SUMA 34
junio 2000, pp. 109-112

Unos siglos que cambiaron el mundo (I)

Ángel Ramírez Martínez
Carlos Usón Villalba

DESDE LA HISTORIA

LA CRISIS DE FUNDAMENTOS de finales del siglo pasado desencadenó la obsesión de logicistas, constructivistas y formalistas por hacer de las matemáticas un sólido edificio en avance permanente y convirtió la historia de esta ciencia en su particular agencia publicitaria. Aisladas del mundo, encerradas en su torreón de marfil, las Matemáticas renunciaron incluso al valor de verdad de sus argumentos. Acosadas por su propia inseguridad, necesitaban envanecerse con sus éxitos y exhibir las cotas alcanzadas como una justificación ante el mundo y ante sí mismas.

En ese proceso dignificador, la historia se olvidó del aglutinante que dotaba de coherencia al edificio, ignoró los pasos en falso y, en general, el proceso de creación. Incluso, el efecto que su presencia causaba en la población y su influjo en la concepción del mundo. Obsesionada por el proceso acabado, concibió su desarrollo de forma lineal, como una concatenación de hitos artificialmente conectados. Una historia profundamente sectaria y pagada de sí misma que fijó, como exigía el guión, la génesis cimentadora del edificio matemático en Grecia, más concretamente en Euclides, obviando de paso las aportaciones del resto de las culturas.

La huella didáctica de aquel proceso de fundamentación que acaparó el interés del siglo ha sido profunda. Sirve con mirar casi cualquier libro de texto para cerciorarse de ello. En estos tiempos que huelen a contrarreforma sigue siendo necesario plantearse el cometido que atribuimos a esta ciencia en el desarrollo de la libertad personal. No debemos posponer por más tiempo una definición de lo que entendemos por Matemáticas, por «hacer matemáticas», asumiendo de una vez la referencia a Gödel y, con ella, el fracaso definitivo del formalismo. Es hora de asimilar de verdad a Polya, más allá de la manida referencia a *How to solve it*, aceptar la dubitabilidad de Lakatos como punto de partida y reflexionar con Feyerabend contra el método. Pero ello lleva implícito también una profunda modificación de las referencias históricas. No podemos seguir leyendo a la luz de la vela. Debemos hacer un esfuerzo por incorporar nuevas aportaciones, replantear su papel didáctico y redefinir su ámbito de actuación. Es necesario empezar a reconstruir nuestra concepción de la historia. De esa historia que negó la existencia de matemáticas en el Renacimiento español[1] y no supo trascender la aristocrática visión de los hitos. La misma que hizo desaparecer de sus páginas los siglos XI y XII en la Marca Superior y con ellos a uno de los matemáticos más importantes de lo que una Europa, empobrecida científica y culturalmente, dio en llamar Edad Media.

Nos persigue la misma convicción platónica que a Leonardo Sciaccia cuando en *El archivo de Egipto* pone en boca de uno de los personajes su valoración de la historia «...creemos que la verdad existía antes que la historia y que la historia es mentira. En cambio, la historia rescata al hombre de la mentira, lo conduce hacia la verdad». Es ella la que nos sitúa en el siglo XI en la taifa zaragozana.

La Marca Superior

La especial sensibilidad demostrada por los reinos de Taifas hacia la cultura estableció una competencia entre ellos que tuvo como base la autoafirmación y justificación política de sus reinados y como fin dotar de esplendor, pompa y boato a sus cortes respectivas. En particular, la especial afición del rey al Muqtadir[2] hacia las ciencias en general, y hacia las matemáticas en particular, hicieron recalar en Sarakusta una buena parte de la expoliada biblioteca de al-Hakam II, dotando a la taifa zaragozana de una de las colecciones de libros más actualizada del momento.

El hecho de ser la avanzadilla del Islam, pero sobre todo el clima de paz y estabilidad de esta frontera rica y poblada, atrajo hacia la Marca Superior a innumerables sabios musulmanes que huían de la *fitna* y a numerosos judíos[3] seducidos por la protección que les ofrecía la familia Banu Hud. La ausencia de una zona de exclusión sometida a continuos ataques permitió una interacción permanente entre las tres religiones y el desarrollo de un clima de docta controversia que estimuló de forma especial la filosofía y acabó convirtiendo a algunas ciudades aragonesas y del Sur de Francia como Tudela, Tarazona, Narbona, Marsella, Zaragoza o Barcelona en importantísimos centros de traducción entre los siglos XII y XIV.

Reducidos los Pirineos a una simple dificultad geográfica los contactos con el resto de «Europa» habían sido permanentes, sobre todo por parte de la comunidad hebraica. Como también lo fueron las relaciones con los principales centros culturales de Oriente por parte de los musulmanes a través de las preceptivas peregrinaciones[4]. Todo ello configuró el marco socioeconómico que acabaría por convertir la frontera noroccidental del Islam en el principal centro filosófico y científico del siglo XI en al-Andalus.

Abu ᶜAmir Yusuf Ahmad al-Mu'taman ibn Hud

Muy poco sabemos de la niñez ni de la formación del que, en opinión del biógrafo Saᶜid al-Andalusi, contemporáneo suyo, era el joven más brillante y famoso de su tiempo por sus conocimientos de Filosofía, Matemáticas y Física. Tan sólo que contó con excelentes maestros y posiblemente con la biblioteca científica más importante de al-Andalus.

Su *Kitab al-istikmal –El libro de la complección–* estaba llamado a ser el sustituto de los programas de formación (*Mutawassitat*) del centro del imperio[5]. Es, por tanto, una obra enciclopédica. Un intento de renovación y actualización de dichos programas a base de completar sus contenidos con el saber matemático del momento. Corregido y enseñado por Maimónides (1138-1204), *Kitab al-istikmal* se siguió estudiando en el Magreb, al menos, durante los siglos XIII y XIV y citándose como referencia segura en todo el mundo musulmán. La conquista de al-Andalus por almorávides y almohades marcó un momento trascendental en su difusión al quedar integrada la península en la zona de influencia del Magreb. Hacia allí viajó de la mano de científicos como Ibn al-Yasamin a finales del siglo XII, Ibn Munᶜin (¿-1228) o, quizás, al-Qurashi ya en el siglo XIII.

La primera mitad de la obra la dedica a las llamadas disciplinas teóricas. La forman cinco bloques que contienen unas 400 proposiciones rigurosamente demostradas. En ella, como no podía ser de otro modo, se recogen los grandes temas de la tradición griega: teoría de números, magnitudes inconmensurables, construcciones geométricas y cónicas, dejando constancia de un vasto conocimiento de los principales textos de la matemática griega: los *Elementos* de Euclides, las *Cónicas* de Apolonio, la *Esfera y Cilindro* de Arquímedes, las *Esféricas* de Teodosio y el *Almagesto* de Ptolomeo. También se aportan demostraciones nuevas, en ocasiones más simplificadas, de numerosas proposiciones de los *Elementos* de Euclides y una solución mejorada del problema de al-Haytham acerca de la reflexión en un espejo esférico.

Pero, más allá del hito, *El libro de la complección* resulta trascendental desde un punto de vista histórico porque destruye definitivamente la tradicional creencia de un Occidente musulmán desconectado científicamente (cuando menos matemáticamente) de Oriente. En esta obra, al-Mu'taman demuestra conocer a la perfección textos tan importantes y emblemáticos del saber oriental como: *El libro de la medida de las figuras planas y esféricas* (≈850) de los hermanos Banu Musa, *La cuadratura de la parábola* de Ibrahim ibn Sina (¿- 946) o el *Tratado de los números amigos* de Thabit Ibn Qurra (¿-901). Un hecho que evidencia un amplio conocimiento del saber de su tiempo. Lo que desde luego no constituye ninguna excepción a tenor del trabajo de algunos de sus contemporáneos como Ibn Khalaf, Ibn Jawshan, Ibn Sayyid, Ibn Muᶜadh al-Jayyani o Az-Zarqali.

En cualquier caso se trata de una obra inacabada. Y es precisamente la segunda parte, dedicada a problemas prácticos de Astronomía, Álgebra, Mecánica, Cálculo Indio y Óptica la que sufre esa incompletitud.

En ella aparece también una demostración del llamado teorema de Ceva, siete siglos antes de que naciera el conocido matemático italiano. Poco importa si la demostración fue o no la primera. Sólo una historia que no acaba de asumir sus limitaciones y no termina de aceptar la ciencia como una creación colectiva convierte en esenciales estas cosas. El hecho es que en la Frontera Superior de al-Andalus y en el s. XI el teorema era conocido, que se estaba al día[6] del saber matemático del momento y que alrededor de la corte se desarrollaba una notable actividad investigadora, con el rey a la cabeza. Condiciones favorables que vienen a sumarse a las citadas en los primeros párrafos y que permitieron una espectacular actividad cultural de la que da fe el abultado elenco de figuras de la gramática, filosofía, matemáticas, medicina, astronomía, astrología, poesía,... que jalonan este periodo, tanto entre la comunidad judía como entre la musulmana. Un verdadero siglo de Oro del saber peninsular[7] del que poco sabemos sobre su calado social o su influencia en la educación matemática posterior más allá de la pura especulación inferencial. Si bien es cierto que su fuerza acabaría por determinar y caracterizar a Europa. Pero sobre este tema hablaremos en próximos artículos.

A vueltas con la didáctica

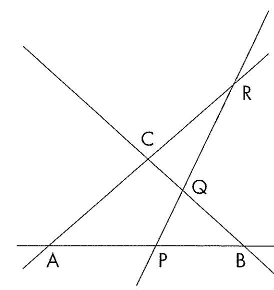
Ahondemos en esta reflexión. Seguramente, el teorema tan sólo era conocido en el siglo XI y posteriores por una minoría intelectual. La que nutre las páginas de la historia con la excusa de la disponibilidad. También hoy es un gran desconocido para el gran público. Ha desaparecido de las aulas con el resto de la geometría del triángulo. Hemos recuperado algo de geometría en los currículos, al menos en teoría, pero en la práctica sigue relegada al final de los temarios, unos días antes de que no dé tiempo a trabajar la probabilidad. Con todo, la geometría del triángulo sigue ausente[8] de ellos. Se puede pensar que afortunadamente. Quizás. También somos partidarios de romper las cadenas de Euclides[9]. Pero la forma de hacerlo no es única. Estamos convencidos incluso de que hay que comenzar por ello. De que es fundamental para nuestra formación como profesores y profesoras porque pone en entredicho esa tradición formalista. Aquella que sólo consideraba que se adquiría conocimiento tras una solemne demostración y que parece haber dejado en nosotros una marca indeleble.

Proponemos recuperar los conceptos y de paso incorporar la inducción como modelo para generar hipótesis, también como génesis del rigor. De un rigor suficiente y adecuado a cada etapa educativa. Pero, sobre todo, a cada momento del desarrollo intelectual y afectivo del ser humano que lo ambiciona. Y es que ahora tenemos herramientas informáticas que permiten una inducción que antes era tan costosa como la propia demostración euclidiana.

No podemos vivir atrincherados en el pasado. El desarrollo tecnológico tiene fuertes implicaciones sociales que determinan nuestro trabajo. También ofrece herramientas que nos ayudan pero, sobre todo, que lo transforman y nos obligan a plantear alternativas que no tienen por qué ser de adaptación.

Algunas propuestas

Y puesto que hemos tomado la figura de al-Mu'taman como excusa podemos recalar en el teorema de Menelao de Alejandría (≈100).



Si una recta corta a los lados AB, BC y CA de un triángulo (o a sus prolongaciones) en P, Q y R respectivamente, se cumple que $AP \cdot BQ \cdot CR = AR \cdot BP \cdot CQ$

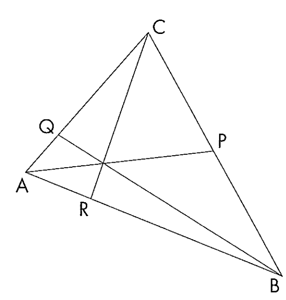
Y aceptar el reto que ofrece Carl B. Boyer en su *Historia de la matemática* y tratar de demostrarlo por «métodos de geometría elemental o aplicando relaciones trigonométricas sencillas».

El teorema en sí, aplicado a triángulos planos, era conocido por los contemporáneos de Menelao y él mismo consiguió una generalización a triángulos esféricos que en notación actual sería[10]:

$$\operatorname{sen}AP \cdot \operatorname{sen}BQ \cdot \operatorname{sen}CR = \operatorname{sen}AR \cdot \operatorname{sen}BP \cdot \operatorname{sen}CQ$$

En 1806 Carnot[11] ofreció una preciosa generalización en la que la recta que corta a los lados del triángulo es ahora sustituida por una curva cualquiera de orden n.

Una versión diferente del mismo teorema es la que lleva el nombre de Ceva (o de Ceva-Menelao) y que, si claudicamos a la dudosa costumbre de asignar paternidad a los teoremas, a partir de ahora debiera denominarse, como mínimo, de al-Mu'taman-Menelao-Ceva:



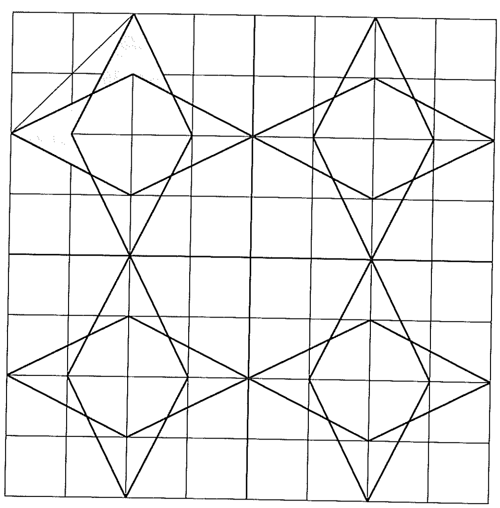
Tres rectas que pasan por los vértices de un triángulo y cortan los lados opuestos en P, Q y R respectivamente son concurrentes si y sólo si

$$AR \cdot BP \cdot CQ = RB \cdot PC \cdot QA$$

Establecer la relación entre los teoremas de Ceva y Menelao parece obligado. Mucho más interesante resulta, desde un punto de vista didáctico, hacer caso a Fielker y abrir el problema planteando preguntas como: ¿y si... las rectas no se cortan? ¿Existe alguna relación entre el área del triángulo inicial y las superficies de las diferentes regiones en que queda dividido? La propiedad es una más de esa inmensa colección de resultados que pareció quedar perdida en los textos de *Geometría Métrica* de Puig

Adam. Bonita sin duda por inesperada, pero también porque responde a ese íntimo anhelo platónico de unas matemáticas implícitas que lo expliquen todo.

Quien se conforme con las seguridades que aporta Cabri ha terminado. Para los coleccionistas de demostraciones, Steinhaus estudia un caso particular[12] sugiriendo una preciosa demostración visual a base de completar triángulos. A partir de una estética más sofisticada, intelectual y solemne Coxeter ofrece otra usando coordenadas baricéntricas[13] y aprovecha el recurso para demostrar los teoremas de Ceva y Menelao.



Esta sugerente generalización local suscita otra global tomando al cuadrado como primer protagonista. La figura origina a su vez un modelo decorativo relativamente frecuente en el mudéjar aragonés, y una infinidad de preguntas[14]. Una de ellas sobre los segmentos en que dividen a la diagonal las rectas hemipitagóricas[15] que parten de un vértice opuesto a ella[16]. La curiosidad genera interrogantes casi con la misma rapidez con que aparecen múltiples propiedades en la figura.

Apostilla final

Hemos tratado de acercar aquí un fragmento de nuestra cultura, silenciada durante siglos y después eufemísticamente recuperada. Y nos interesa más allá de las aportaciones de al-Mu'taman porque nos es propia. Su calado fue tan fuerte que determinó nuestra racionalidad. No seríamos quienes somos sin ella. Forma parte de nosotros mismos. Tratar de recuperarla nos sirve de excusa para reivindicar el mestizaje y la pluralidad. Y un concepto globalizador de la cultura y del conocimiento, ahora que la mundialización de la economía ambiciona en su provecho el minimalismo cultural.

Perseguimos con ello el respeto y la admiración hacia las contribuciones científicas, artísticas y filosóficas del mundo musulmán a través de las de nuestros antepasados, pero no sólo de ellos. Asumimos como propia una sensibilidad[17] de la que participan en este momento otros seres que nos son extraños y a los que, obviando los dictados de la racionalidad, se tiende a minusvalorar, extendiendo los límites de la pobreza más allá de los estrictos márgenes de la economía doméstica. Pretendemos, en definitiva, dotar de razones al corazón para trascender el racismo y la xenofobia, que nos eviten la infamia de experimentarlos y la obligación de tener que renegar de ellos de forma tan vehemente como reiterada. Que nos permita sentir a los moros[18] (por añadidura al resto de los inmigrantes, al resto de las etnias, al resto del mundo) como iguales.

Notas

1 Rey Pastor contribuyó a ello haciéndose eco del sentido desprecio manifestado por Echegaray hacia la producción de la época. De ellas hablaremos en próximos números. De ellas y de las implicaciones sociales de sus diferentes niveles de desarrollo.

2 Ahmad ibn Sulayman Abu Ya^{c}far al Muqtadir bi-llah ibn Hud constructor de La Aljafería y padre de al-Mu'taman.

3 Una prueba de ello lo constituye el hecho de que Yequti'el ibn Yishaq fuera visir del al-Mundir II, como Abu Fadl ibn Hasday lo fue, primero de al-Muqtadir y más tarde de su hijo al-Mu'taman.

4 Ya en el siglo X, y a modo de ejemplo, podemos citar a Abu-l Qasim Tabit b. Hanz y su hijo Abu Muhammad Qasim b. Tabit al-^{c}Awfi que viajaron a El Cairo y La Meca en 901 o a al-Kirmani (988-1066) que realizó un largo periplo por Oriente y creó después una escuela de matemáticos que se extendió por toda la península. Según opina Julio Samsó, con la llegada de los reinos de Taifas se reducirían estos contactos.

5 Según recogen Ibn^{c}Aqnin, Ibn al Akfani, Ibn Mu^{c}nim e Ibn al-Qifti. Véase Djebbar, A. (1992): *La Contribution Mathématique d'al-Mu'taman et son influence mathématique hors d'al-Andalus*, Actas del Coloquio Internacional de Toulouse.

6 Entendida la expresión con la relatividad que imponen la lenta comunicación científica de la época y la particular inclinación de al-Mu'taman hacia los problemas de la geometría griega.

7 Extendiendo así la denominación que el profesor Antonio Antelo (1991) reserva para la cultura hebraica de los siglos XI y XII.

8 A pesar de que, al parecer, continúa suscitando el interés de algunas ramas de la ingeniería.

9 En referencia al excelente libro de Fielker que bajo ese título proponía hace años la incorporación didáctica de la geometría sintética a las aulas, dotando de significado concreto aquel aserto de Freudenthal de que existe una geometría para cada edad cognitiva.

10 Boyer, Carl B. (1986): *Historia de la matemática*, A.U., Madrid.

11 *Essai sur la théorie des transversales.*

12 Steinhaus, H. (1986): *Instantáneas matemáticas*, Salvat, Estella.

13 Coxeter, H.S.M. (1988): *Fundamentos de Geometría*, Limusa, Mexico.

14 Véase: Ramírez, A. (1992): «Una figura interesante» *Revista Sigma*, n.° 11.

15 Una fructífera conexión con el arte la encontramos en la obra pictórica de Julián Gil. De allí retomamos esta denominación para los segmentos que partiendo de un vértice van a parar a los puntos medios de los lados que tienen enfrente.

16 Una buena colección de demostraciones de nuestros alumnos sobre la igualdad de estos tres segmentos puede verse en *Variaciones sobre un mismo tema*, Granada, 1998

17 Artística, filosófoca, científica,... espiritual en definitiva.

18 Remarcamos la carga peyorativa del término y con ella la vergüenza del desprecio implícito que suele acompañar su uso.