SUMA 34
junio 2000, pp. 87-93

Miradas

Miquel Albertí Palmer

PRÓLOGO

Después de un viaje en tren me planteo:
1. Al observar desde cierta distancia el paso de un móvil, ¿cómo y a qué velocidad gira nuestra mirada?
2. En la misma situación podemos experimentar el efecto Doppler, ¿cómo se escucha y varía el sonido emitido por el móvil?

Pasado el mediodía, la locomotora rasga la llanura con soberbia y arrogancia imparables. Obedeciendo el pacto tácito escrito en mi billete soy su pasajero. Al otro lado de mi ventana el trigal se extiende hasta el horizonte. Ni un árbol, ni un arbusto, ni una loma, ni una casa, nada donde fijar la vista. Si pudiera callar el traqueteo, si pudiera no sentirlo, diría que levito sobre un inmenso plano dorado y caliente. Digo plano, pero sé que no lo es. La planicie que surca el ferrocarril es en realidad convexa, la birreta de un astro. Su corta cabellera se agita con bravura a nuestro paso.

Por fin algo interrumpe el tedio hipnótico de la monotonía. Una mancha negra, diminuta, emerge del mar luminoso junto a la arista del mundo, allí donde se besan el azul y el amarillo. Para saber qué es saco los prismáticos de mi bolsa y la enfoco. El movimiento y las lentes me la acercan, ¿o me acerco yo a ella? Primero no es más que un borrón oscuro, pero poco a poco se afirma el perfil de una persona. Desde la distancia no consigo distinguir sus rasgos. Me mira, o me parece que me mira. Quizás su mirada se dirige a todo el convoy que en aquel instante perturba la siesta del campo. Aún así, mirando al tren también me mira a mí ¿Le permitirán su vista y la distancia distinguir el puntito que soy tras la ventanilla de mi departamento? ¿Podrá ver que le miro? No lo sé. Nunca lo sabré. De nuevo está otra vez muy lejos. Se va rezagando. Consumiéndose despacio hasta desintegrarse entre las innumerables espigas. Ahogada en el mar ocre por la marcha del convoy, mi marcha. Su visión no fue nada más que un destello.

Durante la brevedad del encuentro una recta de luz unió nuestras miradas, o la mía con su cara y la suya con el

MISCELÁNEA

tren. Este segmento osciló como la aguja de un reloj gigantesco, contando en silencio el transcurrir de nuestra visión. ¿Cuál fue el eje de su giro? ¿Era ella? ¿Era yo? ¿Tal vez algún punto intermedio, imaginario e inexistente, entre ambos? Relatividad del movimiento. ¿Giramos la cabeza siguiéndonos una al otro a la misma velocidad? ¿Fue ésta uniforme o acelerada independientemente de la que llevaba la máquina? Para mí, yo inmóvil. Para ella, ella inmóvil, mientras que yo, móvil, encerrado en la oruga férrea y silbante, ante su mirada –en parte de asombro, en parte hostil–, contribuía a interrumpir algo más que su silencio.

Una vez en casa, ¿se olvidó de mí y de mi nave? Una vez en casa, yo pensé lo siguiente.

Una vez en casa, ¿se olvidó de mí y de mi nave? Una vez en casa, yo pensé lo siguiente.

I

Un móvil T se mueve con velocidad constante v siguiendo una recta r mientras es observado por alguien desde un punto P, situado a una distancia d de la recta r. La mirada del observador en P, al girar siguiendo el móvil, describe un ángulo A determinado por la distancia x a la que se halla T del punto O:

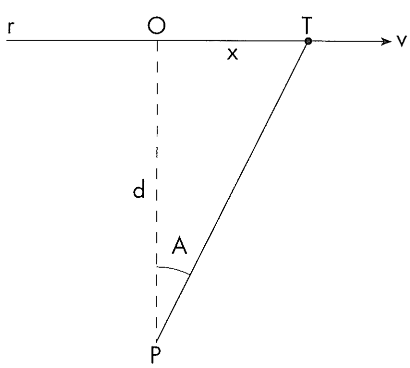

Figura 1

Puesto que el movimiento se hace con velocidad constante v, podemos escribir $x = x_0 + vt$ donde x_0 indicará la distancia a la que se halla éste del punto O (en la figura 1 estaría situado a la izquierda de O) al empezar su recorrido ($t = 0$).

Tendremos

$$A(t) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x_0 + vt}{d}\right)$$

La derivada de esta función proporciona la velocidad instantánea de giro de nuestra mirada:

$$A'(t) = \frac{vd}{d^2 + \left(x_0 + vt\right)^2}$$

Para cada valor de t, $A(t)$ nos da el ángulo con el que se ve T desde P y $A'(t)$ nos dice cuál es la velocidad instantánea de este giro, es decir, la velocidad a la que gira en cada instante la mirada del observador.

Los límites de $A(t)$ son $-\pi/2$ y $\pi/2$, ángulos con los que se vería el móvil si viniese y continuase por la misma recta desde y hasta el infinito. Para valores de t próximos a $t_0 = -x_0/v$, el instante en que el móvil pasa justo por delante de nosotros (el punto O), $A(t)$ no difiere mucho de la recta $y = x_0 + vt$. De hecho, cerca de $t = t_0$, ambas funciones son *equivalentes* y la velocidad de giro de la mirada es *casi* constante: $A'(t_0) = v$.

Siendo además $A'(t_0) = v/d$, tenemos:

$$d \to 0 \Rightarrow A'(t_0) \to \infty$$

$$d \to \infty \Rightarrow A'(t_0) \to 0$$

Esto significa que la velocidad con la que giramos la mirada es pequeña si estamos lejos de la trayectoria del móvil, pero crece hacia infinito cuando nos hallamos muy cerca:

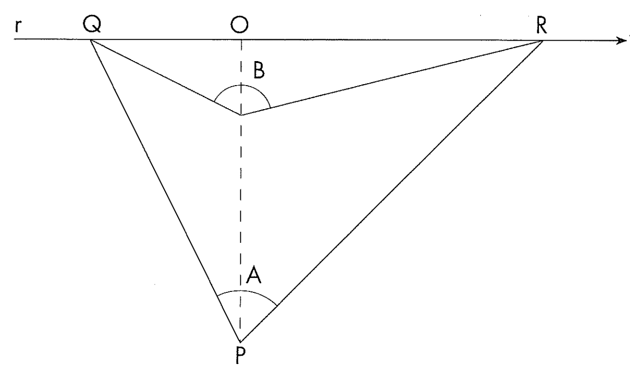

Figura 2

En esta figura puede apreciarse como al mirar el móvil cuando pasa entre dos puntos Q y R el ángulo global de giro aumenta ($A < B$) al disminuir la distancia d que nos separa de su trayectoria. Experimentamos esto cuando viajamos en el metro. El convoy no irá a más de cincuenta o sesenta kilómetros por hora, pero si uno pega las narices a los cristales de la ventanilla verá que los cables y luces que cuelgan de las paredes del túnel pasan a una velocidad vertiginosa, convertidos en luminosos latigazos. Imposible seguirlos con la mirada sin correr el riesgo de autodesnucarse. Un efecto parecido se vive al conducir: no es lo mismo ir a 80 Km/h por una autopista que por una calle estrecha. Si circulamos por una autopista a esa velocidad nos parecerá que vamos muy despacio. La gran amplitud de la calzada de una autopista nos aleja de los puntos de referencia que hay en las cunetas. En cambio, en una ciudad el paso de las fachadas de una calle estrecha, tan próximas, nos provocará la impresión de llevar una velocidad impresionante.

Si la velocidad v con la que se desplaza T no es constante, sino uniformemente acelerada, podemos suponer que

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Las nuevas expresiones $A_a(t)$ y $A_a'(t)$ serán:

$$A_a(t) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}}{d}\right)$$

$$A_a'(t) = \frac{(v_0 + at)d}{d^2 + \left(x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}\right)^2}$$

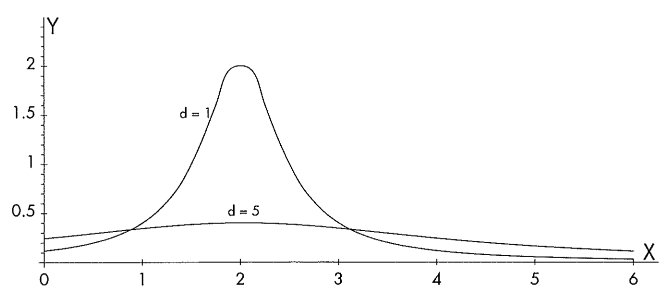

Figura 3. Gráficos de $A'(t)$ para $x(0) = -4\ m$, $v = 2\ m/s$ y dos valores de d: $d = 1\ m$ y $d = 5\ m$

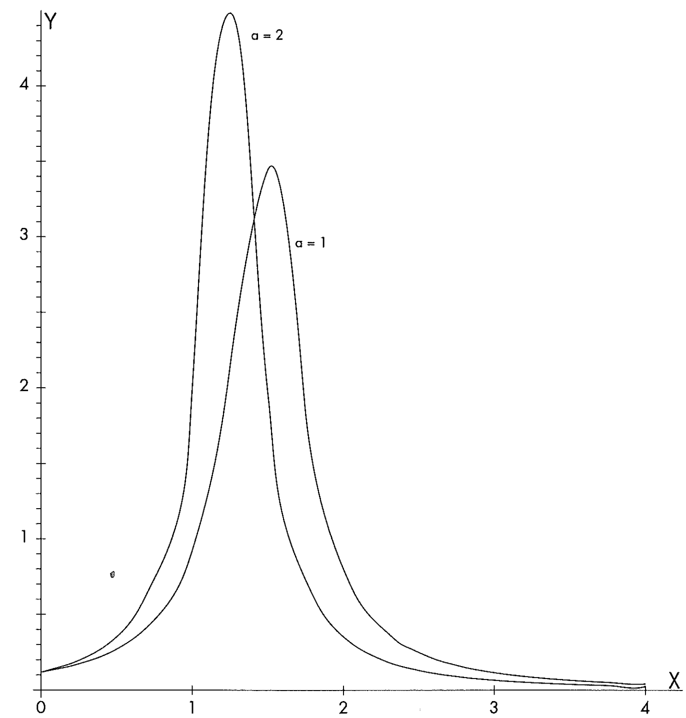

Figura 4. Gráficos de $A_a'(t)$ para $a = 1\ m/s^2$, $a = 2\ m/s^2$, $d = 1\ m$, $x(0) = -4\ m$ y velocidad inicial: $v(0) = 2\ m/s$

II

Al mismo tiempo que giramos la cabeza para seguir con la mirada el paso del tren podemos oír cómo el silbido que emite la locomotora baja súbitamente de tono al pasar junto a nuestra posición. Este efecto es aún más claro en una carrera de coches o motos donde las velocidades que alcanzan los vehículos son muy elevadas. El llamado efecto Doppler también puede *verse* en la desviación hacia el rojo o hacia el azul que experimenta el espectro de luz de una estrella o galaxia al aproximarse o alejarse de la nuestra.

Supongamos una situación como la del apartado anterior, pero en la cual estamos sobre las vías del tren, o sea que ahora $d = 0$. No pensemos de momento en lo que pueda suceder cuando el tren nos pase por encima, tan solo escuchémoslo. Como antes, el convoy se acerca con velocidad constante v y emite un sonido de características físicas: λ, la *longitud de onda*; T, el *período*; y f, la *frecuencia*. Si llamamos u a la velocidad del sonido en el medio (u será de unos 340 m/s en el aire) entonces tendremos las relaciones siguientes:

$$f = \frac{1}{T},\ \lambda = uT \quad \Rightarrow \quad f = \frac{u}{\lambda}$$

Cuando el móvil se acerca, el sonido también lo hace con velocidad $u + v$. Y cuando el móvil se aleja, el sonido también a velocidad $u - v$. por tanto, la frecuencia F del sonido percibido será:

$$F = \frac{u \pm v}{\lambda} = \frac{(u \pm v) \cdot f}{u} = f \cdot \left(1 \pm \frac{v}{u}\right)$$

Hay pues una frecuencia de aproximación (F_+) y otra de alejamiento (F_-). La diferencia entre ambas nos da el intervalo sonoro que escucharemos al pasar el tren:

$$F_+ - F_- = \frac{2vf}{u}$$

La bajada de tono tiene que ver directamente con la proporción de la velocidad v respecto de u. Como se ha dicho antes el valor de u es de unos 1224 km/h. Moverse a esta velocidad significa romper la barrera del sonido. Si $v = u$ la frecuencia de aproximación se duplica y se oye el silbido una octava más agudo de lo emitido, mientras que la frecuencia de alejamiento se anula.

Cogan y Escot (1976) comparan las frecuencias parciales correspondientes a los armónicos del Do^3 (línea *a*) con las frecuencias de las notas más próximas a estos parciales de nuestro sistema musical temperado (línea *b*). (Véase tabla de la parte inferior de la página).

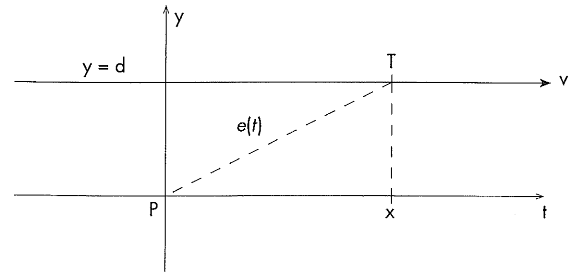

Figura 7

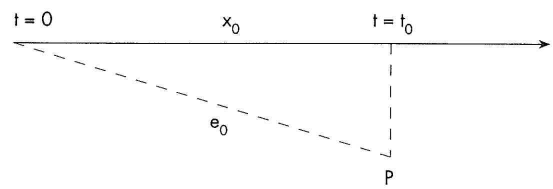

Figura 8

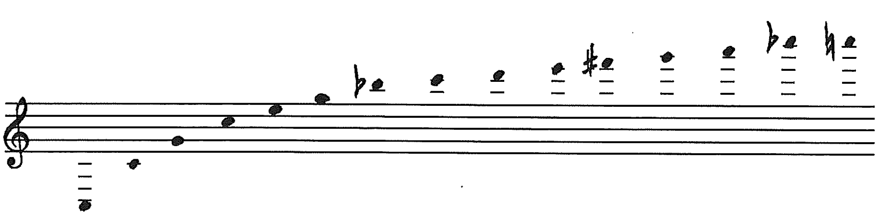

Figura 5

Tomando $v = u/4 \approx 306$ km/h (caso en el que podría entrar un tren de alta velocidad como el AVE) y f = 523 c/s (C^5), tendremos $F_+ = 653{,}75$ c/s y $F_- = 392{,}25$ c/s, frecuencias correspondientes a E^5 y G^4, aproximadamente. El efecto sonoro percibido es el de un intervalo descendente de tercera mayor:

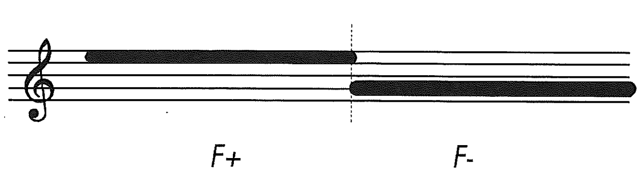

Figura 6

Pero, ¿qué sucede cuando nos hallamos algo apartados de las vías del tren, a una distancia $d > 0$ de la recta que sigue el móvil? Si lo situamos sobre la recta $y = d$ de un sistema de coordenadas con origen en el punto P se tiene la figura 7.

Sean x_0, que será negativo, y $e_0 = e(0)$ las posiciones iniciales. Para $t = 0$ la distancia que nos separa del móvil es (figura 8):

$$e_0 = \sqrt{d^2 + x_0^2}$$

Y para t > 0, tenemos:

$$e(t) = \left|\overrightarrow{OT}\right| = \sqrt{x^2 + d^2} =$$

$$= \sqrt{(x_0 + vt)^2 + d^2}$$

(a):	131	262	393	524	655	786	917	1048	1179	1310	1441	1572	1703	1834	1965
	C^3	C^4	G^4	C^5	E^5	G^5	BG^5	C^6	D^6	E^6	FK^6	G^6	A^6	BG^6	B^6
(b):	131	262	392	523	659	784	923	1046	1175	1319	1430	1568	1760	1855	1976

lo que implica que la velocidad con la que se nos acerca el móvil es:

$$e'(t) = \frac{\left(x_0 + vt\right)v}{\sqrt{\left(x_0 + vt\right)^2 + d^2}}$$

Podemos distinguir que el móvil se aproxima para $t < t_0 = -x_0/v$ y se aleja para $t > t_0$ escribiendo

$$e'(t) = \frac{-\left(x_0 + vt\right)v}{\sqrt{\left(x_0 + vt\right)^2 + d^2}}$$

La frecuencia percibida será

$$F(t) = f - \frac{f\left(x_0 + vt\right)v}{u\sqrt{\left(x_0 + vt\right)^2 + d^2}}$$

y en el gráfico de esta última fracción, a la que llamaré

$$j(t) = \frac{-f\left(x_0 + vt\right)v}{u\sqrt{\left(x_0 + vt\right)^2 + d^2}}$$

leeremos la variación sonora percibida, es decir, cómo varía la frecuencia del sonido emitido por la locomotora. Fijémonos además en que la recta $y = -fv/u$ es asíntota de $j(t)$ porque

$$\lim_{t \to +\infty} j(t) = -\frac{fv}{u}$$

Y también en que

$$j(0) = -\frac{fx_0 v}{ue_0}$$

Todo esto puede verse en la siguiente figura 9. El nivel $y = 0$ del gráfico, el eje x, representa el nivel de frecuencia $f = 523$ c/s. La variación sonora percibida es, más o menos, un descenso de sexta mayor, el intervalo determinado por $F_+ = 655{,}29$ c/s ($\approx E^5$) y por $F_- = 390{,}71$ c/s ($\approx G^4$).

Véase de otro modo en la figura 10.

Ambos sonidos no se escuchan ahora arpegiados, sino que se enlazan de forma continua en un descenso cuya brusquedad depende de f, v y d. Véase en la figura 11 como se mitiga la brusquedad del intervalo sonoro al alejarnos de la trayectoria del móvil y en la figura 12 como se amplía dicho intervalo al aumentar la velocidad.

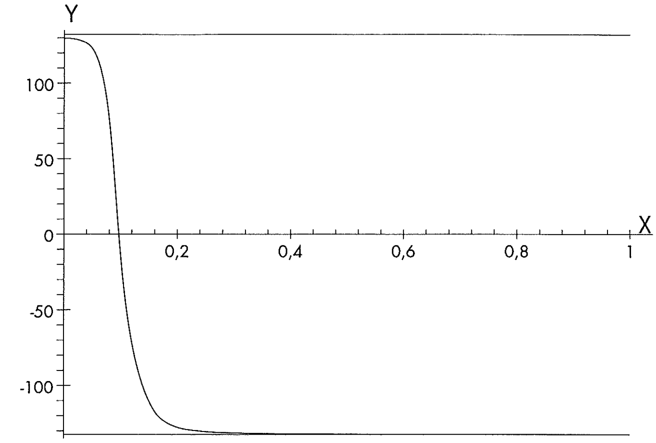

Figura 9. Gráfico de $j(t)$ y de sus asíntotas para $f = 523c/s$ (C^5), $u = 340m/s$, $d = 2m$, $v = 86m/s = 309{,}6\ Km/h$ y $x_0 = -10m$

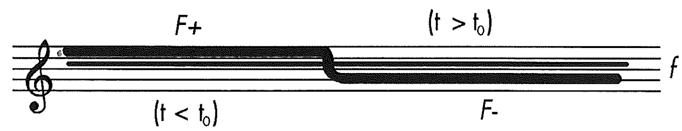

Figura 10

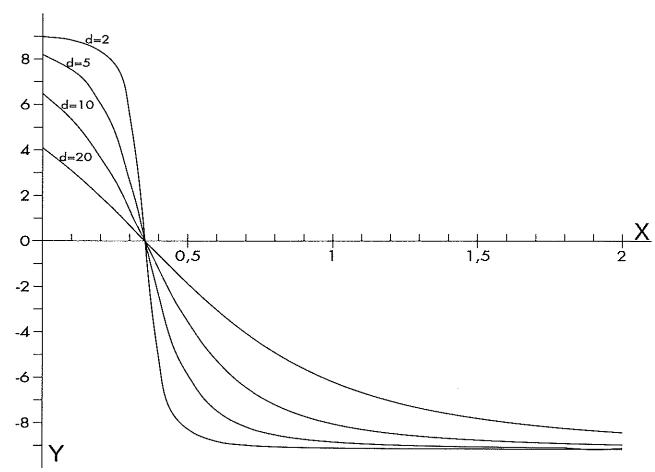

Figura 11. Gráfico de $j(t)$ para $u = 340m/s$, $f = 110c/s$, $v = 340/12 = 28{,}3333m/s$ $x_0 = -10m$ y diferentes valores de d: $d = 2m$, $d = 5m$, $d = 10m$, $d = 20m$

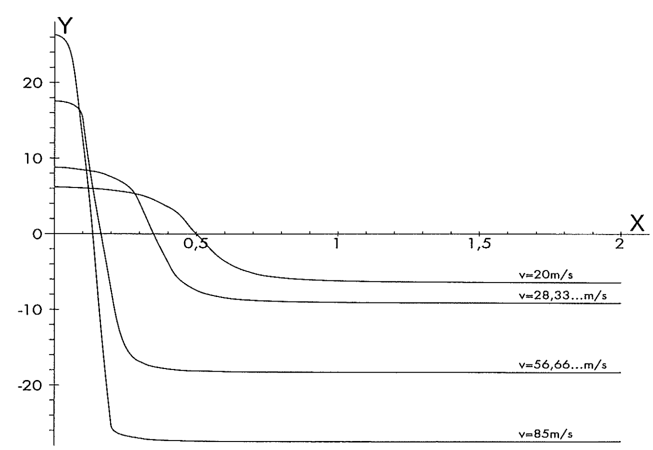

Figura 12. Como antes $u = 340m/s$, $f = 110c/s$, $d = 3m$, $x_0 = -10m$, pero ahora se introducen diferentes velocidades $v = 20m/s$, $v = 28{,}333m/s$, $v = 56{,}666m/s$, $v = 85m/s$

¿Y qué sucede cuando el móvil se desplaza con movimiento uniformemente acelerado? En tal caso no hay más que añadir aceleración en $e(t)$ para obtener la correspondiente expresión de $j(t)$.

$$j(t) = \frac{-f\left(x_0 + v_0 t + \dfrac{at^2}{2}\right)\left(v_0 + at\right)}{u\sqrt{d^2 + \left(x_0 + v_0 t + \dfrac{at^2}{2}\right)^2}}$$

En el caso particular en que $d = 0$ esta expresión se reduce a

$$j(t) = -\frac{f\left(v_0 + at\right)}{u}$$

Su gráfico viene dado en la figura 13.

Para $d > 0$ se observará que la recta y = at es tangente al gráfico de f en el origen de coordenadas, mientras que la recta $y = -at$ es asíntota suya cuando $t \to \infty$ (figura 14).

¿Dónde se alcanza el máximo de esta función? Obsérvese cómo varía para diferentes valores de d (figura 15) y de a (fig. 16):

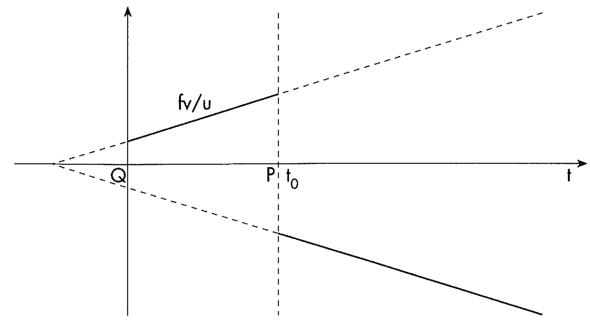

Figura 13

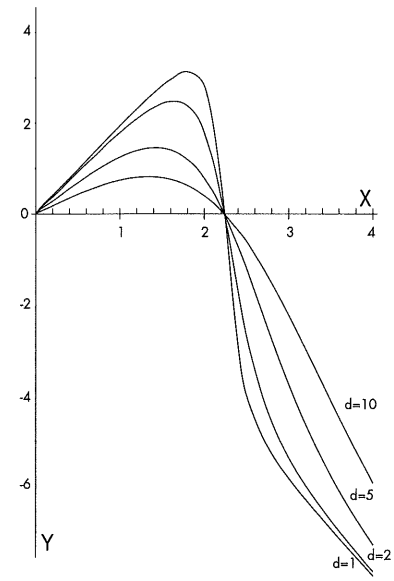

Figura 15. Como el gráfico de la figura 14 para $d = 1m$, $d = 2m$, $d = 5m$, $d = 10m$

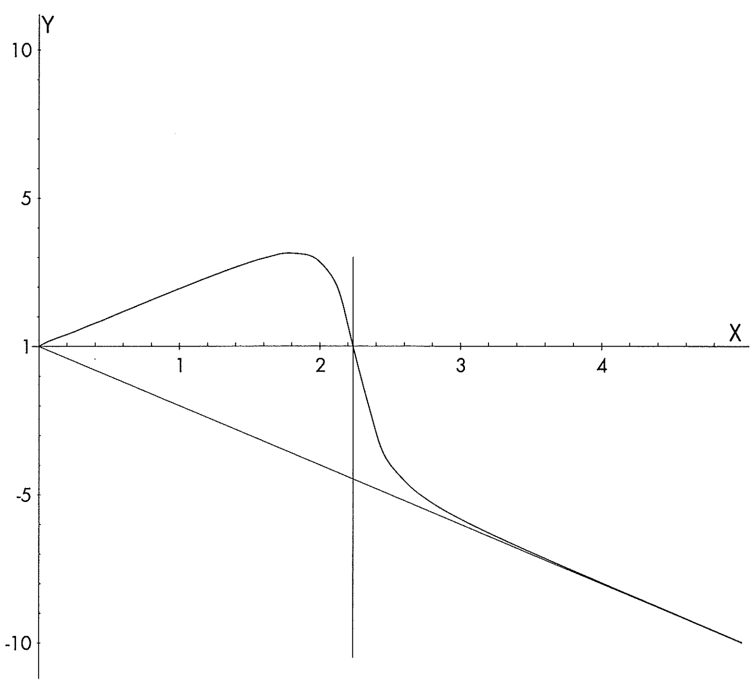

Figura 14. Para este gráfico se ha tomado $a = 2m/s^2$, $d = 1m$, $x_0 = -5m$ y $v_0 = 0$. El instante en el que el móvil pasa de aproximarse a alejarse es

$$t_0 = \sqrt{\frac{2\left(-x_0\right)}{a}} = \sqrt{5}$$

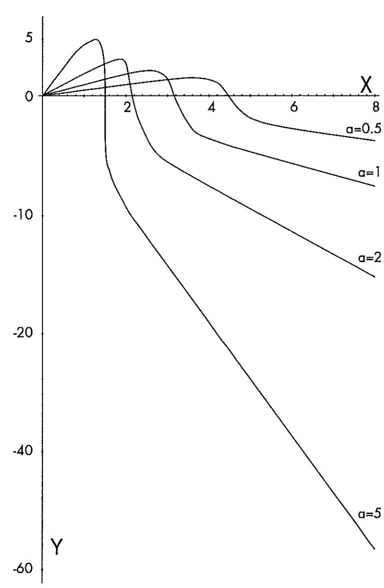

Figura 16. Ahora para $a = 0,5$, $a = 1$, $a = 2$, $a = 5$. En todos ellos, como antes, $d = 1\ m$ y $x_0 = -5m$

En resumen, para un observador situado a una distancia positiva de la trayectoria del móvil la audición consiste o bien en un descenso, brusco pero continuo, entre dos notas cuando la velocidad del móvil es constante (figuras 9, 11 y 12), o bien en una modulación variable, también continua, pero ascendente al comienzo y descendente después, en el caso de movimiento uniformemente acelerado (figuras 14, 15 y 16). Cuando el observador se halla sobre la trayectoria del móvil (d = 0), caso de un suicida, se rompe la continuidad. Naturalmente: ¡¡será atropellado y tan sólo escuchará el primero de los sonidos que forman el intervalo!! Tal situación constituye el caso límite de la anterior como puede verse en la figura 17, donde el gráfico está a punto de partirse en dos pedazos.

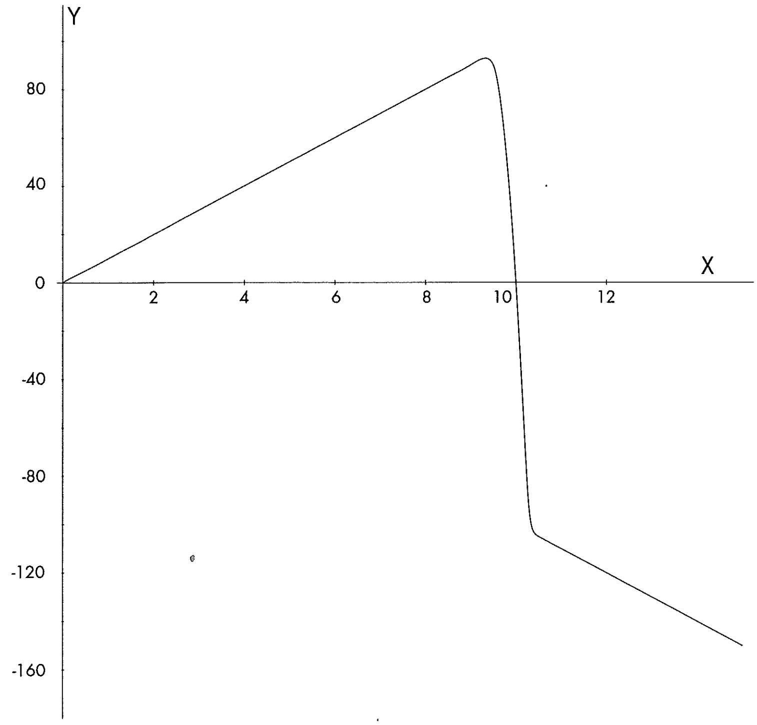

Figura 17

Epílogo

Los puntos de vista que tuvieron el pasajero y el campesino o campesina debieron ser sin duda muy diferentes. Tanto desde el enfoque literal de la expresión «punto de vista» (qué vieron), como desde el enfoque figurado (qué pensaron durante y después de la visión).

El enfoque matemático otorga a un suceso gran objetividad. Sin embargo es esta misma objetividad la que lo despoja de otras circunstancias ineludibles para su comprensión, aislándolo casi por completo de la realidad para encerrarlo en una espacie de cámara mental idónea limitada por una serie de axiomas y leyes forjadas a base de eludir el máximo número de ambig¸edades posible: el laboratorio matemático. El desarrollo técnico expuesto en este artículo sólo es posible tras reducir la escena que lo generó a un esquema que poco tiene que ver con la situación real: el tren ya no lo es, se ha transformado en un punto matemático ideal; la trayectoria que sigue es perfectamente rectilínea; su velocidad, cuando es constante, no varía un ápice en todo su recorrido, y cuando no lo es, varía de un modo absolutamente uniforme; etc.; etc.

Las Matemáticas, igual que cualquier otra materia, enfocan tan sólo a una de les innumerables facetas del problema. Nunca como hoy en día ha estado tan de moda la idea de que la ciencia constituye el paradigma de la imparcialidad y la objetividad y de que es la que más cerca está de la verdad. ¡Este es un hecho casi *científicamente probado*! Pero el científico sabe, si es que no le ha cegado su propio punto de vista, que la verdad no es única.

Me planteé las cuestiones formuladas después de vivir el acontecimiento, no antes. Quede claro pues que el presente trabajo no es fruto premeditado de mi imaginación, ni el resultado más o menos fructífero de una búsqueda sobre un determinado tipo de problema que ofrecer a mis alumnos. A pesar de la incomodidad, aversión y, por qué no decirlo, del rechazo que sin duda el desarrollo técnico precedente provocará en un lector ajeno al mundo matemático, espero que su lectura sirva al menos para mostrarle cómo pueden plantearse problemas de Matemáticas viviendo experiencias tan corrientes como la descrita.

Como yo, quien, de conocerla, seguramente me habría formulado preguntas similares a las que se formuló aquella persona, desconocida pero real, cuando una vez el tren irrumpió en su trigal.

Miquel Albertí
IES Pau Vila
Sabadell (Barcelona)

Referencia citada

COGAN, R. y P. ESCOT (1976): *Sonic design: The nature of sound and music*, Prentice-hall, INC., Englewood Cliffs, New Jersey.