SUMA 34
junio 2000, pp. 95-98

Isoperímetros en la Grecia Antigua

Grupo Construir las Matemáticas*

TALLER DE PROBLEMAS

> Se ha demostrado, no solamente por Aristóteles, sino por Arquímedes y Zenodoro, que, entre las figuras isoperimétricas, la mayor es, entre las planas, el círculo y, entre los sólidos, la esfera (cf. Simplicius, VII, 4/2, líneas 12 a 17).

Simplicius (ca. 520) era realmente un filósofo, excelente comentarista de Aristóteles, que, entre otras cosas contribuyó a dar a conocer en sus libros resultados de otros tratados. Por ejemplo, en sus *Comentarios* incluye un fragmento sobre las cuadraturas de las lúnulas de Hipócrates, que él mismo dice haber copiado de la desaparecida *Historia de la Matemática* de Eudemo.

Investigadores de la Historia de la Ciencia, como J. Mongenet, atribuyen a Zenodoro (ca. 180 a.C.) el haber desarrollado completamente la teoría de los isoperímetros en el s. III a.C. en un tratado sobre las figuras isoperimétricas, hoy desaparecido. Posteriormente, otros pensadores de la Antigüedad se interesaron por este problema. Herón de Alejandría, Ptolomeo, Pappus, Theón de Alejandría, entre otros, dan fe de lo que decimos.

Ptolomeo, en su *Almagesto* (ca. 150), escribe: «Puesto que, entre figuras diferentes pero isoperimétricas, las que tienen más lados son más grande; entre las figuras planas, el círculo es la mayor, y de entre los sólidos, la esfera».

A Zenodoro lo situamos entre Arquímedes (m. 212 a.C.) y Pappus (ca. 320) dado que cita al primero y es citado por el segundo.

Theón de Alejandría (ca. 390) hace alusión al libro de Zenodoro en uno de sus comentarios al primer libro del *Almagesto* diciendo que «vamos a demostrarlo de modo algebraico, siguiendo la demostración que dio Zenodoro en su tratado de figuras isoperimétricas».

¿Por qué ese interés de estos griegos en la circunferencia y la esfera? Antes de que Pitágoras (ca. 580-500 a.C.) mostrara su modelo del Universo, la Tierra fue concebida como un círculo rodeado por el agua de

* Los componentes del Grupo Construir las Matemáticas son Rafael Pérez, Isabel Berenguer, Luis Berenguer, Belén Cobo, M.ª Dolores Daza, Francisco Fernández, Miguel Pasadas y Ana M.ª Payá.

los océanos que, a su vez, estaban cubiertos por una semiesfera celeste en donde se encontraban las estrellas. Las circunferencias y esferas eran figuras geométricas abstractas de aquellas Matemáticas, que reconocemos como tales por estar basadas en ideas y que nacen en la cultura griega entre los siglos VII y VI a.C. Circunferencias y esferas sirvieron para crear un modelo con el que describir el curso de astros y estrellas a través de los cielos. El primer modelo complejo se atribuye a Pitágoras que suponía que las estrellas estaban fijas sobre una esfera de cristal que daba diariamente la vuelta sobre sí misma en torno a un eje que pasaba a través de la Tierra. Así mismo, cada uno de los 7 planetas –Sol, Luna, Mercurio, Marte, Júpiter, Venus y Saturno– estaba fijado en una esfera móvil. Se llegó a creer que, además, las esferas se encontraban a unas distancias unas de otras que permitían establecer razones de longitudes de cuerdas que se correspondían con las que descubrió para explicar la armonía musical. En esta teoría, las esferas celestes producían en su rotación sonidos armoniosos que solamente quienes eran iniciados podían oír. Era *la música de las esferas*, frecuentemente utilizada en la Literatura y a la que el escultor australiano John Robinson ha dedicado recientemente una escultura basada en una superficie tórica con doble orientación y cuya sección viene dada por el conocido alicatado de la Alhambra de Granada llamado «pajarita».

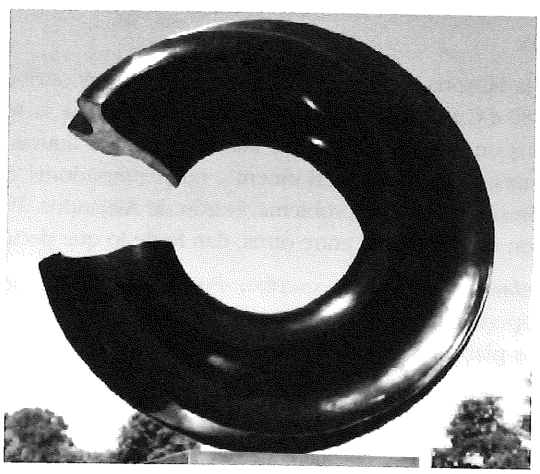


Figura 1. La música de las esferas, J. Robinson

Hagamos un alto en el camino de la Historia para observar un hecho notable: *la visión simultánea del problema de los isoperímetros en 2D y en 3D, la relevancia del círculo y de la esfera.* Hoy en día, la mayoría de quienes estudian la ESO o Bachillerato debe pensar que su profesor o profesora de Matemáticas vive en Planilandia ya que, salvo cuando se hace uso del método de las coordenadas, la geometría que se estudia es la del plano. Una vez más nos alejamos del alumnado porque su mundo es otro, no cabe en la negra pizarra de la clase y, lo que es peor, en general parece que tampoco está en la cabeza de quien ha de dirigir el acto de enseñanza-aprendizaje como fuente de recursos didácticos invalorable. Es lamentable que la enseñanza de las Matemáticas se haya apartado tanto del objetivo que les dio vida. Su propio nombre procede de la palabra griega «mathema» con la que se identificaba un tipo de conocimiento humano mediante el cual se intentaba comprender el Mundo; percepción, conocimiento, cognición o comprensión de la Naturaleza y la Sociedad deberían ser los objetivos primordiales en la educación matemática de las personas para contribuir a que puedan ejercer y gozar de su libertad. ¡Qué lejos quedan de este planteamiento las tediosas clases de Matemáticas que giran alrededor de problemas –habría que decir, ejercicios– y demostraciones maravillosamente inútiles bajo el pretexto de que lo importante es enseñar a pensar! ¿Se enseña a pensar transmitiendo una teoría totalmente acabada, sin fisuras y fría, lejana del ruido que producen los errores cometidos durante su investigación? Y lo que aún es peor, en la mayoría de los casos, el profesorado de Matemáticas no ha reconstruido el conocimiento que después intenta enseñar. Así, el aprendizaje de las Matemáticas nada tiene de aventura o reto. Se convierte en una rutinaria, pesada y torpe excursión a ninguna parte.

Llegados a este punto, creemos conveniente recordar al profesor Puig Adam en el centenario de su nacimiento porque sus ideas, estando vivas hoy, son un fiel reflejo de lo que sentían aquellos antepasados griegos. Recuerden si no aquel «Decálogo de la Didáctica Matemática Media» que publicara en *Gaceta Matemática*, 1.ª serie, Tomo VII, números 5 y 6, publicada en Madrid el año 1955, en el que escribía:

> No olvidar el origen concreto de la Matemática, ni los procesos históricos de su evolución. Presentar la Matemática como una unidad en relación con la vida natural y social.

El panal de abejas y Pappus

Pappus de Alejandría escribió un libro hacia el año 320 titulado *Synagoge* o *Colección matemática*. Inicialmente constaba de ocho libros, habiéndose perdido el primero y parte del segundo. No obstante, ha suministrado información muy valiosa sobre el estado del conocimiento matemático de su época. En el libro V aparece una nueva visión sobre el problema de los isoperímetros relacionada con la arquitectura de un panal de abejas. Después de demostrar Pappus que entre los polígonos regulares isoperimétricos es el de mayor área el de mayor número de lados, sacó la conclusión de que las abejas demostraban tener alguna forma de pensamiento matemático al construir sus celdillas de forma hexagonal y no triangular ni cuadrada. En este libro se demuestra que es el círculo quien tiene mayor área que un polígono regular de igual perímetro.

Un problema va adoptando diferentes formas a medida que van resolviéndose las situaciones que lo originaron. Así, llegamos a la extensión que Pappus hizo al considerar teselaciones:

De entre todos los polígonos que pueden recubrir el plano por yuxtaposición, es el hexágono regular el que presenta perímetro mínimo para un área dada.

Veamos la demostración precisa de un lema previo que enunciamos en la forma que dio un italiano llamado Federico Commandino (m. 1575), traductor latino de la *Colección Matemática* de Pappus que había pasado, al parecer, desapercibida hasta entonces:

Sean *OG* y *AG* dos rectas perpendiculares; *OH* y *OA* dos oblicuas. Se verifica que

$$\frac{AG}{HG} > \frac{\angle AOG}{\angle HOG}$$

En efecto, dibujemos el arco *KHJ* haciendo centro en *O* y tomando como radio a *OH* (figura 2).

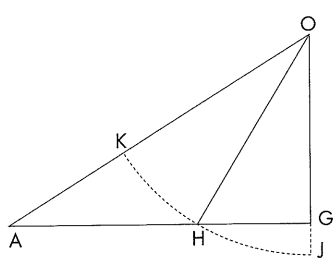


Figura 2

Se verifica que

área (triángulo *OAH*) > área (sector *OKH*)

área (triángulo *OHG*) < área (sector *OHJ*)

luego

$$\frac{\text{área (triángulo } OAH)}{\text{área (triángulo } OHG)} > \frac{\text{área (sector } OKH)}{\text{área (sector } OHJ)}$$

Sustituyendo y simplificando, queda que

$$\frac{AH}{HG} > \frac{\angle AOH}{\angle HOG}$$

Sumando 1 a ambos miembros de la desigualdad resulta

$$\frac{AH + HG}{HG} > \frac{\angle AOH + \angle HOG}{\angle HOG}$$

quedando definitivamente que

$$\frac{AG}{HG} > \frac{\angle AOG}{\angle HOG}$$

Teniendo en cuenta este lema, seguiremos casi fielmente la demostración de Pappus de su proposición. Hemos de probar que:

Dados dos polígonos regulares, *O* y *O'*, cuyo perímetro *p* es el mismo y con distinto número de lados, el polígono *O'* con mayor número de lados es el que tiene mayor área.

En efecto, sean *G* y *G'* los puntos medios de los lados *AF* y *A'F'* de los polígonos *O* y *O'*, respectivamente. Al ser *AF* > *A'F'*, se sigue que *AG* > *A'G'* y podemos tomar sobre *AG* un punto *H* tal que *GH* = *A'G'*.

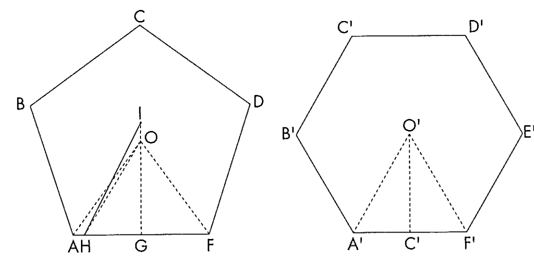


Figura 3

Uniendo *H* con *O* se tiene que

$$\frac{AF}{p} = \frac{\angle AOF}{2\pi} \quad y \quad \frac{A'F'}{p} = \frac{\angle A'O'F'}{2\pi}$$

Si dividimos, miembro a miembro, ambas expresiones resulta

$$\frac{AF}{A'F'} = \frac{\angle AOF}{\angle A'O'F}$$

luego

$$\frac{AG}{HG} = \frac{\angle AOG}{\angle A'O'G'}$$

Teniendo en cuenta el lema anterior,

$$\frac{AG}{HG} > \frac{\angle AOG}{\angle HOG}$$

de donde

$$\frac{\angle AOG}{\angle A'O'G'} > \frac{\angle AOG}{\angle HOG}$$

por tanto,

$$\angle A'O'G' < \angle HOG \text{ y } \angle G'A'O' > \angle GHO$$

Si construimos ahora un ángulo $\angle GHI = \angle G'A'O'$, el punto *I* se encuentra sobre *OG* y por encima de *O*, por lo que *IG* > *OG* o, equivalentemente, *O'G'* > *OG*. Como las áreas de los polígonos son iguales a

$$\frac{p \leftrightarrow OG}{2} \; y \; \frac{p \leftrightarrow O'G'}{2}$$

se deduce que el área de *O'* es mayor que el área de *O*.

Recíprocamente, si las áreas de O y O' son iguales, el perímetro de O' es menor que el de O.

Entonces, para un área dada, el perímetro del hexágono regular es menor que el del cuadrado o el del triángulo equilátero.

Ya tenemos justificación del porqué de la forma hexagonal de la celdilla de un panal de abejas, pero ¿cómo es el resto? Es decir, queda por ver aún la forma geométrica de un alveolo completo. Lo haremos en la sexta entrega porque, si bien Pappus enunció el problema en 3D, la solución que ofreceremos se debe a MacLaurin.

De nuevo la Naturaleza vuelve a sorprendernos y a maravillarnos. Veamos por qué. Para ello, debemos pasar del problema isoperimétrico plano, con la restricción que Pappus impone a los polígonos de que han de teselar el plano, al correspondiente del espacio:

De entre los poliedros que pueden cubrir el espacio por yuxtaposición es la celdilla de abeja la que presenta una superficie lateral mínima para un volumen dado.

En primer lugar hay que pensar acerca de los poliedros que teselan el espacio y, una vez más, el número es muy pequeño si se les pide «cierta regularidad». Es decir, utilizando copias de un solo tipo de poliedro regular, es el cubo el único que tesela el espacio; análogamente, utilizando cuantas copias sean necesarias de un mismo poliedro semirregular, sólo el de Kelvin permite teselar el espacio por yuxtaposición.

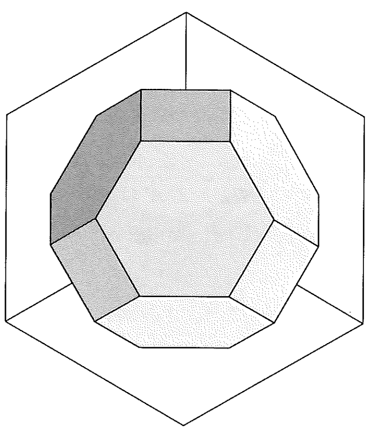
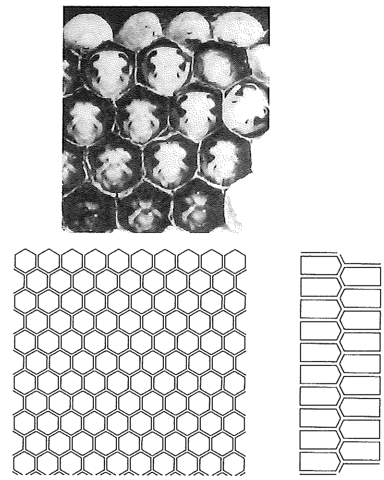


Figura 4. Sólido de Kelvin

Evidentemente, puede teselarse el espacio con copias suficientes de un prisma cuya base sea un polígono que tesele el plano; como sabemos que el hexágono cumple los requisitos de perímetro mínimo para un área dada, un prisma de base hexagonal puede ser, como después veremos, el adecuado. Pero el fondo de una celdilla de abeja no es hexagonal, sino que está formado por tres rombos yuxtapuestos dos a dos alrededor de un vértice común por el que pasa el eje de la celdilla. Como en un panal están las celdillas yuxtapuestas por sus fondos, hay que pensar en que estos rombos formen parte de algún poliedro cuyas caras sean rombos y, además, tesele el espacio con copias de sí mismo. Ese poliedro es el rombododecaedro cuya teselación tridimensional es equivalente a la de una red de cubos.



Figuras 5. Panal de abejas

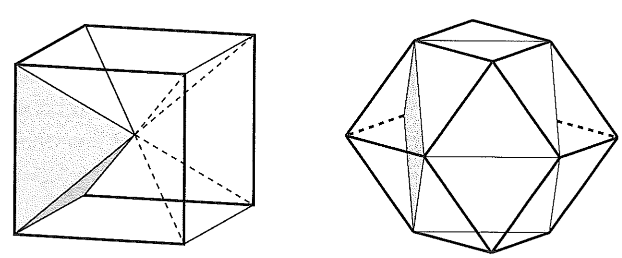


Figura 6. Rombododecaedro

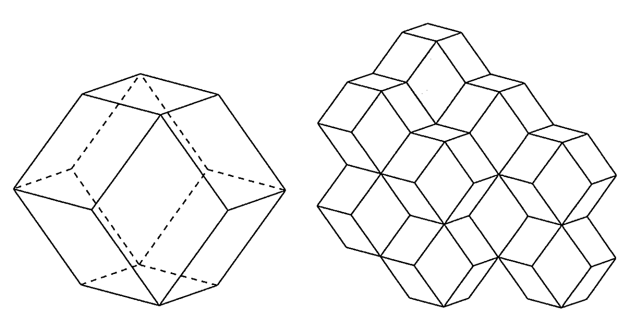


Figura 7. Teselación de rombododecaedros

Por otra parte, si hacemos las secciones hexagonales de los algunos cubos de la red, queda el panal de abejas. ¿No es fantástico el resultado?