de quienes estudian la ESO o Bachillerato debe pensar que su profesor o profesora de Matemáticas vive en Planilandia ya que, salvo cuando se hace uso del método de las coordenadas, la geometría que se estudia es la del plano. Una vez más nos alejamos del alumnado porque su mundo es otro, no cabe en la negra pizarra de la clase y, lo que es peor, en general parece que tampoco está en la cabeza de quien ha de dirigir el acto de enseñanza-aprendizaje como fuente de recursos didácticos invalorable. Es lamentable que la enseñanza de las Matemáticas se haya apartado tanto del objetivo que les dio vida. Su propio nombre procede de la palabra griega «mathema» con la que se identificaba un tipo de conocimiento humano mediante el cual se intentaba comprender el Mundo; percepción, conocimiento, cognición o comprensión de la Naturaleza y la Sociedad deberían ser los objetivos primordiales en la educación matemática de las personas para contribuir a que puedan ejercer y gozar de su libertad. ¡Qué lejos quedan de este planteamiento las tediosas clases de Matemáticas que giran alrededor de problemas –habría que decir, ejercicios– y demostraciones maravillosamente inútiles bajo el pretexto de que lo importante es enseñar a pensar! ¿Se enseña a pensar transmitiendo una teoría totalmente acabada, sin fisuras y fría, lejana del ruido que producen los errores cometidos durante su investigación? Y lo que aún es peor, en la mayoría de los casos, el profesorado de Matemáticas no ha reconstruido el conocimiento que después intenta enseñar. Así, el aprendizaje de las Matemáticas nada tiene de aventura o reto. Se convierte en una rutinaria, pesada y torpe excursión a ninguna parte.

Llegados a este punto, creemos conveniente recordar al profesor Puig Adam en el centenario de su nacimiento porque sus ideas, estando vivas hoy, son un fiel reflejo de lo que sentían aquellos antepasados griegos. Recuerden si no aquel «Decálogo de la Didáctica Matemática Media» que publicara en *Gaceta Matemática*, 1.ª serie, Tomo VII, números 5 y 6, publicada en Madrid el año 1955, en el que escribía:

> No olvidar el origen concreto de la Matemática, ni los procesos históricos de su evolución. Presentar la Matemática como una unidad en relación con la vida natural y social.

El panal de abejas y Pappus

Pappus de Alejandría escribió un libro hacia el año 320 titulado *Synagoge* o *Colección matemática.* Inicialmente constaba de ocho libros, habiéndose perdido el primero y parte del segundo. No obstante, ha suministrado información muy valiosa sobre el estado del conocimiento matemático de su época. En el libro V aparece una nueva visión sobre el problema de los isoperímetros relacionada con la arquitectura de un panal de abejas. Después de demostrar Pappus que entre los polígonos regulares isoperimétricos es el de mayor área el de mayor número de lados, sacó la conclusión de que las abejas demostraban tener alguna forma de pensamiento matemático al construir sus celdillas de forma hexagonal y no triangular ni cuadrada. En este libro se demuestra que es el círculo quien tiene mayor área que un polígono regular de igual perímetro.

Un problema va adoptando diferentes formas a medida que van resolviéndose las situaciones que lo originaron. Así, llegamos a la extensión que Pappus hizo al considerar teselaciones:

> De entre todos los polígonos que pueden recubrir el plano por yuxtaposición, es el hexágono regular el que presenta perímetro mínimo para un área dada.

Veamos la demostración precisa de un lema previo que enunciamos en la forma que dio un italiano llamado Federico Commandino (m. 1575), traductor latino de la *Colección Matemática* de Pappus que había pasado, al parecer, desapercibida hasta entonces:

> Sean OG y AG dos rectas perpendiculares; OH y OA dos oblicuas. Se verifica que

$$\frac{AG}{HG} > \frac{\angle AOG}{\angle HOG}$$

En efecto, dibujemos el arco KHJ haciendo centro en O y tomando como radio a OH (figura 2).

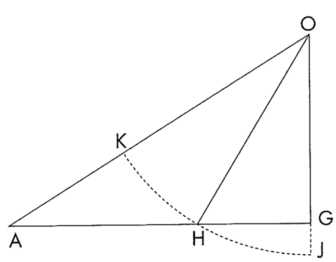


Figura 2

Se verifica que

área (triángulo OAH) > área (sector OKH)

área (triángulo OHG) < área (sector OHJ)

luego

$$\frac{\text{área (triángulo } OAH)}{\text{área (triángulo } OHG)} > \frac{\text{área (sector } OKH)}{\text{área (sector } OHJ)}$$

Sustituyendo y simplificando, queda que

$$\frac{AH}{HG} > \frac{\angle AOH}{\angle HOG}$$

Sumando 1 a ambos miembros de la desigualdad resulta

$$\frac{AH+HG}{HG} > \frac{\angle AOH + \angle HOG}{\angle HOG}$$

quedando definitivamente que

$$\frac{AG}{HG} > \frac{\angle AOG}{\angle HOG}$$

Teniendo en cuenta este lema, seguiremos casi fielmente la demostración de Pappus de su proposición. Hemos de probar que:

> Dados dos polígonos regulares, O y O', cuyo perímetro p es el mismo y con distinto número de lados, el polígono O' con mayor número de lados es el que tiene mayor área.

En efecto, sean G y G' los puntos medios de los lados AF y $A'F'$ de los polígonos O y O', respectivamente. Al ser $AF > A'F'$, se sigue que $AG > A'G'$ y podemos tomar sobre AG un punto H tal que $GH = A'G'$.

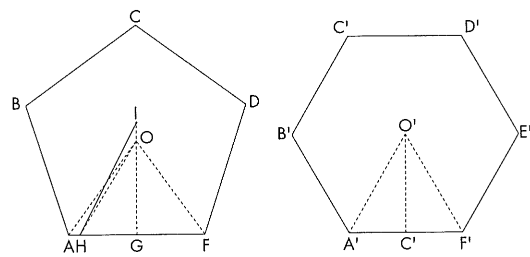


Figura 3

Uniendo H con O se tiene que

$$\frac{AF}{p} = \frac{\angle AOF}{2\pi} \quad y \quad \frac{A'F'}{p} = \frac{\angle A'O'F'}{2\pi}$$

Si dividimos, miembro a miembro, ambas expresiones resulta

$$\frac{AF}{A'F'} = \frac{\angle AOF}{\angle A'O'F}$$

luego

$$\frac{AG}{HG} = \frac{\angle AOG}{\angle A'O'G'}$$

Teniendo en cuenta el lema anterior,

$$\frac{AG}{HG} > \frac{\angle AOG}{\angle HOG}$$

de donde

$$\frac{\angle AOG}{\angle A'O'G'} > \frac{\angle AOG}{\angle HOG}$$

por tanto,

$$\angle A'O'G' < \angle HOG \ \text{ y } \ \angle G'A'O' > \angle GHO$$

Si construimos ahora un ángulo $\angle GHI = \angle G'A'O'$, el punto I se encuentra sobre OG y por encima de O, por lo que $IG > OG$ o, equivalentemente, $O'G' > OG$. Como las áreas de los polígonos son iguales a

$$\frac{p \leftrightarrow OG}{2} \ y \ \frac{p \leftrightarrow O'G'}{2}$$

se deduce que el área de O' es mayor que el área de O.

Recíprocamente, si las áreas de O y O' son iguales, el perímetro de O' es menor que el de O.

Entonces, para un área dada, el perímetro del hexágono regular es menor que el del cuadrado o el del triángulo equilátero.

Ya tenemos justificación del porqué de la forma hexagonal de la celdilla de un panal de abejas, pero ¿cómo es el resto? Es decir, queda por ver aún la forma geométrica de un alveolo completo. Lo haremos en la sexta entrega porque, si bien Pappus enunció el problema en 3D, la solución que ofreceremos se debe a MacLaurin.

De nuevo la Naturaleza vuelve a sorprendernos y a maravillarnos. Veamos por qué. Para ello, debemos pasar del problema isoperimétrico plano, con la restricción que Pappus impone a los polígonos de que han de teselar el plano, al correspondiente del espacio:

De entre los poliedros que pueden cubrir el espacio por yuxtaposición es la celdilla de abeja la que presenta una superficie lateral mínima para un volumen dado.

En primer lugar hay que pensar acerca de los poliedros que teselan el espacio y, una vez más, el número es muy pequeño si se les pide «cierta regularidad». Es decir, utilizando copias de un solo tipo de poliedro regular, es el cubo el único que tesela el espacio; análogamente, utilizando cuantas copias sean necesarias de un mismo poliedro semirregular, sólo el de Kelvin permite teselar el espacio por yuxtaposición.

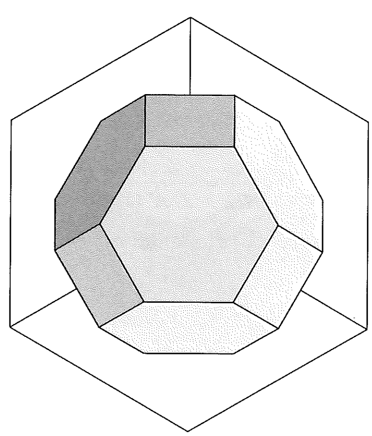
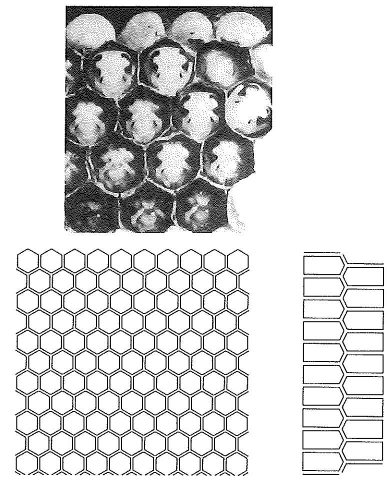


Figura 4. Sólido de Kelvin

Evidentemente, puede teselarse el espacio con copias suficientes de un prisma cuya base sea un polígono que tesele el plano; como sabemos que el hexágono cumple los requisitos de perímetro mínimo para un área dada, un prisma de base hexagonal puede ser, como después veremos, el adecuado. Pero el fondo de una celdilla de abeja no es hexagonal, sino que está formado por tres rombos yuxtapuestos dos a dos alrededor de un vértice común por el que pasa el eje de la celdilla. Como en un panal están las celdillas yuxtapuestas por sus fondos, hay que pensar en que estos rombos formen parte de algún poliedro cuyas caras sean rombos y, además, tesele el espacio con copias de sí mismo. Ese poliedro es el rombododecaedro cuya teselación tridimensional es equivalente a la de una red de cubos.



Figuras 5. Panal de abejas

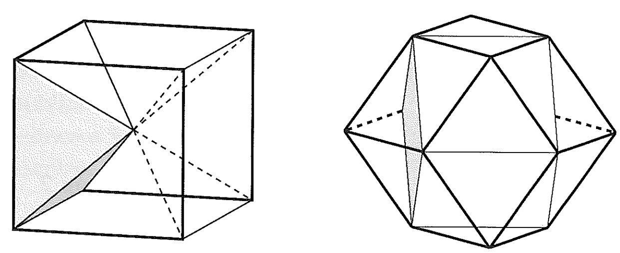


Figura 6. Rombododecaedro

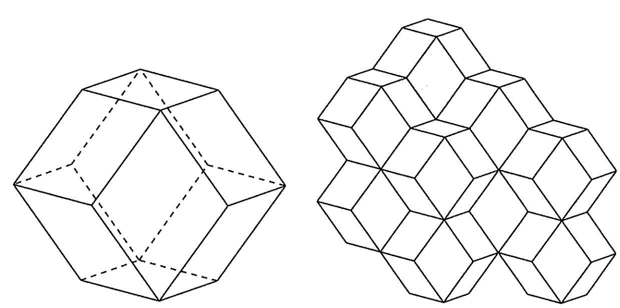


Figura 7. Teselación de rombododecaedros

Por otra parte, si hacemos las secciones hexagonales de los algunos cubos de la red, queda el panal de abejas. ¿No es fantástico el resultado?

SUMA 34
junio 2000, pp. 99-101

Dos y dos son cuatro

Fernando Corbalán

MATES Y MEDIOS

EN CUALQUIER ENCUESTA que se realice siempre aparece que a nivel social se considera que las matemáticas son muy interesantes. El problema surge cuando además de la anterior declaración de principios hay que decir para qué son importantes las matemáticas, porque después de algunos cuantos lugares comunes sobre comprar y vender, se hace el vacío. Con justicia se ha dicho que las matemáticas son invisibles, en nuestro entorno. Y por eso uno de los objetivos de este Año Mundial que estamos disfrutando es mostrar que las matemáticas están bien presentes en nuestras vidas. Yo, modestamente, aprovechando este escaparate que tan gentilmente me presta SUMA, y antes de entrar en los medios que nos ocupan, propongo un método sencillo y rápido para que cualquiera (incluidos, y quizá de forma prioritaria, nuestros alumnos) se de cuenta de la importancia de las mates: que haga un esfuerzo de imaginación e intente hacerse idea de lo que pasaría si de buenas a primeras desaparecieran todos los números (yo algunas cuantas veces les he propuesto la tarea a mis alumnos y con cierta frecuencia sus respuestas son apocalípticas). Y una vez puesto en materia que después reflexione sobre el hecho de que las matemáticas son mucho más que números.

Pero dentro de la poca visibilidad de las matemáticas hay algunas cosas que sí que penetran profundamente en el inconsciente colectivo. A una de ellas nos referíamos en el artículo anterior: el 100% es la seguridad (y así aparece con frecuencia en la publicidad). El tema que nos va a ocupar hoy es otro de los símbolos de lo indiscutible:

$$2 + 2 = 4$$

Aparece en los medios de comunicación con cierta frecuencia en forma de chiste, una de las formas más rápidas y profundas de interpretar el sentir popular. Y como muestra de su importancia social se le hace hasta un monumento con toda la fanfarria propia del caso (como en el chiste de Quino, fig. 1). Pero no todo puede estar en orden, porque de cuando en cuando se cortocircuitan los conocimientos y aparece el absurdo (y así llegamos al primer chiste de Forges, fig. 2), que llega incluso a utilizar la negación de esa igualdad incontrovertible como símbolo de ir contra los cauces establecidos, contra las verdades indiscutibles (merecedoras por tanto de un castigo duro, como se ve en el otro dibujo de Forges, fig. 3).

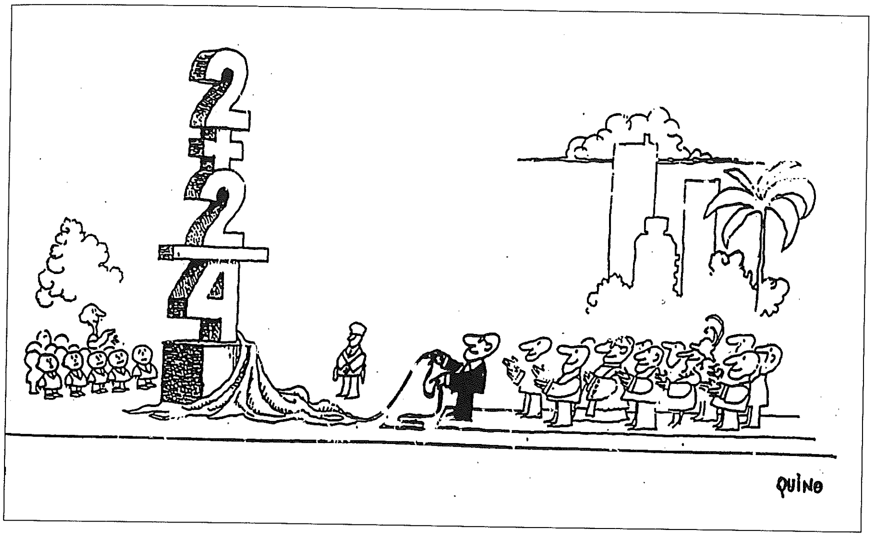


Figura 1
Quino

Figura 2
Forges
El País, 18/7/95

Figura 3
Forges
El País, 25/5/98

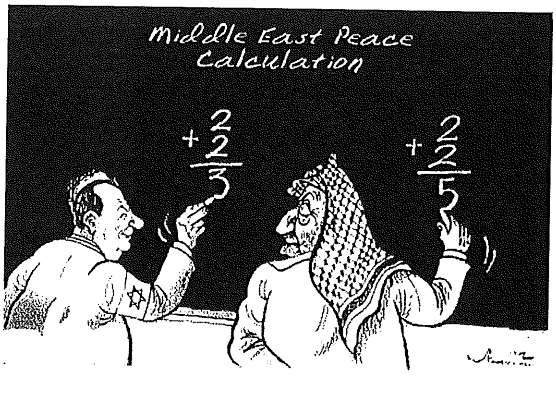


Figura 4
Stavro
The Daily Star, Beirut, Octubre 99

Pero no pensemos que en este aspecto somos diferentes porque la referencia a la susodicha igualdad aparece en otras culturas. Puede ser discutible la ideología que vehicula el siguiente chiste, pero no lo es la utilización en el mismo sentido del 2 + 2 = 4 (fig. 4).

También la publicidad usa la igualdad que comentamos. En la primera muestra que aportamos cambiándola como una forma de mostrar que hacen un descuento (fig. 5). Y de esa suma se debería poder deducir con facilidad el porcentaje de descuento. Pero ahí ya los publicistas no estaban seguros de tocar un tema que dominaba el público porque se vieron en la obligación de poner el porcentaje de descuento que suponía (el 20%). Y creo que estaban en lo cierto, porque yo he propuesto a diversos grupos de alumnos, de diferentes niveles, en años sucesivos, ese anuncio (o solo la igualdad) borrando oportunamente el porcentaje que aparece debajo, para que ellos lo dedujeran, y los resultados no eran muy halagüeños (el porcentaje de éxito con alguna frecuencia no llegaba a alcanzar el del descuento ofrecido). Tanto es así que ya lo he pasado a incorporar a mi arsenal educativo: sumas surrealistas (2+2 = 3; 2+3 = 6; y otras del mismo tenor), en las que hay que decir el porcentaje de aumento y disminución que suponen.

Figura 5

Otro caso más reciente es del mismo tipo de llamar la atención de los posibles clientes de un banco ofreciendo otra suma cuyo chocante resultado era el porcentaje que ofrecían (fig. 6).

Figura 6

Seguro que no son las únicas apariciones en los medios de comunicación. Nos gustaría mucho poder incorporar más. Así es que si las tenéis localizadas y lo tenéis a bien podéis mandarlas por correo a la revista o por correo electrónico a

suma@public.ibercaja.es

Próximamente ampliaremos los datos.

Nota final.- Sobre el significado del eslogan y del mismo nombre del perfume de Givenchy: «un peu plus loin que l'infini» (un poco más allá del infinito), al que nos referíamos en la entrega anterior, dos posibles interpretaciones:

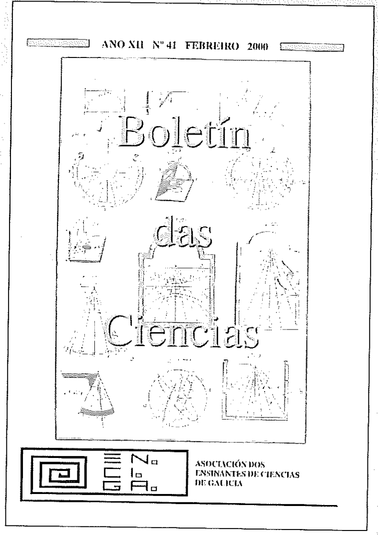
- La permanencia del aroma más allá del tiempo, es decir es un perfume cuyo olor permanece mucho tiempo.
- También, en un aspecto más matemático, π es una relación constante, la misma que hay que establecer con un perfume, para que nos identifique.

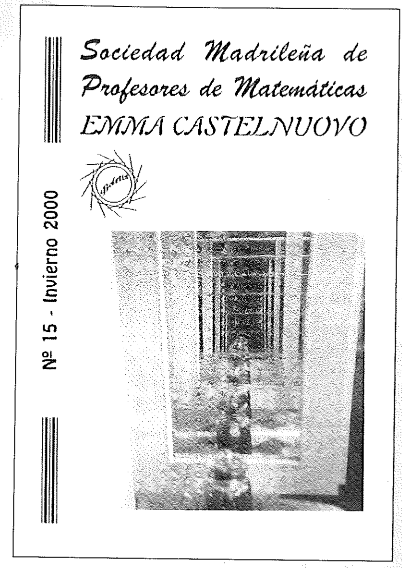
Por supuesto que hay muchas más. Seguimos esperando la tuya.

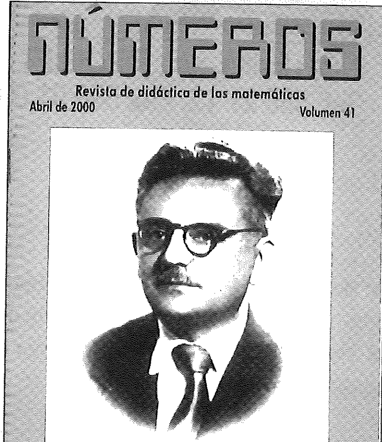
FE DE ERRATAS N.° 33

- En el artículo «Los 17 grupos de simetría planos del mudéjar aragonés» (pp. 5-23) están intercambiadas entre sí las fotos 1 y 2 (p. 8) por un lado; y las fotos 3 (p. 9) y 6 (p. 10). En ambos casos los pies de las fotografías están en los lugares oportunos. En la página 12 están intercambiados entre sí los rótulos L_6 y L_7 de la figura.
- En la página 142, 2.ª columna, 4.ª línea, debe cambiarse «Coord. J. M. Sorando» por «Elaborada por J.M. Sádaba, J.A. Sallán, J.M. Sorando y A. Zapatero».

PUBLICACIONES DE LAS SOCIEDADES







SUMA 34
junio 2000, pp. 103-104

El juego de la «L»

Grupo Alquerque*

ESTE JUEGO fue creado por Edward de Bono, medico, psicólogo y pensador maltés, con la intención de producir el juego más simple posible, que pudiera, sin embargo, jugarse con un alto grado de habilidad donde no hubiera estrategia ganadora y con un mínimo de piezas y reglas.

El resultado fue el juego de la «L», que a continuación se describe.

Normas del juego de la «L»

Es un juego de estrategia y reflexión, para dos jugadores, a partir de los siete años.

Elementos que lo componen:

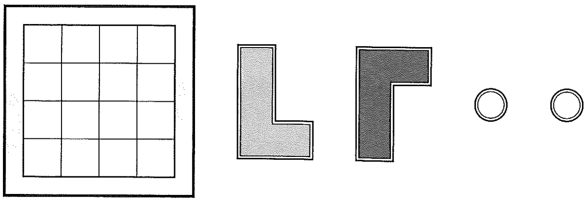


Figura 1

Un tablero de 4 x 4 cuadrados, dos piezas en forma de ele de diferente color (cada una de las cuales cubre una superficie de cuatro cuadrados), y dos fichas redondas de igual color, que se denominan fichas neutras (figura 1). La posición de inicio es la que aparece en la figura 2.

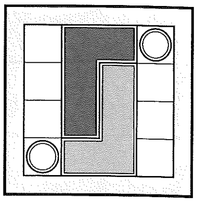


Figura 2

* Los componentes del Grupo Alquerque de Sevilla son Juan Antonio Hans Martín (C.C. Santa María de los Reyes), José Muñoz Santonja (IES Macarena), Antonio Fernández-Aliseda Redondo (IES Camas), José Blanco García (IES Alcalá del Río) y Josefa M.ª Aldana Pérez (C.C. Inmaculado Corazón de María –Portaceli–).

JUEGOS

El objetivo del juego es inmovilizar la «L» del contrario. Por ejemplo, en la figura 3 el jugador con la «L» gris está bloqueado y pierde la partida.

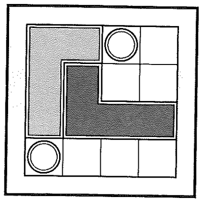


Figura 3

Una vez que cada jugador elige una pieza «L» de diferente color y se asigna el orden de comienzo cada jugador puede realizar en cada turno dos movimientos:

1.° Mover su pieza «L» a cualquiera de las posiciones no ocupadas del tablero. Su nueva posición tiene que diferir de la anterior por lo menos en un cuadrado.

La pieza «L» se puede girar antes de colocarla en el tablero. No se permiten pruebas sobre el tablero ni rectificaciones.

2.° Después de colocar la pieza «L», el mismo jugador si lo desea, pude mover una sola de las piezas neutras a cualquier cuadro vacío.

El juego finaliza cuando uno de los dos jugadores no puede hacer un movimiento reglamentario.

Se puede llegar a empate por acuerdo o cuando cada jugador repite el mismo movimiento tres veces seguidas (como en el ajedrez).

Es sorprendente que con tan pocos elementos y en un tablero relativamente pequeño el número de posiciones distintas se eleve a 18.368. Si consideramos idénticas las posiciones simétricas y las que son equivalentes por rotación del tablero, nos quedan 2.296 posiciones realmente diferentes. Sólo quince de ellas son posiciones ganadoras para uno de los jugadores. A continuación se muestran algunas de las que existen, correspondientes a la «L» oscura ganadora con tres cuadrados horizontales (se deja para el lector buscar las posiciones que faltan).

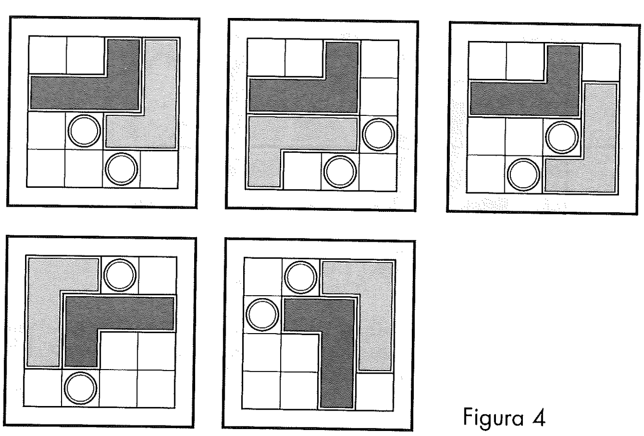


Figura 4

Se trata de un juego de aprendizaje rápido que potencia la percepción visual y la orientación espacial.

Favorece la búsqueda de estrategias de resolución de problemas y el razonamiento concreto.

Como ejemplos de actividades al margen del uso del juego como tal se pueden proponer:

a) Diseñar la partida más corta posible (contando con la inexperiencia de alguno de los jugadores)

En la siguiente partida el jugador de la pieza clara realiza un comienzo tan malo que en el primer movimiento del oscuro queda inmovilizado y pierde.

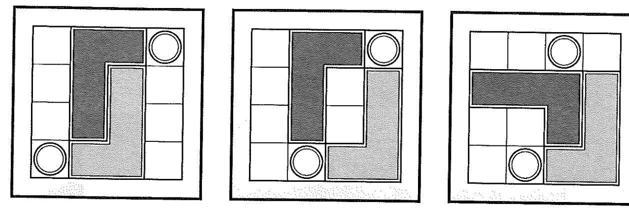


Figura 5

b) Buscar partidas que terminen al 2.° movimiento del primer jugador, al 2.° del segundo, etc. o que tengan una duración de movimientos determinada.

c) Problemas de selección de mejor jugada, del tipo «negra mueve y gana».

Finalmente, planteamos una serie de propuestas para investigar en el aula:

En lugar de usar una «L» formada por cuatro cuadrados se puede utilizar otro tipo de letra , como la «T» formada por 5 cuadrados, en un tablero de 5 x 5, y usando dos, tres o más fichas neutras. Si se ve que es difícil realizar bloqueos, se puede aumentar el número de fichas neutras o variar el tamaño del tablero. También se puede pasar a un juego de tres o más jugadores usando tres o más «L» o tres o más «T» ajustando las fichas neutrales necesarias y el tamaño del tablero.

Lo dicho antes para la «L» y la «T» se puede aplicar a otras configuraciones, como la «H», compuesta de 7 cuadrados, la «C» compuesta de 5 cuadrados, etc... e incluso se podría diseñar un juego tridimensional, donde las fichas neutrales serían columnas que imponen restricciones a los movimientos y las fichas cuatro cubos pegados en forma de L

Bibliografía

BOLT, B. (1981): *Aún más actividades matemáticas*, Labor, Barcelona.

CESAR DEÌSA, A. J. (1995): *A aprendizagem da Matemática eo Jogo*, Associaçao de Professorea de Matemática, Portugal.

DE BONO, E. (1983): «Potaje para dos. El juego L», *Cacumen*, Año 1, n.° 3. Zugarto ediciones.

SUMA 34
junio 2000, pp. 105-108

La Federación y «Thales» en Internet

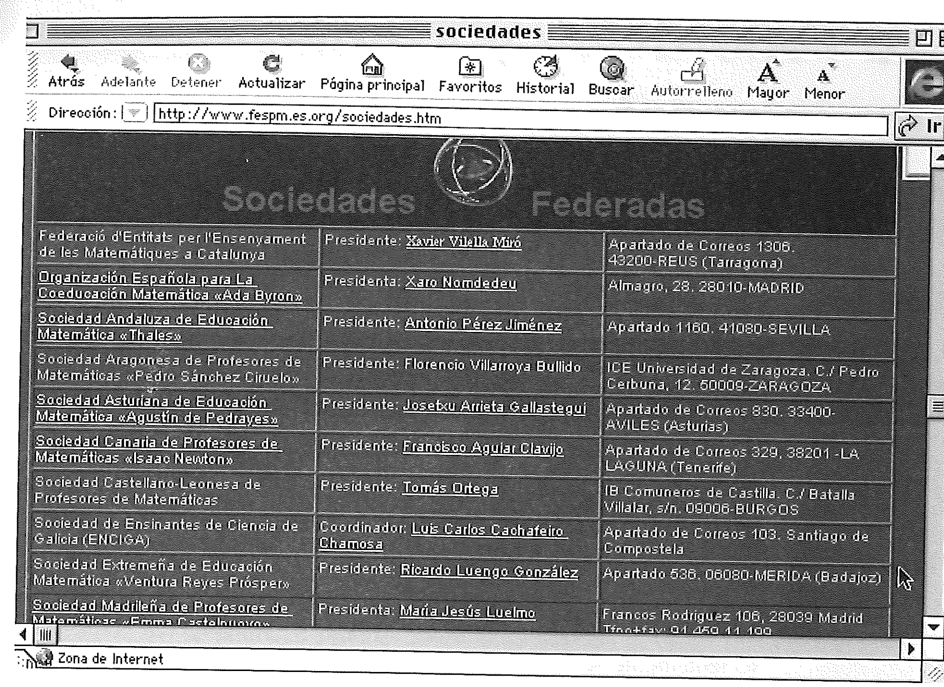
Antonio Pérez Sanz

LA RED DE REDES sigue creciendo a un ritmo exponencial. Recientemente se han superado los 300 millones de sitios en Internet, y cerca de un 7% en castellano. Y, por supuesto, muchos de ellos con información de Matemáticas. Empieza a no valer el pretexto de que uno no domina el inglés a la hora de resistirse a utilizar estos recursos...

Aunque el ciberespacio no es un espacio métrico (no existe la distancia) viene bien la máxima de no buscar lejos lo que tienes dentro de casa. Por eso en este número vamos a presentar dos sitios «de casa».

El primero, jerarquía obliga, el sitio de nuestra Federación, que ya tiene dominio propio:

http://www.fespm.es.org



esperemos que próximo, el germen de un anillo matemático en el que el internauta pueda hacer un recorrido por el paisaje matemático de nuestro país con el mínimo de esfuerzo.

La página es de todos y se hace entre todos así que esta presentación es también un llamamiento a todos los socios para que envíen sus aportaciones, noticias, enlaces...

La segunda presentación de este número es la de la Sociedad Andaluza de Educación Matemáticas «Thales»:

http://thales.cica.es

Como se ve en su portada el volumen de información es bastante extenso e interesante.

Los enlaces de la parte izquierda, algunos en construcción, nos permiten conocer la vida interna de la Thales y contactar con sus diversos servicios.

En la parte derecha aparecen los enlaces con un contenido más amplio:

En NOVEDADES nos podemos enterar de las actividades realizadas y previstas de la SAEM Thales en todas las provincias andaluzas.

En RECURSOS DIDÁCTICOS podemos encontrar una auténtica mina de materiales para la enseñanza de las matemáticas

Aunque la entrada tiene un pelín de guasa con las opciones de tamaño de los marcos que pueden despistar al navegador novato, la cantidad y calidad de los materiales

La estructura pretende ser simple y ágil.

En ella queremos volcar toda la información generada desde la propia Federación y también las de las sociedades federadas.

Está dividida en cuatro ramas más una en proyecto.

Sociedades Federadas: donde se puede encontrar las direcciones tanto de los miembros de la Junta Directiva como de los presidentes y de las páginas de las distintas sociedades federadas.

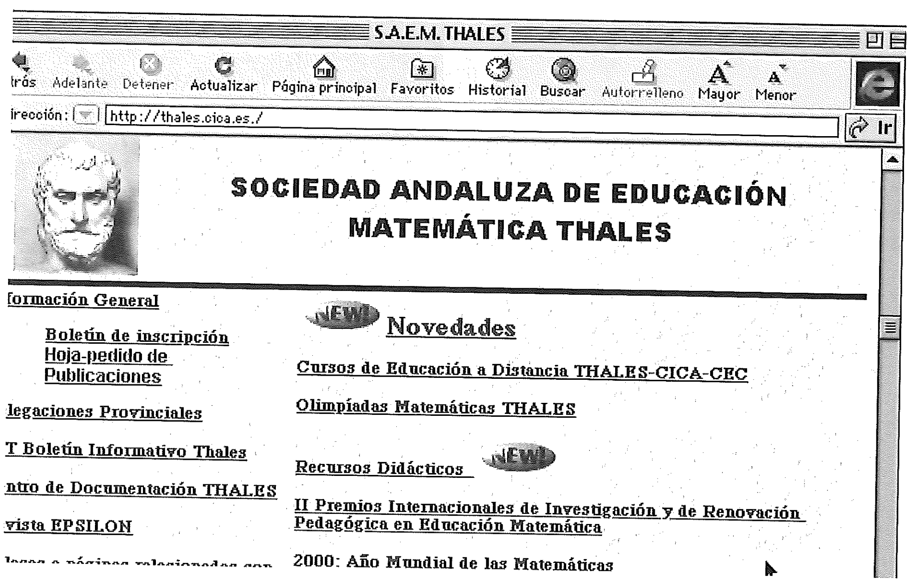
Un buen portal para que no se escape ninguna información del mapa de la enseñanza matemática española.

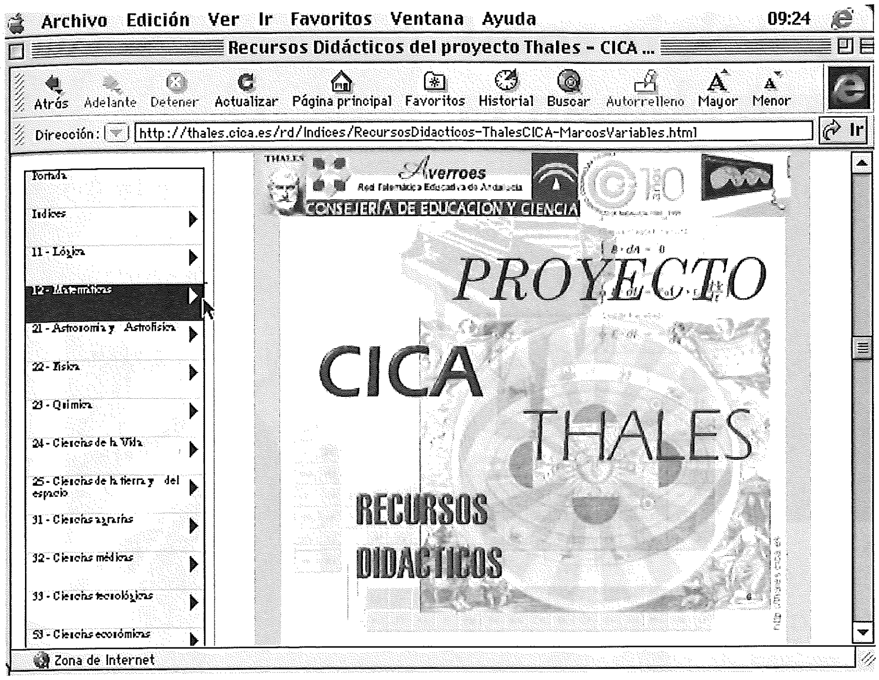
La segunda rama es una información de todos los artículos y autores publicados en SUMA hasta el número 31. Esperamos que los fastos del 2000 nos permitan actualizar la información de los tres últimos números cuanto antes.

En la tercera se pretende recoger la información actualizada de las actividades de carácter general en las que interviene la Federación y los recursos didácticos que se pueden encontrar en las páginas de las sociedades.

En la cuarta se incluirán las noticias relevantes que nos vayan llegando de todos los puntos del país relacionadas con la actividad matemática.

La última –no activa– será en un futuro,





merece la pena: hasta 68 materiales distintos, de lo más variado, catalogados en 9 apartados que recorren las principales ramas de las Matemáticas.

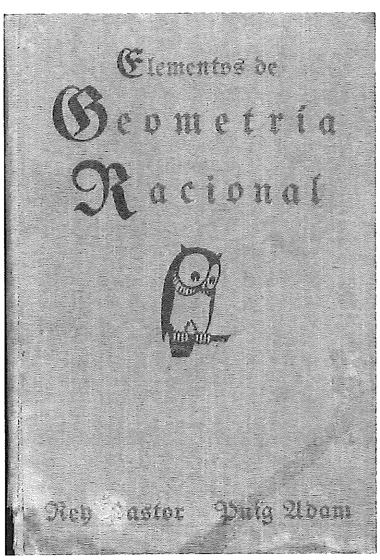
Allí podemos encontrar desde apuntes sobre números complejos, números primos, problemas curiosos, apuntes históricos, movimientos en el plano (con GIF animados)...

Gran parte de este material ha sido elaborado por profesores y profesoras a lo largo de su participación en diversos cursos y cuenta con la frescura del material salido de la cabeza del profesor y directamente aplicable al aula.

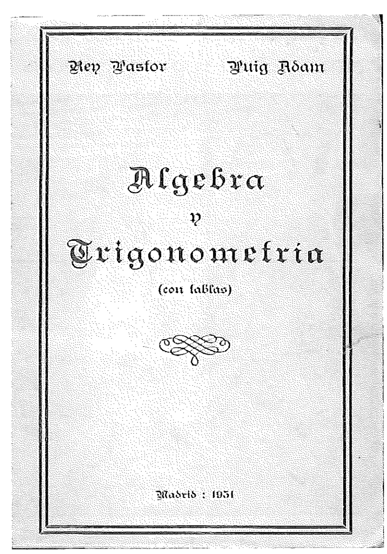
En OLIMPIADAS MATEMÁTICAS THALES tenemos a nuestra disposición toda la información de las últimas olimpíadas realizadas y una nada desdeñable colección de problemas propuestos a lo largo de estos años.

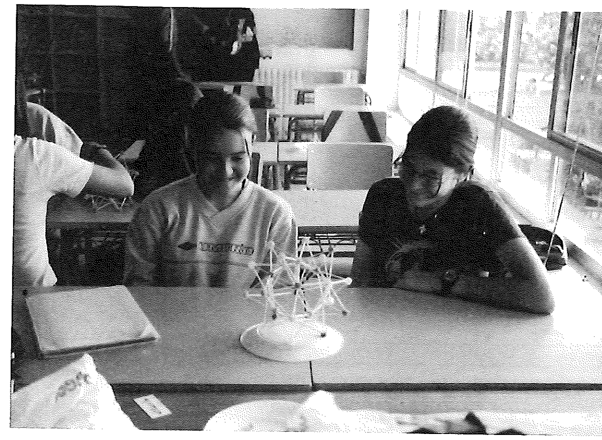
Los otros enlaces contiene información sobre el IX Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas de «Thales», las actividades del comité andaluz del 2000, las bases del Concurso de material didáctico para el aula de matemáticas y de los II Premios Internacionales de Investigación y Renovación Pedagógica.

En fin, ahora que llegan los calores un buen sitio para sumergirse a la búsqueda de excelentes piezas matemáticas. ¡Buena pesca! y ¡feliz navegación veraniega!

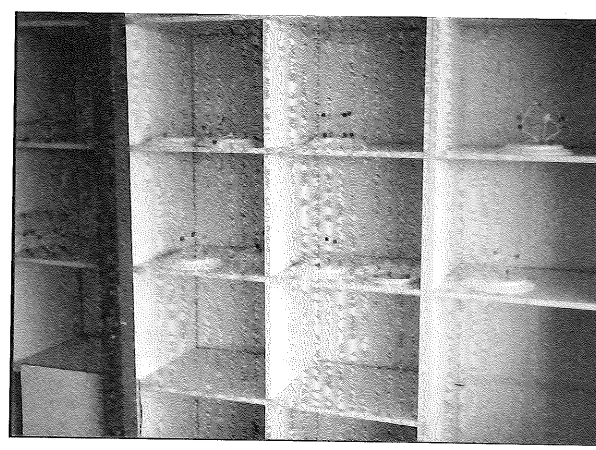


Colaboraciones con Rey Pastor





Día Escolar de las Matemáticas
en homenaje a Puig Adam
IES d'Almassora (Castellón)
[Fotos: Xaro Nomdedeu]



SUMA 34
junio 2000, pp. 109-112

Unos siglos que cambiaron el mundo (I)

Ángel Ramírez Martínez
Carlos Usón Villalba

DESDE LA HISTORIA

LA CRISIS DE FUNDAMENTOS de finales del siglo pasado desencadenó la obsesión de logicistas, constructivistas y formalistas por hacer de las matemáticas un sólido edificio en avance permanente y convirtió la historia de esta ciencia en su particular agencia publicitaria. Aisladas del mundo, encerradas en su torreón de marfil, las Matemáticas renunciaron incluso al valor de verdad de sus argumentos. Acosadas por su propia inseguridad, necesitaban envanecerse con sus éxitos y exhibir las cotas alcanzadas como una justificación ante el mundo y ante sí mismas.

En ese proceso dignificador, la historia se olvidó del aglutinante que dotaba de coherencia al edificio, ignoró los pasos en falso y, en general, el proceso de creación. Incluso, el efecto que su presencia causaba en la población y su influjo en la concepción del mundo. Obsesionada por el proceso acabado, concibió su desarrollo de forma lineal, como una concatenación de hitos artificialmente conectados. Una historia profundamente sectaria y pagada de sí misma que fijó, como exigía el guión, la génesis cimentadora del edificio matemático en Grecia, más concretamente en Euclides, obviando de paso las aportaciones del resto de las culturas.

La huella didáctica de aquel proceso de fundamentación que acaparó el interés del siglo ha sido profunda. Sirve con mirar casi cualquier libro de texto para cerciorarse de ello. En estos tiempos que huelen a contrarreforma sigue siendo necesario plantearse el cometido que atribuimos a esta ciencia en el desarrollo de la libertad personal. No debemos posponer por más tiempo una definición de lo que entendemos por Matemáticas, por «hacer matemáticas», asumiendo de una vez la referencia a Gödel y, con ella, el fracaso definitivo del formalismo. Es hora de asimilar de verdad a Polya, más allá de la manida referencia a *How to solve it*, aceptar la dubitabilidad de Lakatos como punto de partida y reflexionar con Feyerabend contra el método. Pero ello lleva implícito también una profunda modificación de las referencias históricas. No podemos seguir leyendo a la luz de la vela. Debemos hacer un esfuerzo por incorporar nuevas aportaciones, replantear su papel didáctico y redefinir su ámbito de actuación. Es necesario empezar a reconstruir nuestra concepción de la historia. De esa historia que negó la existencia de matemáticas en el Renacimiento español[1] y no supo trascender la aristocrática visión de los hitos. La misma que hizo desaparecer de sus páginas los siglos XI y XII en la Marca Superior y con ellos a uno de los matemáticos más importantes de lo que una Europa, empobrecida científica y culturalmente, dio en llamar Edad Media.

Nos persigue la misma convicción platónica que a Leonardo Sciaccia cuando en *El archivo de Egipto* pone en boca de uno de los personajes su valoración de la historia «...creemos que la verdad existía antes que la historia y que la historia es mentira. En cambio, la historia rescata al hombre de la mentira, lo conduce hacia la verdad». Es ella la que nos sitúa en el siglo XI en la taifa zaragozana.

La Marca Superior

La especial sensibilidad demostrada por los reinos de Taifas hacia la cultura estableció una competencia entre ellos que tuvo como base la autoafirmación y justificación política de sus reinados y como fin dotar de esplendor, pompa y boato a sus cortes respectivas. En particular, la especial afición del rey al Muqtadir[2] hacia las ciencias en general, y hacia las matemáticas en particular, hicieron recalar en Sarakusta una buena parte de la expoliada biblioteca de al-Hakam II, dotando a la taifa zaragozana de una de las colecciones de libros más actualizada del momento.

El hecho de ser la avanzadilla del Islam, pero sobre todo el clima de paz y estabilidad de esta frontera rica y poblada, atrajo hacia la Marca Superior a innumerables sabios musulmanes que huían de la *fitna* y a numerosos judíos[3] seducidos por la protección que les ofrecía la familia Banu Hud. La ausencia de una zona de exclusión sometida a continuos ataques permitió una interacción permanente entre las tres religiones y el desarrollo de un clima de docta controversia que estimuló de forma especial la filosofía y acabó convirtiendo a algunas ciudades aragonesas y del Sur de Francia como Tudela, Tarazona, Narbona, Marsella, Zaragoza o Barcelona en importantísimos centros de traducción entre los siglos XII y XIV.

Reducidos los Pirineos a una simple dificultad geográfica los contactos con el resto de «Europa» habían sido permanentes, sobre todo por parte de la comunidad hebraica. Como también lo fueron las relaciones con los principales centros culturales de Oriente por parte de los musulmanes a través de las preceptivas peregrinaciones[4]. Todo ello configuró el marco socioeconómico que acabaría por convertir la frontera noroccidental del Islam en el principal centro filosófico y científico del siglo XI en al-Andalus.

Abu ᶜAmir Yusuf Ahmad al-Mu'taman ibn Hud

Muy poco sabemos de la niñez ni de la formación del que, en opinión del biógrafo Saᶜid al-Andalusi, contemporáneo suyo, era el joven más brillante y famoso de su tiempo por sus conocimientos de Filosofía, Matemáticas y Física. Tan sólo que contó con excelentes maestros y posiblemente con la biblioteca científica más importante de al-Andalus.

Su *Kitab al-istikmal –El libro de la complección–* estaba llamado a ser el sustituto de los programas de formación (*Mutawassitat*) del centro del imperio[5]. Es, por tanto, una obra enciclopédica. Un intento de renovación y actualización de dichos programas a base de completar sus contenidos con el saber matemático del momento. Corregido y enseñado por Maimónides (1138-1204), *Kitab al-istikmal* se siguió estudiando en el Magreb, al menos, durante los siglos XIII y XIV y citándose como referencia segura en todo el mundo musulmán. La conquista de al-Andalus por almorávides y almohades marcó un momento trascendental en su difusión al quedar integrada la península en la zona de influencia del Magreb. Hacia allí viajó de la mano de científicos como Ibn al-Yasamin a finales del siglo XII, Ibn Munᶜin (¿-1228) o, quizás, al-Qurashi ya en el siglo XIII.

La primera mitad de la obra la dedica a las llamadas disciplinas teóricas. La forman cinco bloques que contienen unas 400 proposiciones rigurosamente demostradas. En ella, como no podía ser de otro modo, se recogen los grandes temas de la tradición griega: teoría de números, magnitudes inconmensurables, construcciones geométricas y cónicas, dejando constancia de un vasto conocimiento de los principales textos de la matemática griega: los *Elementos* de Euclides, las *Cónicas* de Apolonio, la *Esfera y Cilindro* de Arquímedes, las *Esféricas* de Teodosio y el *Almagesto* de Ptolomeo. También se aportan demostraciones nuevas, en ocasiones más simplificadas, de numerosas proposiciones de los *Elementos* de Euclides y una solución mejorada del problema de al-Haytham acerca de la reflexión en un espejo esférico.

Pero, más allá del hito, *El libro de la complección* resulta trascendental desde un punto de vista histórico porque destruye definitivamente la tradicional creencia de un Occidente musulmán desconectado científicamente (cuando menos matemáticamente) de Oriente. En esta obra, al-Mu'taman demuestra conocer a la perfección textos tan importantes y emblemáticos del saber oriental como: *El libro de la medida de las figuras planas y esféricas* (≈850) de los hermanos Banu Musa, *La cuadratura de la parábola* de Ibrahim ibn Sina (¿- 946) o el *Tratado de los números amigos* de Thabit Ibn Qurra (¿-901). Un hecho que evidencia un amplio conocimiento del saber de su tiempo. Lo que desde luego no constituye ninguna excepción a tenor del trabajo de algunos de sus contemporáneos como Ibn Khalaf, Ibn Jawshan, Ibn Sayyid, Ibn Muᶜadh al-Jayyani o Az-Zarqali.

En cualquier caso se trata de una obra inacabada. Y es precisamente la segunda parte, dedicada a problemas prácticos de Astronomía, Álgebra, Mecánica, Cálculo Indio y Óptica la que sufre esa incompletitud.

En ella aparece también una demostración del llamado teorema de Ceva, siete siglos antes de que naciera el conocido matemático italiano. Poco importa si la demostración fue o no la primera. Sólo una historia que no acaba de asumir sus limitaciones y no termina de aceptar la ciencia como una creación colectiva convierte en esenciales estas cosas. El hecho es que en la Frontera Superior de al-Andalus y en el s. XI el teorema era conocido, que se estaba al día[6] del saber matemático del momento y que alrededor de la corte se desarrollaba una notable actividad investigadora, con el rey a la cabeza. Condiciones favorables que vienen a sumarse a las citadas en los primeros párrafos y que permitieron una espectacular actividad cultural de la que da fe el abultado elenco de figuras de la gramática, filosofía, matemáticas, medicina, astronomía, astrología, poesía,... que jalonan este periodo, tanto entre la comunidad judía como entre la musulmana. Un verdadero siglo de Oro del saber peninsular[7] del que poco sabemos sobre su calado social o su influencia en la educación matemática posterior más allá de la pura especulación inferencial. Si bien es cierto que su fuerza acabaría por determinar y caracterizar a Europa. Pero sobre este tema hablaremos en próximos artículos.

A vueltas con la didáctica

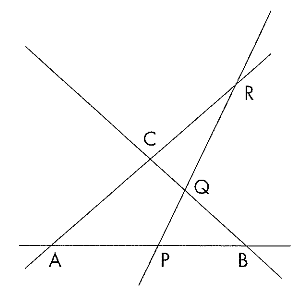
Ahondemos en esta reflexión. Seguramente, el teorema tan sólo era conocido en el siglo XI y posteriores por una minoría intelectual. La que nutre las páginas de la historia con la excusa de la disponibilidad. También hoy es un gran desconocido para el gran público. Ha desaparecido de las aulas con el resto de la geometría del triángulo. Hemos recuperado algo de geometría en los currículos, al menos en teoría, pero en la práctica sigue relegada al final de los temarios, unos días antes de que no dé tiempo a trabajar la probabilidad. Con todo, la geometría del triángulo sigue ausente[8] de ellos. Se puede pensar que afortunadamente. Quizás. También somos partidarios de romper las cadenas de Euclides[9]. Pero la forma de hacerlo no es única. Estamos convencidos incluso de que hay que comenzar por ello. De que es fundamental para nuestra formación como profesores y profesoras porque pone en entredicho esa tradición formalista. Aquella que sólo consideraba que se adquiría conocimiento tras una solemne demostración y que parece haber dejado en nosotros una marca indeleble.

Proponemos recuperar los conceptos y de paso incorporar la inducción como modelo para generar hipótesis, también como génesis del rigor. De un rigor suficiente y adecuado a cada etapa educativa. Pero, sobre todo, a cada momento del desarrollo intelectual y afectivo del ser humano que lo ambiciona. Y es que ahora tenemos herramientas informáticas que permiten una inducción que antes era tan costosa como la propia demostración euclidiana.

No podemos vivir atrincherados en el pasado. El desarrollo tecnológico tiene fuertes implicaciones sociales que determinan nuestro trabajo. También ofrece herramientas que nos ayudan pero, sobre todo, que lo transforman y nos obligan a plantear alternativas que no tienen por qué ser de adaptación.

Algunas propuestas

Y puesto que hemos tomado la figura de al-Mu'taman como excusa podemos recalar en el teorema de Menelao de Alejandría (≈100).



Si una recta corta a los lados AB, BC y CA de un triángulo (o a sus prolongaciones) en P, Q y R respectivamente, se cumple que $AP \cdot BQ \cdot CR = AR \cdot BP \cdot CQ$

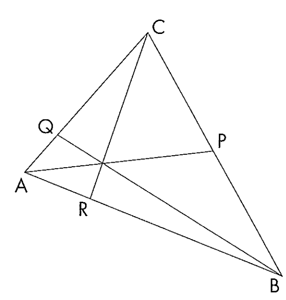
Y aceptar el reto que ofrece Carl B. Boyer en su *Historia de la matemática* y tratar de demostrarlo por «métodos de geometría elemental o aplicando relaciones trigonométricas sencillas».

El teorema en sí, aplicado a triángulos planos, era conocido por los contemporáneos de Menelao y él mismo consiguió una generalización a triángulos esféricos que en notación actual sería[10]:

$$\mathrm{sen}AP \cdot \mathrm{sen}BQ \cdot \mathrm{sen}CR = \mathrm{sen}AR \cdot \mathrm{sen}BP \cdot \mathrm{sen}CQ$$

En 1806 Carnot[11] ofreció una preciosa generalización en la que la recta que corta a los lados del triángulo es ahora sustituida por una curva cualquiera de orden n.

Una versión diferente del mismo teorema es la que lleva el nombre de Ceva (o de Ceva-Menelao) y que, si claudicamos a la dudosa costumbre de asignar paternidad a los teoremas, a partir de ahora debiera denominarse, como mínimo, de al-Mu'taman-Menelao-Ceva:



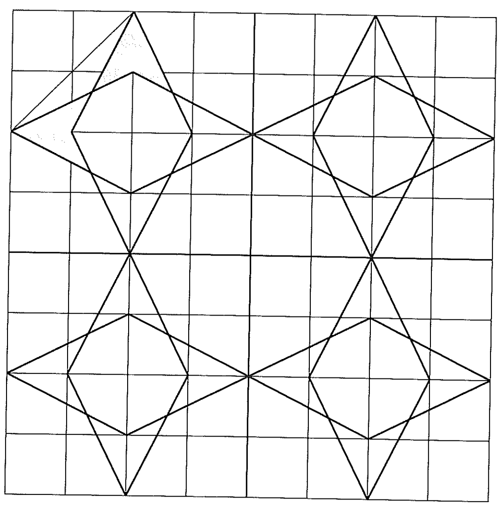
Tres rectas que pasan por los vértices de un triángulo y cortan los lados opuestos en P, Q y R respectivamente son concurrentes si y sólo si

$$AR \cdot BP \cdot CQ = RB \cdot PC \cdot QA$$

Establecer la relación entre los teoremas de Ceva y Menelao parece obligado. Mucho más interesante resulta, desde un punto de vista didáctico, hacer caso a Fielker y abrir el problema planteando preguntas como: ¿y si... las rectas no se cortan? ¿Existe alguna relación entre el área del triángulo inicial y las superficies de las diferentes regiones en que queda dividido? La propiedad es una más de esa inmensa colección de resultados que pareció quedar perdida en los textos de *Geometría Métrica* de Puig

Adam. Bonita sin duda por inesperada, pero también porque responde a ese íntimo anhelo platónico de unas matemáticas implícitas que lo expliquen todo.

Quien se conforme con las seguridades que aporta Cabri ha terminado. Para los coleccionistas de demostraciones, Steinhaus estudia un caso particular[12] sugiriendo una preciosa demostración visual a base de completar triángulos. A partir de una estética más sofisticada, intelectual y solemne Coxeter ofrece otra usando coordenadas baricéntricas[13] y aprovecha el recurso para demostrar los teoremas de Ceva y Menelao.



Esta sugerente generalización local suscita otra global tomando al cuadrado como primer protagonista. La figura origina a su vez un modelo decorativo relativamente frecuente en el mudéjar aragonés, y una infinidad de preguntas[14]. Una de ellas sobre los segmentos en que dividen a la diagonal las rectas hemipitagóricas[15] que parten de un vértice opuesto a ella[16]. La curiosidad genera interrogantes casi con la misma rapidez con que aparecen múltiples propiedades en la figura.

Apostilla final

Hemos tratado de acercar aquí un fragmento de nuestra cultura, silenciada durante siglos y después eufemísticamente recuperada. Y nos interesa más allá de las aportaciones de al-Mu'taman porque nos es propia. Su calado fue tan fuerte que determinó nuestra racionalidad. No seríamos quienes somos sin ella. Forma parte de nosotros mismos. Tratar de recuperarla nos sirve de excusa para reivindicar el mestizaje y la pluralidad. Y un concepto globalizador de la cultura y del conocimiento, ahora que la mundialización de la economía ambiciona en su provecho el minimalismo cultural.

Perseguimos con ello el respeto y la admiración hacia las contribuciones científicas, artísticas y filosóficas del mundo musulmán a través de las de nuestros antepasados, pero no sólo de ellos. Asumimos como propia una sensibilidad[17] de la que participan en este momento otros seres que nos son extraños y a los que, obviando los dictados de la racionalidad, se tiende a minusvalorar, extendiendo los límites de la pobreza más allá de los estrictos márgenes de la economía doméstica. Pretendemos, en definitiva, dotar de razones al corazón para trascender el racismo y la xenofobia, que nos eviten la infamia de experimentarlos y la obligación de tener que renegar de ellos de forma tan vehemente como reiterada. Que nos permita sentir a los moros[18] (por añadidura al resto de los inmigrantes, al resto de las etnias, al resto del mundo) como iguales.

Notas

1 Rey Pastor contribuyó a ello haciéndose eco del sentido desprecio manifestado por Echegaray hacia la producción de la época. De ellas hablaremos en próximos números. De ellas y de las implicaciones sociales de sus diferentes niveles de desarrollo.

2 Ahmad ibn Sulayman Abu Ya^{c}far al Muqtadir bi-llah ibn Hud constructor de La Aljafería y padre de al-Mu'taman.

3 Una prueba de ello lo constituye el hecho de que Yequti'el ibn Yishaq fuera visir del al-Mundir II, como Abu Fadl ibn Hasday lo fue, primero de al-Muqtadir y más tarde de su hijo al-Mu'taman.

4 Ya en el siglo X, y a modo de ejemplo, podemos citar a Abu-l Qasim Tabit b. Hanz y su hijo Abu Muhammad Qasim b. Tabit al-^{c}Awfi que viajaron a El Cairo y La Meca en 901 o a al-Kirmani (988-1066) que realizó un largo periplo por Oriente y creó después una escuela de matemáticos que se extendió por toda la península. Según opina Julio Samsó, con la llegada de los reinos de Taifas se reducirían estos contactos.

5 Según recogen Ibn^{c}Aqnin, Ibn al Akfani, Ibn Mu^{c}nim e Ibn al-Qifti. Véase Djebbar, A. (1992): *La Contribution Mathématique d'al-Mu'taman et son influence mathématique hors d'al-Andalus*, Actas del Coloquio Internacional de Toulouse.

6 Entendida la expresión con la relatividad que imponen la lenta comunicación científica de la época y la particular inclinación de al-Mu'taman hacia los problemas de la geometría griega.

7 Extendiendo así la denominación que el profesor Antonio Antelo (1991) reserva para la cultura hebraica de los siglos XI y XII.

8 A pesar de que, al parecer, continúa suscitando el interés de algunas ramas de la ingeniería.

9 En referencia al excelente libro de Fielker que bajo ese título proponía hace años la incorporación didáctica de la geometría sintética a las aulas, dotando de significado concreto aquel aserto de Freudenthal de que existe una geometría para cada edad cognitiva.

10 Boyer, Carl B. (1986): *Historia de la matemática*, A.U., Madrid.

11 *Essai sur la théorie des transversales.*

12 Steinhaus, H. (1986): *Instantáneas matemáticas*, Salvat, Estella.

13 Coxeter, H.S.M. (1988): *Fundamentos de Geometría*, Limusa, Mexico.

14 Véase: Ramírez, A. (1992): «Una figura interesante» *Revista Sigma*, n.° 11.

15 Una fructífera conexión con el arte la encontramos en la obra pictórica de Julián Gil. De allí retomamos esta denominación para los segmentos que partiendo de un vértice van a parar a los puntos medios de los lados que tienen enfrente.

16 Una buena colección de demostraciones de nuestros alumnos sobre la igualdad de estos tres segmentos puede verse en *Variaciones sobre un mismo tema*, Granada, 1998

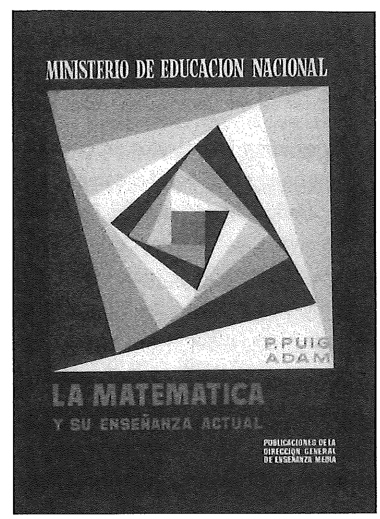
17 Artística, filosófoca, científica,... espiritual en definitiva.

18 Remarcamos la carga peyorativa del término y con ella la vergüenza del desprecio implícito que suele acompañar su uso.

SUMA 34
junio 2000

Casi todas las ideas didácticas de Puig Adam

LA MATEMÁTICA Y SU ENSEÑANZA ACTUAL
Pedro Puig Adam
Ministerio de Educación Nacional
Madrid, 1960
472 páginas



El día 12 de mayo se cumplió el primer centenario del nacimiento de Pedro Puig Adam, sin duda el didacta de las matemáticas español de más proyección internacional. Aunque no cabe duda de que entre los iniciados, es decir, los que de alguna manera nos dedicamos a enseñar matemáticas, o a la educación matemática, el nombre de Puig Adam es bien conocido, no se puede decir lo mismo de sus ideas. Su famoso *decálogo sobre la didáctica matemática media*, ha jugado un papel contradictorio en la difusión de las ideas de Puig Adam. Por una parte supone un compendio de estas ideas, un resumen hecho por él mismo de lo fundamental de sus concepciones sobre la enseñanza media de las matemáticas; pero, por otra parte, su amplia difusión ha eclipsado de algún modo el resto de sus textos, y hoy día podemos afirmar, sin riesgo a equivocarnos, que son muchos los que sólo han leído de Puig Adam como didacta los diez consejos contenidos en su decálogo.

RECENSIONES

Para quienes quieran profundizar en el conocimiento de las ideas de Puig Adam el libro clave es, sin duda, *La matemática y su enseñanza actual* publicado por la dirección General de Enseñanza Media del Ministerio de Educación Nacional el año 1960, es decir el mismo año de su prematura muerte, 12 de enero de 1960, cuando aún no había cumplido los 60 años de edad.

Y afirmamos que éste es el libro clave, por varios motivos. Primero, porque es una compilación de artículos publicados de forma dispersa en distintas revistas a lo largo de toda su vida profesional. Segundo, porque el mismo Puig Adam revisó y les dio unidad a todos esos artículos con ocasión de la aparición de este libro. Y, por último, porque al haber coincidido la revisión y la publicación con los últimos meses de su vida, esta compilación juega un papel de obra didáctica completa del autor o, al menos, casi completa.

Desgraciadamente, agotado hace muchísimo tiempo este libro sólo se puede encontrar en las bibliotecas de algunos institutos históricos o, como ha sido en mi caso, gracias a la casualidad al verlo en la biblioteca de un antiguo compañero, de carrera y de profesión, que abandonó la enseñanza ya hace años, que a su vez lo había recibido de su madre doña Margarita Dávila, también perteneciente al gremio de profesores de matemáticas. Desde aquí mi agradecimiento por habérmelo prestado.

Por fortuna, parece ser que próximamente será posible volver a disponer de este libro, ya que la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, el Comité de Madrid para el Año Mundial de las Matemáticas y Nivola, Libros y Ediciones se encuentran en tratos para reeditarlo.

Quienes estén interesados en otras obras de Puig Adam podrán encontrar una bibliografía completa buceando en la página web de Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas Emma Castelnuovo (www.smpm.es), donde se puede encontrar un enlace con la página que hemos dedicado a don Pedro. Esa página, además de una biografía, algunas fotos, y el famoso decálogo, incluye una bibliografía completa.

La matemática y su enseñanza actual es un volumen de 472 páginas dividido en dos partes y en siete capítulos, cada uno de los cuales va dividido a su vez en una serie de secciones. Se añaden al final cuatro apéndices. Estos son los capítulos

...agotado hace muchísimo tiempo este libro sólo se puede encontrar en las bibliotecas de algunos institutos históricos...

Por fortuna, parece ser que próximamente será posible volver a disponer de este libro...

Primera Parte

LOS PRINCIPIOS GENERALES

Capítulo primero.- *Una visión humana de la matemática*

1. La Matemática y la belleza.
2. La matemática y el hombre.

Capítulo segundo.- *Mirando al futuro (Nuevas perspectivas)*

1. Sobre Cibernética.
2. Sobre la moderna teoría de la información.
3. Un ingenio eléctrico para resolver problemas de lógica formal.

Capítulo tercero.- *El movimiento didáctico renovador*

1. La evolución de la didáctica matemática en nuestra generación.
2. Tendencias actuales de la enseñanza de la Matemática.
3. Balance de cuatro años de labor en España.

Capítulo cuarto.- *Los nuevos principios didácticos*

1. Sobre la enseñanza eurística de la Matemática.
2. Decálogo de la didáctica matemática media.
3. Las últimas recomendaciones de Ginebra (1956).

Segunda Parte

LA DIDÁCTICA MATEMÁTICA EN ACCIÓN

Capítulo quinto.- *Didácticas específicas*

1. Sobre la enseñanza de la Geometría en la Escuela primaria.
2. Sobre la enseñanza de la Aritmética en la Escuela primaria.
3. La didáctica matemática a lo largo de los ciclos medios.

Capítulo sexto.- *Material didáctico matemático*

1. Lo concreto en la enseñanza matemática.
2. Generalidades sobre los modelos.
3. Algunos ejemplos de material didáctico multivalente.
4. Material didáctico matemático extraído de la vida.
5. Los films matemáticos.

Capítulo séptimo.- *Muestras de enseñanza eurística*

1. Sobre sistemas de numeración.
2. Sobre congruencias y clases residuales.
3. Otra lección sobre congruencias y divisibilidad.
4. Sobre la estructura operatoria de la raíz cuadrada.
5. Sobre las nociones de proporcionalidad directa e inversa.
6. Una iniciación al empleo de letras.
7. Multiplicación y división de polinomios.
8. Sobre ecuaciones lineales y sistemas.
9. Progresiones aritméticas de orden superior.
10. La división del espacio en regiones.
11. Iniciación a las máquinas de calcular.
12. Iniciación al Álgebra de conjuntos.
13. Sobre permutaciones.
14. Iniciación de las simetrías en el plano.
15. Situaciones didácticas obtenidas por plegado.
16. Haces de elipses e hipérbolas homofocales.
17. Posiciones de rectas y de planos.
18. Volumen de prismas y de pirámides.
19. Iniciación a la función lineal y su representación gráfica.
20. Introducción eurística del rigor y precisión de lenguaje.

Apéndices

1. La formación del profesorado matemático de grado medio.
2. La vocación matemática.
3. En la encrucijada. Consejos de un guía.
4. Nuevo mensaje de despedida.

Y como hemos comenzado subrayando la difusión de su decálogo, empezaremos el comentario justo por él. Es importante observar el título. Puig Adam usa siempre el sustantivo Matemática, en singular, para referirse a la ciencia; nunca Matemáticas. Y usa el adjetivo matemática para referirse a la didáctica, al profesorado, o a cualquier otro aspecto que tenga que ver con esta ciencia. Así leemos *didáctica matemática* y no didáctica de las matemáticas, o profesorado matemático y no profesorado de matemáticas. Estos usos podrían aparecer simplemente moda del momento, pero no es así. Puig Adam se refiere siempre en singular a la Matemática intencionadamente, subrayando su unidad, frente a las Matemáticas como conjunto más o menos articulado de distintas disciplinas. Así, la sección 2 del segundo capítulo la titula *Decálogo de la didáctica matemática media*. Se recoge en él el contenido de un artículo publicado cinco años antes, en 1955, en la *Gaceta matemática* (1ª serie Tomo VII. Números 5 y 6).

> Se me piden normas didácticas. Preferiría despertar una conciencia didáctica; sugerir formas de sentir antes que modos de hacer. Sin embargo, por si valieran, ahí van las sugerencias que estimo más fundamentales:
>
> I. No adoptar una didáctica rígida, sino amoldarla en cada caso al alumno, observándole constantemente.
>
> II. No olvidar el origen concreto de la Matemática ni los procesos históricos de su evolución.
>
> III. Presentar la Matemática como una unidad en relación con la vida natural y social.
>
> IV. Graduar cuidadosamente los planos de abstracción.
>
> V. Enseñar guiando la actividad creadora y descubridora del alumno.
>
> VI. Estimular dicha actividad despertando interés directo y funcional hacia el objeto del conocimiento.
>
> VII. Promover en todo lo posible la autocorrección.
>
> VIII. Conseguir cierta maestría en las soluciones antes de automatizarlas.
>
> IX. Cuidar que la expresión del alumno sea traducción fiel de su pensamiento.
>
> X. Procurar a todo alumno éxitos que eviten su desaliento.
>
> Exceptuando el consejo primero de No rigidez o Adaptación, que es el más general, los demás podrían agruparse y categorizarse del siguiente modo:
>
> Preceptos relativos a *cualidades del método de enseñanza*: II. Genetismo.- III. Vitalismo.- IV. Gradación.
>
> Preceptos relativos al *modo*: V. Eurismo.- VI. Interés.- VII. Autocrítica.
>
> Preceptos que pudiéramos llamar de *plenitud*: VIII. Maestría.- IX. Expresión.- X. Éxito.

Puig Adam se refiere siempre en singular a la Matemática intencionadamente, subrayando su unidad, frente a las Matemáticas como conjunto más o menos articulado de distintas disciplinas.

Sigue el capítulo comentando uno a uno estos principios delimitando con algunas frase su alcance. El estilo de Puig Adam, a la vez directo y claro se deja ver desde las primeras líneas del comentario al primero de los principios, el que habla de la flexibilidad:

> El centro de la enseñanza no es hoy ya el maestro, sino el alumno. La acción de aprender ha arrebatado su antigua primacía al acto de enseñar. Hoy enseñar es estimular y guiar los procesos de aprendizaje. De ahí que la acción del maestro quede condicionada en cada caso a dichos procesos.

Y añade:

> Conviene recordar especialmente aquí este carácter general de la enseñanza con objeto de evitar que los profesores de matemática busquen en la didáctica soluciones fijas y rígidas como las de la Matemática misma.

Pruebas de ese estilo y de la contundencia y laconismo de sus afirmaciones las podemos encontrar en las acotaciones del resto de los principios del decálogo, cuando afirma por ejemplo: «Los procesos genéticos del pensamiento matemático están lo suficientemente vinculados a su evolución histórica como para que no nos olvidemos de dicha génesis y evolución» (precepto II). En los comentarios al precepto III aparecen tres ideas fundamentales: la necesidad de abstraer y concretar como fases inicial y final de la resolución de un problema evitando presentar «el mecanismo abstracto en vacío»; la conveniencia de que los currículos aborden de manera cíclica y no lineal las distintas partes de las matemáticas, lo que favorece adaptarse a las necesidades psíquicas de los alumnos y facilita abordar problemas vinculados a varias teorías matemáticas, vinculados a otras disciplinas. Señala además. La conveniencia de fomentar el trabajo en grupo, precisamente al abordar estas cuestiones de carácter más amplio «promoviendo hábitos útiles de colaboración social y de autodisciplina de grupos en comunidad de trabajo».

Aborda en el cuarto principio la graduación de los planos de abstracción. «Lo concreto y lo abstracto –afirma– no son términos absolutos, sino relativos». Lo observable, lo imaginable, lo intuible, lo representable, son distintas graduaciones de lo concreto en el camino hacia la abstracción. Cada escalón es «abstracto con respecto del anterior y concreto respecto del siguiente.[...] Cada categoría sólo es accesible a una determinada edad mental que el educador matemático tiene que tener muy en cuenta para graduarlas convenientemente, no sólo de curso a curso, sino aun ocasionalmente de alumno a alumno, acudiendo a planos más concretos de comprensión en aquellos menos dotados».

La verdad es que la mayoría de las afirmaciones de Puig Adam en estas acotaciones a los preceptos de su Decálogo no necesitan comentario:

> El niño no es un depósito a llenar de conocimientos, sino un potencial deseoso de convertirse en actividad. Encaucemos esa

actividad en un sentido educativo.[...] Sólo hay auténtica asimilación de un conocimiento cuando es fruto de una acción que motive su génesis. (Precepto V).

> [...] los conceptos matemáticos son particularmente aptos para crear situaciones de juego mental aderezándolos convenientemente. Si además se sabe sacar partido de las innumerables situaciones matemáticas creadas por problemas de la vida real, uniremos a dicho interés autónomo el interés superpuesto por la proyección a la vida (precepto VI).

Al comentar el precepto VII, el relativo a la autocorrección y tras señalar la importancia de que el alumno compruebe los resultados que obtiene y aprenda de sus aciertos y de sus errores añade:

> Pero también el profesor debe aplicarse el precepto, procurando comprobar objetivamente, por sí mismo, los resultados de su enseñanza y mejorando sus procedimientos a tenor de tales comprobaciones.

«No juzguemos como ignorancia de un concepto o de una propiedad la dificultad de su enunciación» por parte del alumno «Pese a esta dificultad el niño puede tener clara consciencia de uno y de otra y saberlos aplicar impecablemente».

Por último, reproducimos íntegro el comentario al precepto décimo: Procurar que todo alumno tenga éxitos que eviten su desaliento:

> Quizás ninguna disciplina cree en los alumnos desniveles tan acusados como los que crea la matemática. Esto produce en los menos dotados verdaderos complejos de desaliento y de aversión hacia la matemática que ya nunca tendrán remedio.
>
> Todo ser humano necesita del alcaloide del éxito que estimula su vida de relación social; y si las grandes dosis pueden ser funestas, las pequeñas dosis son necesarias. Hay que procurar suministrárselas a los alumnos menos dotados, homogeneizando cuando sea posible los grupos y proponiendo a cada grupo homogéneo ejercicios a su nivel.

No cabe duda de la importancia mayor que este precepto ha tomado para los profesores actuales de enseñanza secundaria, poco acostumbrados hasta hace poco a esta diversidad de los alumnos, salvo en las pequeñas dosis que se dan incluso en el colectivo más uniforme. Con la extensión de la enseñanza obligatoria, tienen que atender a alumnos de muy distintos conocimientos iniciales y capacidades en el ámbito de la misma aula. En esta ocasión, como observaremos en otras muchas, la actualidad y vigencia de las ideas de Puig Adam es absoluta.

Defensor de la didáctica heurística, –a este asunto dedicó otro libro magnifico todavía más difícil de conseguir hoy día– expone sus bases en la sección primera del capítulo dedicado a *Los nuevos principios didácticos.* Enuncia en él las causas de la aversión por la matemática de tantas personas de su generación, y no cabe duda que también de las posteriores:

> [...] hay que empezar por declarar muy fuerte que este *Non possumus* [no sirvo, no puedo] con el que se resignaban los alumnos, y al que asentían tácitamente los profesores, es una lamentable falsedad, resultante tan sólo de un defectuoso sistema de educación. No hay nadie, absolutamente nadie, que pueda declararse negado para las matemáticas. Existen, sí, diferencias de ritmo en el aprendizaje de ellas, lo mismo que en cualquier otro aprendizaje; pero creer que para aprender matemáticas es necesaria una facultad especial, solamente reservada a cerebros de cierto privilegio, es un error que hay que combatir con energía, mejorando precisamente nuestros sistemas de enseñanza. Aquel verdadero horror a las matemáticas fue tan sólo la consecuencia de un error educativo. Error de programación; inadaptación del método; ineficacia del modo.

En esta ocasión, como observaremos en otras muchas, la actualidad y vigencia de las ideas de Puig Adam es absoluta.

Sitúa en las necesidades sociales de cada momento histórico la determinación de qué aprender.

Puig Adam centra el problema del aprendizaje del niño en general y en especial en el ámbito de las matemáticas formulándose tres preguntas:

> ¿Qué es lo que el niño debe aprender?
>
> ¿Qué es lo que el niño puede aprender?
>
> ¿Cómo lograr que el niño quiera aprender?

Sitúa en las necesidades sociales de cada momento histórico la determinación de *qué* aprender. La evolución psicológica del niño en sus diferentes etapas determina lo que *puede* aprender. Pero donde pone su énfasis es el cómo lograr que el niño *quiera.* Critica la enseñanza tradicional de la matemática, probablemente no muy distante de la más generalizada en las aulas hoy día, y la critica porque

> solamente prestaba atención al problema del programa, a lo que el niño debía aprender, y ello aún con una visión retrospectiva y arcaica que bien puede declararse hoy inservible y caduca. Las humanidades de hoy no son las de antaño. No preparamos al niño para vivir en el recuerdo de nuestro pasado, sino para vivir su futuro, lleno de exigencias técnicas y, por ende, científico-matemáticas.
>
> Pero la gravedad del error de la enseñanza tradicional se manifestaba aún más ostensiblemente en las preguntas segunda y tercera de las formuladas, que son precisamente las relativas al método y al modo. No se prestaba ninguna atención a lo que el niño podía aprender [...] ni menos todavía se preguntaron nuestros profesores si nosotros, niños, teníamos algún deseo de aprender lo que nos enseñaban, pregunta que en aquellos tiempos hubiera parecido ridículamente absurda.

Señala después los avances a lo largo de la primera mitad del siglo XX en el ámbito de la psicología y, por tanto, en la determinación de lo que se puede aprender.

Pasa en consecuencia a centrase en el problema de cómo lograr que el niño quiera aprender; lo que él llama el problema de los modos. Y propone el «modo heurístico», el aprendizaje por descubrimiento. Luego, con un planteamiento dialéctico, él mismo plantea cuáles son las objeciones más comunes al uso de este *modo de enseñanza*: la lentitud del procedimiento; la falta de homogeneidad de la clase; el elevado número de alumnos en el aula; y, por último, el que los profesores se sientan acobardados por las pruebas externas (reválidas, selectividades y equivalentes). Desmonta uno a uno los argumentos de estas objeciones. Termina su defensa del *modo heurístico* alentando a los profesores a utilizarlo, avisándoles de que esto no es sencillo y requiere esfuerzo y pidiendo a las autoridades que no constriñan el trabajo de los profesores y que les dejen margen de libertad suficiente para desarrollar su personal labor formativa.

La sección tercera de este capítulo, por el que hemos comenzado la recensión se titula *Recomendaciones sobre la enseñanza de las matemáticas.* Contiene el texto íntegro de un documento de la UNESCO y la Oficina Internacional de Educación, con recomendaciones dirigidas a los Ministerios de Instrucción Pública sobre la planificación de la enseñanza de las matemáticas. El documento es del año 1956 y fue elaborado por una comisión internacional presidida por Piaget y de la que formaron parte el mismo Puig Adam y W. Servais entre otros. Se recogen en este documento párrafos sobre los fines de la enseñanza de las matemáticas, el lugar de las matemáticas, los métodos y, como no podía ser menos en un documento en el que participó Puig Adam, los materiales didácticos. En ese apartado entre otras cosas se puede leer: «Del uso de los medios auxiliares audiovisuales, de los modelos matemáticos concretos (existentes en la vida corriente, construidos por los alumnos o los profesores, o también fabricados por firmas comerciales), que tienen un lugar cada vez más destacado en la enseñanza, conviene sacar partido para que los alumnos adquieran de forma activa las abstracciones matemáticas». Termina este documento hablando sobre el personal docente y la necesidad de la colaboración internacional.

Daremos ahora un paso atrás para abordar el primer capítulo de *La matemática y su enseñanza actual.* Se titula *Una visión humana de la matemática.* Comienza con una sección dedicada a *La Matemática y la Belleza.* Se formula en ella dos preguntas ¿qué es lo bello? y ¿qué es lo matemático?, apoyando sus ideas en argumentos tomados de las artes plásticas, de la música y de la literatura –en este sentido no olvidemos que Pedro Puig Adam además de matemático era músico (intérprete y compositor), era aficionado a la pintura e hizo algunas incursiones en el campo de la creación literaria.

Termina su defensa del modo eurístico alentando a los profesores a utilizarlo, avisándoles de que esto no es sencillo y requiere esfuerzo y pidiendo a las autoridades que no constriñan el trabajo de los profesores y que les dejen margen de libertad suficiente para desarrollar su personal labor formativa.

En la parte final aborda algunas teorías sobre la matematización de la belleza, desde Luca Pacioli y Alberto Durero hasta las de Birkhoff (cuyo texto original puede leerse en la enciclopedia *Sigma*). Puig Adam manifiesta un cierto escepticismo hacia estas teorías matemáticas de lo bello.

La sección segunda de este primer capítulo se titula *La matemática y el hombre*, y es un recorrido sucinto por la historia de las ideas matemáticas, desde la Antigüedad hasta el desarrollo de la técnica en el siglo XX, con una reflexión final sobre los valores estéticos de la creación matemática.

El capítulo dos se titula *Mirando al futuro.* Aborda en él temas novedosos en su tiempo como eran la Cibernética de Wiener, la teoría matemática de la información de Shanon. La tercera sección la dedica a presentar un ingenio eléctrico para resolver problemas de lógica formal que él mismo había desarrollado. Ya en la exposición de materiales para la enseñanza de las matemáticas celebrada en Madrid, en abril de 1957, tanto él como Willy Servais habían presentado máquinas eléctricas lógicas de uso didáctico. En este capítulo hace una presentación más profunda de los circuitos necesarios y la construcción práctica de una máquina que aplica el álgebra de Boole.

Quizás el capítulo en que las ideas de Puig Adam quedan más claras es el capítulo III. Lo titula *El movimiento didáctico renovador.*

Es difícil resumir en pocas palabras el contenido de este capítulo. La actualidad de las ideas de Puig Adam es indudable por lo que quizás lo mejor sea, aun corriendo el riesgo de trocear y descontextualizar el discurso de Puig Adam, acudir al recurso de citar literalmente algunas de las que más nos han llamado la atención:

> [...] la cuestión del contenido tiene en segunda enseñanza menos importancia que la cuestión del método. La finalidad del Bachillerato es más formativa que informativa [recordemos obviamente que Puig Adam se refiere al viejo bachillerato (10-17 años)] , y lo formativo no es el índice, sino el modo de desarrollarlo. Un bachiller puede tener una formación matemática excelente sin necesidad de saber muchos teoremas. Pero es preciso tener en cuenta aquí otro punto de vista de indudable interés para la vida futura del alumno: la utilidad. Se ha defendido muchas veces el interés educativo de una teoría en razón inversa de su utilidad y viceversa; nunca acerté a comprender por qué. Si la eficacia educativa de la enseñanza radica en los métodos, respetando éstos tendremos libertad para elegir los conocimientos que mayor utilidad prestarán a nuestros bachilleres en su lucha futura por la vida, y así, los dos puntos de vista, utilitario y educativo, que se han presentado tantas veces como contrapuestos, sin serlo, quedarían conjugados en una sencilla fórmula conciliadora: Enseñar conocimientos útiles con métodos educativos.

Con respecto a la formación del profesorado escribe

> [...] no tengo empacho en lamentar el pertinaz abandono de la formación pedagógica del alumnado [universitario] de Ciencias, tanto más cuanto que la mayor parte de este alumnado sigue la carrera con objeto de dedicarse a la enseñanza. Tal descuido del principal aspecto profesional de las carreras de Ciencias me parece inexplicable y funesto. La experiencia pedagógica de sus titulares sólo puede así lograse, cuando se logra, después de tanteos y fracasos a costa de sus futuros alumnos. En matemáticas concretamente, las consecuencias de este abandono van siendo cada vez más graves al acentuarse progresivamente el desnivel entre las regiones conceptuales del licenciado recién salido de las aulas universitarias y las del alumno recién ingresado en el Instituto o colegio donde tal licenciado enseña. ¿Cómo va a descender súbitamente del elevado plano de las abstracciones que elabora hoy la Topología, el Álgebra moderna, el Análisis abstracto..., al plano realista y concreto de la limitada mentalidad de un niño de diez años? Se impone el conocimiento previo de esa mentalidad, y se impone urgentemente, sobre todo, prácticas previas de paracaidismo pedagógico para quienes cursen estudios de Ciencias con miras a la enseñanza. Sólo así podrán aterrizar felizmente en el campo de sus futuras actividades.
>
> Y aún si me apuráis añadiré que no tan sólo en el descenso, sino también en el ascenso a tales abstracciones, la Universidad, tarde o temprano, se verá obligada a considerar los problemas didácticos de su propia enseñanza [...].

Como hemos resaltado otras veces parece increíble la actualidad y la vigencia de las palabras de Puig Adam, tanto en éste como en otros muchos asuntos.

En la siguiente sección Puig Adam aborda las *Tendencias actuales de la enseñanza de las matemáticas*. Cabe aquí señalar dos aspectos que conviven en toda la obra comentada.

Por una parte, Puig Adam trata de jugar un papel divulgador de las ideas de educación matemática vigentes en ese momento en Europa entre sus lectores hispanos. Téngase en cuenta el momento histórico final de los años cuarenta y principio de los cincuenta en que escribe la mayoría de los artículos de este libro. España sometida a la dictadura del general Franco se encuentra aislada y bloqueada. Los españoles tienen dificultades para viajar fuera; no tienen acceso a los libros que se publican en otros países, no se publican prácticamente traducciones. Puig Adam sabía idiomas, había viajado, era conocido y respetado en los foros en los que se debatían ideas en torno a la educación matemática y a su vuelta difundía esas ideas entre los españoles, sus colegas y sus alumnos de metodología y didáctica en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Central, que recibían sus clases en el Instituto San Isidro «con objeto de que los alumnos de la Facultad puedan adiestrase en vivo en mi presencia, y puedan aprender de los propios niños más que de mí mismo». Las pregonaba en los foros a los que era invitado a conferenciar, desde la Real Academia de Ciencias, y hasta en la sede de los antiguos sindicatos verticales. Las vertía en los prólogos de sus libros de texto, apoyando o criticando las distintas reformas educativas que le tocó vivir.

Por otra parte, como buen didacta, el tono de sus exposiciones es siempre el de una buena lección. Buscando la complicidad del lector al que siempre considera inteligente. Tienen sus exposiciones, si se nos permite el comentario, un tono dialogante, nada impositivo, alejadas del estilo del libro de texto y del manual universitario, distantes de la retórica vacía imperante en otros textos de la época, llenas de contenido. Por eso soportan indemnes el paso del tiempo.

Comenta y divulga las ideas de Piaget, recogidas en esa histórica publicación, sobre las estructuras operatorias de la inteligencia y su correspondencia con las estructuras matemáticas de orden, topológicas y algebraicas.

Partiendo de bases históricas avanza hasta su actualidad centrando los problemas de la enseñanza de las matemáticas. Comenta la primera publicación de la Comisión Internacional para el Estudio y Mejora de la Enseñanza de las Matemáticas (CIEAEM). Comenta y divulga las ideas de Piaget, recogidas en esa histórica publicación, sobre las estructuras operatorias de la inteligencia y su correspondencia con las estructuras matemáticas de orden, topológicas y algebraicas.

Señala los artículos de Beth, de Choquet, de Dieudonné y de Lichnerowicz, padres de los planes de estudio de la matemática moderna en Francia que años más tarde invadiría los programas de estudio españoles. Puig Adam no los critica pero pasa olímpicamente por encima de ellos para señalar otro de los artículos escrito por Gattegno titulado «Pedagogía de las matemáticas». Es lógica esta mayor afinidad de las ideas de Puig Adam con las de Gattegno. Ambos defensores de una geometría que abstrae a partir de experiencias tangibles de lo concreto, haciéndolas conscientes.

> La necesidad de rigor y sus exigencias progresivas surgen, según Gattegno, como fenómeno consecuente con la explicación de dicha conciencia, espoleada por el deseo de comunicación y de discusión con los compañeros de clase. Experiencia, comunicación y organización mental progresiva del alumno son, en resumen los puntales sobre los que Gattegno edifica su didáctica de la geometría.

Se desarrolla también en este capítulo el vasto programa de actividades emprendido por Puig Adam para la mejora de la enseñanza de la matemática: sus trabajos con Pascual Ibarra y con Guiraum para contactar con los profesores de matemáticas más prestigiosos del momento y del modo que siguieron para establecer esos contactos: viajando a Austria, Suiza, Italia, Bélgica, Francia e Inglaterra y estableciendo relaciones personales e incluso de amistad con los más significados didactas de las matemáticas. De la encuesta realizada por él entre los docentes de enseñanza media sobre los programas vigentes, sobre los errores más comunes de los alumnos, sobre los puntos del currículo que más dificultades ofrecen al aprendizaje. Habla de las investigaciones que planea sobre la base de los datos obtenidos del vaciado de dichas encuestas; de la necesidad de ofrecer experiencias de buena práctica, de extender la didáctica experimental y la enseñanza heurística y finalmente de la «gran tarea a largo plazo: hacia una enseñanza activa». Desgraciadamente su muerte prematura, poco tiempo después, cuando aún no había cumplido los sesenta años, frustró en gran medida este inmenso plan de trabajo.

Saltaremos ahora sobre el capítulo cuarto, que comentamos al principio, al quinto titulado *Didácticas específicas*, en el que aborda algunos aspectos didácticos de la enseñanza de la geometría y de la aritmética en la escuela primaria (antes de los 10 años). En la tercera sección de este capítulo aborda la didáctica a lo largo de los ciclos medios, es decir de los siete años del antiguo Bachillerato o de los seis más el curso Preuniversitario. Defiende en este subcapítulo su propuesta de una distribución cíclica de los programas de matemáticas, que superase la división estanca en compartimentos, Aritmética, Geometría, Álgebra, Trigonometría, Geometría Analítica y Cálculo, existente hasta ese momento. Plantea cuál es a su modo de ver la mejor secuenciación de los contenidos y de los modos para adecuarlos a las distintas etapas evolutivas de los alumnos. Pero si hay algo que a nuestro modo de ver se debería destacar de este capítulo especialmente son sus *Consideraciones finales sobre la cuestión de los problemas*. Siguiendo a Poya y sus obras *How to solve it!* y *Mathematics and Plausible Reasoning*. Critica el primero al que considera una obra demasiado escolástica mientras que de la segunda afirma: «a mi modo de ver, en esta segunda obra se muestra mejor que en la primera el verdadero genio de Polya», ya que «el razonamiento implicativo cede su lugar al razonamiento plausible fundado en la inducción, en la analogía, en la inferencia...».

> Enfrentándonos con la cuestión de los problemas –afirma– nuestra principal *acción* como educadores no consiste en *resolverlos*, sino en *idearlos*, en plantearlos, y, paralelamente, no debemos considerarnos satisfechos con enseñar simplemente a resolverlos, sino que también debemos ejercitar a nuestros alumnos en proponérselos, en disponer su planteo.

Puig Adam estaba verdaderamente interesado en el material didáctico para la enseñanza de la matemática, tanto el fabricado por el profesor y el alumno en la clase o en casa, como el aprovechamiento de materiales cotidianos diseñados con otra utilidad básica, pero que pueden servir de apoyo para la experimentación de ideas y conceptos matemáticos.

Propone una especie de taxonomía de problemas habituales que se usan en la clase de matemáticas de acuerdo con la finalidad que se persigue con ellos:

> 1º Explorar las aptitudes matemáticas en nuestros alumnos. Tal es el fin de los problemas «test», cuya naciente técnica, que no es fácil, alimenta sus raíces de la misma matemática, de la psicología, y de la estadística.
>
> 2º Excitar el interés de nuestros alumnos hacia teorías nuevas y sugerir bajo forma activa nociones a adquirir. Usaremos entonces los problemas «situaciones» que señalan la técnica didáctica del profesor.
>
> 3º Afirmar la adquisición de las nociones y teorías repitiendo las ocasiones de aplicarlas, de fijarlas en la memoria y de dominar su uso. Son los problemas «ejercicios», los más usados en la enseñanza.
>
> 4º Vigilar el aprendizaje del alumno. Problemas de pruebas o «exámenes».
>
> 5º Comprobar la eficacia de los métodos de enseñanza. Problemas «experiencias», en cierto modo análogos a los precedentes, pero cuyos sujetos no son ya los individuos, sino los colectivos.

Añade lo artificioso de la mayoría de los problemas que se usan en clase: «Exceptuados la minoría de los problemas llamados de "situación" ("desgraciadamente muy poco usados aún") se acostumbra a hacer de los otros asunto de corrección y calificación que condiciona los enunciados y les da el carácter artificial». Y concluye afirmando:

> Estimo que hay, en resumen, toda una interesante tarea a proponer y realizar, reconsiderando cuidadosamente los problemas en uso en nuestra enseñanza, poniendo en primerísimo plano su finalidad esencialmente educativa y desligándola de la de calificación que le ha sido añadida artificiosamente. Una vez bien asegurado este deslinde, es de desear que una mayor libertad de selección y de combinación deje manifestar y desarrollar facultades creadoras del alumno fuera de los términos habituales de los enunciados y aun invirtiéndoles de forma que se consideren como metas o soluciones a alcanzar los enunciados que hay que proponer.

Comentaremos para terminar algunos aspectos del capítulo VI titulado *El Material*. Como hemos señalado a lo largo de este artículo, Puig Adam estaba verdaderamente interesado en el material didáctico para la enseñanza de la matemática, tanto el fabricado por el profesor y el alumno en la clase o en casa, como el aprovechamiento de materiales cotidianos diseñados con otra utilidad básica, pero que pueden servir de apoyo para la experimentación de ideas y conceptos matemáticos. En un segundo plano, pero resaltando también su utilidad, deja el material comercializado con finalidad directamente didáctico-matemática. Fruto de esta preocupación suya es el tema de la XI Reunión de la CIEAEM, celebrada en Madrid entre el 21 y el 27 de abril de 1957, que fue el material didáctico para la enseñanza de las matemáticas. Esta reunión fue acompañada de dos exposiciones de material didáctico, la elaborada en el mismo Instituto San Isidro, por Puig Adam y sus alumnos, y la exposición internacional paralela a las sesiones de la reunión.

Este material: modelos, films, filminas, visto por los matemáticos situados desde la elevada perspectiva abstracta son meras concreciones ilustradoras, simple ropaje conveniente para facilitar, momentáneamente, comprensiones dificultosas; pero, para el educador matemático que no pierda la perspectiva de los procesos iniciales de abstracción, este material es mucho más; representa algo sustancial en su función educativa. Este material estructurado en forma de modelos tiene no sólo la función de traducir ocasionalmente ideas matemáticas, sino también la de originarlas, de sugerirlas.

En la segunda sección de este capítulo aborda algunas ideas sobre el uso y el diseño de modelos manipulables. Señala las ventajas de la creación y realización de los modelos sobre su simple utilización y el valor añadido de la realización de proyectos técnicos sometidos a determinadas condiciones, que sean maquetas a escala de problemas reales.

Al calcular y realizar así sus propios proyectos y maquetas, los alumnos jugarán a ser anticipadamente ingenieros. Su interés por los problemas que realizan aumentará considerablemente, beneficiándose con ello de la calidad de su trabajo, ya que los cálculos que para ello desarrollan no tienen por meta la obtención de unos resultados numéricos que les dejan indiferentes, sino de las medidas que necesitan para llevar a término una realización tangible efectiva.

La siguiente sección se titula *Algunos ejemplos de material dinámico polivalente*. Incluye en este capítulo algunas fotografías que acompañan las descripciones de materiales. Señalaré entre ellos y como pequeño homenaje simbólico a la personalidad de Puig Adam su descripción de la construcción del *Omnipoliedro gigante*, que, en una versión reducida fue la idea que la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas propuso a todos los centros para celebrar el pasado 12 de mayo, precisamente el día en que se cumplía el centenario del nacimiento de Pedro Puig Adam, el primer Día Escolar de las Matemáticas.

Dice Puig Adam:

Con treinta varillas de madera, iguales, terminadas en hembrillas circulares que permitan atarlas de cinco en cinco, concurrentes en un mismo vértice, y encadenarlas tres a tres en una misma cara, formaremos rápidamente un icosaedro regular desmontable.

La construcción de este modelo surgió de un comentario en clase, después de haber aparecido destrozados antiguos modelos de dodecaedro y de cubo regulares (construidos con varillas de metal soldadas) mientras el tetraedro, octaedro e icosaedro, de la misma colección, se conservaban en buen estado. La diferencia de resistencia, no debida al azar sino a la rigidez estática del triángulo, originó una alusión instructiva a las estructuras reticuladas triangulares corrientes en la técnica (puentes, postes, etcétera). En efecto, los alumnos comprobaron la rigidez del icosaedro como estructura triangular, obtenida como hemos dicho, sin necesidad de soldar los vértices, sino de atarlos simplemente.

En cambio, un dodecaedro construido de análoga manera carece de rigidez. Para dársela hubo que sostenerle mediante un icosaedro formado por aristas que cruzaran ortogonalmente las del dodecaedro en sus puntos medios. Es fácil obtener la relación entre las aristas de uno y otro poliedro: la arista del dodecaedro es la sección áurea de la del icosaedro cruzado.

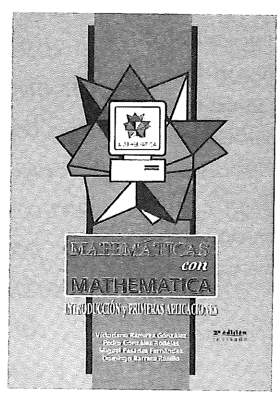
Para obtener análogamente un cubo rígido bastará insertar en sus caras las seis diagonales formando las aristas de un tetraedro regular inscrito en él. Si se inscribe un cubo en el dodecaedro antes formado (sostenido por el icosaedro correspondiente), en el cubo un tetraedro, como hemos dicho, y en un tetraedro el octaedro regular cuyos vértices son los seis puntos medios de sus aristas (es decir, los centros de las caras del cubo), obtendremos un modelo rígido desmontable de los cinco poliedros regulares sostenidos mutuamente y que pueden destacarse entre sí pintando las aristas de colores bien diferenciados. Las longitudes de estas aristas están en la relación: cubo, 1; tetraedro, $\sqrt{2}$; octaedro, $\sqrt{2}/2$; dodecaedro $(\sqrt{5}-1)/2$; icosaedro, 1. Este modelo fue bautizado con el nombre de «omnipoliedro regular» por los propios alumnos que lo construyeron, en el Instituto de San Isidro.

...y como pequeño homenaje simbólico a la personalidad de Puig Adam su descripción de la construcción del Omnipoliedro gigante...

La última sección de este capítulo está dedicada a *Los films matemáticos*. Nuevamente adelantándose a su tiempo recoge las ideas fundamentales del uso de los medios audiovisuales en la enseñanza de la matemática.

Finalmente, no me queda nada más que recomendar vivamente la lectura de este libro para aquellos afortunados que puedan tener acceso a un ejemplar y sugerir a los demás que esperen, ya que como hemos señalados probablemente será reeditado dentro de no mucho tiempo.

Francisco Martín Casalderrey



MATEMÁTICAS con MATHEMATICA
Victoriano Ramírez, Pedro González, Miguel Pasadas y Domingo Barrera
Proyecto Sur de Ediciones
Granada, 1997
ISBN: 84-8254-107-2
286 páginas + 1 disquete

La obra constituye la primera parte del material para prácticas con ordenador impartidas por el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Granada.

E1 libro contiene una colección de 10 prácticas que corresponden a diversas ramas de las Matemáticas: Álgebra Lineal, Cálculo Matemático, Cálculo Numérico y Estadística.

Cada uno de los capítulos comienza con una explicación detallada de la práctica que desarrolla. Presenta el resultado de los ejercicios en la pantalla después de procesarlos, y acaba con la propuesta de nuevos ejercicios relacionados con el tema de la práctica. Así mismo, el libro, constituye un sencillo manual del programa MATHEMATICA y su entorno de programación, con la inclusión de un apéndice que describe las principales órdenes de MATHEMATICA con ejemplos de cada una. En el disquete se encuentran los programas y la relación de los ejercicios.

Según manifiestan los autores con la utilización del programa se ha conseguido: acortar los tiempos de aprendizaje; abordar problemas reales, que no se podían resolver manualmente, debido al gran número de datos y cálculos requeridos y mejorar el rendimiento académico de los alumnos.

La utilización de los programas de cálculo simbólico, en la enseñanza de las matemáticas, facilita el aprendizaje ya que evita las tareas mecánicas que el alumno debe desarrollar a mano, y permite plantearse objetivos pedagógicos mas ambiciosos. El alumno dispone de más tiempo para trabajar los métodos y estrategias de resolución de los problemas y no necesita centrar su trabajo en la realización de operaciones y cálculos elementales.

MATHEMATICA es un programa de calculo simbólico creado en lenguaje C, dirigido a matemáticos, físicos e ingenieros, disponible para diferentes plataformas de *hardware* y con grandes posibilidades gráficas en dos y tres dimensiones.

Las prácticas desarrollan los temas habituales en la enseñanza de las matemáticas en los cursos de Bachillerato y primer año de carreras Técnicas, de Ciencias, Empresariales y Económicas.

Comienzan por el cálculo numérico, para el que el programa dispone de más de 750 funciones implementadas, continúa con cálculo simbólico, matrices, sistemas de ecuaciones lineales, cálculo diferencial e integral, resolución de ecuaciones y estadística descriptiva.

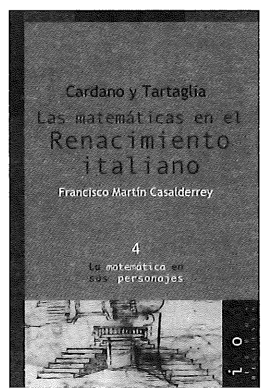
La práctica 3 aborda la representación gráfica, que permite dibujar en dos o tres dimensiones, elegir las perspectivas, los puntos de vista, los sistemas de represen tación, el sistema de coordenadas, etc.

La práctica 4 estudia las posibilidades de MATHEMATICA como lenguaje de programación en los tres niveles que permite:

- Programación procedimental, con uso de bloques, ciclos e iteraciones, recursividad, etc.
- Programación funcional, con la de funciones, operadores funcionales, etc.
- Programación declarativa, basada en reglas que indican cómo operar o trasformar las expresiones simbólicas o funcionales.

Estos dos aspectos del trabajo con MATHEMATICA, permiten un mayor control de los cálculos y de las imágenes resultantes. Aunque trabajar con este programa es complicado, y se necesita el conocimiento de gran cantidad de órdenes y parámetros, la potencia de los resultados hace que su rendimiento sea superior a otros programas de cálculo simbólico.

Félix Matute



CARDANO Y TARTAGLIA.
LAS MATEMÁTICAS
EN EL RENACIMIENTO ITALIANO
Francisco Martín Casalderrey
Ed. Nivola libros y ediciones S.L.
Madrid, 2000
ISBN: 84-930719-5-1
190 páginas

Hay momentos de la historia de las matemáticas en los que los procesos de creación y de descubrimiento de nuevos métodos están fuertemente implicados en la vida personal y cotidiana de los matemáticos. Tal es el caso del descubrimiento de las fórmulas de resolución de las ecuaciones algebraicas de tercer y cuarto grado que se realizó en la primera mitad del siglo XVI italiano teniendo como escenarios principales las ciudades de Bolonia, Venecia y Milán y como protagonistas a Scipione del Ferro (1465-1526), Niccolo Tartaglia (1499-1557), Gerolamo Cardano (1501-1576) y Ludovico Ferrari (1522-1565).

El tema de este libro es el proceso de cómo se descubrieron las fórmulas de resolución de las ecuaciones de tercer y cuarto grado. El autor nos ofrece, además de cómo se llevaron a cabo las deducciones de las fórmulas, un hermoso paseo por el estado de las matemáticas en el Renacimiento italiano y la demanda de conocimientos en esta materia por la sociedad comercial emergente. Francisco Martín destaca la importancia que tenía para los profesores hacer descubrimientos, que luego no compartían con nadie, con el fin de brillar en disputas públicas, ya que se consideraba que conocer algo era como tener un seguro contra la adversidad. El análisis de esta costumbre y de algunas más nos permite profundizar en el conocimiento de muchos aspectos de la vida académica de la época. Por último, aporta una relación precisa de la agria polémica que mantuvieron Tartaglia y Cardano sobre el descubrimiento de la fórmula de la ecuación cúbica y cómo acabó, a su vez, con la disputa pública mantenida entre Tartaglia y Ferrari en 1557, que finalizó con la derrota del primero y con su reclusión voluntaria en Brescia, su ciudad natal.

El libro está publicado por la editorial Nivola en la colección «La matemática a través de sus personajes» de la que este libro es el número 4 y Antonio Pérez Sanz su director. En el Prólogo del libro, Antonio Pérez se lamenta de que con las grandes obras de la matemática no ocurre como con las obras artísticas o con las literarias, que son conocidas por cualquier persona con un mínimo nivel cultural. Las grandes obras matemáticas entre las que se encuentran *Ars Magna* (1545) de Cardano o el *Álgebra* (1567-1560) de Bombelli, son desconocidas no solamente por el gran público, sino por buena parte de matemáticos.

La obra *Cardano y Tartaglia* está dividida en siete capítulos que le permiten al autor describir, de forma clara y amena, aspectos tan relevantes de la matemática del Renacimiento como la transición de la matemática medieval a la renacentista, la historia del descubrimiento de las fórmulas de resolución de las ecuaciones de tercer y cuarto grado o las nuevas perspectivas que se presentaron en la matemática tras el descubrimiento de esas fórmulas.

Capítulo 1. De la Edad Media al Renacimiento. En este capítulo se describen las dos principales influencias que recibió la matemática medieval. La primera, la de las escuelas de traductores como la Escuela de Toledo, que pretendían recuperar el saber clásico, que se había ido perdiendo por el abandono del griego como lengua culta. La segunda, la aportación de la matemática árabe que transmitió la numeración hindú, la cual tuvo una excelente acogida entre los comerciantes que precisaban de un método rápido de cálculo para transformar pesos y medidas de distintos países, así como para realizar el cambio de moneda. La numeración romana no resultaba manejable para estos menesteres. Esta última corriente fue recogida en el *Liber Abaci* (1202) de Leonardo de Pisa, llamado Fibonacci (1170-1240), obra en la que se trataba de la notación arábiga, la aritmética con cifras, la resolución de ecuaciones, aritmética comercial y contabilidad.

Capítulo 2. Las escuelas de Ábaco. Describe que estas escuelas eran los lugares donde se estudiaba el cálculo y las operaciones aritméticas con las cifras arábigas. La formación de un futuro comerciante debía consistir en dos años para aprender a leer y escribir y dos años en una Escuela de Ábaco. Cada maestro de Escuela de Ábaco solía elaborar sus manuscritos, de los cuales se han conservado algunos como el del Maestro Benedetto de Florencia. La importancia que adquirieron los tratados de ábaco fue enorme dentro del panorama de las matemáticas útiles, por eso no es extraño que el primer libro de matemáticas impreso en Italia fuera un libro de ábaco de autor desconocido llamado *Aritmética de Treviso* (1478).

Capítulo 3. Las matemáticas en Italia al comenzar el siglo XVI. La aportación más brillante la aportó Lucca Paccioli en su obra escrita en italiano en 1487 y publicada en 1494 *Summa de Arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità.* Supuso la culminación de los libros de ábaco y en ella se comenzó con la notación llamada sincopada para las ecuaciones algebraicas que superaba, en cierta medida, las demostraciones y fórmulas verbalista de los libros de ábaco anteriores. También se describen en el libro las obras de Regiomontano (1436-1476), Piero della Francesca (1416-1492) y la labor que se hizo, en 1528, para la reforma del calendario gregoriano.

Las grandes obras matemáticas entre las que se encuentran Ars Magna *(1545) de Cardano o el* Álgebra *(1567-1560) de Bombelli, son desconocidas no solamente por el gran público, sino por buena parte de matemáticos.*

Capítulo 4. La aventura de la ecuación cúbica. En este capítulo Francisco Martín describe el descubrimiento de la fórmula de la ecuación de tercer grado, en su versión el cubo más la cosa igual a un número, por Scipione del Ferro, con anterioridad a 1515, y el descubrimiento independientemente hecho por Tartaglia para responder a una disputa provocada por Antonio María del Fiore en 1535, el cual propuso a Tartaglia treinta problemas que podían resolverse conociendo la fórmula de resolución de la cúbica. Luego, fue Cardano quien publicó las fórmulas de resolución de la ecuaciones cúbica y cuadrática en todos sus casos y se produjo una polémica con Tartaglia sobre la apropiación indebida de la fórmula por parte de Cardano.

Capítulo 5. La resolución de las ecuaciones de tercer y cuarto grado. En este capítulo se describe la demostración y los pasos seguidos para deducir las fórmulas de las ecuaciones de tercer grado por medios geométricos. Comienzan a dominar los cálculos algebraicos literales sobre los geométricos y aparecen nociones de cambio de variable que permitieron a Ferrari resolver la ecuación de tercer grado y eliminar el coeficiente de segundo grado en la ecuación general de tercer grado y el de tercer grado en la de cuarto, etc. También aporta demostraciones de Bombelli y la aparición y manejo, por primera vez, de los números complejos por este autor.

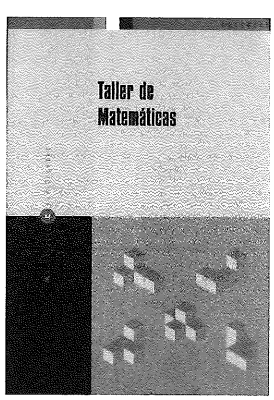
Capítulo 6. Los protagonistas de esta historia. Describe la biografía científica de los Scipione del Ferro, Niccolo Tartaglia, Gerolamo Cardano, Ludovico Ferrari y Rafael Bombelli destacando sus aportaciones y su implicación en la sociedad.

Capítulo 7. Puntos suspensivos. En este capítulo destaca el autor los caminos que abrió la resolución de las ecuaciones cúbica y cuártica para los matemáticos posteriores al intentar resolver la ecuación de quinto grado por radicales tal y como habían sido resueltas las de grados inferiores y describe someramente las aportaciones de Leonard Euler (1707-1783), Etienne Bezout (1730-1783), Joseph Louis Lagrange (1736-1813) y las de Paolo Ruffini (1765-1822) y Herick Abel (1802-1829) que demostraron la imposibilidad de resolver por procedimientos algebraicos la ecuación de quinto grado.

En suma, es un libro escrito de forma clara y bien estructurado, que pone a disposición del público, y de forma amena, en este Año Mundial de las Matemáticas, una de las páginas más hermosas del libro de la historia de las matemáticas. La amenidad del libro sirve de envoltorio a un rigor histórico y matemático que está presente a lo largo de toda la obra. El libro es particularmente útil para la enseñanza de la historia de las matemáticas en todos los niveles y, en particular, en la enseñanza media, a la que puede aportar, además de los aspectos técnicos de la resolución de las ecuaciones de tercer y cuarto grado, puntos de vista nuevos, tales como la importancia de las matemáticas en la formación de los comerciantes renacentistas y de cómo, poco a poco, la matemática fue impregnando la ciencia y la sociedad. En definitiva nos encontramos ante un libro útil, ameno e *bene trovato*.

Víctor Arenzana Hernández
Javier Arenzana Romeo

TALLER DE MATEMÁTICAS
Andrés Ruiz de Elvira,
Miguel Blanco
y Abilio Corchete
Junta de Extremadura,
Consejería de Educación
y Juventud
Mérida, 1998
ISBN: 84-923779-0-9
173 páginas



Por desgracia, cuando se oye hablar desde las diversas administraciones de la necesidad y urgencia por reforzar el aprendizaje de las áreas instrumentales, también se escucha que existe una excesiva optatividad, especialmente en la etapa secundaria, y que por tanto ese refuerzo se hará a costa de la supresión o reducción del espacio de optatividad. Parece que el Taller de matemáticas tiene los días contados...

Las grandes editoriales comerciales ya habían apostado por ello, hace algún tiempo y buena señal de ello es que pocas de ellas (por no decir que ninguna) han apostado por la edición de materiales para el Taller. No son rentables...

Por estos motivos nos debemos de congratular de la aparición de libros como el que voy a comentar, que nacen de la iniciativa pública –en este caso de la Junta de Extremadura–, y de la labor de profesores que creen en las inmensas posibilidades educativas del Taller. En efecto, este espacio, que parecía que habíamos ganado, proporciona la posibilidad de reforzar el aprendizaje de una de las áreas instrumentales –la nuestra–, permite atender la demanda de los alumnos que disfrutan con las matemáticas y nos deja a los profesores la posibilidad de compartir el tiempo con alumnos para los que «hacer matemáticas» es una actividad gratificante. Además, el trabajo en el Taller, resulta una fuente de inspiración para las clases «normales» de matemáticas, pues se trata de un interesante laboratorio de experimentación de nuevas actividades que perderemos si llega a desaparecer.

Los autores de esta interesante propuesta han escogido una orientación para el Taller en la que se privilegia el fortalecimiento de las relaciones entre las matemáticas y el mundo real, a través de la aplicación de contenidos y métodos del razonamiento matemático a situaciones prácticas. Además, creen que debe ayudar a mejorar las habilidades de comunicación, las actitudes hacia el trabajo personal y el respeto a los demás expresado a través de la discusión y el trabajo cooperativo.

El libro proporciona a los lectores tanto aspectos de la programación de la asignatura como orientaciones para la evaluación o anotaciones metodológicas fruto de la experiencia que proporciona el uso de los materiales, por los autores en sus aulas, desde hace algunos años.

A mi entender, el núcleo más interesante del libro se encuentra en la selección de actividades. Tiene la virtud de ser muy razonable, basada en la adaptación de materiales bien conocidos en su mayoría, y en un enfoque bien estructurado que refleja una elección consciente de los objetivos que se persiguen. Debe agradecerse a los autores que citen a las fuentes que utilizan para su inspiración, hecho que lejos de restarles méritos, refleja su convicción de que el papel del profesor está más en la selección y adaptación de los materiales que en la generación de nuevas ideas de forma permanente.

Las actividades se agrupan en nueve unidades y pertenecen a dos tipos: unas –sobre todo, orientadas al estudio de algunas características de objetos geométricos–, tienen un enfoque fundamentalmente descriptivo; en las otras se persigue la resolución de alguna cuestión planteada dentro de situaciones reales. La aplicación de técnicas matemáticas conocidas, la construcción de modelos, etc. permite avanzar hacia la solución. En los dos tipos de actividades se fomenta el trabajo en pequeños grupos y las puestas en común. Las actividades culminan con la presentación de un informe individual, en el que los alumnos deben comunicar los resultados obtenidos, las ampliaciones hechas al estudio, las impresiones,...

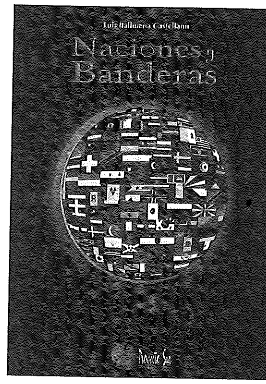
En definitiva, un trabajo muy recomendable, que puede resultar de ayuda y modelo a los profesores que deban enfrentarse con el Taller de matemáticas, mientras éste todavía exista formalmente.

Julio Sancho

En resumen, estamos ante un libro curioso, original, muy bien editado, que pone en evidencia la «existencia» de las matemáticas en algo cotidiano y que, sin duda, será de gran utilidad para los profesores que quieren salirse en sus clases de la rutina escolar.

Emilio Palacián

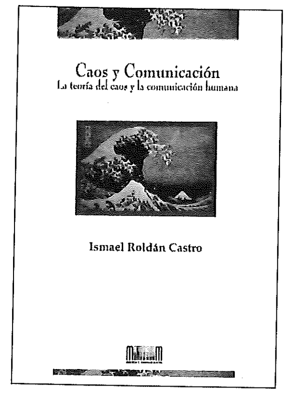
NACIONES Y BANDERAS
Luis Balbuena Castellano
Proyecto Sur de Ediciones
Granada, 1999
ISBN: 84-8254-941-3
274 páginas



Estamos ante un libro que trata, el título no deja lugar a confusión, de banderas. Según la Academia de la Lengua, la disciplina que estudia las banderas se denomina «vexilología» y «vexilólogos» a los que la cultivan. Muchos lectores que conocen sobradamente al autor, Luis Balbuena, se preguntarán qué hace metido a vexilólogo, qué relación existe entre su quehacer profesional, dedicado a la enseñanza de las matemáticas, y las banderas. Yo también me lo preguntaba, hasta que en una ponencia que le escuché sobre los talleres de matemáticas y, como ejemplo de lo mucho y bueno que se podía tratar en ellos, expuso un breve resumen de lo que es posible hacer en una clase de matemáticas de ESO con las banderas de los distintos países.

El libro, editado magníficamente en color por Proyecto Sur, está articulado en dos partes claramente diferenciadas. La primera es la que tiene más peso matemático y proporciona, algunas veces de forma implícita, muchas ideas para explotar en una clase de Matemáticas, sobre todo de secundaria obligatoria. Se analizan distintas variables que definen el resultado de cada bandera: proporciones, «cargas», simetrías, distribución y número de colores, las franjas y sus combinaciones, sus diseños geométricos...

En la segunda parte de la obra, Luis Balbuena ha hecho un estudio enciclopédico, en el que ha recogido, para la bandera de cada país (cerca de dos centenares), además de una breve historia de la correspondiente nación y de la simbología de cada enseña, una recopilación de datos cuantitativos como extensión, población, nivel de alfabetismo, porcentajes de práctica de las distintas religiones, edad promedio y esperanza de vida. Es una información que permite realizar en el aula una gran variedad de actividades, a partir de datos reales. Además, es una oportunidad para llevar a cabo experiencias interdisicplinares con otras áreas, algo de lo que se habla mucho y, sin embargo, no se practica en demasía.



CAOS Y COMUNICACIÓN: LA TEORÍA DEL CAOS Y LA COMUNICACIÓN HUMANA
Ismael Roldán Castro
Editorial Mergablum
Sevilla, 1999
ISBN: 84-95118-27-0
360 páginas

¿Es posible relacionar la teoría del caos con la comunicación humana? En este libro, Ismael Roldán, propone unas bases para un modelo de la comunicación humana inspirado en uno de los paradigmas de la posmodernidad: la teoría del caos. Se trata de una lectura amena e insólita en la que se funden la imaginación, la creatividad y el rigor científico sin olvidar, en numerosas ocasiones, el sentido del humor. Tras un desarrollo divulgativo de algunas de las claves más sigtnificativas de la teoría del caos y de un recorrido a través de los modelos de la comunicación más importantes de este siglo, el autor propone un modelo comunicativo basado en la teoría del caos que constituye la aportación más novedosa en el ámbito comunicacional. Bien como nueva teoría holística o como metáfora cultural revolucionaria, lo cierto es que proporciona un enfoque diferente de la ignota realidad que nos envuelve. Además se presentan imágenes del caos que, contra todos los pronósticos, presentan una belleza singular: los fractales, el medio de comunicación del caos.

Sumario: Prólogo (Manuel Ángel Vázquez Medel). 1. La visión clásica de la ciencia. 2. Las rupturas del mecanicismo. 3. Acepciones diversas de caos. 4. Teoría del caos. 5. Aplicaciones de la teoría del caos. 6. Modelos de la comunicación. 7. Bases para un modelo caológico de la comunicación. 8. Conclusiones.

SUMA 34
junio 2000

Congresos belga y francés, Encuentro Sociedades, Día Escolar de las Matemáticas...

CRÓNICAS

ENCUENTRO de Sociedades de Matemáticas españolas y portuguesas

Este primer encuentro ha tenido lugar, durante los días 16, 17 y 18 de marzo de 2000, en Zamora, organizado por EL CEAMM 2000 y patrocinado por la Fundación Rei Afonso Enriques y el MEC, con los siguientes objetivos:

- Propiciar el acercamiento y conocimiento mutuo entre sociedades matemáticas españolas y portuguesas, tanto del ámbito educativo como de la investigación.
- Analizar problemas comunes a las sociedades, relativos a su papel actual y futuro y a sus actuaciones en distintos ámbitos.
- Sentar las bases de futuros proyectos de colaboración en el ámbito de la educación, la investigación y la divulgación matemática entre las sociedades portuguesas y españolas.
- Perfilar la publicación conjunta de las revistas de todas las sociedades de un volumen con motivo del Año Mundial de las Matemáticas

Participaron representantes de las siguientes sociedades:

- APDIO (Associaçao Portuguesa de Investigaçao Operacional).
- APM (Associaçao de Profesores de Matemática).
- FESPM (Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas).
- RSME (Real Sociedad Matemática Española).
- SEHCYT (Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas).
- SEIEM (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática).

- SEIO (Sociedad Española de Estadística e Investigación Operativa).
- SEM-SPCE (Sección Matemática de la Sociedad Portuguesa de Ciencias de la Educación).
- SEMA (Sociedad Española de Matemática Aplicada).
- SEMNI (Sociedad Española de Métodos Numéricos).
- SPE (Sociedad Portuguesa de Estadística).
- SPM (Sociedad Portuguesa de Matemáticas).

Además, se contó con la presencia del Comité Permanente CEAMM2000 (José Luis Fernández –RSME–, Manuel de León –CSIC– y María Jesús Luelmo –FESPM–) y de representantes de administraciones e instituciones educativas y científicas (Paulo Abrantes, Director General do Ensino Básico; Jesús Busto, Director del CIDE; Marino Arranz Boal, Director General de FP e Innovación Educativa de la Junta de Castilla León y Jesús Sanz Serna, Rector de la Universidad de Valladolid y miembro del Patronato de la Fundación Rei Afonso Henriques).

A lo largo de los días que duró el encuentro y con un programa bastante apretado, se fueron sucediendo las distintas ponencias y mesas redondas, que posteriormente se analizaban y profundizaban en los grupos de trabajo.

Las ponencias que se presentaron fueron las siguientes:

Ponencia: *El papel de las sociedades científicas en la sociedad actual.*

Se propone dar una perspectiva general, y tocar además algún tema que no va a ser objeto de debate en otras ponencias: por ejemplo, como enlace con el mundo laboral (industria-empresa), como impulsoras de proyectos de investigación científica o didáctica, detectando necesidades de formación para la ciudadanía, como definidoras de nuevos perfiles profesionales.

Ponentes: Carlos Andradas (RSME), Coordinador de la sesión; José Manuel Matos y Darlinda Moreira (SPCE); Domingo Morales (SEIO); José Durany (SEMA); Ana Bela Cruzeiro (SPM).

En los grupos de trabajo se centraron en ver lo que cada sociedad puede ofrecer a sus socios: revistas, libros, boletines, cursos, congresos, etc.

También se analizó la razón por la que hay tantas sociedades de matemáticas y si habría alguna manera de confluir en el futuro. En este sentido, se apuntó que deberían potenciarse las relaciones de tipo horizontal entre sociedades en función de objetivos comunes, planteándose que, en todo caso debieran coordinarse y funcionar conjuntamente en los temas importantes que nos afecten a todos. Se constató la dificultad de esta coordinación debido a los intereses tan distintos que a veces se manifestaban entre las sociedades, pero habría que buscar puntos de confluencia entre ellas a través de reuniones temáticas o de cualquier otro medio.

...se pusieron de manifiesto los intereses tan diversos que pueden mover a las sociedades científicas de ámbito más universitario, y a las sociedades de ámbito más educativo.

Ponencia: *Las sociedades y la educación matemática.*

Podrán abordarse de modo general o aspectos más específicos como: los programas de post-grado, la divulgación matemática o educación continua de la población, la relación entre las Matemáticas de la Secundaria y de la Universidad, las relaciones investigación en educación matemática-práctica docente, la generación de recursos para la enseñanza, la formación del profesorado.

Ponentes: Modesto Sierra (SEIEM), Coordinador de la sesión; Branca Silveira (APM); Antonio Pérez Jiménez (FESPM); Graciano Neves de Oliveira (SPM).

En los grupos de trabajo sobre este tema, se trabajó fundamentalmente en los aspectos de la formación inicial del profesorado de matemáticas, cómo es y cómo debería ser, y de la formación continuada en el ejercicio de la profesión. Es en este apartado donde debieran jugar un papel cada vez más importante las sociedades de profesores de matemáticas.

También aquí se pusieron de manifiesto los intereses tan diversos que pueden mover a las sociedades científicas de ámbito más universitario, y a las sociedades de ámbito más educativo.

Mesa redonda: *El futuro de las publicaciones científicas.*

Ponentes: Lurdes Serrazina (*Quadrante*), Coordinadora de la sesión; Paulo Abrantes (*Educaçao e matemática*); José Luis Fernández (*La Gaceta de la RSME*); Emilio Palacián (*SUMA*); Ignacio Bravo (*Mundo Científico*, secretario de la Asociación de Periodistas Científicos).

En este apartado, aparte de exponer cada sociedad los medios de difusión con los que cuenta, se propuso el proyecto de elaborar, con motivo del año mundial de las matemáticas, una publicación conjunta entre todas las sociedades.

Ponencia: *Colaboración de las sociedades matemática en el ámbito hispano-portugués.*

Se trata de recoger ideas surgidas en los debates anteriores y aportar otras nuevas: congresos, seminarios, publicaciones científicas y divulgativas, proyectos e intercambios en educación e investigación, talentos precoces, olimpiadas...

Ponentes: Joana María Nunes da Costa (SPM), Coordinadora de la sesión; Manuel de León (CEAMM 2000); Cristina Loureiro (APM); Salvador Llinares (SEIEM); Luis Español (SEHCYT); Ana María Vale (SPM).

En los grupos de trabajo sobre este tema, recogiendo las propuestas y actuaciones comunes habidas a lo largo de las Jornadas, se hicieron varias propuestas de colaboración entre sociedades:

- Colaboración en recursos: vídeos, exposiciones, materiales...
- Compartir las bases de documentación que poseen algunas sociedades.
- Establecimiento de acuerdos de reciprocidad.
- Intercambio de publicaciones.
- Permiso automático de reproducción de artículos e información en boletines y revistas.
- Realización de encuentros conjuntos de las sociedades.
- Establecimiento de fórmulas estables de colaboración y no solamente puntuales, aunque siempre es deseable la realización de encuentros como éste.

La financiación del encuentro corrió a cargo de la Fundación Rei Afonso Henriques y del Ministerio de Educación español. Agradecemos vivamente a ambas instituciones su apoyo, sin el cual este primer encuentro entre sociedades matemáticas hispano-lusas no hubiera sido posible.

Serapio García

Vicepresidente de la FESPM

El tema principal del congreso era «¡la demostración!», con algunas sugerencias para iniciar los debates: ¿hay que habituar, todavía, a nuestros alumnos a demostrar?, ¿cómo alcanzar este objetivo?, ¿a todos los niveles?, ¿necesaria o superflua?, ¿en qué momento de la escolarización?, ¿cuándo se impone?, ¿en qué contexto hay que introducirla?...

25 CONGRESO DE LA S.B.P.M.e.f. (Sociedad Belga de Profesores de Matemáticas de expresión francesa)

En el Ateneo Provincial Mixto Warocqué de Morlanwelz (Bélgica) se ha desarrollado durante los últimas días de vacaciones estivales del profesorado belga este congreso, 24 al 26 de agosto de 1999, que se celebra anualmente, con asistencia de unos 340 profesores, incluidos algunos franceses, suizos, un croata (Berislav), y yo mismo, en representación de la FESPM.

La Sociedad que organiza este congreso es fruto de la escisión en dos en 1975, de la Sociedad Belga, creada en 1953, una de expresión francesa y otra de expresión flamenca.

El tema principal del congreso era «¡la demostración!», con algunas sugerencias para iniciar los debates: ¿hay que habituar, todavía, a nuestros alumnos a demostrar?, ¿cómo alcanzar este objetivo?, ¿a todos los niveles?, ¿necesaria o superflua?, ¿en qué momento de la escolarización?, ¿cuándo se impone?, ¿en qué contexto hay que introducirla?...

Destacamos que el horario del congreso es bastante tranquilo, las sesiones comenzaban a las 9 de la mañana hasta las 12 con una pausa a mitad de media hora para el café, se reanudaban a las 14 horas, para terminar a las 17, o incluso antes. Es pues un congreso en el que las relaciones humanas son muy importantes, y hay tiempo suficiente para ello, tanto en los tiempos libres, como en las actividades «turísticas» previstas.

El martes 24 de agosto a las 9 y media se abría el congreso con la sesión de apertura, a cargo del presidente, Jacques Navez, y un acto especial de homenaje a Willy Servais, fallecido en 1979 mientras asistía a la reunión de la CIEAEM de Hungría, por tanto 20 años de su desaparición física que no espiritual, puesto que sus trabajos, su recuerdo y su memoria siguen presentes en las mentes de todos aquellos que le conocieron, como primer presidente de la SBPM, desde 1953 hasta 1969, pasando a ser desde 1970 presidente de honor. Fue también director del Ateneo de Morlanwelz, sede de este congreso. Además de un recuerdo imborrable, como su actuación animosa, cuando durante los cinco años de cautiverio, detenido por las fuerzas de ocupación nazis, dando conferencias a sus compatriotas presos y actos subversivos, dejó una importante obra, en el campo de la pedagogía y enseñanza de la matemática, que se ve reflejada en unas palabras que pronunció:

> Sobre todo, si tenemos la impresión de que nuestros alumnos hablan un lenguaje diferente del nuestro, ¿no es urgente preguntarse sobre lo que piensan de esta matemática que ellos estudian con nosotros? Nuestros alumnos están delante de nosotros tal y como son. Su inteligencia, por inculta que sea, su carácter, aunque parezca indigente, y a continuación, una parte de su aventurado destino, se confían a nuestras manos. ¿Hacemos nosotros los esfuerzos suficientes para comprenderlos?, ¿somos, lo suficientemente buenos para acogerlos?

Después el champán de bienvenida, seguido de la primera conferencia plenaria a cargo de Georges Hansoul, de la universidad de Lieja: «Demostraciones, para el placer, para todos». Hizo un repaso histórico de la idea de demostración y de algunas demostraciones importantes, destacando el papel de la demostración por placer, con la intención de maravillar, de asombrar sobre algo no evidente. Indicando que para tempranas edades se pueden hacer demostraciones a partir de juegos o de situaciones lúdicas, que no por ello dejan de ser demostraciones; no hay que esperar a hacer demostraciones, cunado ya éstas sean formales. Expuso después algunas situaciones en las que se puede demostrar cualquier cosa.

Por la tarde, a partir de las catorce horas, hubo dos sesiones en paralelo, una de un grupo de discusión abierto a todos los participantes sobre la demostración y otro de C. Benedetti, sobre Cinema-temáticas. El resto de la tarde se dedicó a una excursión para visitar el sistema de esclusas y compuertas del Canal de la región belga del Centro.

El miércoles se dedicó todo el día a talleres, en cuatro periodos horarios de una hora y quince minutos, con tres sesiones simultáneas a la vez. En la primera estaban F. Drouin «¿Juegos, puzzles, rompecabezas en clase de matemáticas?»; F. Buekenhout, «Las demostraciones: una visión genética y en espiral», defendiendo la idea de que las demostraciones tienen que ser genéticas y además que sirvan en la vida cotidiana, siendo las matemáticas el mejor lugar para aprender la demostración y ejercitar el sentido crítico; y G. Lasters: «El producto de tercer grado en el plano». En la segunda sesión matinal, Chevalier y Warnier hablaron de «Aprender a leer en matemáticas en el primer grado»; Pierre Marlier y J.P. Descy sobre «Estadística elemental»; y M. Kassab sobre «Espacios métricos y lugares geométricos». La mañana terminaba a las 12 horas, se reanudaban las sesiones a las 14, con tres nuevas sesiones, Chevalier y Warnier continuaban su ponencia anterior; M. Frémal y C. Van Hooste hablaban sobre «La multiplicidad de pruebas», y M. Kassab sobre «El determinante de la matriz de una transformación lineal del plano». En el cuarto y último periodo de comunicaciones intervinieron, R. Gérardy, sobre «Numeración y códigos binarios», J. Doyen sobre «Matemáticas y cine», donde mostró fragmentos de películas conocidas con escenas de tipo matemático, Pierre Richard estudiando una función, Paul Newman calculando derivadas, Jean Louis Trintignant disertando sobre la noción de esperanza matemática, Meg Ryan explicando la paradoja de Zenón a Tim Robbins, a Mel Gobson como profesor de matemáticas, en *El hombres sin rostro*, los Shadoks poniendo a punto un sistema de numeración y una axiomática de la geometría, etc. y J.J. Quisquater, sobre criptografía.

En relación con el tema de cine, se proyectaron otras películas o fragmentos de ellos: *Ronda cuadrada* y *Rítmica* de Norman Mc Laren, *Yo prefiero la tangente* y *Cubo.*

...bajo el título «Mathématiques grandeur nature» (como decía Berlanga, Tamaño natural): ¡Por la grandeza de las matemáticas! ¡Naturalmente, por las matemáticas! ¡Por las matemáticas en la naturaleza! ¡Por las matemáticas en la naturaleza del hombre!

Por la noche el banquete oficial del congreso.

El jueves 26 dos nuevas sesiones matinales de comunicaciones: B. Honclaire: «Argumentar?, ¿por qué?, ¿cuándo?, ¿cómo?»; M. Decamp y A. Regnier «INFORMATH»; y J. P. Cazzaro y F. Pourbaix, sobre «PROB'HABILIDAD», en la primera y en la siguiente: J. Marchal sobre «Las dificultades de los alumnos en álgebra: informe y propuestas para remediarlas», C. Depotte y G Nöel sobre »La matemática del abejorro» y M. Lartillier sobre «El número π: 25 siglos de aventuras».

Después de comer, por la tarde, M. Roelens, «Las demostraciones: ¿se trata de convencer?»; F. Pourbaix, «Matemáticas y dibujos animados» y M. Lartillier siguió con su número π.

A las 3 y cuarto de la tarde se celebró la asamblea general de la Sociedad y la sesión de clausura del congreso.

Además había exposiciones de material escolar, tanto de casas comerciales como de grupos de investigación de didáctica de las matemáticas de Bélgica francófona.

Florencio Villarroya

Representante de la FESPM

JORNADAS NACIONALES DE LA A.P.M.E.P. (Asociación de Profesores de Matemáticas de la Enseñanza Pública)

Durante los días 3 al 6 de noviembre de 1999 se han celebrado en Gérardmer (Gérômé, para los amantes del queso) en la región de los Vosgos, bajo el título «Mathématiques grandeur nature» (como decía Berlanga, Tamaño natural):

¡Por la grandeza de las matemáticas!

¡Naturalmente, por las matemáticas!

¡Por las matemáticas en la naturaleza!

¡Por las matemáticas en la naturaleza del hombre!

Celebradas durante las vacaciones de «Todos los Santos», han asistido casi 700 profesores, la mayoría franceses, pero con asistencia de otros once países, entre ellos Chile, con un numeroso grupo, becado por el gobierno de su país, bastantes suizos y belgas.

Gérardmer, un maravilloso centro de vacaciones, tanto de verano, como de invierno. Pequeña ciudad moderna (pues fue completamente destruida en la segunda guerra mundial) de unos diez mil habitantes con tres institutos, en los que se ha desarrollado el congreso, además del «Espace-Lac» centro de congresos y actividades culturales local, al borde del mayor lago de los Vosgos. Afortunadamente el tiempo fue bastante bueno, dos grados bajo cero la primera noche, pero no llovía, ésta únicamente hizo su aparición, y ¡de qué manera! mientras se desarrollaban las últimas actividades del sábado por la mañana.

En la actualidad la APMEP cuenta con 8.000 asociados de un total de 40.000 profesores de matemáticas, su presidenta actual Catherine Dufossé (Lycée Marseilleveyre de Marseille) ha redefinido recientemente sus cuatro objetivos principales:

- Ser una cooperativa pedagógica al servicio de la profesión de profesor de matemáticas.
- Ser un lugar de formación continua para los enseñantes.
- Ser un crisol de reflexión e intercambios sobre matemáticas.
- Dar a los políticos la opinión de los enseñantes sobre su oficio, la evolución de la escuela y de la pedagogía.

Además la APMEP con ocasión de estas jornadas ha iniciado una recogida de firmas solicitando, entre otras cosas, un horario semanal mínimo de 4 horas de enseñanza de matemáticas para cada alumno en todas las clases del colegio; horario que debe incluir periodos de enseñanza diferenciada y trabajos en equipo. Para aquellos que quieran ponerse en contacto con esta asociación estas son sus direcciones:

En la actualidad la APMEP cuenta con 8.000 asociados de un total de 40.000 profesores de matemáticas, su presidenta actual Catherine Dufossé ha redefinido recientemente sus cuatro objetivos principales...

26, rue Duméril, 75013 Paris, Tf. 01 43313405, Fax 01 42 17 08 77,

electrónica: apmep@wanadoo.fr

página en Internet: http://www.univ-lyon1.fr/apmep/ (salvo error u omisión).

Las jornadas comenzaron con el consabido reparto de materiales, incluida una bolsa de caramelos de fabricación local la tarde del miércoles 3, seguido de la inauguración oficial, con asistencia de autoridades locales y ministeriales, donde Mr. Attali dijo que los asistentes sentían una pasión compartida por las matemáticas y su enseñanza, y que los de la APMEP eran los mejores, y claro, fue fuertemente aplaudido; y de la primera conferencia plenaria a cargo de Hubert Curien, bajo el título «Matemáticas, cultura y sociedad». Curien es un eminente físico de sólidos, ha participado en el proyecto Ariane y en el diseño de otros satélites, que además ha desempeñado importantes puestos: Ministro de Investigación, director del C.N.R.S. (Centro nacional de investigación científica)... habló de la importancia de la teoría de grupos, tanto del plano como del espacio en cristalografía, destacando el papel de las reflexiones, simetrías y traslaciones, y el poder que da la modelización en la resolución de problemas, en una colaboración dicotómica continua entre la naturaleza y las teorías matemáticas. Pasó después a los cristales no periódicos y simetrías de orden cinco, prohibidas, aparecidas teóricamente con Penrose, y un poco más tarde en la naturaleza en los cuasi-cristales, y también al papel fundamental que juega en la geología la transformada de Fourier que relaciona el espacio real y el espacio recíproco. También habló del papel de los errores, que a veces dan lugar a importantes descubrimientos, o estrepitosos fracasos, citando el principio de precaución en la realización de experimentos; finalmente se manifestó muy preocupado por la desafección de los alumnos hacia las ciencias abstractas, como las matemáticas y la física. Para terminar dijo que en el mundo actual no se puede vivir sin matemáticas, se vive mejor con.

Más tarde «vino de honor» a cargo del alcalde de la ciudad, y para amenizar la velada el grupo «Concurrence Déloyale», grupo de 5 músicos, interpretó las más conocidas canciones de George Brassens.

El jueves por la mañana estaba dividido en dos partes, la primera de Talleres, ¡más de 25 simultáneamente!, tanto en este periodo como en los demás de talleres, de los que sería imposible citar todos, talleres que se organizan en torno a comunicaciones presentadas por ponentes que disponen aproximadamente de una hora para su exposición y media hora para discutir con los asistentes. Se abordan los más variados temas: didáctica, cultura matemática, tecnologías nuevas, métodos activos para el aprendizaje, en todos los niveles de enseñanza. Podemos destacar algunos: «Matemáticas y fabricación» del prof del ENSAM

(Escuela Nacional Superior de Artes y Oficios) de Metz, Jean-Luc Bauchat que habló sobre la importancia cada vez mayor de la modelización matemática para tratar problemas de concepción de formas complejas, como la fabricación de una prótesis de cadera, o la reconstrucción de la cavidad ocular, después de un accidente. Modelización ligada a la optimización de los algoritmos de cálculo correspondientes, puesto que tienen que actuar en tiempo real sobre los dispositivos de control de fabricación; «El arte de las cifras, transmisión de información», de Jacques Borowczyk; «Diapositivas y Matemáticas» de Jean Claude Bresson, profesor de colegio, que ha elaborado una colección magnífica de diapositivas para ilustrar la mayoría de los temas geométricos y algebraicos, es decir históricos de los cuestionarios oficiales franceses (próximamente estará disponible en CD-rom); «Lo que nos enseñan las abejas», de Ginette Mison (APMEP, Lyon); otros, cómo no, sobre Matemáticas e Internet y sobre Cabri-Géomètre.

La segunda de «Grupos de discusión», de una hora de duración sobre 18 temas diferentes, con títulos sugerentes y actuales para estimular la discusión y participación de todos los asistentes, citamos:

- «¿Hay que suprimir la enseñanza del álgebra en la secundaria?».
- «¿Qué cultura estadística, para qué ciudadano?, ¿es esto una cuestión para los profesores de matemáticas?».
- «La enseñanza de las matemáticas en las clases muy difíciles de los colegios (Z.E.P., clases de ayuda y apoyo, clases de inserción)».
- «Por una renovación de la enseñanza de las probabilidades y de la estadística en la secundaria y en el bachillerato».
- «¿Cómo podría ser un libro de matemáticas concebido para los alumnos?».
- «¿Cómo enseñar sin excluir y respetando, además las reglas de la colectividad?».
- «¿Cómo integrar la historia de las matemáticas en su enseñanza?»
- «¿En qué se pueden transformar las pruebas del *Bac* (fin de bachillerato) en el próximo decenio?».

Por la tarde un nuevo periodo de talleres, entre los que citamos: «El astrolabio», por Léo Clauss; «Los cuadrados mágicos desde la escuela elemental hasta la universidad», de Odile Kouteynikoff; «El teatro al servicio del álgebra», de M. Muniglia (IREM Lorraine); «Funciones utilizadas en economía», por Jacques Bair, de la Universidad de Lieja (B); «La enseñanza de las matemáticas en Europa», por Richard Cabassut (Strasbourg), en el que participamos colegas belga, alemana y yo mismo; «Recorridos diversificados en 5.° (nuestro 1.° ESO): del románico al gótico», de M. Hallez (IREM Paris-VII)...

«¿Hay que suprimir la enseñanza del álgebra en la secundaria?».

«¿Qué cultura estadística, para qué ciudadano?, ¿es esto una cuestión para los profesores de matemáticas?».

Después conferencia plenaria de Philip Merieu, profesor de ciencias de la Educación de la Universidad de Lyon, y director del I.N.R.P. (Instituto Nacional de Investigación Pedagógica) titulada «Relación con el saber, relación con la verdad y construcción de la ciudadanidad». Partiendo de un punto de vista republicano, expuso diez tesis sobre la relación con el saber. La república garantiza el bien común, pero tiene un peligro, «el culto al orden», que además está dirigida por «clérigos». Sus tesis son que la escuela de la república (en Francia), es un instrumento de integración social, como signo del nacionalismo triunfante, integración como normalización económica, que intenta además conciliar racionalidad y religiosidad, a la búsqueda de unos valores nacionales comunes. En su quinta tesis señala que hoy el equilibrio democracia república no funciona en la modernidad; el nacionalismo ya no es cimiento de unidad nacional y la escuela no promociona socialmente; las instituciones caen en el formalismo, una excesiva juridización, para servir a intereses particulares y no generales. Repliegue de la razón frente al impulso, y de la nación frente al clan, los alumnos interrumpen las clases, 2 son suficientes para perturbar el aula, pues se llevan casi el 90% de la energía del profesor. Hay una cultura de la inmediatez, los alumnos no se someten a reglas no aceptadas por ellos. Se hace necesario educar en una postura crítica, pues, en general, el problema que se le propone al alumno no le concierne, a su vez el alumno no desata lo escolar de lo imaginario, basa todo en la subjetividad, pero articular la relación sujeto-predicado es fundamental en la construcción del saber racional. Si los alumnos no distinguen el sujeto del predicado no pueden discutir sobre el objeto, sólo tienen opiniones afectivas, no saberes racionales. Es imprescindible articular el saber escolar con las cuestiones fundamentales que han permitido su elaboración; hay que trabajar los invariantes antropológicos de la disciplina, pues son los que hacen funcionar la inteligencia.

Para finalizar las sesiones de trabajo del día, un excelente concierto de música clásica a cargo de un joven pianista local, Christophe Ferry, y un veterano violoncelista ruso, Revaz Marchabeli, seguido del banquete oficial, donde se degustaron abundantemente los productos regionales, especialmente derivados del cerdo y dulces, amenizados por André Antibi que interpretó algunas canciones.

La mañana del viernes, un poco más relajada, vino dedicada a dos conferencias simultáneas, una de Vincent Lecuyer, sobre «Números astronómicos» y otra de Mustapha Nadi sobre «Aspectos matemáticos de la medida y consecuencias prácticas»; seguidas de la asamblea general de la APMEP.

La primera parte de la tarde del viernes se dedicó a las asambleas regionales, momento que aprovechamos los representantes de las Sociedades belga, francesa y española, además de una «invitada» de Hamburgo, para intercambiar impresiones sobre la recientemente creada Federación Europea de Asociaciones de Profesores de Matemáticas, y preparar el orden del día de la próxima reunión que tendrá lugar a finales de enero en París.

La segunda parte de nuevo a talleres, simultáneos. Señalamos, «El papel de la demostración en Francia y Alemania», de R. Cabassut; «Sentidos y algoritmos», de A. Fluckiger, (Universidad de Ginebra); «Introducción a la estadística robusta», de G. Haesbroek (Universidad de Lieja); «Estadística en Secundaria», de B. Parzysz (I.U.F.M, Lorraine); «Aritmética en imágenes», de J.P. Sonntag (Asociación resonancia transdisciplinar); «Las matemáticas con los dedos», de Roland Marseille, propone hacer «tocar con los dedos» los conceptos matemáticos, para facilitar su apropiación del saber a los alumnos.

Después de cenar nuevo espectáculo «Personalmente suyo» del grupo *Acrostiches* formado por tres acróbatas, equilibristas, simpáticos, rudimentarios, arcaicos...

En el pasado mes de octubre quedó constituida la Subcomisión ICMI-España...

...se apuntaron algunos proyectos de actuación del subcomité tales como la realización de estudios relativos a la coordinación de la enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria y terciaria o a la utilización de las nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas a todos los niveles.

La mañana del sábado tuvo dos conferencias, la primera de Philippe Lombard, profesor de la universidad de Nancy, que fue muchos años director del IREM de Lorraine, con el título «Embaldosados no periódicos», y la que cerró las jornadas a cargo de André Antibi, profesor de la universidad de Toulouse, actual presidente de la ADIREM (Asamblea de Directores de los Institutos de Investigación en Enseñanza de las Matemáticas) sobre «La motivación en matemáticas, ¿la del profesor? ¿la del alumno?», que muchos de nuestros lectores conocen, pues es la misma que presentó en las JAEM IX de Lugo.

Además durante todos los días del congreso estuvieron presentes en diferentes stands, por un lado los editores y principales casas comerciales de material escolar de matemáticas, incluidos los de calculadoras, y por otro los IREM, y otros centros institucionales con sus publicaciones, que se podían comprar a precios especiales de congreso (no obstante, en general, las publicaciones de los IREM son de precio reducido, algunas muy interesantes).

Aprovechamos la ocasión para anunciar las Jornadas APMEP del 2000, que se desarrollarán en Niza, del 28 al 30 de octubre, sobre el tema «Matemáticas en el Mediterráneo», si alguien está interesado en presentar una comunicación (ya sabéis, taller de hora y media) puede contactar con Michèle Pécal, 260 Chemin des Cerisiers, 06740 Chateauneuf de Grasse, o

pecal@unice.fr

Florencio Villarroya
Representante de la FESPM
en el congreso APMEP

Subcomisión ICMI-España

En el pasado mes de octubre quedó constituida la Subcomisión ICMI-España, cuyos miembros, en representación de las diferentes asociaciones relacionadas con la enseñanza de las matemáticas, son los siguientes: José Luis Álvarez, María Jesús Luelmo y Antonio Aranda (FESPM), Tomás Recio (RSME), Marco Antonio López (SEIO), Soledad Rodríguez (SEMA), María Victoria Sánchez (SEIEM), Alicia Delibes (MEC) y Joan Cerdá (SCM).

En la primera reunión se eligieron los cargos de Presidente (María Jesús Luelmo) y Secretario (Tomás Recio), se estableció un calendario de reuniones y se apuntaron algunos proyectos de actuación del subcomité tales como la realización de estudios relativos a la coordinación de la enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria y terciaria o a la utilización de las nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas a todos los niveles.

La última reunión tuvo lugar el pasado 17 de mayo con motivo de la presencia en España de Hymann Bass, presidente del comité ejecutivo ICMI, y Bernard Hodgson, secretario del comité ejecutivo ICMI, invitados a la misma junto con Miguel de Guzmán (ex presidente del comité ejecutivo ICMI) y José Luis Fernández (representante español en la IMU). En esta reunión la presidenta del subcomité español, tras saludar a los invitados y hacer las presentaciones oportunas, explicó la gestación y composición de este comité así como las actividades que nos han venido relacionando con ICMI, ICME-8, Año 2000, etc.

El profesor Hodgson dio las gracias por la presentación y se felicitó por el hecho de que estemos juntos representantes de colectivos de diversos orígenes e intereses con el objetivo de mejorar, a todos los niveles, la calidad de la enseñanza de las matemáticas.

A continuación, se presentó un informe sobre la situación de la enseñanza de las matemáticas en España, interviniendo los profesores María Victoria Sánchez (enseñanza primaria), María Jesús Luelmo (educación secundaria), Tomás Recio (enseñanza universitaria) y José Luis Álvarez (formación del profesorado de matemáticas).

Tras el informe, intervinieron los profesores Hodgson y Bass solicitando varias aclaraciones al mismo, que fueron comentadas por todos los participantes. El profesor Hodgson a su vez, aclaró al comité diversos aspectos relativos a la estructura de la ICMI y de los subcomités nacionales. Se invitó al comité español a sugerir y a participar en la elaboración de nuevos estudios ICMI (formación de profesores, aplicaciones y modelos, informática), en la organización de alguna Conferencia Reginal ICMI (tal vez enfocada a Iberoamérica) y a asistir a la celebración, el próximo octubre, del centenario de la revista oficial del ICMI: *L'Enseignement Mathematique*.

El comité, por su parte, tras valorar positivamente el encuentro y despedir a los profesores invitados, debatió la conveniencia de redactar un documento para el Consejo de Rectores y para el público en general, mostrando la preocupación por la escasa formación matemática que prevén los actuales planes de Formación del Profesorado de Primaria y recomendando que se aumente el número de créditos asignados a la formación matemática de los futuros maestros.

En general, se puso de manifiesto que la realización de este tipo de documentos debe ser una de las actuaciones del comité y se acordó finalmente dedicar una parte de las reuniones a exponer nuestros puntos de vista respectivos sobre la educación matemática y a conocer proyectos, evaluaciones etc., institucionales (INCE).

También se acordó realizar un intercambio sistemático de los respectivos boletines o revistas de nuestras Sociedades entre los miembros de ICMI.

Antonio Aranda
SAEM «Thales»

...un grupo de alumnos del IES Juan de la Cierva, con una puesta en escena diseñada por ellos mismos, montaron en el escenario un icosaedro gigante, de más de dos metros de altura.

Homenaje al profesor Pedro Puig Adam en el centenario de su nacimiento

El día 10 de mayo de 2000 se celebró en Madrid, en el Instituto de San Isidro, un acto académico de homenaje al profesor Pedro Puig Adam (1900-1960), organizado conjuntamente por el citado Instituto, la Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo» y el Comité de Madrid para la celebración del Año Mundial de las Matemáticas. La asistencia de público fue muy numerosa. En la entrada del salón se dispuso una pequeña exposición de libros, objetos personales, cuadros, partituras, dibujos y poemas del profesor Puig Adam, que gentilmente prestó su familia para la ocasión.

Antes de empezar, un grupo de alumnos del IES Juan de la Cierva, con una puesta en escena diseñada por ellos mismos, montaron en el escenario un icosaedro gigante, de más de dos metros de altura. Un vez montado, lo elevaron en alto sobre las cabezas de los asistentes y lo situaron sobre el suelo del escenario para que, simbólicamente, actuara de telón de fondo para el acto.

El acto, presidido por la directora del Instituto, constó de tres partes diferenciadas. La primera parte contó con la intervención de María Jesús Luelmo, Presidenta de la SMPM, José Carrillo, Decano de la Facultad de Matemáticas

Montando el icosaedro

de la Universidad Complutense y presidente del Comité de Madrid M2000M e Isabel Píñar, Directora del Instituto. El texto de la intervención de María Jesús Luelmo puede ser consultado en la página sobre Pedro Puig Adam, accesible a través de la web de la SMPM en la siguiente dirección http://smmp.es/

En la segunda parte, titulada perfil humano y profesional intervinieron José Aldomar, Joaquín Crespo, Consuelo de Costa y Santiago Gutiérrez, antiguos alumnos del profesor Puig Adam todo ellos en distintos niveles educativos. Todos dieron pinceladas que contribuyeron a dibujar la figura humana del profesor, narrando anécdotas, recordando rasgos de su carácter, o la profunda huella que en todos ellos dejaron sus enseñanzas y su persona. Terminó esta segunda parte con la intervención de su nieta, M.ª José Gómez Puig, leyendo un texto redactado por las hijas de Puig Adam, Emilia y M.ª Luisa, presentes también en el acto, en que se resalta el aspecto más familiar y personal de la vida de don Pedro.

Siguió luego un intermedio en el que la pianista Laura Mesanza interpretó dos piezas musicales compuestas por Pedro Puig Adam. De fondo a esta interpretación se proyectó un montaje visual con imágenes que recorrían la vida y las ideas y las obras del homenajeado, realizado por el que suscribe.

La tercera y última parte consistió en una conferencia de la profesora Emma Castelnuovo, que fue amiga personal de Puig Adam. La profesora Castelnuovo tituló su conferencia «No olvidar

Emma Castelnuovo

el origen concreto de la matemática ni los procesos históricos de su evolución (punto dos del Decálogo de Pedro Puig Adam)». Emma Castelnuovo hizo un nuevo derroche de vitalidad, hablando con la convicción y el entusiasmo que la caracterizan. Esta conferencia servía también de presentación de la exposición de materiales didácticos que, bajo el título de «2000, piezas matemáticas», ha elaborado a lo largo de los dos últimos cursos un grupo de trabajo de la SMPM, coordinado por la profesora Castelnuovo. Esta exposición que fue inaugurada a continuación era una manera más de homenajear al profesor Puia Adam, rememorando la exposición organizada por él que, con ocasión de la XI Reunión de la CIEAEM, se celebró en Madrid en el año 1957.

La intervención de la profesora Castelnuovo glosó la figura del profesor Puig Adam y los recuerdos de su amistad con él, para luego, haciendo un recorrido histórico desde Menecmo, pasando por Arquímedes y Galileo hasta nuestros días, resaltando el papel esencial que el trabajo y la construcción de objetos, materiales y modelos matemáticos manipulables tiene en la enseñanza. Cabe destacar el énfasis que puso en señalar la importancia de que sean los alumnos y los profesores los que construyan los propios modelos; «Los modelos son eficientes sólo porque provocan una dinámica en la investigación. No es ciertamente la perfección de un modelo la que lleva a una discusión matemática. El material debe ser el más barato posible (papel cartulina, varillas de una materia cualquiera...) cosas que no cuestan nada. [...] No tiene importancia si el modelo construido está mal hecho. Su función es solamente la de invitar a los alumnos a darse cuenta del significado de su modelo, y, después, a presentarlo, a hablar, a explicar...».

Como conclusión de está rápida crónica del acto me gustaría incluir el párrafo final de la intervención de la profesora Castelnuovo, porque creo que no hay mejor manera de resumir lo que son sus ideas y las de los que, considerándonos humildes herederos de las Puig Adam quisimos, con este acto, rendirle homenaje:

Para terminar quiero poner de relieve la cosa más importante de estas construcciones matemáticas. Sucede que borran casi totalmente las diferencias sociales, porque, a menudo, chicos que pertenecen a rangos más bajos tienen mayor habilidad manual. Y finalmente –y este es un hecho que no conviene olvidar– una construcción de la matemática a partir de lo concreto y de la realidad, destaca claramente las cualidades de la fantasía, la intuición, la voluntad de los chicos inmigrados que siempre en número mayor, afortunadamente, llegarán a nuestros países.

Francisco Martín Casalderrey

Investigación en el aula de Matemáticas. Matemáticas en la sociedad

Por quinto año consecutivo, presentamos la crónica de las jornadas «Investigación en el Aula de Matemáticas», celebradas en Granada, durante los días 18, 19 y 20 de noviembre y 9, 10 y 12 de diciembre y organizadas por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales y el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

En esta ocasión, las jornadas se han centrado en el tema «Matemáticas en la Sociedad», tomando como punto de partida la declaración del año 2000 como Año Mundial de las Matemáticas, y tratando de plantear un debate sobre el papel de las matemáticas del siglo XXI y sobre la necesidad de apertura de las matemáticas a la sociedad. En definitiva, queríamos aprovechar estas jornadas para reflexionar sobre los retos que se plantean las matemáticas del próximo siglo y para difundir entre los profesores de matemáticas su papel protagonista en la divulgación de las matemáticas a la comunidad educativa. Con objeto de preparar esta tarea de difusión, en las presentes Jornadas se ha abordado una reflexión sobre la dimensión social de la matemática, las actividades que podemos realizar para destacarla y tratar de organizar acciones concretas con este fin.

El trabajo se ha desarrollado, como viene siendo habitual, a lo largo de dos fines de semana. Al igual que en ediciones anteriores, las Jornadas han estado abiertas tanto al profesorado en activo, como a estudiantes de últimos cursos de carrera, o a titulados que aún no se han incorporado al mundo laboral, quienes habitualmente encuentran dificultades para participar en actividades de formación del profesorado. Hemos compartido conferencias, comunicaciones, talleres, mesas redondas, además de, valioso intercambio de puntos de vista, experiencias, ideas..., que tiene lugar de forma paralela en conversaciones «de pasillo».

En primer lugar, hemos de felicitarnos, todos, por el desarrollo de las jornadas, tanto por el trabajo realizado como por la buena colaboración que se ha vuelto a poner de manifiesto, entre el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y la Junta Directiva de la SAEM Thales de Granada. Destacamos la buena calidad de las aportaciones de todos los que con su presencia y participación posibilitan y animan este tipo de actividades.

Y finalmente –y este es un hecho que no conviene olvidar– una construcción de la matemática a partir de lo concreto y de la realidad, destaca claramente las cualidades de la fantasía, la intuición, la voluntad de los chicos inmigrados que siempre en número mayor, afortunadamente, llegarán a nuestros países. (Emma Castelnuovo)

Las jornadas han reunido a 113 inscritos, entre profesores en activo, diplomados y licenciados, futuros profesores de enseñanza secundaria y bachillerato. Se han puesto en común experiencias de investigación e innovación que se están llevando a cabo en las aulas de los centros educativos.

Hemos podido escuchar cinco conferencias que han abarcado, con sus temas, todos los niveles educativos:

- Javier Medina Fernández: «Didáctica de las Ciencias desde un museo de Ciencias interactivo».
- Victoriano Ramírez González: «Reparto proporcional y decisión social».
- Enrique Hitos Palma y Pedro Leal Leal: «Contenidos de la matemática del siglo XXI en Bachillerato».
- José Márquez Romero: «Inicio de los niños en la matemática».
- Pascual Jara Martínez: «La Matemática del año 2000».

Para potenciar un trabajo participativo, y teniendo en cuenta la peculiaridad del tema central de las Jornadas, se han desarrollado cuatro talleres simultáneos, contando todos ellos con una importante participación:

- Matemágica numérica.
- Matemáticas en la calle.
- Taller de juegos.
- Taller de Astronomía.

Además de lo anterior ha tenido lugar una mesa redonda, coordinada por Antonio Moreno Verdejo, sobre el tema: «Papel de la matemática en el mundo de hoy». Hay que destacar el interés suscitado por la misma, así como la alta participación de los asistentes.

Por otro lado, se han presentado distintas comunicaciones, todas ellas relacionadas con el tema común de las matemáticas en la sociedad: «Influencia de creencias subjetivas de origen sociocultural en el pensamiento probabilístico de los alumnos de 10 a 14 años», «Contextos y campos de problemas relacionados con la distribución normal», «El asesor curricular y el desarrollo profesional del profesor de matemáticas», «El asesor curricular en el área de Matemáticas», «Didáctica de la matemática en la educación ambiental», «Una propuesta para la formación de profesores de secundaria en ejercicio: el rol de la didáctica y la historia en un taller de resolución de problemas de combinatoria», «Las actitudes del futuro profesor de matemáticas: la metarreflexión, una estrategia para el cambio», «Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas», «La vida cotidiana como recurso para el aprendizaje de las matemáticas», «Historia de las matemáticas en clase. ¿Por qué? ¿Para qué?», «¿Cómo se usan las fracciones en el periódico», «Aporte para una fenomenología de los números reales», «Visualización de la pajarita de papel», «La simetría, algo más que un movimiento», «Descubriendo poliedros en distintos ámbitos», «Dos objetivos curriculares de actualidad: resolución de problemas y representaciones» y «La educación estadística en la sociedad actual».

Los textos de todas las comunicaciones, así como los de las conferencias, de la mesa redonda y de los talleres, quedan recogidas en las actas de las Jornadas, editadas por la Universidad de Granada (Departamento de Didáctica de las Matemáticas) y la SAEM Thales, que ya se han distribuido entre los asistentes. La edición de estas actas es un indicador de calidad de las Jornadas. Este año los editores han sido M.ª Isabel Berenguer Maldonado, José M.ª Cardeñoso Domingo y Manuel Toquero Molina.

El acto de clausura estuvo presidido por Francisco Fernández García, Vicedecano de Infraestructuras, en representación del Decano de la Facultad de Ciencias de la Educación, José María Sánchez Molina y Pablo Flores Martínez, representantes de la SAEM Thales en Granada y M.ª Jesús Cañizares Castellanos, Directora de la sección de Granada del Departamento de Didáctica de la Matemática. Todos ellos elogiaron el nivel de participación y la calidad de los trabajos presentados, animando a la organización a continuar con la actividad que tanto interés despierta.

Juana M.ª Navas Pleguezuelos
S.A.E.M Thales. Granada

Second International Mathematics Education and Society Conference, MES2

Del 26 al 31 de marzo del 2000

Montechoro, Portugal

En septiembre de 1998 tiene lugar el Primer Congreso Internacional sobre Educación Matemática y Sociedad (MES1, http://www.nottingham.ac.uk/csme/meas/conf.html) en la Universidad de Nottingham (GB). Vista la gran cantidad existente de congresos anuales en el campo de la Educación Matemática, no podemos dejar de preguntarnos por qué aparece una conferencia más. Sin duda, existe un riesgo de desaparición ante la creación de tantos grupos de estudio emergentes y la consecuente institucionalización de sus encuentros en forma de congresos, o al menos un riesgo de falta de rigor ante la imposibilidad de la comunidad científica de producir textos académicos con tanta celeridad. ¿Qué espacio se supone que viene a cubrir esta nueva conferencia? ¿Con qué objetivos explícitos se constituye? Es importante contestar a estas preguntas para entender la finalidad y los propósitos formulados por el grupo de investigadores y educadores involucrados en la organización del MES.

Tradicionalmente, el Grupo Internacional para la Psicología de la Educación Matemática ha trabajado desde un paradigma psicológico, aunque haya habido en las últimas convocatorias un cierto protagonismo de los aspectos sociales y culturales.

Debemos remontarnos al PME19 de Valencia en el año 1996, para encontrar las principales causas que originan este nuevo congreso. Tradicionalmente, el Grupo Internacional para la Psicología de la Educación Matemática ha trabajado desde un paradigma psicológico, aunque haya habido en las últimas convocatorias un cierto protagonismo de los aspectos sociales y culturales. En general, el alumno se ha considerado como un individuo sujeto a unos determinados procesos de aprendizaje e influenciado ocasionalmente por múltiples aspectos, entre ellos, los culturales. Sin embargo, numerosas investigaciones han documentado hasta el momento la relevancia de los factores sociales más allá de la anécdota científica. Parece que no es posible prescindir del entorno sociocultural del alumno sin recortar la comprensión de los fenómenos de aprendizaje.

En Valencia, y a pesar de no estar contempladas de manera explícita, se tratan tangencialmente algunas cuestiones de carácter complejo. Entre otras, ¿qué necesita saber el alumno para actuar de manera aceptable/razonable en el aula de matemáticas?, ¿cómo reaparece la identidad del alumno fuera del aula en la construcción de su autoconcepto como aprendiz de matemáticas?, ¿en qué medida las limitaciones y las posibilidades de un contexto social pueden influenciar las oportunidades de aprendizaje de un alumno?, ¿cuáles son los valores representados en el proceso de aceptación o rechazo de unos contenidos matemáticos particulares?, ¿tienen las matemáticas un significado diferente para cada grupo social?, ¿cuáles son las relaciones de poder presentes en un aula de matemáticas?

La fuerte representación de los aspectos sociales anima la formulación de propuestas de cambio por parte de un significativo grupo de investigadores. En concreto, se sugiere reorientar las prioridades del Congreso hacia un lugar donde las realidades y necesidades de las diferentes culturas y sus prácticas en Educación Matemática estén representadas. Sin que preceda un gran debate, el Comité Internacional del PME rechaza las posibilidades del nuevo planteamiento y ratifica la importancia de los factores psicológicos individuales frente a los elementos del contexto social donde tiene lugar el aprendizaje. No obstante, el grupo de investigadores mencionado opta por abrir las puertas a lo inevitable del paradigma sociológico. Como consecuencia, ese mismo año se establecen las bases de la que será la Mathematics Education and Society Conference, bajo la convicción de que se trata de un esfuerzo necesario.

Tras el MES1, la celebración del MES2 significa la consolidación de este esfuerzo y la superación de la incerteza.

El Second Mathematics Education and Society Conference (MES2) tuvo lugar del 26 al 31 de marzo, en el Hotel Montechoro, en las afueras de Albufeira (Algarve, Portugal). Asistieron cerca de sesenta investigadores y profesores de los cinco continentes, preocupados por las dimensiones sociales, políticas, culturales y éticas de las matemáticas y de la educación matemática en todos los niveles. Fue una semana en la que pudimos disfrutar a duras penas de un tiempo primaveral, no sólo porque la temperatura no animaba demasiado a tomar el sol, sino más bien porque lo apretado del programa no permitía casi ningún momento de descanso, a no ser los *coffee break* servidos en la terraza del hotel. No obstante, esta organización del congreso, que nos hacía compartir charla y comida desde la mañana hasta la noche, permitió que el éxito no se limitase a lo acertado de las ponencias y conferencias, sino que se extendiese a las animadas charlas y debates que permitieron nuevos encuentros, consolidar amistades y abrir nuevos caminos y perspectivas que reorienten y animen nuestro trabajo por unas matemáticas que no reproduzcan la desigualdad social y que consideren su importante papel en la educación de los futuros ciudadanos.

La fuerte representación de los aspectos sociales anima la formulación de propuestas de cambio por parte de un significativo grupo de investigadores. En concreto, se sugiere reorientar las prioridades del Congreso hacia un lugar donde las realidades y necesidades de las diferentes culturas y sus prácticas en Educación Matemática estén representadas.

El Congreso fue promovido por el Centro de Investigaçao em Educaçao de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Lisboa (CIEFCUL, http://www.educ.fc.ul.pt/cie), con un comité organizador presidido por el profesor Joao Filipe Matos, un equipo al completo del cual no podemos dejar de elogiar la acertada organización y el fructífero desarrollo de las sesiones.

Como principal objetivo de este segundo congreso aparece el promover el debate en torno a las dimensiones sociales y políticas de la educación matemática, entendiéndola como una disciplina clave en la política de la educación. Las matemáticas son un filtro para el acceso al mercado laboral; así el control del éxito en matemáticas se traduce en un control del mercado laboral. Además, la educación matemática tiende a contribuir a la regeneración de la desigualdad social a través de prácticas pedagógicas no democráticas que presentan la materia de un modo absolutista y autoritario. Por otra parte, en este Congreso se expusieron distintos marcos teóricos, se discutieron aspectos metodológicos y se planificaron acciones conjuntas dentro de un marco de trabajos aplicados e investigaciones. El MES2 fue un forum y una plataforma en la que educadores matemáticos de todo el mundo pudieron organizar y plantear su futura actividad educativa e investigadora.

Las contribuciones se agruparon en torno a cuatro temas:

- Política de la Educación Matemática.
- Aspectos sociales y culturales del aprendizaje de las matemáticas.
- Sociología de las Matemáticas y de la Educación Matemática.
- Metodologías alternativas de investigación en Educación Matemática.

Asistieron cuatro conferenciantes invitados, a cuyas disertaciones siguieron dos réplicas. A cada una de las conferencias y las correspondientes réplicas, siguió una hora de discusión en cuatro grupos, que se reunían en sesión plenaria por la tarde para que los conferenciantes pudieran responder a las cuestiones planteadas en cada grupo y tuviese lugar un debate general. Las ponencias se agruparon también según los temas desarrollados cada día, presentándose un total de veintiséis.

En la sesión de apertura, la profesora María M. Vieira, de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Lisboa, nos recordó la necesidad de considerar el fracaso en matemáticas como un problema sociológico y promover, desde este posicionamiento, el énfasis en aspectos de justicia social.

El primer conferenciante invitado, Michael W. Apple, de la Universidad de Wisconsin, hizo alusión a la poca tradición que existe en educación matemática en relación con examinar las conexiones entre las matemáticas y el poder económico, político y cultural. Apuntó al hecho de que para entender los límites y las posibilidades de una educación más democrática y crítica, es necesario examinar los movimientos neo-liberales y neo-conservadores en los que se estructura el contexto de las actuales reformas educativas. Para terminar nos urgió hacia la necesidad de realizar mucho trabajo práctico y político para «engrosar» la moralidad y la democracia en la educación: «Si nosotros no lo hacemos, ¿quién lo hará?».

El segundo conferenciante, Richard Smith, de la Griffith University Gold Coast, Australia, proporcionó ejemplos de cómo las matemáticas escolares desempeñan un papel clave en la producción y reproducción de la desigualdad social. Pero al mismo tiempo señaló que estas circunstancias en las manos de los educadores matemáticos radicales se pueden convertir en herramientas que eviten que los estudiantes se entrampen en el laberinto de las matemáticas, si para ello cambian competitividad por equidad.

A cada una de las conferencias y las correspondientes réplicas, siguió una hora de discusión en cuatro grupos, que se reunían en sesión plenaria por la tarde para que los conferenciantes pudieran responder a las cuestiones planteadas en cada grupo y tuviese lugar un debate general.

Candia Morgan, del Institute of Education, de la Universidad de Londres, fue la tercera conferenciante y nos hizo reflexionar sobre el proceso de la evaluación. Se considera una parte esencial y natural del proceso educativo, pero el discurso dominante oscurece la función social que debe llevar a cabo, tanto en la clase como en la sociedad, y, si estamos interesados en los aspectos sociales, esto debe cambiar. Para Candia, no se trata de «investigar en la mejora de la evaluación», sino de «entender cómo actúa la evaluación en la clase y en el sistema educativo y cuáles son sus consecuencias».

En el quinto día, dedicado a «Metodologías alternativas de investigación en Educación Matemática», nos habló Renuka Vithal, de la Universidad de Durban, Sudáfrica. Renuka está interesada en lo que sucede cuando el estudiante de magisterio, que ha sido iniciado en un enfoque social, cultural y político a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, intenta llevar a cabo un tal enfoque en sus prácticas escolares. Entonces un trabajo cooperativo entre estudiante y profesor crea el medio para reflexionar acerca de las ideas teóricas y la manera de llevarlas a la práctica. Renuka concluye su disertación recordando que en un enfoque crítico el investigador está profundamente comprometido con la desigualdad y las relaciones de la actividad humana, con la cultura y las estructuras sociales y políticas. Para ella, la agenda de un investigador crítico no se centra solamente en comprender la desigualdades y las injusticias, sino que también incluye una acción transformadora y emancipadora. Menciona aquí el «principio de esperanza» (del que habla Ole Skovsmose, *Hacia una filosofía de la Educación Matemática Crítica*, Ed. Una empresa docente, Bogotá), la esperanza del cambio, que inspira y conduce la iniciativa y el esfuerzo para mejorar las situaciones.

El día de clausura se celebró una reunión del Comité Internacional, acordando celebrar el tercer Congreso en Dinamarca, el año 2002.

Aquellos que estén interesados en obtener más información sobre el Congreso y quieran acceder a las conferencias y ponencias presentadas, pueden consultar la página del MES2:

http://correio.cc.fc.ul.pt/~jflm/mes2/mes2.html

Sin duda, lo recomendamos.

Núria Planas
Universitat Autónoma de Barcelona
FEEMCAT

Enrique de la Torre
Universidade da Coruña

Exposición itinerante: Matemáticas 2000

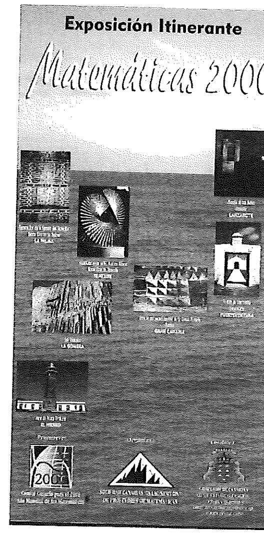
Con motivo del Año Mundial de las Matemáticas, la Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas, con el apoyo de la Consejería de Educación, Cultura y Deportes del Gobierno de Canarias, ha organizado esta exposición itinerante que fue inaugurada con motivo de las XX Jornadas de dicha sociedad y que está recorriendo distintas comunidades autónomas.

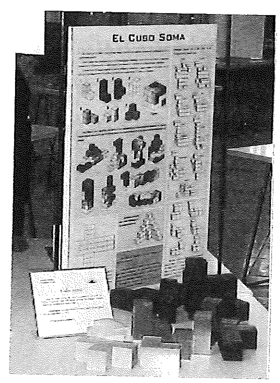
Está formada por un conjunto de mesas temáticas, en cada una de las cuales hay materiales manipulables acompañados de plantillas que explican con claridad qué debe hacerse con ellos y qué tipo de problema o problemas deben resolverse.

Además, «Matemáticas 2000» dispone de una exposición vertical de carteles didácticos que aabordan diferentes temas, unos relacionados con el material disponible en la mesa y otros con información sobre otras interesantes cuestiones.

Los títulos de las mesas son los siguientes:

- Juegos del mundo.
- Ilusiones y paradojas.
- Anamorfosis.
- El mundo de los espejos.
- Puzzles en el plano.
- Puzzles en el espacio.
- La caja del infinito.
- Grafos y caminos.
- Torres de Hanoi.
- Los Tangrams y Pitágoras.
- Pentaminós y tetrahexos.
- La cicloide.
- Geometría cotidiana.
- Mosaicos y teselaciones.
- Pompas de jabón.
- Álgebra visual.
- Azar y sondeos.





Premios de Experiencias Didácticas

Convocado por el Consejo General de Colegios Oficiales de Doctores y Licenciados se han hecho públicos los Premios de Experiencias Didácticas en el Área de Ciencias en su XV convocatoria, recayendo el primer premio en José María Galdón por su trabajo «Creación y aplicación sistemática de transparencias participativas para mejorar la enseñanza de las matemáticas». Asimismo, ha obtenido un accésit María Isabel Martín por «La geometría en el arte Iberoamericano».

Rally Matemático Sin Fronteras 2000

Los Centros de Profesores y Recursos de la provincia de Huesca, como contribución a la celebración del Año Mundial de las Matemáticas, decidieron promover la participación de los centros de secundaria de la provincia 8ya participaron en los años 1993, 1994 y 1995) en una competición internacional denominada Rally Matemático Sin Fronteras.

Se trata de una iniciativa del IREM de Toulouse que toma la forma de una competición abierta en la que participan clases enteras y profesores de centros de secundaria de diferentes países y culturas. La competición entre clases impulsa y promueve el trabajo en equipo como forma de abordar y resolver problemas complejos. Todas las clases inscritas resuelven, el mismo día, 10 problemas en una prueba cuya duración es de dos horas.

En la edición del año 2000 han participado 56 clases que agrupaban a más de 1000 alumnos del Alto Aragón. Los ganadores de la fase provincial fueron la clase de 3.° E del IES Hermanos Argensola de Barbastro y la de 4.° C del IES Domingo Miral de Jaca, que disfrutaron como premio de un viaje a Port Aventura. Los alumnos de Barbastro, además fueron los ganadores, dentro de su categoría, en la Superfinal Internacional.

Hay que destacar que el 94% de los profesores que participaron con sus alumnos calificaron la experiencia de «interesante y enriquecedora» y volverían a hacerlo en una próxima edición.

XI Olimpiada de la FESPM, X JAEM...

XI Olimpiada Matemática Nacional de la FESPM

Con la voluntad de continuar la tradición que la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas inició hace ya diez años, la Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya se ha hecho cargo de la organización de la XI Olimpiada Matemática Nacional del año 2000, con la feliz coincidencia de que este año ha sido declarado por la UNESCO como el Año Mundial de las Matemáticas.

Esta celebración matemática, compartida entre Tarragona, Barcelona y Girona, también quiere ser un reconocimiento al trabajo realizado en las diez primeras olimpiadas, y a todos los que han contribuido a hacerlas posible, sea con su participación, con su aportación económica o como organizadores o responsables.

Objetivos

- Fomentar entre los estudiantes el gusto por las matemáticas, así como presentar una visión de las mismas complementarias a la utilizada en el aula.
- Eliminar ciertos miedos hacia la asignatura de matemáticas en la comunidad educativa, de manera que permita situarla donde le corresponde.
- Favorecer las relaciones de amistad y conocimiento entre jóvenes de diversas Comunidades Autónomas.
- Favorecer el conocimiento de la Comunidad Autónoma de Catalunya, a través de las distintas actividades tanto matemáticas como lúdicas.
- Favorecer el intercambio de experiencias, proyectos y debates, entre el profesorado asistente, para hacerlos luego extensivos al resto de compañeros de las respectivas comunidades.

En esta edición participan alumnos de segundo curso de ESO de quince comunidades autónomas: Andalucía, Andorra, Aragón, Asturias, Canarias, Cantabria, Castilla-León, Castilla-La Mancha, Catalunya, Extremadura, Galicia, Madrid, Murcia, Navarra y Valencia.

El comité Organizador está compuesto por:

- Girona: Elisabet Saguer (Coordinadora), Teresa Pagès, Pilar Xifra y Francesc Borrel.
- Barcelona: Marta Berini y Pilar Figueras;.
- Tarragona: M. Lüisa Girondo, Josep Borrut, Marià Cano y Joan M. Castells.

AVANCE DEL PROGRAMA

23 de junio

- Recepción de los participantes y acompañantes a partir de las 18 horas en el albergue «Santa María del Mar» de Comarruga.
- Verbena de San Juan.

24 de junio

- Acto inaugural de la XI Olimpiada a las 12:30 horas.
- Sesión de «Magia Matemática».
- Prueba individual de 16 a 19 horas.
- Sesión de «Geometría mojada».

25 de junio

- Visita cultural a la Tarragona Romana.
- Port Aventura.

26 de junio

- Visita turística-cultural a Barcelona.
- Aquarium, paseo en golondrina, Museo de la Ciencia.

27 de junio

- Visita a Sant Feliu de Guíxols.
- Prueba por equipos.
- Taller de astronomía.

28 de junio

- Visita lúdico-cultural a Girona.
- Paseo turístico, Museo del Cinema.
- Homenaje a las diez primeras olimpiadas. Conferencia: «Tácticas matemáticas para prácticas telepáticas».
- Exposición de fotografía matemática.
- Fiesta de despedida.

29 de junio

- Valoración de la Olimpiada.
- Despedida y entrega de premios.

X Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas

La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas convoca una de sus actividades más significativas: las JAEM. Esta nueva edición, la décima, se celebrará en Zaragoza los días 10, 11 y 12 de septiembre de 2001, organizadas conjuntamente por la Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo» y el Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Zaragoza.

Está previsto que el programa científico esté completo el próximo mes de noviembre. Este anuncio inicial está dirigido, sobre todo, a aquellos participantes que deseen presentar alguna comunicación y vayan disponiendo de alguna información que les pueda facilitar su trabajo.

Están previstos ocho núcleos temáticos cuyos títulos provisionales son:

1. La modelización como actividad matemática.
2. ¿Qué pasa con la demostración?
3. Lenguaje visual y geometría.
4. Funciones: una confluencia de lenguajes.
5. Azar: las matemáticas de lo posible.
6. Números: significado y destrezas.
7. Álgebra: ¿cuándo? ¿cómo?
8. Medida: de la regla a la Trigonometría.

JAEM

X JORNADAS PARA EL APRENDIZAJE
Y LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Dentro de cada uno de estos temas caben acercamientos desde: el tratamiento de la diversidad, coeducación, uso de recursos, aspectos históricos, investigación didáctica, experiencias, gestión del aula, resolución de problemas, etc., así como desde los diversos niveles educativos.

Comunicaciones

- Se podrán presentar comunicaciones a los distintos núcleos temáticos.
- La extensión máxima será de cuatro páginas (alrededor de 8.000 caracteres).
- El plazo de admisión de comunicaciones finalizará el 15 de abril de 2001.
- Antes del 15 de junio de 2001 se confimará a los autores si la comunicación ha sido aceptada por el Comité de Programas.
- Normas más precisas para el envío de originales se remitirán a quien desee presentar comunicaciones a partir del mes de octubre.

Inscripciones y alojamiento

El número máximo previsto de asistentes es de 800. El periodo de inscripción comenzará el 15 de noviembre de 2000 y finalizará el 30 de abril de 2001 para las cuotas reducidas, y desde esta fecha hasta el 30 de junio para las normales.

Cuotas de inscripción reducidas (hasta el 30 de abril):

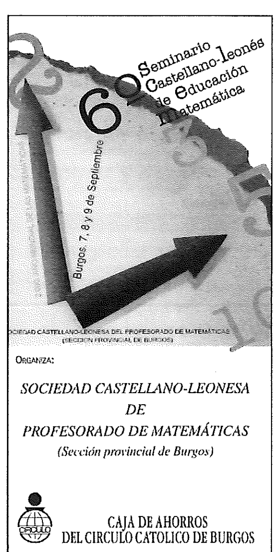
- Socios FESPM: 10.000 pts.
- No socios: 17.000 pts.

Cuotas de inscripción normales (desde el 1 de mayo hasta el 30 de junio):

- Socios FESPM: 14.000 pts.
- No socios: 22.000 pts.

La agencial oficial de las Jornadas para el alojamiento y viajes es:

Tívoli Congresos
c/ Verónica, 16. 50001 Zaragoza
Tfno.: 976 396566
Fax: 976 201404



Los boletines de inscripción, así como información sobre la oferta de alojamiento para las Jornadas se incluirá en el n.° 35 de SUMA del próximo mes de noviembre.

Para solicitar más información a partir del mes de octubre dirigirse a:

X JAEM
ICE Universidad de Zaragoza
c/ Pedro Cerbuna, 12
50009 Zaragoza
Fax: 976 76 13 45
Correo: xjaem@posta.unizar.es

6.° Seminario Castellano-Leonés de Educación Matemática

Se celebrará en Burgos los días 7, 8 y 9 de septiembre de 2000, organizado por la Sección provincial de Burgos de la Sociedad Castellano-Leonesa de Profesorado de Matemáticas.

Los objetivos que se pretenden lograr con este Seminario incluyen, entre otros, intercambiar y difundir ideas y experiencias; reflexionar sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas; profundizar en algunos temas específicos de la enseñanza de las Matemáticas; colaborar con la celebración del año 2000, Año Mundial de las Matemáticas.

Se pronunciarán las siguientes conferencias plenarias:

- Luis Balbuena: «Fundamentos de la innovación matemática».
- Mariano Domínguez: «El número de oro».
- Miguel de Guzmán: «Lecciones pitagóricas para el siglo XXI».
- Mariano Martínez: «Grandes logros de la Matemática, hasta el año 2000».

El contenido del Seminario estará centrado en los siguientes Temas de Trabajo:

1. Matemáticas y nuevas tecnologías: Informática y audiovisulaes.
2. La evaluación en Matemáticas.
3. La atención a la diversidad desde las Matemáticas.
4. Gestión eficaz de la clase y obstáculos en el aprendizjae.
5. Las Matemáticas en otras profesiones.
6. La Historia de las Matemáticas.

7. Obstáculos en el aprendizaje.
8. Las Matemáticas en el Bachillerato LOGSE.

Los temas anteriores se desarrollarán a través de conferencias, mesas redondas y comunicaciones.

Simultáneamente a la celebración del Seminario, se llevarán a cabo las siguientes actividades:

- Taller sobre «La geometría en la Catedral de Burgos».
- Exposición de Fotografía Matemática.
- Presentación de materiales y juegos matemáticos.
- Exposición de libros de texto y materiales didácticos.
- Visitas culturales por Burgos y su entorno.

Para más información:

http://www.ubu.es/cbamm2000

Pimer Congreso de Matemáticas en la Educación

SSe celebrará en Bilbao los días 14, 15 y 16 de diciembre de 2000, organizado por el Departamento de Educación, Universidades e Investigación del Gobierno Vasco.

Estructura del Congreso

Perspectiva actual de las matemáticas

Ponencias:

- «Tendencias actuales de las Matemáticas», por Miguel de Guzmán.
- «Balance del Año Mundial de las Matemáticas», por José Luis Fernández Pérez.

Debates:

- «Las Matemáticas en la Reforma de la Enseñanza en Primaria». Presenta y modera: M. Miñón. Participan: L. Pereda, C. Gallego, M. Goñi, INCE.
- «Las Matemáticas en la Reforma de la Enseñanza en Secundaria». Presenta y modera: J. Colera. Participan: M. J. Luelmo, J. Vizmanos, INCE.

Didáctica de las Matemáticas.

Ponencias:

- «Título por confirmar», por Claude Gaulin.
- «Matemáticas Cotidianas», por F. Corbalán.
- «Didáctica de las Matemáticas», por Rafael Pérez.

Debate:

- «Matemáticas y Diversidad». Presenta y modera: F. Corbalán. Participan: F. Velázquez, Ch. Nomdedeu, Marta Berini.

Matemáticas del futuro.

Ponencia:

- «Geometría para ciudadanos tridimensionales», por Claudi Alsina.

Presentaciones:

- «Página WEB PNTIC», por Agustín Quintana y Juan Madrigal.
- «Las matemáticas y la calculadora» por Floreal Gracia.
- «Página WEB de la CAV», por A. Albóniga y J. Cenigaonaindia.
- «Experiencias con ordenador«, por A. Malaina.

Exposiciones

- «Máquinas de calcular». Ángel Ramírez.
- «Materiales didácticos». varias Editoriales.
- «Exposición filatélica: sellos matemáticos». Sociedad Emma Castelnuovo.
- Casio y Texas Instruments.

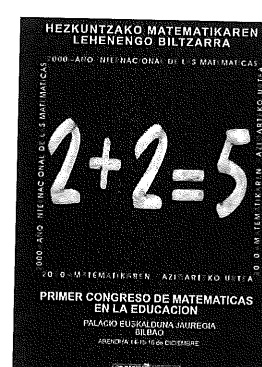
Información e inscripción

La inscripción, que es gratuita, se inicia el 18 de septiembre y finaliza el 31 de octubre. El número de participantes es limitado.

Se entregarán certificados de asistencia a la finalización del Congreso.

Más información:

COP de Deusto
Plaza Moraza 4 A Sótano 1
48007 Bilbao
Tfno: 944 132255



NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, ICE de Universidad de Zaragoza, C./ Pedro Cerbuna 12, 50009 Zaragoza), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.

2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos en ningún caso serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.

3. Los gráficos, diagramas y figuras se enviarán en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. Así mismo, podrán incluirse fotografías. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.

4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de entre cinco y diez líneas, que no necesariamente tiene que coincidir con la Introducción al artículo. Debe ir escrito en hoja aparte. En ese mismo folio aparecerán los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede).

5. Si se usa procesador de texto, agradeceremos que además se envíe un disquette con el archivo de texto que contenga el artículo, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quiera incluir. La etiqueta del disquette debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda MS-Word (hasta versión 5.0) en Macintosh, o WordPerfect (hasta versión 5.1) en PC. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF.

6. En cualquier caso, tanto un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.

7. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.

8. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo.

9. La bibliografía se dispondrá al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:

   TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma*, n.° 20, 91-98.

   En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas*, Labor, Barcelona.

   En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2,* ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

10. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ...supone un gran avance (Hernández, 1992).

    Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ...según Rico (1993).

11. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como —en caso afirmativo– la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

BOLETÍN DE SUSCRIPCIÓN

Tarifa

	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	3.500 pts.	1.700 pts.
Centros	5.000 pts.	1.700 pts.
Europa	$40 USA	$14 USA
América y resto del mundo	$50 USA	$17 USA

Fotocopiar y enviar a: Revista SUMA. ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Deseo suscribirme a la revista SUMA:
Nombre y apellidos:. . . . .
Dirección:. . . . . Tno.: . . . .
Población: . . . . CP:. . . . .
Provincia/país . . . . CIF/NIF: . . . .

Importe

☐ Suscripción a partir del n.° ______ (3 números)

☐ N.os sueltos: ________________________

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto).

☐ Transferencia bancaria (Ibercaja: 2085-0168-50-03-000415-98).

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista Suma.

Firma y fecha:

☐ Giro postal dirigido a Revista Suma.

Nombre y apellidos: . . . .
Código Cuenta Cliente
Entidad |_|_|_|_| Oficina |_|_|_|_| DC |_|_| Cuenta |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|
Banco/Caja . . . .
Agencia n.°:. . . . . Dirección: . . . .
Población: . . . . Provincia: . . . .

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que periódicamente les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (Fecha y firma):

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

FESPM