SUMA 34
junio 2000, pp. 69-71

La regla de los signos

Antonio José Varo Gómez de la Torre

En este trabajo presentamos una interpretación geométrica de la regla de los signos para el producto, que complementa su definición formal. Todos conocemos la necesidad de la mencionada regla para que la multiplicación de números positivos y negativos cumpla las mismas propiedades que la multiplicación de números positivos.

ARTÍCULOS

ESTE TRABAJO PRETENDE DIVULGAR que la definición formal del producto (y en consecuencia de la regla de los signos) admite una interpretación gráfica fundamentada en la semejanza de triángulos de la geometría euclídea. Para ello nos serviremos de unas construcciones inspiradas en las que Hilbert ideó para definir el producto de «puntos» sobre la recta (J. Dieudonné, 1987). El proceso algorítmico que las describe es el siguiente:

Sean a y b dos números positivos.

1. Representémoslos en la recta y llamemos U, A y B a los afijos de 1, a y b, respectivamente:

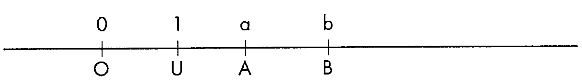

Figura 1

2. Tracemos una recta r, que pase por O y no esté incluida en la recta numérica, y marquemos sobre ella un punto cualquiera X:

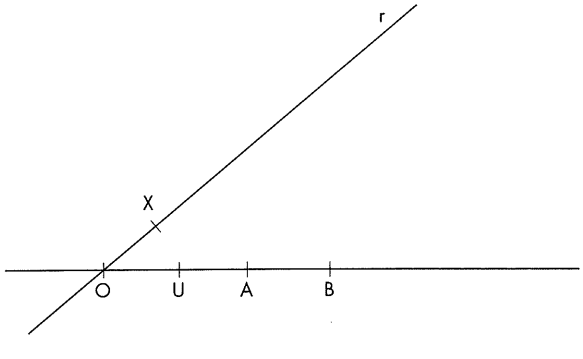

Figura 2

3. Unamos X con U y con A:

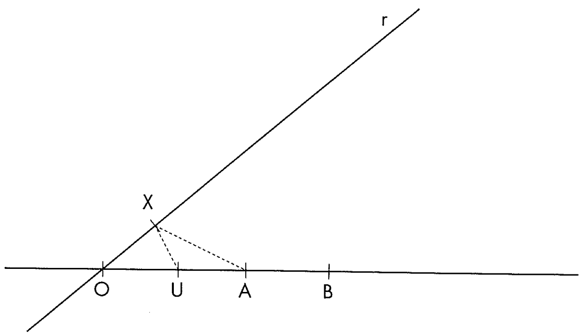

Figura 3

4. Por B tracemos una paralela a XU, y llamemos B' al punto donde corta a r:

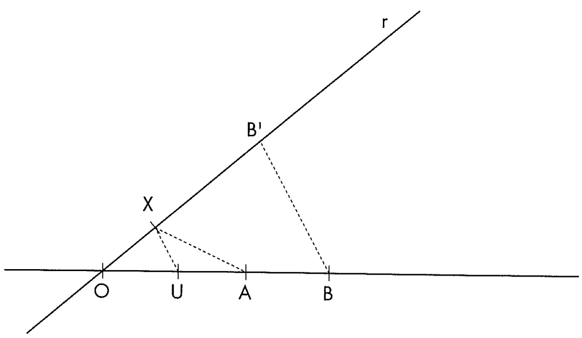

Figura 4

5. Por B' tracemos una paralela a XA, y llamemos P al punto donde corta a la recta numérica:

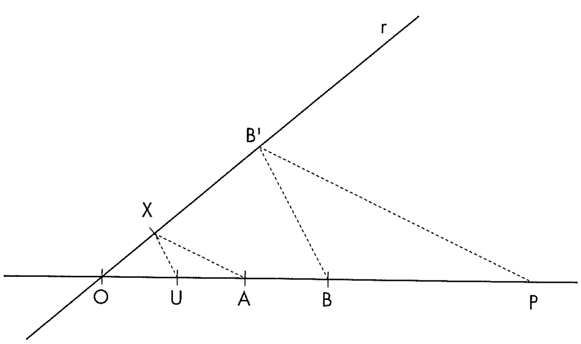

Figura 5

De las construcciones anteriores se deducen las siguientes semejanzas de triángulos:

$$\widehat{OUX} \approx \widehat{OBB'}$$

$$\widehat{OAX} \approx \widehat{OPB'}$$

De la primera relación de semejanza, deducimos:

$$\frac{OU}{OB} = \frac{OX}{OB'} \Leftrightarrow \frac{1}{b} = \frac{OX}{OB'} \quad \text{[I]}$$

De la segunda semejanza de triángulos:

$$\frac{OA}{OP} = \frac{OX}{OB'} \Leftrightarrow \frac{a}{OP} = \frac{OX}{OB'} \quad \text{[II]}$$

De [I] y [II] se deduce que:

$$\frac{1}{b} = \frac{a}{OP} \Leftrightarrow OP = a \cdot b$$

Podemos, pues, afirmar que:

el producto de a por b es la abcisa del punto P, obtenido aplicando el algoritmo descrito.

Si en lugar del producto $a{\cdot}b$ hubiésemos considerado $b{\cdot}a$, el punto P, obtenido hubiese sido el mismo (el producto es conmutativo), como se puede apreciar en la figura siguiente:

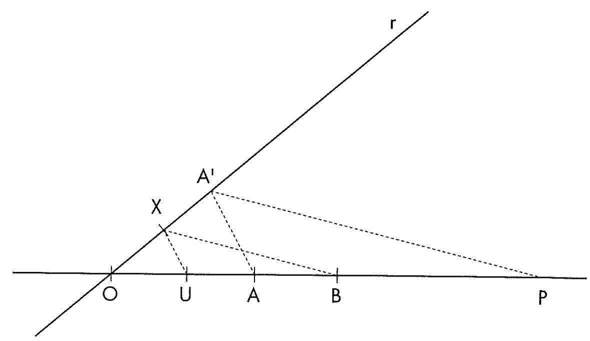

Figura 6

Todo lo anterior es cierto sean cuales sean los números positivos a y b, no necesariamente mayores que 1; así:

a) Si $0 < a < 1$ y $b > 1$, y A y B son los afijos respectivos de a y b:

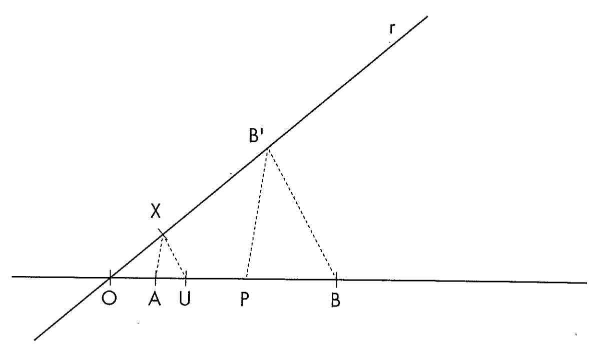

Figura 7

$$\widehat{OUX} \approx \widehat{OBB'} \quad \text{y} \quad \widehat{OAX} \approx \widehat{OPB'}$$

$$a{\cdot}b = \text{Abscisa de } P$$

(Obsérvese cómo P queda a la izquierda de B: multiplicar no siempre significa aumento).

b) Si $0 < a < 1$ y $0 < b < 1$, y A y B son los afijos respectivos de a y b:

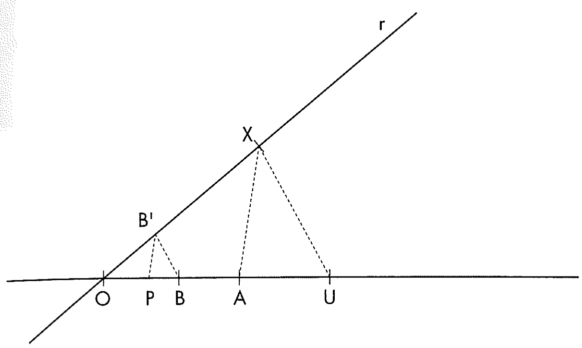

Figura 8

$$\widehat{OUX} \approx \widehat{OBB'} \quad \text{y} \quad \widehat{OAX} \approx \widehat{OPB'}$$

$$a \cdot b = \text{Abscisa de } P$$

c) Si $a = 1$ y $b > 0$, y B es el afijo de b, resulta trivial comprobar que $P \equiv B$.

Si consideramos ahora todos los números (positivos y negativos) y ampliamos a todos los puntos de la recta numérica la aplicación del algoritmo anterior, así como la conclusión final ($a \cdot b$ = Abscisa de P), se obtiene una interpretación geométrica del producto de dos números cualesquiera, que «ilustra» la regla de los signos. En efecto:

caso 1)

"+" × "–" = "–"

Sean $a > 0$ y $b < 0$, y A y B sus afijos respectivos; entonces:

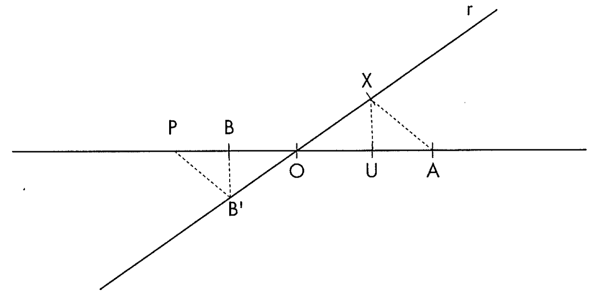

Figura 9

$a \cdot b$ = Abscisa de P (negativa)

(Téngase en cuenta, además, que, por semejanza de triángulos, se obtiene que: $|a| \cdot |b|$ = Medida del segmento OP)

Caso 2)

"–" × "–" = "+"

Sean $a < 0$ y $b < 0$, y A y B sus afijos respectivos; entonces:

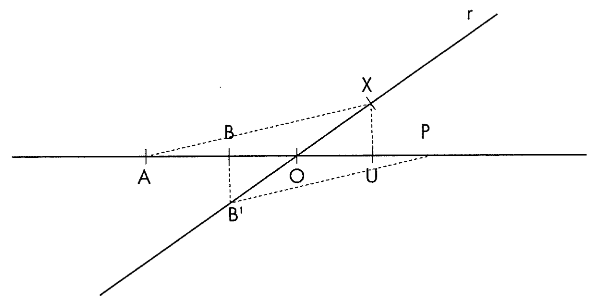

Figura 10

$a \cdot b$ = Abscisa de P (positiva)

(Al igual que antes, y por la misma razón, $|a| \cdot |b|$ = Medida del segmento OP)

Antonio José Varo
IES Vicente Aleixandre.
Sevilla

Bibliografía

BELL, E. T. (1985): *Historia de las matemáticas*, Fondo de Cultura Económica, México.

DIEUDONNÉ, Jean, (1987): *En honor del espíritu humano*, Alianza Editorial, Madrid.