SUMA 34

junio 2000, pp. 27-43

Contenidos matemáticos en la segunda enseñanza española del siglo XX

Alicia Bruno
Antonio Martinón

En este artículo ofrecemos una panorámica de los contenidos de los programas oficiales de matemáticas en la segunda enseñanza española de este siglo, así como las formas en las que un conjunto de libros de texto han presentado a los alumnos ciertos temas que hemos seleccionado: longitud de la circunferencia, área del círculo, área de la superficie esférica, volumen de la esfera, números negativos y noción de límite.

ARTÍCULOS

EN ESTE TRABAJO presentamos un bosquejo de cuáles han sido los contenidos matemáticos en la *segunda enseñanza* española, desde finales del siglo XIX hasta la paulatina implantación de la Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE) aprobada en 1990.

La próxima sección la dedicamos a los contenidos de los programas oficiales, lo cual nos permitirá una primera aproximación a nuestro objeto de estudio. En la sección siguiente sólo nos fijaremos en un grupo de temas seleccionados: longitud de la circunferencia, área del círculo, área de la superficie esférica, volumen de la esfera, números negativos y noción de límite. Veremos las formas en las que un cierto conjunto de libros de texto trata esos temas y ésta será, según se explicará más adelante, la manera que tendremos de conocer cómo esos temas fueron presentados a los alumnos.

Con el término *segunda enseñanza* nos referimos al ciclo educativo que se inicia sobre los 10 años de edad y que se extiende hasta los 16, 17 o 18 años, según los momentos. Durante la mayor parte del siglo XX, estos estudios se iniciaban con la superación de un *examen de ingreso*, se desarrollaban en *institutos*, o centros similares, y su finalización con éxito permitía la obtención del título de *bachiller* y el ingreso en la universidad.

Parece que en los contenidos matemáticos no ha tenido una gran influencia la situación política de cada momento, aunque indiscutiblemente ésta haya sido decisiva en otros aspectos del currículo escolar. Los libros de M. de Puebles (1980) y E. Díaz de Laguardia (1988) relacionan la historia de la educación en España con la de la situación política; un magnífico resumen del primero se encuentra en Puelles (1992). El libro de Lozano (1994) puede servir como referente sobre la educación en muchos países en los siglos XIX y XX

Pese a no ser las matemáticas una asignatura que haya estado, en sus contenidos, fuertemente influenciada por el régimen político, sí que hay aspectos en los que la ideología oficial se ha hecho notar en determinados momentos, especialmente en la época posterior a la Guerra Civil de 1936-1939. He aquí dos enunciados de problemas aritméticos, tomados de libros de texto de entonces (Sopeña, 1994: 49):

> Un hombre bebe cada día un aperitivo que le cuesta 3,75 pesetas. Los domingos toma dos. ¿Cuánto gastará así, inútilmente, al año? Y si economiza esta suma durante treinta años, el capital así reunido, ¿cuánto le produciría prestado al 5 por ciento?
>
> En una caja de ahorros y para su hijito, un trabajador ha resuelto depositar la mitad de las 2 pesetas que en fumar gasta semanalmente. ¿Qué cantidad habrá ahorrado al cabo de 20 años?

La idea de ahorro estaba presente en muchas ocasiones, tal como en este otro ejemplo (Otero, 1996: 85):

> Si cada día del año el niño guardara 10 céntimos, al cabo de los doce meses tendría reunidas 36,50 pesetas. Esta cantidad no es un capital, pero sí puede servir para adquirir libros, para comprar una medicina a la madre enferma, para regalar un abriguito al hermanillo que tirita de frío. Y si no tenemos necesidad de gastar esas pesetas y seguimos juntando a ellas los 10 céntimos de cada día, a los dos años tenemos ya 73 pesetas; a los tres, más de 100; a los diez tendremos ya ¡365 pesetas! Y esto sí que es ya un pequeño capital.

He aquí otra «perla» de la época (Otero, 1996: 69 y 70):

> En casa, entre tus libros, has de apelar a todas las energías de tu voluntad para salir del paso con la lección del día siguiente. Tú también quisieras aprender, quisieras saber cómo se eleva un número al cuadrado y cómo se extrae la raíz cuadrada... pero ¡he ahí!... de repente notas que a la raíz cuadrada le salen ojos, orejas, boca y ¡en un momento ves dibujada en el cuaderno de matemáticas una en cantadora cabecita de muchacha!

En la figura 1 se da una muestra de la presencia de los símbolos del régimen en los libros de texto (Otero, 1996: 153).

Los contenidos oficiales

En los primeros decenios del siglo XIX se fueron configurando sistemas educativos estatales en varios países europeos como resultado de las ideas de la Ilustración (Lozano, 1994). En España, «la difícil implantación del liberalismo político produce un sistema educativo tardío» (Puelles, 1992). Uno de los hechos más relevantes fue la aprobación, en 1857, de la Ley de Instrucción Pública, la conocida como «Ley Moyano». Esta Ley configuró un sistema educativo que producía una dualidad desde los 10 años, ya que a partir de esa edad había dos tipos de alumnos. Por un lado, la mayor parte de los alumnos escolarizados cursaba una educación primaria que no tenía continuación, que no conducía a ninguna parte. Por otro, una minoría comenzaba a los 10 años los estudios de segunda enseñanza, que le podrían conducir al nivel superior (Puelles, 1992). Esta situación se mantiene durante más de un siglo, hasta la Ley General de Educación de 1970.

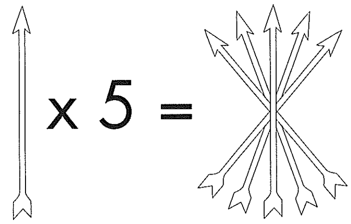


Figura 1. Símbolos del Régimen y aritmética

Uno de los hechos más relevantes fue la aprobación, en 1857, de la Ley de Instrucción Pública, la conocida como «Ley Moyano». Esta Ley configuró un sistema educativo que producía una dualidad desde los 10 años, ya que a partir de esa edad había dos tipos de alumnos.

Para la panorámica que realizamos en este trabajo, agrupamos en tres etapas los años de este siglo hasta la implantación de la LOGSE, aunque, como iremos señalando, sea necesario hacer distinciones dentro de cada una. Las etapas que consideramos son:

- Etapa 1: hasta 1953.
- Etapa 2: desde 1953 hasta 1970.
- Etapa 3: desde 1970.

La principal razón que nos ha llevado a no entrar en la situación actual (LOGSE) es que su nivel de implantación resulta aún insuficiente para hacer un estudio como el que hemos hecho para las etapas anteriores. A ello hay que añadir que la actual configuración del sistema educativo lo diferencia de los anteriores en dos aspectos cruciales:

1. la competencia educativa está transferida a las Comunidades Autónomas, o se está en vías de que así sea; y
2. el currículo es muy abierto, quedando en manos de los profesores, de los departamentos y de los centros la determinación de contenidos y secuencias.

Las disposiciones de carácter legal a las que nos referimos se han tomado, casi siempre de Utande (1964) y, cuando no es así, indicamos la fuente correspondiente.

Etapa 1: hasta 1953

A lo largo de esta etapa se produjeron muchas reformas, de modo que durante ciertos periodos hubo bachilleratos de siete cursos, mientras que en otras etapas sólo duraron seis. El ingreso en la segunda enseñanza se realizaba después de tener cumplidos los 10 años y superar pruebas acerca de la instrucción religiosa, lengua castellana y aritmética («nociones generales y prácticas de las cuatro operaciones fundamentales, con números enteros y fracciones decimales»).

En 1899 se produjo una reorganización de los estudios de segunda enseñanza, estableciéndose un bachillerato de siete años. En la tabla 1 se ofrecen los contenidos de las asignaturas de matemáticas, y se hace con cierto detalle puesto que se mantienen hasta 1934, con más o menos extensión. Se observa que la asignatura de matemáticas figuraba en todos los cursos, salvo en el último, y se puede apreciar la importancia que se le concedía a las prácticas algorítmicas (incluso a la «raíz cúbica») y a la geometría sintética.

> *El ingreso en la segunda enseñanza se realizaba después de tener cumplidos los 10 años y superar pruebas acerca de la instrucción religiosa, lengua castellana y aritmética...*

Poco después de la creación en 1900 del Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes, su titular, Antonio García Alix, planteó una reforma para reducir el periodo del Bachillerato de siete años a seis. Esta reforma afectó a los contenidos de matemáticas de dos maneras destacadas, tal como se refleja en la tabla 2:

1. antes había matemáticas durante 6 cursos, hasta los 16 años de edad, mientras que en el nuevo plan sólo había matemáticas durante los primeros 4 cursos, hasta los 14 años;
2. en el plan derogado coincidían en un mismo curso los contenidos de aritmética y álgebra con los de geometría y trigonometría, mientras que tras la reforma se presentaban las matemáticas de forma menos integrada, de manera que el último contacto de los alumnos con la aritmética y el álgebra se producía en el tercer curso, a los 13 años de edad. Evidentemente, disminuyeron los contenidos matemáticos del plan de estudios.

1.°	Nociones y ejercicios de aritmética.
2.°	Nociones y ejercicios de geometría.
3.°	Aritmética y álgebra.
4.°	Geometría y trigonometría.
5.°	Sin matemáticas.
6.°	Sin matemáticas.

Tabla 2. Reforma de 1900

1.°	*Aritmética práctica.* Las cuatro operaciones fundamentales con números enteros y decimales.
2.°	*Aritmética práctica.* Fracciones ordinarias y decimales, conversión de unas en otras. Sistema métrico. *Geometría.* Líneas rectas. Ángulos. Polígonos. Circunferencia y círculo. Triángulos. Ejercicios variados, sin demostración.
3.°	*Aritmética.* Teoremas fundamentales de las cuatro operaciones (sin demostración). Divisibilidad. Números primos. Máximo común divisor. Mínimo común múltiplo. Elevación a potencias. Cuadrado y raíz cuadrada. Cubo y raíz cúbica (la práctica, sin demostración). *Geometría.* Figuras planas en general. Rectas proporcionales. Semejanza de polígonos. Áreas.
4.°	*Aritmética.* Cantidades proporcionales y proporciones. Regla de tres simple por el método de las proporciones. Aplicaciones. *Álgebra.* Lenguaje algebraico. Las cuatro operaciones con monomios. Fracciones monomias. Ecuaciones de primer grado con una incógnita. *Geometría.* Perpendiculares y oblicuas a un plano. Paralelismo de las rectas y de los planos. Ángulos diedros y triedros.
5.°	*Aritmética.* Interés simple. Descuento. Aligación. Regla conjunta. *Álgebra.* Operaciones fundamentales con polinomios. Sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Geometría. Poliedros. Cuerpos redondos. Áreas y volúmenes.
6.°	*Álgebra.* Repaso de los cursos anteriores. Discusión de las ecuaciones de primer grado con una incógnita. Resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Progresiones, logaritmos y aplicación al interés compuesto. *Trigonometría.* Elementos de trigonometría rectilínea. *Cosmografía.* Cosmografía elemental (sin demostraciones).
7.°	Sin matemáticas.

Tabla 1. Reforma de 1899

En 1901 se realizó una nueva reforma, que a su vez se vio modificada en 1903 (Plan Bugallal), aunque esta última no afectó a las asignaturas de matemáticas. Continuó sin haber matemáticas en 5.° y 6.°, pero aparecieron en un mismo curso contenidos de aritmética y álgebra junto a los de geometría y trigonometría (tabla 3).

1.°	Nociones y ejercicios de aritmética y geometría.
2.°	Aritmética.
3.°	Geometría.
4.°	Álgebra y trigonometría.
5.°	Sin matemáticas.
6.°	Sin matemáticas .

Tabla 3. Reformas de 1901 y 1903 (Plan Bugallal)

El Plan Bugallal duró hasta 1926, cuando fue sustituido por el Bachillerato de Callejo, primero que introdujo la distinción entre Ciencias y Letras (tabla 4). Tenía dos ciclos de tres años: elemental y universitario. El ciclo universitario tenía un año común y dos de «especialidad». Las matemáticas figuraban en tres de los cuatro cursos comunes a todos los alumnos (lo que supuso una disminución en relación con los cuatro del Plan Bugallal) y en los dos de la sección de ciencias. Surgió de nuevo la separación de la aritmética y el álgebra, por un lado, y la geometría y la trigonometría, por otro, salvo en el año común del bachillerato universitario.

El Plan Bugallal duró hasta 1926, cuando fue sustituido por el Bachillerato de Callejo, primero que introdujo la distinción entre Ciencias y Letras...

Bachillerato elemental	
1.°	Elementos de aritmética.
2.°	Elementos de geometría.
3.°	Sin matemáticas.
Bachillerato universitario	
Año común	Nociones álgebra y trigonometría.
1.° sección ciencias	Aritmética y álgebra.
2.° sección ciencias	Geometría y trigonometría.

Tabla 4. Reforma de 1926 (Plan Callejo)

En 1931, con la II República, se volvió, con adaptaciones, al Plan Bugallal de 1903 y, por tanto, a que no hubiera matemáticas en los dos últimos cursos, aunque sí aparecieron en un mismo año la aritmética y el álgebra junto a la geometría y la trigonometría (véase la tabla 5; obsérvese la gran similitud con la tabla 3).

1.°	Nociones y ejercicios de aritmética y geometría.
2.°	Aritmética y nociones de geometría.
3.°	Aritmética y geometría.
4.°	Algebra y trigonometría.
5.°	Sin matemáticas.
6°	Sin matemáticas.

Tabla 5. Reforma de 1931 (Plan Bugallal adaptado)

En 1934 se implantó, de nuevo, un bachillerato de siete años, sin distinción entre ciencias y letras, siendo las matemáticas asignatura en todos ellos. Los contenidos, tomados de Rico y Sierra (1992), los sintetizamos en la tabla 6. Tras esta reforma de 1934, los cinco primeros cursos se correspondían, aproximadamente, con los cuatro del Plan Bugallal, pero puede apreciarse una importante innovación en los cursos 6.° y 7.°, apareciendo por primera vez la geometría analítica y los contenidos de análisis, así como los números complejos.

1.°-2.°	Primeras nociones de aritmética y geometría.
3°-4.°	Se inicia la presentación racional de la aritmética y la geometría, sin que se explique de modo abstracto.
5.°	Álgebra y geometría del espacio.
6.°	Número real, límite y continuidad de funciones, logaritmos, progresiones aritméticas y geométricas, matemática comercial, números complejos, trigonometría.
7.°	Continuación del análisis y la geometría analítica.

Tabla 6. Reforma de 1934

En 1938, durante la Guerra Civil, el Gobierno de Franco introdujo una nueva reforma. En el texto legal se indicaba:

> *Matemáticas.* Estudio cíclico desde las primeras nociones de Aritmética y Geometría, hasta la iniciación de la Geometría Analítica y del Álgebra Superior, procurando adiestrar a los alumnos, sobre todo en

los primeros cursos, en el cálculo mental y en los problemas prácticos de carácter métrico de la Aritmética y Geometría.

Los contenidos matemáticos de los siete años figuran en la tabla 7 y se corresponden con la reforma de 1934.

1.° Aritmética y geometría.

2.° Aritmética y geometría.

3.° Aritmética, geometría y elementos de álgebra.

4.° Ampliación de álgebra y geometría

5.° Algebra y elementos de trigonometría.

6°. Álgebra y nociones de geometría analítica.

7°. Nociones de álgebra superior.

Tabla 7. Reforma de 1938

Etapa 2: 1953-1970

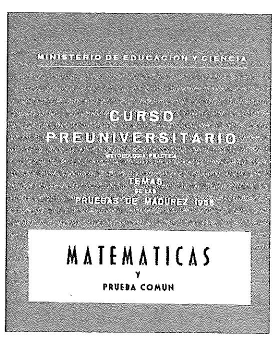
En 1953 se realizó una nueva reforma que conservaba una segunda enseñanza de siete cursos, pero agrupados en tres etapas:

- 10-14 años: Bachillerato Elemental, cuatro cursos.
- 14-16 años: Bachillerato Superior, dos cursos. Especialidades: ciencias y letras.
- 16-17 años: Curso Preuniversitario. Especialidades: ciencias y letras.

El Plan de 1953 sufrió una modificación en 1957. Ya que los contenidos matemáticos de ambos planes eran muy similares, en la tabla 8 sólo indicamos los correspondientes al Plan de 1957.

Llama la atención lo abierto del programa de 5.° curso («desarrollo racional de algún capítulo de aritmética y otro de geometría»), lo que fue aprovechado por algunos profesores y ciertos libros de texto para iniciar la enseñanza de las «matemáticas modernas», con una introducción a la teoría de conjuntos y a las estructuras algebraicas. Por otro lado, figuran por primera vez la combinatoria y la estadística.

El curso preuniversitario (Preu) recibió en los primeros años una programación novedosa. Durante el año escolar se estudiaba con intensidad un solo tema.



1.° Números naturales, decimales, fracciones. Sistema métrico decimal. Areas. Longitud de la circunferencia y área del círculo.

2.° Divisibilidad. Proporciones. Raíz cuadrada. Teorema de Pitágoras. Semejanza.

3.° Números negativos. Ecuaciones de primer grado. Sistemas de ecuaciones. Triángulos. Iniciación a la trigonometría.

4.° Polinomios. Ecuación de segundo grado. Geometría del espacio. Poliedros, cilindros, conos, esferas, áreas, volúmenes.

5.°C Iniciación al método racional. Desarrollo racional de algún capítulo de aritmética y otro de geometría. Exponenciales y logaritmos. Progresiones. Vectores. Números complejos. Resolución de triángulos. Estadística. Combinatoria.

6.°C Número real. Límite de sucesiones. Geometría analítica. Derivadas e integrales.

Preu C Programa especiales.

Tabla 8. Reformas de 1953 y 1957

El curso preuniversitario (Preu) recibió en los primeros años una programación novedosa. Durante el año escolar se estudiaba con intensidad un solo tema. En los cursos 1957-58 y 1958-59 se trató «Introducción a los métodos estadísticos». En las normas se precisaba que «la Dirección General de Enseñanza Media publicará, además, colecciones de enunciados de problemas, con el fin de orientar la conveniente recapitulación de las distintas partes de las Matemáticas, y para que sirvan de materia del examen oral previsto». A partir del curso 1959-60 las Matemáticas de Preu se convirtieron en asignatura permanente, con un programa que no cambiaba todos los años. Se publicó un cuestionario, cuyo contenido puede resumirse así:

Aritmética y álgebra. Sistemas de numeración. Combinatoria. Divisibilidad. Número racional. Determinantes. Regla de Cramer. Polinomios.

Geometría y trigonometría. Movimientos en el plano. Homotecia y semejanza. Sistemas de circunferencias. Inversión en el plano. Movimientos en el espacio. Áreas y volúmenes. Geometría sobre la esfera. Trigonometría esférica. Introducción a la astronomía.

A este contenido se le debe añadir una parte práctica de la asignatura que incluía un repaso de los cursos anteriores.

En 1963 se produjo una nueva modificación de los contenidos del Curso Preuniversitario, quedando, sintéticamente, de la siguiente manera:

Temario de las clases teóricas. (I) Número natural. Semianillo. Sistemas de numeración. Número entero. Grupo y anillo. Divisibilidad. Número racional. Cuerpo. Sistemas de ecuaciones. Determinantes. Polinomios. Estadística: distribuciones bidimensionales, regresión lineal y correlación. (II) En el plano: movimientos, homotecia, semejanza e inversión. En el espacio: traslaciones, giros y simetrías respecto de rectas, y simetrías respecto de planos. Geometría sobre la superficie esférica. Trigonometría esférica. Introducción a la astronomía.

Temario de clases prácticas (además de los contenidos de las clases teóricas). Función, límite, derivadas, diferenciales, máximos y mínimos. Integración, aplicaciones al cálculo de áreas, longitudes y volúmenes. Trigonometría y números complejos.

Si comparamos los planes de 1953 y 1957 con los anteriores podemos concluir que se consolidan las matemáticas para todos los alumnos hasta los 14 años y que su contenido aumenta de forma significativaen los cursos superiores de la especialidad de ciencias.

Etapa 3: desde 1970

En 1970 se aprobó la Ley General de Educación, que supuso un profundo cambio en la organización de los ciclos educativos, quedando de la siguiente forma (sin Formación Profesional):

- 2-6 años: Preescolar. No obligatoria.
- 6-14 años: Enseñanza General Básica (EGB), 8 cursos. Obligatoria y gratuita.
  - — 6-10 años: Primera etapa, 4 cursos.
  - — 10-14 años: Segunda etapa, 4 cursos.
- 14-17 años: Bachillerato Unificado y Polivalente (BUP), 3 cursos.
- 17-18 años: Curso de Orientación Universitaria (COU).

Debe observarse que se amplió la duración de la segunda enseñanza en un curso más, retrasando así el ingreso en la universidad, por primera vez, hasta los 18 años de edad.

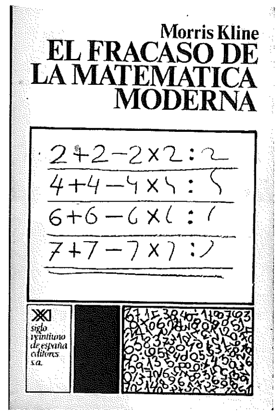
Sobre la importante transformación que supuso la Ley General de Educación, parece oportuno resaltar ahora tres aspectos.

1. Se acabó con la dualidad de estudios a partir de los 10 años, ya que la Enseñanza General Básica (EGB) era común a todos los alumnos hasta los 14 años, retrasando hasta esa edad la bifurcación del camino educativo.
2. La etapa correspondiente a los 10-14 años constituía antes el bachillerato elemental y se impartía por profesores licenciados, mientras que ahora es la segunda etapa de la EGB.
3. La Formación Profesional se integra plenamente en el sistema educativo.

Las matemáticas estaban presentes en todos los cursos de la EGB y en los dos primeros del BUP. Era asignatura optativa en 3.° de BUP y en COU. Además, en COU había unas matemáticas comunes para todos los alumnos, cuyo contenido consistía en lógica, teoría de conjuntos y estadística En 1987 desapareció esta asignatura común en COU y se introdujeron dos opciones: Matemáticas I, para futuros estudiantes de ciencias, y Matemáticas II, para los que iban a estudiar ciencias sociales.

Los programas sufrieron una altísima influencia de las «matemáticas modernas»: teoría de conjuntos y estructuras algebraicas. En la primera etapa de la EGB los contenidos se referían a lo siguiente: teoría intuitiva de conjuntos; relaciones y aplicaciones; operaciones con números naturales; decimales; fracciones, magnitudes y su medida; geometría elemental del plano con elementos de topología. En la tabla 9 damos un resumen de los contenidos relativos a la segunda enseñanza (Rico y Sierra, 1992).

Al poco tiempo de ponerse en marcha los estudios propios de la Ley General de Educación se extendió la idea de que los contenidos de «matemáticas modernas» en la EGB conducían a un estrepitoso fracaso, motivado, entre otras razones, por la falta de una adecuada preparación científica del profesorado y por los altísimos niveles de abstracción que se alcanzaban. Como consecuencia de ello, en 1977 se inició, con carácter experimental, la implantación de «pro-



5.°-8.° EGB 2.ª etapa (10-14)	Construcción del conjunto de los enteros, operaciones. Construcción del conjunto de los racionales, operaciones. Introducción a las estructuras algebraicas. Estudio de las magnitudes longitud, amplitud, superficie y volumen. Funciones y ecuaciones. Proporcionalidad de magnitudes. Introducción a la estadística.
1.° BUP (14-15)	Combinatoria. Números reales. Polinomios. Funciones polinómicas y su gráfica. Ecuaciones, inecuaciones y sistemas. Progresiones. Estadística. Números complejos.
2.° BUP (15-16)	Geometría vectorial y afín. Sucesiones y límite de sucesiones. Funciones reales de variable real. Límites y continuidad. Funciones circulares, exponenciales y logarítmicas. Derivadas y primitivas.
3.° BUP (16-17) optativa	Producto escalar. Trigonometría. Geometría euclídea del plano. Números complejos. Cálculo diferencial. Cálculo integral. Estadística.
COU C (17-18) optativa	Algebra lineal. Geometría lineal. Análisis. Probabilidad.

Tabla 9. Reforma de 1970

gramas renovados» para la EGB, que se plasmaron de manera oficial en normas de 1981 y 1982. Se llegó a organizar la EGB en tres ciclos:

- 6-8 años: Ciclo inicial. 1.° y 2.° de EGB;
- 8-11 años: Ciclo medio. 3.°, 4.° y 5.° de EGB;
- 11-14 años: Ciclo superior. 6.°, 7.° y 8.° de EGB.

Sin embargo, el ciclo superior nunca llegó a implantarse. Los contenidos no se modificaron de forma importante, pero descendió el peso de las estructuras algebraicas y el enfoque «moderno».

Si nos fijamos en los contenidos de la tabla 9 y los comparamos con los de las reformas de 1953 y 1957 podemos concluir lo siguiente:

1. se afianza la presencia de la probabilidad y la estadística;
2. el análisis mantiene su importante papel;
3. las «matemáticas modernas» aparecen impregnando todos los contenidos, aunque su influencia haya disminuido con los años; y
4. la geometría sufre una espectacular transformación, desapareciendo casi completamente la geometría sintética e introduciéndose los métodos vectoriales; en la EGB la geometría se limita mucho, mientras que en BUP y COU se presta casi exclusiva atención a la geometría lineal, fuertemente vinculada a los espacios vectoriales.

Algunos temas seleccionados

En la sección anterior hemos visto una panorámica de los contenidos matemáticos de los programas oficiales. En la presente sección prestamos atención a la forma en la que algunos de esos contenidos han sido presentados a los alumnos. Concretamente, hemos seleccionado los siguientes temas: *longitud de la circunferencia*, *área del círculo*, *área de la superficie esférica*, *volumen de la esfera*, *números negativos* y *noción de límite*.

[Los temas elegidos] son buenos indicadores de las formas en las que las matemáticas se han enseñado, reflejando el nivel de abstracción y rigor que se alcanzaba, así como la atribución de significados a ciertos conceptos matemáticos. Además, estos temas se sitúan en diferentes ramas de las matemáticas: geometría, números y análisis.

Como puede observarse, no se trata de temas triviales. Hemos pensado que son buenos indicadores de las formas en las que las matemáticas se han enseñado, reflejando el nivel de abstracción y rigor que se alcanzaba, así como la atribución de significados a ciertos conceptos matemáticos. Además, estos temas se sitúan en diferentes ramas de las matemáticas: geometría, números y análisis.

Como instrumento fundamental para averiguar cómo se presentaban esos temas seleccionados a los alumnos, hemos analizado un conjunto de libros de texto, ya que, como indica Escolano (1992):

> No se puede hoy, en rigor, reconstruir el pasado de nuestra educación sin recurrir al examen de los libros escolares, instrumentos que constituyeron el principal soporte de la enseñanza, tanto en lo que se refiere a las estructuras formales de su organización curricular como en lo que afecta a la misma práctica real de la vida en las escuelas. [...] Los libros escolares constituyeron a buen seguro la principal fuente de inspiración en orden a la planificación y desarrollo del curriculum seguido por nuestras instituciones educativas a lo largo del pasado siglo y de buena parte del presente.

En los últimos años se ha desarrollado un gran interés por los libros de texto. Son objeto de múltiples investigaciones, como el programa francés Emmanuelle (Escolano, 1992) o el español Manes. Tiana (1992) observa que:

> ...los historiadores de la educación han comenzado a dedicar alguna atención a aspectos tales como los textos escolares. El hecho de tratarse de piezas relevantes en el conjunto de la dotación escolar ha invitado a un número creciente de investigadores a acercarse a ellos.

En los últimos años, la Asociación Nacional de Editores de Libros y Material de Enseñanza (ANELE) ha organizado exposiciones sobre libros de texto o que los incluían (*El libro de texto y la escuela*, 1992; *El libro escolar*, 1996).

Los libros de texto que hemos consultados de la primera etapa histórica que consideramos (hasta 1953) no se corresponden exactamente, en la mayoría de los casos, con un determinado curso, sino que tienen un contenido que se usa en distintos cursos, según los planes en vigor. En las dos etapas siguientes, los textos sí indican siempre el nivel educativo para el que están pensados.

Noción de límite

El concepto de límite tiene una formulación difícil, pese a la idea intuitiva que podamos tener. A lo largo del siglo, las definiciones escolares fluctúan entre los dos extremos: el de la definición abstracta y el de la imagen visual.

Estamos interesados principalmente en las primeras definiciones que se presentan a los alumnos sobre la noción de límite, por lo que no nos referimos a las definiciones que se dan en los libros correspondientes al Preuniversitario

(Planes de 1953 y 1957) ni al Curso de Orientación Universitaria (COU), que generalmente ofrecen una formulación abstracta ilustrada con ejemplos.

El texto más antiguo que hemos consultado (Aguayo, 1919, 2.ª edición) no utiliza ni un solo símbolo y se refiere a variables y cantidades:

> Límite de una variable es una cantidad constante a la cual no puede igualar (de un modo permanente) la primera al seguir su ley de variación, pero a la que se acerca indefinidamente, pudiendo llegar a diferir de ella en una cantidad tan pequeña como se quiera.

La anterior definición se funda en la idea de aproximación asociándola a la de pequeñez. El libro de Salinas y Benítez (16.ª edición, 1940; 18.ª edición, 1952) se apoya en la de aproximación:

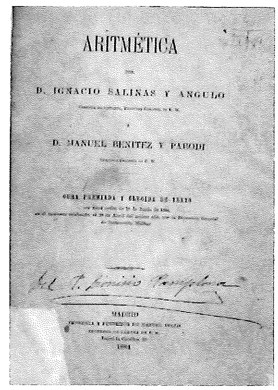
> Cuando una magnitud variable, X, se aproxima indefinidamente a otra fija, A, de tal modo que la diferencia, $A - X$ o $X - A$, pueda ser menor que cualquier magnitud dada, sin reducirse nunca a cero, se dice que A es el límite superior o el inferior de X.

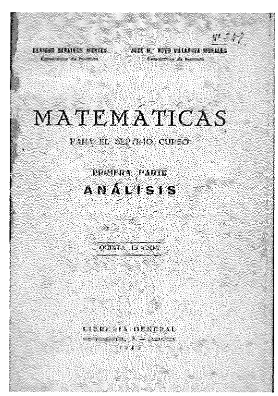
Obsérvese que en las definiciones anteriores quedan excluidas las funciones (variables) constantes.

No hemos encontrado formulaciones modernas de la noción de límite antes del texto de Baratech y Royo (1938, 7.° bachillerato), que lo hace mediante la formulación ε–δ, aunque de una manera deficiente al no quedar claro que δ depende de ε. Reproducimos un párrafo más amplio para ofrecer no sólo la noción de límite, sino también la de función, variable...:

> En el cálculo algebraico representamos los números por letras De una letra que designa un número indeterminado que puede adoptar infinitos valores, decimos que es una *variable*, mientras que a las que representan números determinados se les llama *constantes*.
>
> Cuando una variable, y, depende de otra, x, de manera que, a cada valor particular que tome x corresponde un valor para y, diremos que y, es una función de la variable x. La dependencia entre la variable independiente y la función, se representa simbólicamente, escribiendo
>
> $$y = f(x),$$
>
> expresión en la que la serie de operaciones que es necesario efectuar con la variable independiente para obtener el valor de la función, se indica por una letra f, llamada *característica* de la función.
>
> Dada una función $y = f(x)$, se dice que y tiene límite b, cuando x tiende hacia a, si es posible tomar un número positivo α, tal que para todos los valores x que verifiquen la desigualdad
>
> $$|x - a| < \alpha$$
>
> corresponden valores a y, que cumplen con la condición
>
> $$|y - b| < \varepsilon$$
>
> siendo ε un número positivo, tan pequeño como se quiera.

El siguiente párrafo (Bruño, s.f., 6.° bachillerato) sobre sucesiones convergentes se inscribe en el tipo de definiciones basadas en la pequeñez y posee la particularidad de no usar símbolos:





> Límite de una sucesión es un número fijo tal que la diferencia entre dicho número y cualquiera de los términos que sigan a uno dado pueda hacerse tan pequeña como se quiera en valor absoluto.

Estamos ante una definición moderna, en la que se hace alusión a números, no a cantidades, y se utiliza el valor absoluto para expresar la distancia entre dos números. No obstante, se trata de una definición confusa o errónea, al no establecerse que el término «dado» depende de lo pequeña que se desee hacer la diferencia entre el límite y los términos de la sucesión. Este mismo libro utiliza la convergencia de sucesiones para presentar la noción de límite de una función:

> La función $y = f(x)$ tiene por límite b cuando $x = a$, cuando para todas las sucesiones de valores de x
>
> $$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$$
>
> que tienen por límite a, los correspondientes valores de $f(x)$
>
> $$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots f(x_n)$$
>
> tienen por límite b.

Basándose también en la idea de pequeñez y refiriéndose a sucesiones, define Puig Adam (1964, 6.° bachillerato):

> Se dice que la sucesión indefinida de números reales
>
> $$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$$
>
> o el número real variable α_n tiene por límite el número real fijo α, si la diferencia $\alpha - \alpha_n$ puede llegar a ser, en valor absoluto, tan pequeña como se quiera, desde un cierto valor de n en adelante.

Análogamente, y para sucesiones, Segura (1974, 5.° bachillerato) escribe:

> Se dice que una sucesión indefinida de números tiene por límite L, cuando la diferencia $|L - a_n|$ es menor que un valor positivo arbitrariamente pequeño desde cierto término en adelante.

Utilizando las ideas de aproximación y pequeñez, Ríos y Rodríguez Sanjuán (1962, 6.° bachillerato) dan la siguiente definición:

> El límite de la función $f(x)$, cuando x tiende a a, es el número b, si se verifica que los valores de la función $f(x)$ se aproximan tanto como queramos a b, tomando los valores de la variable x convenientemente próximos a a.

En los años de las «matemáticas modernas» encontramos textos que ofrecen una definición de límite muy general, propia de los espacios topológicos, utilizando para ello los conceptos de entorno y entorno reducido. Por ejemplo, Marcos de Lanuza (1968, 5.° bachillerato):

> Decimos que una función $y = f(x)$ tiene límite l cuando $x = a$, cuando la imagen inversa de un entorno de l es un entorno de a o un entorno reducido de a.

En lugar de usar la imagen inversa de un entorno, como se hace en el texto anterior, Agustí y Vila (1976, 2.° BUP) utilizan la imagen directa, aunque luego se traslada esta definición a una poco precisa formulación ε-δ:

> Diremos que m es el límite de F en a, si para todo entorno B de m se puede encontrar un «entorno reducido» de a:
> $$A_0 = A \setminus \{a\}$$
> de modo que:
> $$B \supset F(A_0).$$
> Utilizando la notación del valor absoluto decimos que:
> $$lim_a F = m$$
> si para todo radio ε de un entorno de m:
> $$|F(x) - m| < \varepsilon$$
> se puede encontrar un número r, radio de un entorno de a, de modo que
> $$0 < |x - a| < r.$$

En el texto de Anzola, Caruncho y Gutiérrez (1977, 2.° BUP) encontramos una definición que hace uso de la idea de entorno, aunque se puede considerar del tipo ε-δ:

> Se dice que la función f tiene por límite el número real L cuando x tiende a a si para todo entorno $E(L, \varepsilon)$ de L de radio ε se puede encontrar un entorno $E_1(a, \delta)$ de a de radio δ tal que si $x \in E_1(a, \delta)$, $x \neq a$, se verifica $f(x) \in E(L, \varepsilon)$.

Rodríguez Vidal (1973, 6.° bachillerato) utiliza varias definiciones, indicando de manera expresa que son equivalentes. Se trata de integrar las diferentes ideas y formulaciones, aunque finalmente convivan sin mucho orden «sabores» muy distintos:

> Se dice que un número es el límite de una sucesión numérica, cuando los términos de la sucesión llegan a ser y a permanecer tan próximos como se quiera a este número.
>
> Sea y una variable función de x. Si la variable independiente x toma una sucesión de valores
> $$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n \qquad [1]$$
> la variable función tomará otra sucesión de valores
> $$y_1, y_2, y_3, \ldots y_n \qquad [2]$$
> Pues bien: si para *todas* las sucesiones [1] que tengan por límite un número determinado a, se cumple que las correspondientes sucesiones [2] tienen un mismo límite b, diremos que la función $y = f(x)$ tiene el límite b, para x tendiendo a a.
>
> Diremos que una variable x tiene por límite a, $x \to a$, cuando su ley de variación es tal, que llega a estar y permanecer indefinidamente comprendida entre los valores $a - \varepsilon$ y $a + \varepsilon$ (siendo ε un número positivo arbitrariamente pequeño).
>
> Diremos que $y = f(x)$ tiene por límite b para $x \to a$, cuando fijado un entorno de b tan pequeño como se quiera, sea $[b - \delta, b + \delta]$, se puede encontrar otro entorno de a, sea $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$, de tal modo, que la función $f(x)$ tome un valor comprendido en aquel entorno de b, siempre que la x pertenezca a este entorno de a.

...durante la primera parte del siglo se utilizan los conceptos de cantidad-magnitud y variable, en lugar de los de número y función.

Por su parte, Guzmán, Cólera y Salvador (1988, 2.° BUP) definen límite de la manera siguiente:

> $f(x) \to l$ cuando $x \to p \Leftrightarrow |f(x) - l|$ es más pequeño que un número prefijado ε, para todos los valores de x suficientemente próximos a p.

Posiblemente sea esta la definición que hemos encontrado en la que mejor convivan la precisión, el rigor y las ideas intuitivas.

Después de este recorrido podemos afirmar que durante la primera parte del siglo se utilizan los conceptos de cantidad-magnitud y variable, en lugar de los de número y función. Es decir, la fundamentación de la noción de número sin alusión a cantidades y magnitudes, que se produjo en la segunda mitad del siglo XIX (de la mano de Dedekind y otros muchos), comenzó a tener reflejo en los libros escolares españoles de segunda enseñanza en el segundo tercio del siglo.

La célebre definición ε-δ (debida a Weierstrass) se ha reproducido por algunos autores, aunque con frecuencia de manera incorrecta o poco precisa. La mayoría ha preferido «suavizar» la definición con las más intuitivas ideas de aproximación y pequeñez...

La célebre definición ε-δ (debida a Weierstrass) se ha reproducido por algunos autores, aunque con frecuencia de manera incorrecta o poco precisa. La mayoría ha preferido «suavizar» la definición con las más intuitivas ideas de aproximación y pequeñez, aunque otros han optado por usar una definición más general, la propia de los espacios topológicos.

Números negativos

Los números negativos se presentan siempre después de haber estudiado los números naturales y los racionales no negativos. Normalmente, en un primer curso se introducen los enteros negativos y, en un curso posterior, se realiza la ampliación a los racionales.

En los libros de texto correspondientes a los distintos planes encontramos tres formas de introducir los números negativos, que llamaremos *adjunción*, *definición* y *generalización*, y que a continuación explicamos.

El método que llamamos *adjunción* consiste en añadir a los números positivos sus opuestos, los cuales se introducen mediante la correspondiente notación. Es decir, para cada número positivo x se considera su opuesto que se denota por $-x$. Los textos que hemos consultado correspondientes a los planes de estudio anteriores a 1953 utilizan la forma *adjunción*, forma que también usan algunos libros de la etapa 1953-1970. Por ejemplo, Crusat (1942), Juan (1949) y Ruiz (1950, 3.° Bachillerato). En este último se dice:

> Número entero positivo es el número natural. Número entero negativo es el numero natural precedido del signo –. Los números enteros componen la sucesión:
>
> $$\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

En Crusat (1942) encontramos:

> Los números contenidos en la serie natural, ampliada con la introducción del cero y de los números negativos se llaman números enteros.

La forma de introducir los negativos que hemos denominado por *definición* consiste, básicamente, en decir que los números enteros son los números naturales con signo, de manera que $\mathbb{Z}$ viene dado por

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}.$$

Lo que diferencia esta forma del anterior método de adjunción es que los números enteros positivos ahora tienen un signo, lo que no ocurría con los números naturales. Lo que lleva a contemplar a los naturales y los enteros positivos como si tuvieran una «naturaleza» diferente. En Anta y otros (1986, 7.° EGB) se insiste de forma explícita en este hecho:

> No olvides que los números enteros se representan con un signo delante (+ o –) excepto el cero.

La introducción de los negativos mediante el método de *definición* se puede encontrar en Bruño (1954, 3.° Bachillerato), Achón y otros (1985, 7.° EGB) y Gil y otros (1984, 7.° EGB).

La tercera forma de introducir los negativos, que hemos denominado *generalización*, es la que tiene más sabor de «matemáticas modernas». El primer paso consiste en considerar, en el conjunto de los pares de números naturales $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, la relación de equivalencia $\cong$ definida por

$$(a, b) \cong (c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c.$$

Entonces, el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ se define como el cociente $\mathbb{N} \times \mathbb{N}\ / \cong$ es decir, un número entero es una clase de equivalencia y en cada una de ellas se elige un representante canónico, precisamente el único par que tiene 0 en alguna de sus dos componentes. El paso siguiente suele ser el establecimiento de otra forma de expresar los números enteros, tala como hace, por ejemplo, el texto de González y Cappa (1977, 7.° EGB):

En cuanto al tratamiento didáctico que reciben los números negativos y sus operaciones se observan cambios a lo largo del siglo.

> Los números enteros cuyo representante canónico tiene el 0 en segundo lugar, se expresan con signo +. Ejemplo, (1,0) se representa por +1. Los números enteros cuyo representante canónico tiene el 0 en primer lugar, se expresan con signo –. Ejemplo, (0,1) se representa por –1.

Una vez presentadas las operaciones de adición y multiplicación junto con sus propiedades, se hace hincapié en que el conjunto de los números enteros tiene estructura de anillo no conmutativo respecto de estas dos operaciones.

La forma *generalización* de introducir los números negativos aparece en algunos textos de los últimos años en los que estuvo vigente el plan de 1953 (Marcos de Lanuza, 1965, 3.° Bachillerato), pero es típica de los primeros años del plan de 1970 (González y Cappa, 1977; Rico y otros, 1983), en el marco de las «matemáticas modernas».

Los métodos generalización y definición tienen en común la creación de «nuevos números positivos» que son distintos de los números positivos de los que se partía. Es por ello, que en el caso de los números enteros se hace necesario establecer un *isomorfismo* entre los enteros no negativos y los naturales (González y Cappa, 1977, 7.° EGB), o bien, es necesario *identificar* ambos conjuntos (Gil y otros, 1984, 7.° EGB; Anta y otros, 1986, 7.° EGB).

En cuanto al tratamiento didáctico que reciben los números negativos y sus operaciones se observan cambios a lo largo del siglo.

En la primera etapa, hasta 1953, el esfuerzo se centra en el cálculo algorítmico, con escasas aplicaciones y alusiones a situaciones concretas. Suele motivarse la necesidad, o al menos la conveniencia, de introducir los números negativos aludiendo a su uso en situaciones concretas en las que están presentes magnitudes con doble sentido, siendo esta la única referencia a situaciones reales que se suele hacer. A partir de ahí, el enfoque de los números negativos es totalmente abstracto, poniendo énfasis en las operaciones y las propiedades de las mismas, de manera que las actividades que se proponen a los alumnos son casi exclusivamente de práctica algorítmica. En algunos casos las reglas se redactan de manera engorrosa y fundadas en la compensación o «aniquilamiento» de cantidades con signo opuesto. Por ejemplo, en Salinas y Benítez (1939, 11.ª ed.) se presenta la siguiente explicación de la regla para sumar números positivos y negativos:

> Es indudable que de la reunión o agregación de dos cantidades de igual signo resulta otra tercera afectada del mismo signo, y cuyo valor numérico es la suma de los valores numéricos de ambas; mientras que, según hemos visto, el efecto de dicha agregación, cuando las dos cantidades consideradas tienen diverso modo de existencia, consiste en la destrucción de una parte de la mayor, igual en valor absoluto a la menor, o bien en su diferencia afectada del signo mayor.

En Crusat (1942) se expresa la misma idea:

> Si se trata de sumar un número positivo con uno negativo o viceversa, en la suma deben reunirse las unidades de los dos sumandos, pero, siendo las del sumando negativo opuestas a las del positivo, cada una de las del primero neutraliza una unidad del segundo, lo que da por resultado un conjunto de unidades igual al exceso de uno de los números sobre el otro.

Los cambios en el plan de 1953 son pequeños, pero se aprecia un mayor esfuerzo didáctico en el tratamiento de los números negativos, lo que se nota en redacciones más simples y claras de las reglas operatorias y, sobre todo, en las aplicaciones de estos números a situaciones reales, no sólo cuando se introducen, sino también al justificar las reglas operatorias. A pesar de ello, la mayoría de las actividades que se le proponen a los alumnos se suelen centrar en la práctica operatoria.

Desde luego, el cambio más espectacular se produjo en los primeros años del plan de 1970, cuando se impuso la construcción del conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ en el marco de las «matemáticas modernas», de forma que ese conjunto se convertía en un ejemplo de anillo, realmente casi el único. Este tra-

Los cambios en el plan de 1953 son pequeños, pero se aprecia un mayor esfuerzo didáctico en el tratamiento de los números negativos, lo que se nota en redacciones más simples y claras de las reglas operatorias y, sobre todo, en las aplicaciones de estos números a situaciones reales...

tamiento de los números negativos produjo una ausencia de situaciones reales cuando se presentan las operaciones.

A medida que se superaba el enfoque estructuralista, durante el plan de 1970, ganaba terreno una mayor conexión de los números negativos con situaciones reales, de forma que el establecimiento de las reglas operatorias se ha hecho a través de cálculos en situaciones sencillas, además de disminuir el uso de las expresiones algebraicas y aumentar los ejemplos numéricos.

Longitud de la circunferencia

A lo largo del siglo, se encuentran libros de texto de los primeros cursos de la segunda enseñanza que *deducen* la fórmula de la longitud L de una circunferencia de radio r,

$$L = 2\pi r,$$

mientras que otros optan por simular un experimento.

En el método *experimental* se dice algo similar a lo siguiente: si se coloca un hilo pegado a la circunferencia, se extiende y se mide su longitud L y luego se mide la longitud de su diámetro $d = 2r$, entonces se obtiene aproximadamente

$$L/d = 3{,}1416;$$

si se repite esta operación con cualquier otra circunferencia, se obtiene siempre el mismo resultado. Ese cociente constante es un número que se llama π (*pi*):

$$L/d = \pi;$$

consecuentemente, resulta que

$$L = 2\pi r.$$

De esta manera proceden los textos de Cenzano (s.f., 1.° bachillerato), Taboas (1935), Bruño (1958, 1.° bachillerato), Marcos y Martínez (1966, 1.° bachillerato; 1966, 2.°

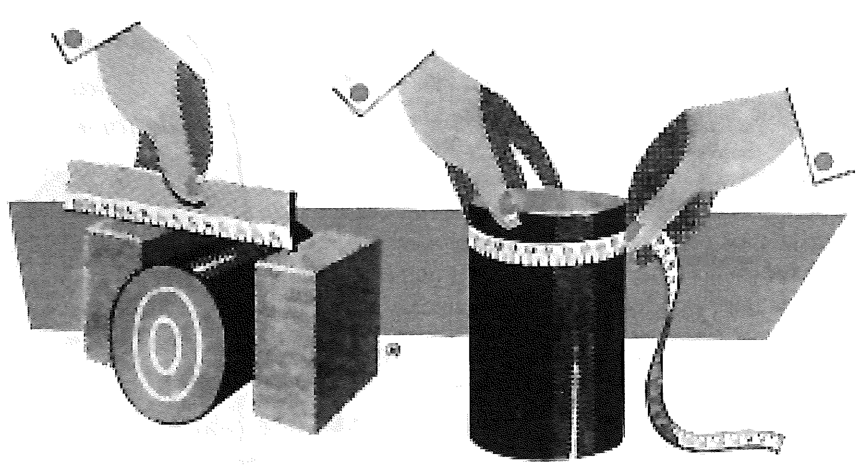


Figura 2. Formas de medir el diámetro y la longitud de la circunferencia

bachillerato), Marcos de Lanuza (1968, 1.° bachillerato), Santillana (1972, 6.° EGB), Aizpún (1974, 6.° EGB), Santillana (1982, 5.° EGB), Santillana (1983, 6.° EGB) y Santillana (1983, 7.° EGB).

En los planes de 1953 y 1957, el método de la experimentación es el que se usa en el primer curso, cuando por primera vez se estudia la longitud de la circunferencia, aunque ya en el curso siguiente se deduce la fórmula. Sin embargo, en la etapa de la Ley General de Educación, a partir de 1970, la forma experimental es la única que aparece en los libros de texto.

La manera de *deducir* la longitud L de la circunferencia es considerarla como límite del perímetro P de un polígono regular inscrito en la circunferencia, cuando el número de lados crece indefinidamente (tiende a infinito) o, equivalentemente, la longitud del lado tiende a cero. Sean L y L' las longitudes de las circunferencias de radios r y r' respectivamente, y P y P' los perímetros de polígonos regulares, del mismo número de lados, inscritos en las respectivas circunferencias. Resulta entonces

$$P/P' = r/r'$$

Como r/r' es constante, al aumentar el número de lados la igualdad anterior sigue siendo válida y en el límite se obtiene

$$L/L' = r/r'$$

es decir, las longitudes de las circunferencias son proporcionales a sus radios. De este resultado se obtiene que L/r es constante y a la mitad de ese número se le llama π (*pi*). Luego

$$L = 2\pi r.$$

El método *deductivo* es el que se utiliza en los libros de Vallín (1896), Aguayo (1923), Xiberta (1926), Llardent (1931), Rodríguez Vidal (1958, 2.° bachillerato), García Roca (1960, 2.° bachillerato) y Bruño (1960, 2.° bachillerato).

En los planes de 1953 y 1957 este es el método de 2.° de bachillerato. No lo hemos encontrado en los libros de texto de EGB que hemos consultado.

Los textos a los que nos hemos referido se centran en el cálculo de la longitud de la circunferencia y suponen conocida ya esa idea. Sin embargo, Rey Pastor y Puig Adam (1935, 2.° bachillerato) estiman que se debe dar una definición de esa longitud, que justifican en que los perímetros de los polígonos inscritos se aproximan a la longitud de la circunferencia aumentando el número de lados, de forma que el cociente L/d es constante:

> Este hecho que la intuición nos dicta se expresa en Geometría dando la siguiente definición abstracta (aplicable también a otras líneas):
>
> *Definición.* Longitud de la circunferencia es el límite del perímetro de un polígono inscrito cuyos lados tienden a cero.
>
> La palabra límite se emplea precisamente para indicar que el error puede llegar a ser tan pequeño como se quiera.

Rey Pastor y Puig Adam (1935, 2.° bachillerato) estiman que se debe dar una definición de esa longitud, que justifican en que los perímetros de los polígonos inscritos se aproximan a la longitud de la circunferencia aumentando el número de lados, de forma que el cociente L/d es constante...

Varios autores posteriores imitan esta forma de proceder. Por ejemplo, García Roca (1960, 2.° bachillerato):

> Este hecho, que la intuición nos dicta, podemos expresarlo dando la siguiente definición abstracta: longitud de la circunferencia es el límite del perímetro de un polígono inscrito cuando la longitud de sus lados tiende a cero.

También Bruño (1954, 3.° bachillerato) da una definición, pero ahora para precisar la noción de circunferencia:

> Vamos a establecer otra definición... Diremos que: la circunferencia es el límite común de los polígonos regulares, inscritos y circunscritos, cuando el número de sus lados aumenta hasta el infinito.

Aunque el autor no lo señala explícitamente, cabe deducir que la «longitud del límite es el límite de las longitudes». Haciendo cálculos concluye que «la medida de la circunferencia es 3,14159... cuando se toma el diámetro por unidad».

Área del círculo

Hasta la reforma de 1970. el tema del área del círculo se estudia en los dos primeros cursos del bachillerato, mientras que en la EGB lo habitual es encontrarlo en 7.° curso.

Entre los autores consultados hay uno (Aizpún, 1974, 6.° EGB) que, sin ningún tipo de explicación, afirma que el área A del círculo de radio r viene dada por la fórmula

$$A = \pi r^2.$$

Sin embargo, casi todos los libros analizados proceden a deducir la fórmula: Vallín (1896), Aguayo (1923), Xiberta (1926), Cenzano (s.f., 1.° bachillerato), Taboas (1935), Llardent (1931), Rodríguez Vidal (1958, 2.° bachillerato), Bruño (1958, 1.° bachillerato; 1960, 2.° bachillerato), Marcos y Martínez (1966, 2.° bachillerato), Marcos de Lanuza (1968, 1.° bachillerato), Santillana (1983, 7.° EGB), Mansilla y Bujanda (1988, 7.° EGB). Consideran el área A del círculo como límite del área de un polígono regular inscrito en la circunferencia, cuando el número de lados crece indefinidamente. Un resultado previo fundamental es el siguiente:

área del polígono = la mitad del perímetro por la apotema

Entonces, en el límite se obtiene

área del círculo =
= la mitad de la longitud de la circunferencia por el radio.

Es decir,

$$A = (1/2)\ 2\pi r r = \pi r^2.$$

Un razonamiento deductivo diferente se encuentra en García Roca (1960, 2.° bachillerato): se divide el círculo en sectores circulares, lo suficientemente pequeños para que parezcan triángulos, de esta forma se obtiene una figura que es «casi» un rectángulo de base la longitud de la semicircunferencia y de altura el radio. Es frecuente que este razonamiento se ilustre con un dibujo como el de la figura 3.

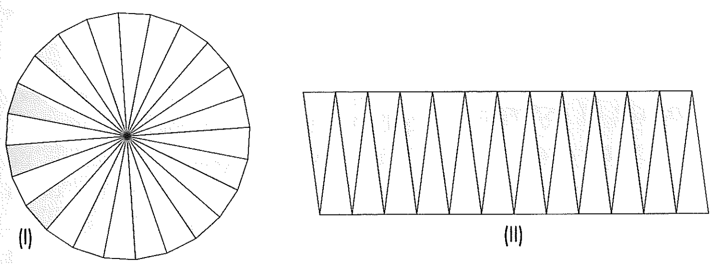


Figura 3. (I) El círculo se descompone en pequeños «triángulos» cuyas áreas suman la del círculo. (II) Los pequeños triángulos se colocan formando un rectángulo

De igual modo que hacían con la longitud de la circunferencia, Rey Pastor y Puig Adam (1935) definen lo que se entiende por área del círculo, ofreciendo una justificación de tal definición, basada en un razonamiento como el anterior de García Roca. Con palabras de los autores:

> Parece pues natural definir el área del círculo como la de un paralelogramo de altura igual al radio r y de base igual a la semicircunferencia (πr).

De ahí se obtiene inmediatamente la fórmula.

Área de la superficie esférica

Para justificar que el área A de la superficie esférica de radio r viene dada por la fórmula

$$S = 4\ \pi r^2$$

los autores de los libros de texto consultados utilizan de nuevo un método *deductivo* o uno *experimental.* Sin embargo, en los textos de los primeros cursos es muy frecuente encontrar la expresión anterior para S sin ninguna clase de justificación: Cenzano (s.f., 1.° bachillerato), Rodríguez Vidal (1958, 2.° bachillerato), Bruño (1960, 2.° bachillerato), García Roca (1960, 2.° bachillerato), Santillana (1983, 7.° EGB).

Cuando se opta por deducir la fórmula, el primer paso que se da es probar que el área S de la superficie engendrada por un segmento que gira alrededor de una recta coplanaria y que no lo corta viene dada por

$$S = 2\pi ab,$$

siendo a la longitud del segmento de mediatriz entre el segmento y la recta, y b la longitud de la proyección del segmento sobre la recta (figura 4).

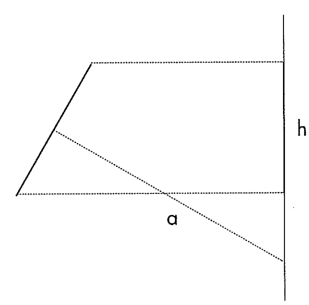


Figura 4. Segmento que gira alrededor de una recta coplanaria

Por ejemplo, Bruño (1960, 4.° bachillerato) enuncia y demuestra el siguiente teorema:

> Si un segmento gira alrededor de un eje del mismo plano y no lo corta ni le es perpendicular, el área de la superficie engendrada por el segmento es igual al producto de su proyección sobre el eje por la longitud de la circunferencia, cuyo radio es la porción de mediatriz del segmento comprendido entre éste y el eje.

Cabe observar el pequeño error que se comete al decir que el eje es «del mismo plano» que el segmento, en lugar de decir que el segmento y el eje son «coplanarios». En la demostración se distinguen varios casos y usa los ya conocidos resultados sobre el área lateral del cilindro, del cono y del tronco de cono.

En segundo lugar se establece que el área S de la superficie engendrada por un polígono regular de radio r y de un número par de lados que gira alrededor de uno de sus diámetros es el producto del diámetro $h = 2r$ por la longitud de la circunferencia cuyo radio es la apotema a del polígono

$$S = 2\pi a 2r = 4\pi ar.$$

En tercer y último lugar, se pasa al límite y resulta que el área de la superficie esférica, que se obtiene al girar una semicircunferencia, es el producto de la proyección $h = 2r$ por la longitud $2\pi r$, luego

$$S = 2\pi r 2r = 4\pi r^2.$$

Este modo de proceder, deduciendo la fórmula, lo usan los siguientes autores: Vallín (1896), Aguayo (1923), Xiberta (1926), Llardent (1931), Bruño (1960, 4.° bachillerato). Algunos autores del plan 1957 lo usan en 4.° de bachillerato. No se usa en la EGB.

Varios autores utilizan un método *experimental*: se enrolla una cuerda delgada alrededor de una semiesfera, hasta cubrirla, y después el cordón se enrolla sobre dos círculos cuyos radios son los de la esfera; se ve que ambos círculos quedan recubiertos (figura 5). Por tanto, $(1/2)\ S = 2\pi r^2$; luego

$$S = 4\pi r^2$$

Así han hecho Taboas (1935), Marcos y Martínez (1966, 2.° bachillerato) y Mansilla y Bujanda (1988, 7.° EGB).

De nuevo ahora son Rey Pastor y Puig Adam (1935) los únicos que dan una definición del área de la superficie esférica:

> ...definimos diciendo: el área de la superficie esférica es la de la superficie lateral de un cilindro que tiene el mismo radio y como altura el diámetro de la esfera.

De ahí se obtiene la fórmula.

Varios autores utilizan un método experimental: se enrolla una cuerda delgada alrededor de una semiesfera, hasta cubrirla, y después el cordón se enrolla sobre dos círculos cuyos radios son los de la esfera; se ve que ambos círculos quedan recubiertos...

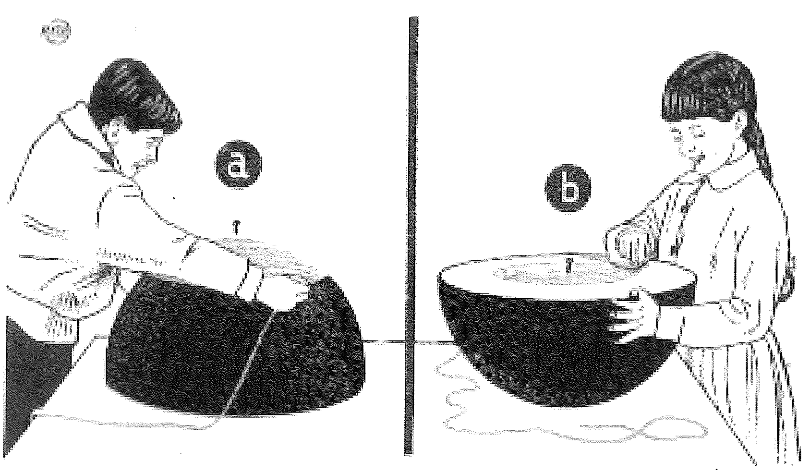


Figura 5. Experimento para ver que el área de la superficie esférica (a) es el cuádruple de la del círculo

Volumen de la esfera

Algunos textos dan la fórmula del volumen de la esfera sin ninguna justificación: Cenzano (s.f., 1.° bachillerato), García Roca (1960, 2.° bachillerato), Rodríguez Vidal (1958, 2.° bachillerato), Bruño (1960, 2.° bachillerato), Aizpún (1974, 7.° EGB).

Los autores que *deducen*, comienzan por enunciar y demostrar que el volumen engendrado por un triángulo ABC que gira alrededor de un eje EB situado en su plano y pasando por uno de sus vértices B es igual a un tercio del producto del área que engendra el lado AC por la altura h relativa a este lado. Como enuncia Bruño (1960, 4.° bachillerato):

> El volumen engendrado por un triángulo que gira alrededor de un eje situado en su plano pasando por un vértice sin cortarle, es igual al tercio del producto del área engendrada por el lado opuesto al vértice fijo, por la altura relativa a este vértice.

De aquí se obtiene, en segundo lugar, que el volumen que engendra un polígono regular al girar alrededor de un diámetro es un tercio del área de la superficie que engendra por el radio. Finalmente resulta el volumen de la esfera como paso al límite:

$$V = (1/3)\ Sr = (1/3)\ 4\ \pi r^2 r = (4/3)\ \pi r^3.$$

Otra forma deductiva consiste en el siguiente razonamiento: se descompone la esfera en pirámides de vértice el centro. La esfera puede considerarse entonces como una pirámide degenerada, cuya «base» es la superficie esférica. Como el volumen de la pirámide viene dada por

volumen de la pirámide = un tercio del área de la base por la longitud de la altura,

se obtiene para la esfera

$$V = (1/3)\ Sr = (1/3)\ 4\ \pi r^2 r = (4/3)\ \pi r^3.$$

El método deductivo lo usan: Vallín (1896), Aguayo (1923), Xiberta (1926), Llardent (1931) y Bruño (1960, 4.° bachillerato). Se suele usar en 4.° del bachillerato del plan de 1957 y no aparece en la EGB.

El dibujo de la figura 6, tomado de Marcos y Martínez (1966, 2.° bachillerato), ilustra un experimento justificativo de que el volumen de la esfera de radio *r* es igual a los 2/3 del volumen de un cilindro circunscrito (que tiene de radio de la base *r* y de altura 2*r*).

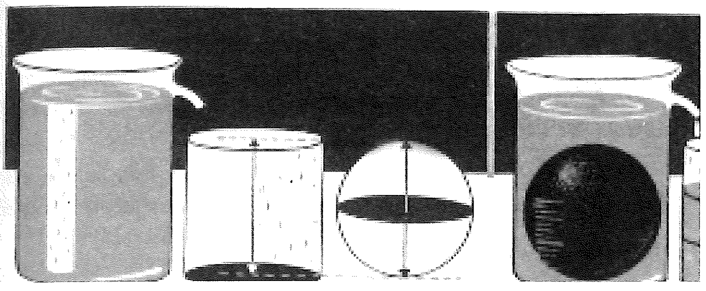


Figura 6. Experimento para ver que el volumen de la esfera es 2/3 del volumen del cilindro circunscrito

Equivalentemente, el volumen de tres semiesferas de radio r es lo mismo que el volumen del cilindro circunscrito a la correspondiente esfera.

Otra forma experimental es comprobar, mediante trasvase, que el volumen de la semiesfera de radio *r* coincide con la suma de los dos volúmenes de dos conos iguales de radio de la base *r* y de altura *r*.

El método *experimental* lo utilizan Taboas (1935), Marcos y Martínez (1966, 2.° bachillerato), Santillana (1983, 7.° EGB) y Mansilla y Bujanda (1988, 7.° EGB).

De nuevo citamos a Rey Pastor y Puig Adam (1935) como los únicos autores que dan una *definición*. Consideran que la esfera puede descomponerse en cuerpos que parecen pirámides de vértice el centro de la esfera. Entonces:

> En virtud de estas consideraciones intuitivas, parece, pues, natural adoptar, a modo de definición, la siguiente regla: el volumen de la esfera es un tercio del producto del área de su superficie por la medida del radio.

Conclusiones

A lo largo del siglo, ha variado mucho el peso de las matemáticas en los planes de estudio (ver tabla 10). Ciertas reformas han limitado el estudio de las matemáticas hasta los catorce años, mientras que otras las han situado en todos los cursos. Sin embargo, en el último medio siglo se ha consolidado la idea de unas matemáticas para todos, antes hasta los catorce años y ahora hasta los dieciséis, y otras matemáticas de especialidad, según las orientaciones de los alumnos. Especialmente esto es así, ahora, con la LOGSE.

Los contenidos matemáticos se han visto sometidos a importantes cambios. En el primer tercio de siglo se centraban en aritmética y geometría, con algunas nociones de álgebra y trigonometría. Como revela lo que ya hemos dicho sobre los números negativos, se trataba de una enseñanza en la que los algoritmos ocupaban un lugar muy destacado, situación que con el tiempo se amortigua, pero que, de una u otra forma, llega hasta nuestros días.

En el Plan de 1934 aparece la innovación de la iniciación del análisis. A partir de entonces, cada reforma ha supuesto una ocasión para aumentar el peso, en los programas oficiales, del estudio de las funciones y del cálculo infinitesimal.

Edad	*1899*	*1900 1901 1903*	*1926*	*1931*	*1934 1938*	*1953 1957*	*1970*
10-11	sí	sí	sí	sí	sí	sí	sí
11-12	sí	sí	sí	sí	sí	sí	sí
12-13	sí	sí	no	sí	sí	sí	sí
13-14	sí	sí	sí	sí	sí	sí	sí
14-15	sí	no	sí (c)	No	sí	sí (c)	sí
15-16	sí	no	sí (c)	No	sí	sí (c)	sí
16-17	no	—	—	—	sí	sí (c)	sí (*)
17-18	—	—	—	—	—	—	sí (*) si (t)

sí/no: sí/no había matemáticas
si (*): sí, optativa
si (c): si, en la especialidad de ciencias;
sí (t) sí, algunos años
—: no existía ese nivel

Tabla 10. Presencia de las matemáticas en los planes

Veinte años más tarde, en el Plan de 1953, en los programas correspondientes al bachillerato de ciencias, ya figura el estudio de los vectores, de la geometría analítica, de la combinatoria y de la estadística, a lo que hay que añadir, como queda dicho, el cálculo diferencial e integral.

Con la reforma de 1970 aparecen las «matemáticas modernas», cuyo peso disminuye poco después, aunque posiblemente lo más significativo, por haber resultado duradero, fue la brusca disminución de la geometría sintética y, en los cursos superiores, la sistemática utilización de los vectores en la geometría analítica.

Contrasta, durante los años de mayor fuerza de la reforma de 1970, el alto nivel de rigor y abstracción que se alcanza en la construcción del conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ con la ausencia casi general de argumentaciones para justificar las fórmulas de la longitud de la circunferencia, área del círculo y área de la superficie y volumen de la esfera.

Con el avance del siglo la idea de número se ha ido convirtiendo en el pilar de las matemáticas escolares y ha venido a sustituir a las nociones de cantidad y magnitud. Aunque de modo no concluyente, puede decirse que ha retrocedido la importancia de los algoritmos numéricos al tiempo que han ganado espacio las aplicaciones. Por otro lado, la deducción de las fórmulas que dan la medida de los cuerpos geométricos menos simples prácticamente ha desaparecido.

Con el avance del siglo la idea de número se ha ido convirtiendo en el pilar de las matemáticas escolares y ha venido a sustituir a las nociones de cantidad y magnitud. Aunque de modo no concluyente, puede decirse que ha retrocedido la importancia de los algoritmos numéricos al tiempo que han ganado espacio as aplicaciones. Por otro lado, la deducción de las fórmulas que dan la medida de los cuerpos geométricos menos simples prácticamente ha desaparecido.

Bibliografía

General

DÍAZ DE LAGUARDIA, E. (1988): *Evolución y desarrollo de la enseñanza media en España de 1875 a 1930. Un conflicto político-pedagógico*, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid.

El libro escolar (1996): Exposición con motivo del 5.° Congreso sobre «El libro de texto y materiales didácticos», ANELE, Madrid.

El libro y la escuela. Libro conmemorativo de la exposición (1992): ANELE, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid.

ESCOLANO, A. (1992): «El libro escolar y la memoria histórica de la educación», *El Libro y la Escuela*, 77-90.

LOZANO, C. (1994): *La educación en los siglos XIX y XX*, Editorial Síntesis, Madrid.

OTERO, L. (1996): *Al paso alegre de la paz*, Plaza & Janés, Barcelona.

PUELLES BENÍTEZ, M. de (1980): *Educación e ideología en la España contemporánea*, Labor, Barcelona.

PUELLES BENÍTEZ, M. de (1992): «De las Cortes de Cádiz a la LOGSE (1812 1990)», *El libro y la escuela*, 27-40.

RICO, L. y M. SIERRA, M. (1992): «Educación matemática en la España del siglo XX», en: J. KILPATRICK, L. RICO y M. SIERRA (eds.): *Educación matemática e investigación*, Síntesis, Madrid.

SOPEÑA MONSALVE, A. (1994): *El florido pensil*, Crítica, Barcelona.

TIANA FERRER, A. (1992): «El espacio escolar: La escuela y el aula», *El Libro y la Escuela*, 41-58.

UTANDE IGUALADA, M. (1964): *Planes de estudio de enseñanza media*, Dirección General de Enseñanza Media. Ministerio de Educación Nacional, Madrid.

Textos anteriores a 1953

AGUAYO, M. (1918): *Nociones y ejercicios de aritmética y geometría*, Librería Hernando, Madrid.

AGUAYO, M. (1919): *Tratado elemental de aritmética*, 2.ª edición, Librería Hernando, Madrid.

AGUAYO, M. (1923): *Elementos de geometría*, 2.ª edición, Librería Hernando, Madrid.

AGUAYO, M. (1927): *Apéndices de geometría y trigonometría*, Librería Hernando, Madrid.

BARATECH, B. y J. M. ROYO VILLANOVA (1938): *Matemáticas. Séptimo curso del bachillerato. Primera parte. Análisis*, Librería General, Zaragoza.

CENZANO, J. (sin fecha): *Matemáticas. Primer curso*, Madrid.

CORREA, F. (1905): *Elementos de aritmética*, Mariano Escar, Tipógrafo, Zaragoza.

CRUSAT, L. (1942): *Compendio de Aritmética y Algebra*, 4.ª edición. Bosch Casa Editorial, Barcelona.

JUAN, E. (1949): *Teoría elemental de los números reales*, Santa Cruz de Tenerife.

LLARDENT ESMET, A. (1931): *Curso de Geometría*. 5.ª edición, Imprenta de Julio Cosano, Madrid.

REY PASTOR, J. y P. PUIG ADAM, (1934): *Matemáticas. Tercer Curso. Tomo II:*

Lecciones de geometría (método racional), Unión Poligráfica, S. A., Madrid.
REY PASTOR, J. PUIG ADAM (1935): *Matemáticas. Segundo Curso (método intuitivo)*, Unión Poligráfica, S. A., Madrid.
REY PASTOR, J. y P. PUIG ADAM (1935): *Matemáticas. Tercer Curso. Tomo I: Aritmética*, Unión Poligráfica, S. A., Madrid.
RUIZ, F. (1950): *Matemáticas. Tercer curso*, Alma Mater, Barcelona.
SALINAS, I. y M. BENÍTEZ (1939): *Álgebra*, 11.ª edición, Victoriano Suárez, editor. Madrid.
SALINAS, I.; BENÍTEZ, M. (1940): *Aritmética*, 16.ª edición (18.ª edición, 1952), Librería Hernando, Madrid.
SÁNCHEZ VIDAL, B. (1902): *Lecciones de aritmética*, 7.ª edición, Librería Hernando, Madrid.
S. M. (sin fecha): *Nociones de aritmética y ejercicios de cálculo mental*, 3.ª edición. Hijos de Santiago Rodríguez, Burgos.
TABOAS SALVADOR, J. (1935): *Nociones y ejercicios de aritmética y geometría*, Imprenta Moret, La Coruña.
VALLÍN Y BUSTILLO, A. F. (1896): *Elementos de matemáticas. Geometría, trigonometría y nociones de topografía*, Librería Hernando, Madrid.
XIBERTA ROQUETA, M. (1926): *Geometría elemental*. 3.ª edición, Imprenta y Librería de Antonio Franquet y Gusiñé, Gerona
YEVES, C. (1899): *Programas de Primera Enseñanza. Aritmética*. 13.ª edición. Librería Hernando, Madrid.
YEVES, C. (1906): *Programas de Primera Enseñanza. Aritmética*, 15.ª edición, reformada por P. FERRER Y RIVERO. Librería Hernando, Madrid.

Textos 1953-57

BRUÑO (1958): *Matemáticas 1.er curso de bachillerato*, Bruño, Madrid.
BRUÑO (1960): *Matemáticas 2.° curso de bachillerato*, Bruño, Madrid.
BRUÑO (1954): *Matemáticas 3.er curso de bachillerato*, Bruño, Madrid.
BRUÑO (1960): *Matemáticas 4.° curso de bachillerato*, Bruño, Madrid.
BRUÑO (sin fecha): *Matemáticas 6.° curso de bachillerato*, Bruño, Madrid.

Alicia Bruno
Antonio Martinón
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna.
Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»

GARCÍA ROCA, R. (1960): *Matemáticas. 2.° curso*, 2.ª edición, Editorial Bello, Valencia.
MARCOS, C. y J. MARTÍNEZ, J. (1966): *Matemáticas I*, Ediciones S. M., Valencia.
MARCOS, C. y J. MARTÍNEZ, J. (1966): *Matemáticas 2.°*, Ediciones S. M., Valencia
MARCOS DE LANUZA, F. (1965): *Matemáticas. Tercer curso*, Editorial Gredos. Madrid.
MARCOS DE LANUZA, F. (1968): *Matemáticas 1.°*, G. del Toro, editor, Madrid.
MARCOS DE LANUZA, F. (1968): *Matemáticas. Quinto Curso*, G. del Toro, editor, Madrid.
PUIG ADAM, P. (1964): *Matemáticas. Sexto curso*, Biblioteca Matemática Rey Pastor-Puig Adam, Madrid.
RÍOS, S. y A. RODRÍGUEZ SANJUÁN (1962): *Matemáticas. Sexto curso de bachillerato*, Madrid.
RODRÍGUEZ VIDAL, R. (1958): *Canon. Segundo curso*, Teide, Barcelona.
RODRÍGUEZ VIDAL, R. (1973): *Funciones y gráficas. Sexto curso.* 9.ª edición, Teide, Barcelona.
SEGURA, S. (1974): *Matemáticas 5.°*, E. López Mezquida, editor, Valencia.

Textos Ley General de Educación

ACHÓN, J. y otros (1985): *Eureka. Séptimo curso de Matemáticas*, E.G.B. Onda, Barcelona.
AGUSTÍ, J. M. y A. VILA (1976): *Matemáticas. Vectores. (2.° BUP)*, Vicens-Vives, Barcelona.
AIZPÚN, A. (1974): *Matemáticas 5*, Editorial Magisterio Español, Madrid.
AIZPÚN, A. (1974): *Matemáticas 6*, Editorial Magisterio Español, Madrid.
AIZPÚN, A. (1974): *Matemáticas 7*, Editorial Magisterio Español, Madrid.
ANTA, G. y otros (1992): *7 Matemáticas*, ESLA, Madrid. .
ANZOLA, M., J. CARUNCHO, J. y M. GUTIÉRREZ, M. (1977): *Matemáticas 2 bachillerato*, Santillana, Madrid.
GIL, J. y otros (1984): *Matemáticas 7. E.G.B.*, Santillana, Madrid.
GONZÁLEZ, R. y A. CAPPA (1977): *Nosotros y los números. Matemáticas 7*, Edelvives, Zaragoza.
GUZMÁN, M. de, J. COLERA, y A. SALVADOR (1988): *Matemáticas. Bachillerato 2*, Anaya, Madrid.
MANSILLA, S. y M. P. BUJANDA (1984): *Pitágoras. 7.° EGB. Matemáticas*, S. M., Madrid.
MANSILLA, S. y M. P. BUJANDA (1988): *Pitágoras. 7.° EGB. Matemáticas*, S. M., Madrid.
RICO, L. y otros: *Guía del profesor. Matemáticas 7*, Anaya, Salamanca.
SANTILLANA (1972): *Delta 6*, Santillana, Madrid.
SANTILLANA (1983): *Matemáticas 6*, Santillana, Madrid.
SANTILLANA (1982): *Matemáticas 5*, Santillana, Madrid.
SANTILLANA (1983): *Matemáticas 7*, Santillana, Madrid.