SUMA 34
junio 2000, pp. 73-80

Una experiencia con Cabri: las curvas cónicas

Isabel García García
Carmen Arriero Villacorta

En este artículo se utiliza el progama interactivo de geometría, Cabri, para el estudio de las cónicas, en una experiencia enfocada a alumnado de 4.° de ESO y Bachillerato.
Con la ayuda del programa se construyen fácilmente lo que permite hacer un estudio global de estas curvas, tanto desde el punto de vista de la geometría clásica como de la geometría analítica.

IDEAS Y RECURSOS

LAS CURVAS CÓNICAS aparecen de forma tan frecuente en la Naturaleza, en la Ciencia y en la Tecnología que resulta sencillo despertar interés acerca de ellas

Con la ayuda del programa Cabri se construyen fácilmente lo que permite hacer un estudio global de estas curvas, tanto desde el punto de vista de la geometría clásica como de la geometría analítica.

En un primer acercamiento, el programa ayuda a trabajar con las cónicas sin necesidad de la geometría analítica, ofreciendo la posibilidad de tratar este contenido en niveles de Secundaria Obligatoria en los que el alumnado aún no ha adquirido gran destreza en el cálculo.

Así, a partir de la definición de cada cónica como lugar geométrico se procede a su construcción. Una vez dibujada, se estudian sus elementos característicos (focos, ejes, simetrías, excentricidad,...).

En el caso particular de la elipse se realiza una simulación del elipsógrafo, instrumento utilizado para dibujar elipses. El procedimiento empleado se aprovecha para justificar, con un razonamiento matemático sencillo, la ecuación de esta curva.

Además, aprovechando el dinamismo del programa, se pueden dibujar las curvas cónicas como envolventes de rectas. Este método de construcción resulta atractivo y novedoso por su sencillez y por la elegancia con que el programa realiza el estudio global de estas curvas.

A continuación, se muestran algunas de las actividades que hemos desarrollado para el aprendizaje de las cónicas, enfocadas a un alumnado de 4.° de la ESO o de Bachillerato.

El nivel de conocimientos del programa requerido para llevar a cabo la experiencia es medio. Por ello, la primera sesión se dedicará a presentar el *Cabri* y a manejar los comandos que se van a utilizar con más frecuencia. A partir de aquí los alumnos realizarán las actividades que se proponen.

Para llevar a cabo estas actividades se facilita a los alumnos unas hojas-guión en las que se les indican los pasos que hay que seguir para realizar las construcciones.

En primer lugar, para incidir en el concepto de lugar geométrico como conjunto de puntos del plano que cumplen una determinada propiedad, realizan el siguiente ejercicio:

La escalera

Una escalera, apoyada simultáneamente en la pared y sobre un suelo resbaladizo, se viene abajo con un cubo de agua que se encontraba sobre ella. ¿Cuál es la trayectoria seguida por el cubo en su caída?

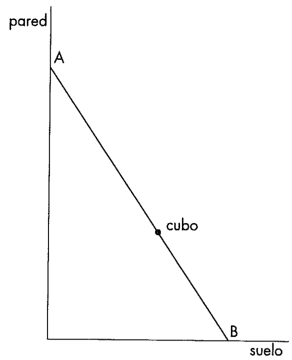

Figura 1

Para averiguar la curva que describe este movimiento, se representará con *Cabri* la situación mediante una simulación del problema.

Sigue, para ello, los siguientes pasos:

1. Dibuja un segmento y mide su longitud. Este segmento representará la escalera.
2. Transfiere la medida de la longitud de la escalera a otra semirrecta (será el suelo sobre el que se apoya). A continuación, dibuja un segmento en la semirrecta de igual longitud que la de la escalera.
3. Activa Punto sobre objeto y dibuja un punto *B* sobre este segmento. Este punto representará el pie de la escalera.
4. Para dibujar la pared, haz una recta perpendicular al segmento en uno de sus extremos.
5. Con Compás traza la circunferencia de centro *B* y radio la longitud de la escalera. El punto de corte de ésta con la pared, *A*, dará el otro extremo de la escalera.
6. Activa Segmento, une los puntos *A* y *B* para dibujar la escalera apoyada en la pared. Con Mostrar/Ocultar oculta los extremos del segmento situado sobre el suelo que limita el movimiento del punto *B*.
7. Con Puntero desplaza el punto *B* para observar el deslizamiento de la escalera.

Para llevar a cabo estas actividades se facilita a los alumnos unas hojas-guión en las que se les indican los pasos que hay que seguir para realizar las construcciones.

8. Activa Punto sobre objeto y construye un punto *C* sobre la escalera, será el cubo.

   Para visualizar el movimiento del cubo al caer de la escalera sigue los siguientes pasos:

   - Activa **traza** y selecciona el punto *C* (se habrá seleccionado cuando el punto elegido esté parpadeando).
   - Con Puntero desplaza el punto *B*. Aparecerá la traza del cubo cuando cae de la escalera.
   - CRTL + F elimina la traza de la pantalla.
   - Una vez activada la **traza**, elige **animación** y señala el punto *B* con el ratón y arrástralo hasta que aparezca un muelle, luego suéltalo. Se observará una animación, con traza, del cubo cuando se cae la escalera. Para parar la animación pulsar el ratón o barra espaciadora.
   - Quita la **traza** con CRTL + F y activa **traza activada/desactivada** para deseleccionar el punto *C*.
9. Elige lugar geométrico, señala el punto *C* y luego el *B* para dibujar la curva (elipse) que describe este fenómeno. Si el cubo lo sitúas en otras posiciones de la escalera aparecerán otras elipses. Observa qué ocurre cuando el cubo se encuentra en la mitad de la escalera.

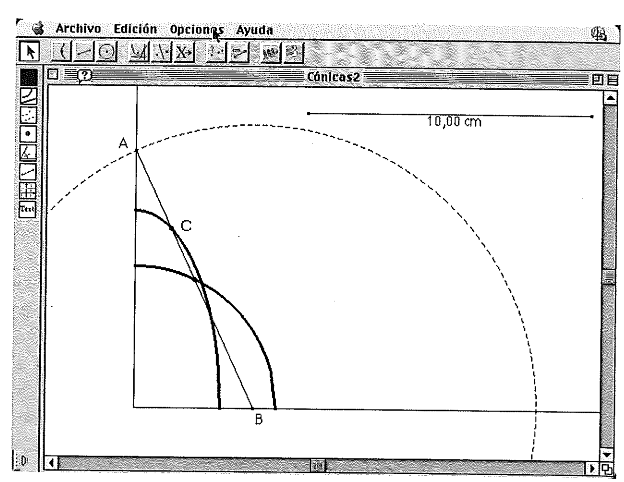

Figura 2

Elipse. Método del jardinero

Una vez que los alumnos están familiarizados en el manejo del programa, se procede al estudio de las curvas cónicas. Se comienza por la construcción de la elipse empleando el método del jardinero.

Construiremos una elipse teniendo en cuenta su definición como lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

1. Dibuja una recta definida por los focos de la elipse F y F'.
2. Construye un segmento auxiliar AB, cuya longitud será $2a$, por lo que debe ser mayor que la distancia focal $2c$.
3. Construye un punto X sobre AB y define los segmentos AX y XB.
4. Activa **Compás** y construye dos circunferencias: una centrada en F' y radio la longitud del segmento AX y otra circunferencia con centro en F y radio XB.
5. Construye los puntos de intersección P y P' de las dos circunferencias. Estos dos puntos pertenecen a la elipse ya que:

$$PF + PF' = AB = 2a, \text{ y}$$
$$P'F + P'F' = AB = 2a$$

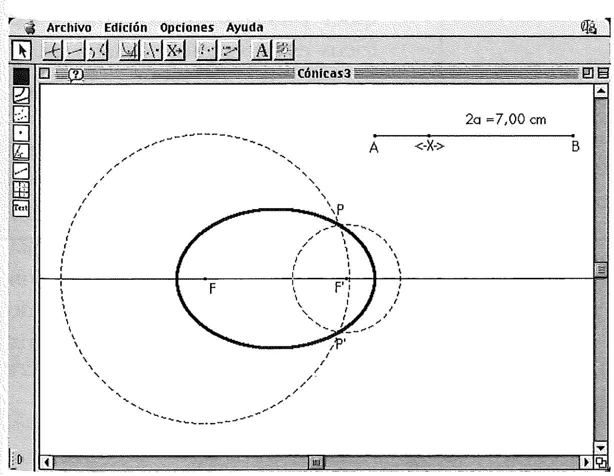

Figura 3

Se comienza por la construcción de la elipse empleando el método del jardinero.

6. Para dibujar la elipse activa **Lugar geométrico**, señala P y acto seguido el punto X. para dibujar la otra parte de la elipse, con Lugar geométrico activado, señala P' y posteriormente el punto X.
7. Activa **Cónica** y señala cinco puntos del lugar geométrico, *Cabri* dibujará una elipse.
8. Modifica los datos iniciales y observa como se transforma la elipse.
9. Une los puntos F y F', llamados focos de la elipse, con un punto arbitrario P de la elipse por medio de los segmentos FP y FP', estos segmentos llevan el nombre de radios vectores focales del punto P.

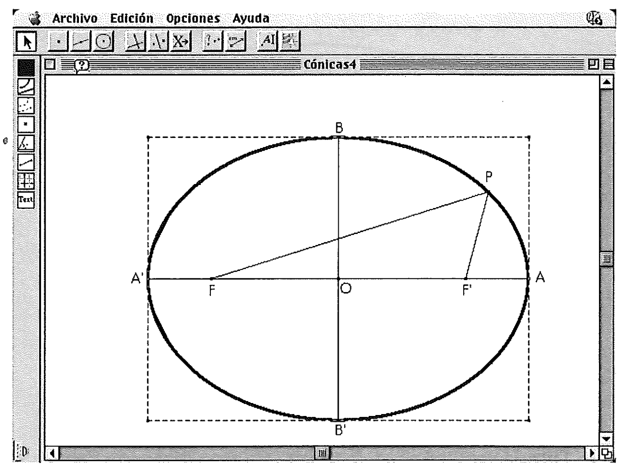

Figura 4

El punto medio O del segmento $FF' = 2c$ es el centro de simetría de la elipse. La recta que pasa por los focos es el eje de simetría y se denomina *eje focal*. La recta que pasa por el centro O y es perpendicular al eje focal también es el eje de simetría. La elipse se corta con los ejes en los puntos A, A' y B, B' llamados *vértices de la elipse*. Ellos son los puntos medios de los lados del rectángulo circunscrito. El segmento $AA' = 2a$ del eje focal se denomina *diámetro mayor de la elipse*. El segmento $BB' = 2b$ lleva el nombre de *diámetro menor de la elipse*.

10. Comprueba que en una elipse se verifica: $a^2 = b^2 + c^2$

La *excentricidad* es un número que mide el achatamiento mayor o menor de la elipse. Se define así:

$$e = c/a, \; c < a$$

11. Con la opción **Calcular**, calcula el valor de la excentricidad de la elipse que tienes dibujada. Mediante el comando **Puntero** modifica la elipse y observa la relación que hay entre el valor de la excentricidad y la forma de la curva.

¿Qué valores máximo y mínimo tiene la excentricidad de una elipse?

Elipse. Método del carpintero

A continuación se realiza con *Cabri* una simulación de un *elipsógrafo* (figura 5). Este instrumento se utiliza desde hace tiempo para dibujar elipses. Su mecanismo es muy sencillo, consta de dos ejes perpendiculares y una varilla con una punta para dibujar en uno de sus extremos. Esta varilla está fijada con dos tuercas situadas cada una de ellas en un eje. Estas tuercas se deslizan por los ejes produciendo en la varilla un movimiento cuyo trazo corresponde al de una elipse.

Construye, simulando un elipsógrafo con *Cabri*, una elipse de semiejes mayor y menor, 5 cm y 2 cm, respectivamente.

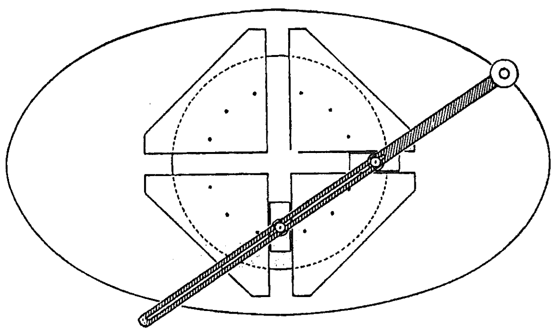

Figura 5. Elipsógrafo

1. Dibuja tres puntos A, B y C situados en una recta de forma que:

$$AC = a = 5 \text{ cm},$$
$$BC = b = 2 \text{ cm}$$

2. Muestra los ejes y sitúa un punto A sobre el eje OY.
3. Dibuja con **Compás** una circunferencia con centro A y radio $AB = a - b = 5 - 2 = 3$ cm.
4. Obtén B como punto de intersección de la circunferencia con el eje OX.
5. Construye la semirrecta de origen A que pasa por B.
6. Utilizando **Transferencia de medidas** sitúa un punto C sobre la semirrecta r tal que la longitud $AC = a = 5$.
7. Activa con **Traza** el punto C y desplaza el punto A. Observa que todos los puntos que aparecen están situados sobre la mitad de una elipse.

   Para obtener la otra mitad de la elipse construye el punto C', simétrico de C respecto del eje OY, y activa **Traza** sobre C' (figura 6).
8. Regenera el dibujo, Ctrl+F, y desactiva las trazas
9. Construye el lugar geométrico de los puntos C y C' cuando A se desplaza sobre el eje OY.
10. Señala 5 puntos del lugar geométrico y activa **Cónica** (figura 7).

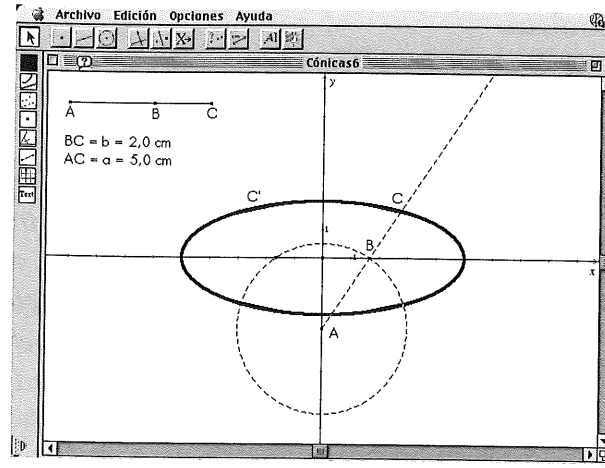

Figura 6

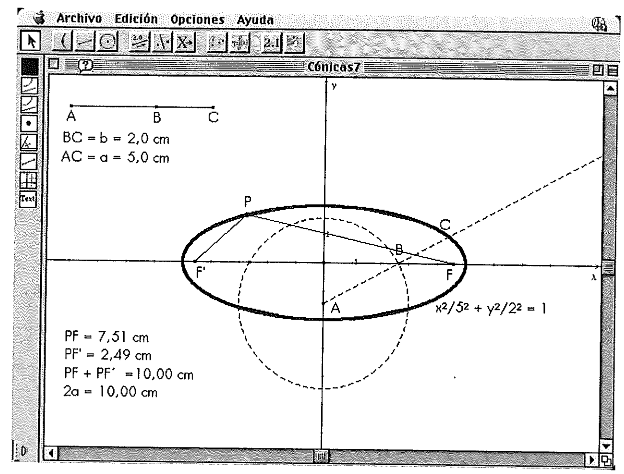

Figura 7

11. Utilizando la relación pitagórica $a^2 = b^2 + c^2$ encuentra los focos, F y F' de la elipse y comprueba que la suma de las distancias de cualquier punto P de la elipse a los focos es constante e igual a $2a$.
12. Comprueba con *Cabri* que la ecuación de esta elipse es:

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

Resulta sencillo a partir de esta construcción demostrar la ecuación de la elipse, bien por semejanza de triángulos o bien por trigonometría (figura 8).

Demostración 1

$$CD = x;\ AE = x$$
$$CE = \sqrt{5^2 - x^2}$$

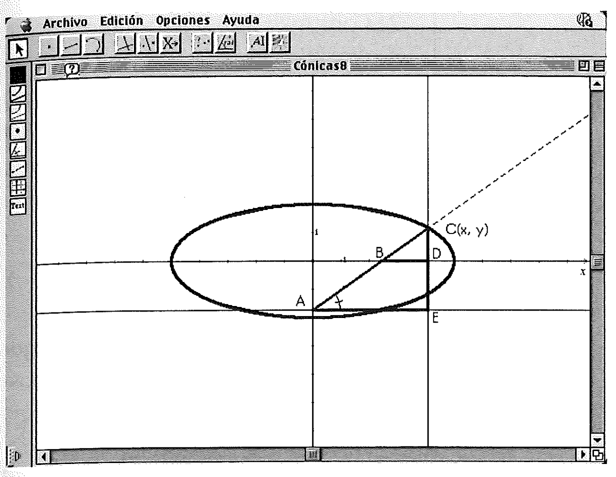

Figura 8

Por ser semejantes los triángulos *ACE* y *BCD*, se cumple:

$$\frac{CE}{AC}=\frac{CD}{BC}\Rightarrow\frac{\sqrt{5^2-x^2}}{5}=\frac{y}{2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{5^2-x^2}{5^2}=\frac{y^2}{2^2}\Leftrightarrow\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$$

Demostración 2

$$\left.\begin{array}{r}\angle CBD=\angle CAE=\theta\\ \operatorname{sen}\angle CBD=\dfrac{y}{2}\\ \cos\angle CBD=\cos\angle CAE=\dfrac{X}{5}\end{array}\right\}$$

y en consecuencia:

$$\left[\text{como } \operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1\right]\Rightarrow$$

$$\Big|\Rightarrow\frac{y^2}{2^2}+\frac{x^2}{5^2}=1$$

En general, los puntos del plano *C(x, y)* que satisfacen la ecuación:

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$$

con $a > b$ están sobre una elipse centrada en el origen de coordenadas, con el eje mayor de longitud $2a$ sobre el eje *OX* y el eje menor de longitud $2b$ sobre el eje *OY*.

Hipérbola

Siguiendo una estructura similar a la realizada con el estudio de la elipse se procede a las construcciones de la hipérbola y la parábola como lugares geométricos. Hay que señalar que, aunque los alumnos ya han adquirido una destreza suficiente en el manejo del programa, el método de construcción de la hipérbola no resulta tan intuitivo como el de la elipse, por lo que se recomienda que el profesor ayude al estudiante a justificar el porqué del procedimiento empleado.

> La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

1. Los datos iniciales son:

   Distancia focal: *FF'* = $2c$

   Constante de la hipérbola: *AB* = $2a$
2. Dibuja los dos focos de la hipérbola *F'* y *F*.
3. Construye un segmento auxiliar *F'C* de longitud mayor que la distancia focal.
4. Obtén el punto *B* del segmento *F'C*, de forma que la longitud del segmento *F'B* sea igual a la constante de la hipérbola: $2a$.
5. Considera *X* un punto cualquiera del segmento *BC*, y construye sendas circunferencias, una, de centro *F'* y radio *F'X*, y la otra con centro en el punto *F* y radio *BX*.
6. Los puntos de intersección, *P* y *P'*, de las dos circunferencias son dos puntos de la hipérbola. (Figura 9)

   Efectivamente $PF' - PF = 2a$, ya que:

$$PF'-PF=F'X-BX=(F'X+XC)-(BX+XC)=$$
$$=F'C-BC=F'B=AB=2a$$

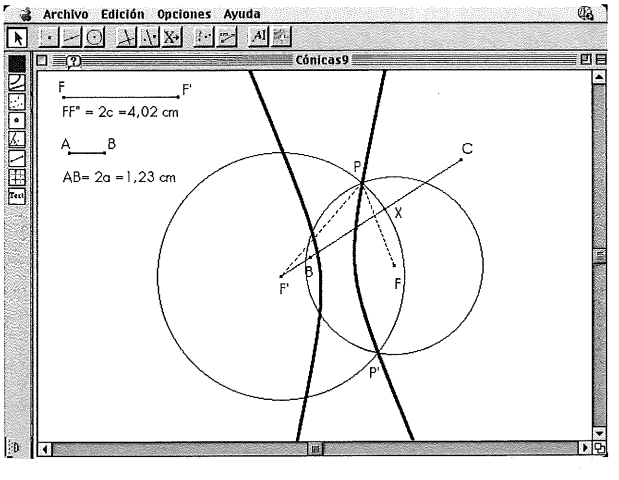

Figura 9

7. Dibuja las dos ramas de la hipérbola, utilizando el comando Lugar geométrico.
8. Activa Cónica y señala cinco puntos distintos del lugar geométrico, *Cabri* dibujará una hipérbola.

La hipérbola tiene centro de simetría *O*, que divide por la mitad al segmento $FF' = 2c$ y dos ejes de simetría, perpendiculares entre sí. Uno de ellos lleva el nombre de eje focal o real, pasa por los focos y corta a la hipérbola en dos puntos A y A' llamados vértices de la hipérbola; el otro no corta a la hipérbola y se denomina *eje imaginario.* El segmento $AA' = 2a$ recibe el nombre de *diámetro de la hipérbola.*

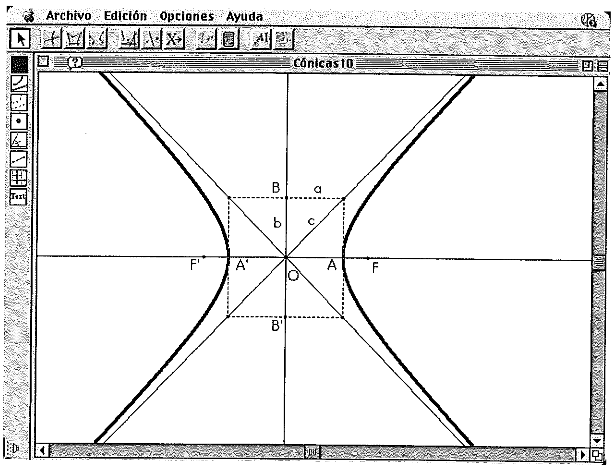

Figura 10

Lo mismo que la elipse, la hipérbola se define totalmente con un rectángulo simétrico con relación a los ejes y que los divide en los segmentos $AA' = 2a$ y $BB' = 2b$.

Comprueba que en una hipérbola se cumple:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Las rectas en las que están las diagonales del rectángulo se llaman *asíntotas* de la hipérbola.

La *excentricidad* es un número que mide la abertura mayor o menor de las ramas de la hipérbola. Se define así:

$$e = c/a, \; c > a$$

9. Con la opción **Calcular**, calcula el valor de la excentricidad de la hipérbola que tienes dibujada. Mediante el comando **Puntero** modifica la hipérbola y observa la relación que hay entre el valor de la excentricidad la forma de la curva

¿Qué valores máximo y mínimo tiene la excentricidad de una hipérbola?

Parábola

La parábola se define como lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de una recta llamada *directriz* y de un punto fijo llamado *Foco*.

1. Dibuja una recta y llámala *Directriz*, y un punto, exterior a esta recta, al que nombras *F*.
2. Construye un punto, *X*, sobre la directriz.
3. El punto, *P*, que se obtiene como la intersección entre la mediatriz del segmento *XF*, y la recta que pasa por *X* y es perpendicular a la directriz, es un punto de la parábola.
4. Arrastra con el ratón el punto *X*, y observa qué curva describe *P*.
5. Para dibujar la parábola activa **Lugar geométrico**, señala el punto *P* y posteriormente *X* .

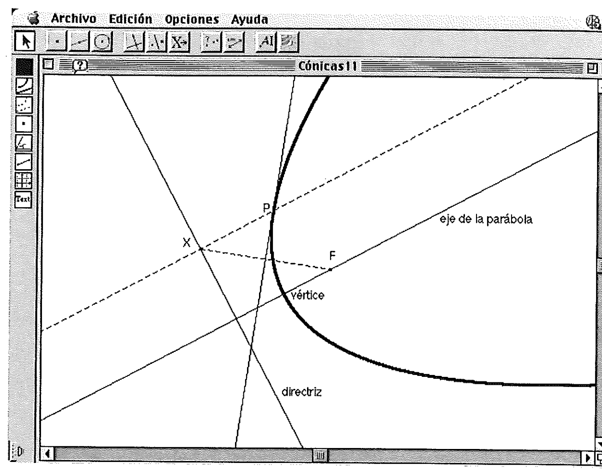

Figura 11

6. Los elementos más importantes de la parábola son:
Foco es el punto fijo *F*.
Directriz es la recta fija *d*
Parámetro es la distancia del foco a la directriz; se designa por $2p$.
Eje es la recta perpendicular a la directriz y que pasa por el foco.
Vértice es el punto de intersección de la parábola con su eje.
Radio vector es un segmento que une un punto cualquiera de la parábola con su eje.

La elipse y la hipérbola como envolvente

En esta última parte se obtendrá cada cónica como envolvente de rectas. Resulta muy interesante que después de realizar esta actividad con el ordenador se utilice el plegado de papel para obtener estas mismas construcciones.

A los alumnos se les pedirá que descubran el porqué geométrico del método empleado en el plegado y su equivalencia con el del ordenador.

1. Dibuja los focos de la elipse $d(F, F') = 2c$.
2. Dibuja un círculo de centro F' y radio $2a$, teniendo en cuenta que $c < a$.
3. Construye un punto cualquiera sobre este círculo con la orden Punto sobre objeto, y llámalo X.
4. Activa Mediatriz y dibuja la mediatriz de los puntos X y F.
5. Activa Traza sobre esta mediatriz y arrastra el punto X sobre la circunferencia. Aparecerá en pantalla la figura:

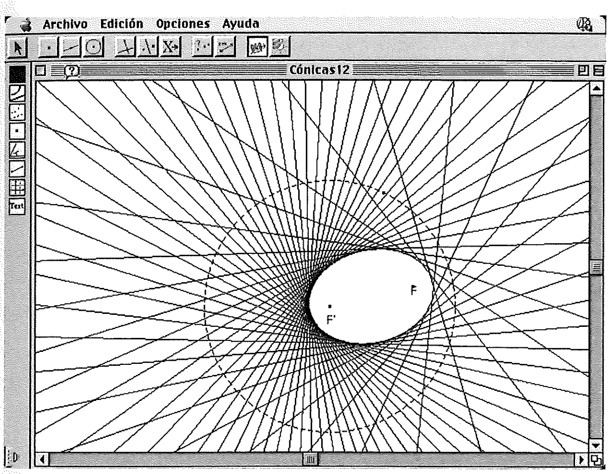

Figura 12

6. Para limpiar la pantalla utiliza la combinación de teclas Ctrl + F.
7. Desactiva Traza.
8. Considera la recta que pasa por los puntos F' y X. Llama P al punto de intersección de esta recta con la mediatriz. Activa Lugar geométrico señala P y luego X, *Cabri* dibujará una elipse (figura 13).
9. Demuestra que, efectivamente, se cumple:

$$d(F', P) + d(F, P) = 2a$$

10. Modifica los datos iniciales y comprueba que cuando $c > a$ la elipse se transforma en una hipérbola (figura 14).
11. Ahora, demuestra que en este caso (figura 15) se verifica que:

$$d(F', P) - d(F, P) = 2a$$

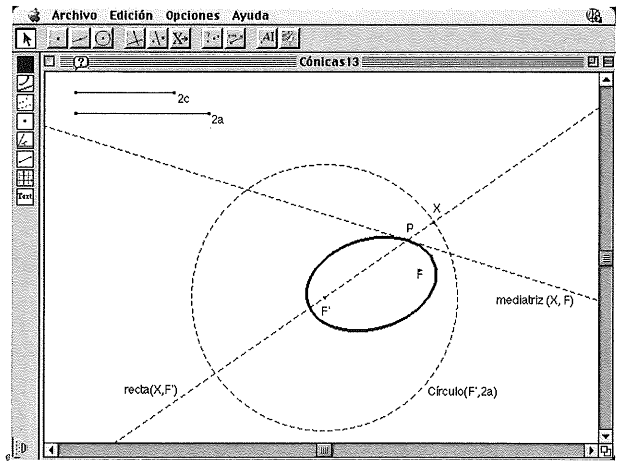

Figura 13

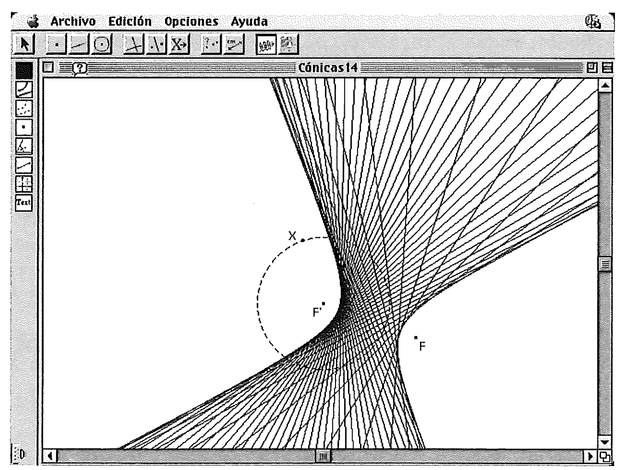

Figura 14

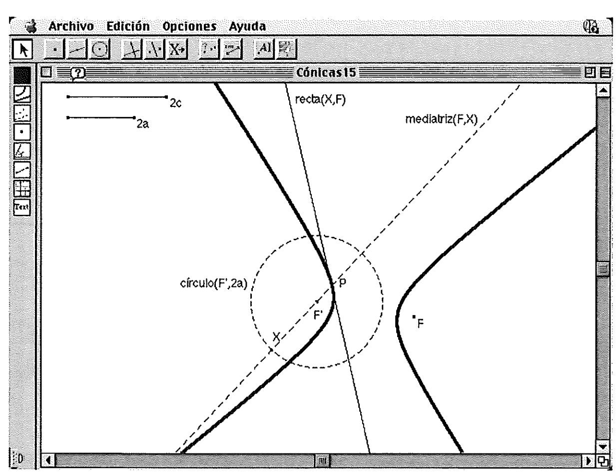

Figura 15

Asíntotas de la hipérbola

La hipérbola es la envolvente de una familia de rectas. De todas ellas, conviene destacar dos rectas que no tienen ningún punto de contacto con la hipérbola y que son aquellas mediatrices *M(X, F)* que son paralelas a las rectas *R(F', X)*. Estas rectas se denominan *asíntotas de la hipérbola.*

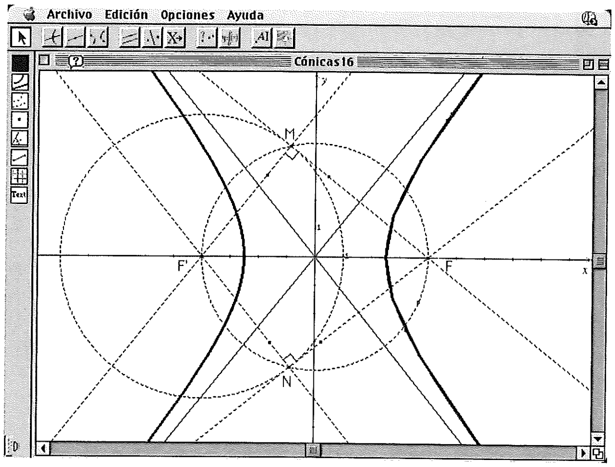

Figura 16

La parábola como envolvente

1. Dibuja una recta y llámala *Directriz*, y un punto, exterior a esta recta, al que nombras *F*, foco de la parábola.
2. Construye un punto, *X*, sobre la directriz.
3. Activa Mediatriz y señala sucesivamente los puntos *F* y *X* para dibujar la mediatriz del segmento *FX*.
4. Activa Traza sobre esta mediatriz y arrastra el punto *X* sobre la directriz. Aparecerá en pantalla la figura 17.
5. Limpia la pantalla.
6. Construye una recta perpendicular a la directriz a través del punto *X*. El punto que se intersección de esta recta con la mediatriz de *XF*, es un punto de la parábola. Activa Lugar geométrico, señala *P* y luego *X*, *Cabri* dibujará la parábola.

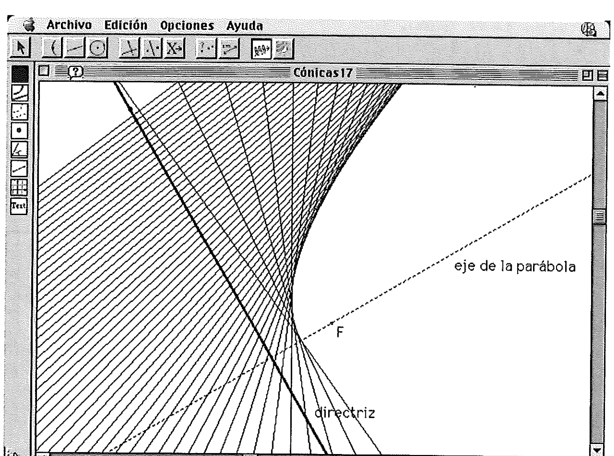

Figura 17

Conclusiones

Los conocimientos previos necesarios para llevar a cabo esta experiencia son mínimos. Esto favorece la atención de la mayoría de los alumnos, incluso de aquellos que en la actividad diaria de la clase de Matemáticas se sienten perdidos, debido en muchos casos a las dificultades que tienen al realizar cálculos algebraicos.

Para la elaboración de las curvas cónicas, que en muchos casos se pueden realizar manualmente (cuerdas, plegado de papel, regla, elipsógrafo,...) y de forma sencilla, el ordenador obliga al alumno a profundizar en el razonamiento geométrico y favorece la visualización de relaciones geométricas.

En definitiva, la forma de trabajo con el *Cabri* o programas de ordenador similares conduce a nueva manera de aprender y trabajar en geometría que hasta ahora era impensable. Si se intentara realizar sin estas herramientas el proceso sería largo y laborioso por lo que impediría llegar a las construcciones finales, objetivo de la experiencia. Además estaría destinado, únicamente, a aquellos estudiantes que muestran facilidad para el dibujo técnico.

Con programas de este tipo el aprendizaje de la geometría está al alcance de nuestro alumnado. Esta experiencia no es más que una muestra de las muchas posibilidades que tiene la informática en este área.

Isabel García
IES Arturo Soria. Madrid.
Sociedad Madrileña
de Profesores de Matemáticas
«Emma Castelnuovo»
Carmen Arriero
IES Ramón y Cajal. Madrid.
Sociedad Madrileña
de Profesores de Matemáticas
«Emma Castelnuovo»

Bibliografía

PEDOE, D. (1979): *La Geometría en el arte*, Gustavo Gili, Barcelona.

PUIG ADAM, P. (1952): *Curso de Geometría Métrica*, Tomos I y II, Madrid.

RÍO SÁNCHEZ DEL, J. (1994): *Lugares geométricos. Cónicas*, Síntesis, Madrid.

SCHER D. (1995): *Exploring Conics sections with the Geometer's Sketchpad*, Key Curriculum Press.