SUMA 34
junio 2000, pp. 21-25

Una modificación del problema de Arquímedes de las reses del Sol para una clase de resolución de problemas

Tomás Ortega

ARTÍCULOS

El presente artículo contiene el enunciado y una reformulación del problema de las reses del Sol, que fue propuesto por Arquímedes en el siglo III a. C., para que pueda ser tratado dentro del currículo de Bachillerato como una actividad de resolución de problemas. Se destacan los valores didácticos del mismo y se da una solución.

EN LOS CURRÍCULOS españoles de Matemáticas de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y Bachillerato la resolución de problemas es el quinto organizador curricular y, por tanto, se trata de una componente fundamental de articulación del diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas, (Rico, 1977). El propio currículo destaca, tanto en ESO como en Bachillerato, la importancia de estos contenidos, los considera básicamente procedimentales e indica que pretenden desarrollar en el alumno hábitos y actitudes propios del modo de hacer matemático.

Por otra parte, los Reales Decretos 1006/1991 y 1007/1991 establecen que «el currículo precisa reflejar el proceso constructivo del conocimiento matemático, tanto en su progreso histórico como en su apropiación por el individuo», y Sierra (1999) transcribe algunas formas de uso de la historia de la matemática enunciadas por Fauvel (1990) y añade otras propias, de las que transcribo la siguiente:

> Idear ejercicios utilizando textos matemáticos del pasado.

Seguidamente paso a enunciar el problema de Arquímedes del «rebaño de las Reses del Sol» y la modificación que propongo. Transcribo ambas.

Problema de Arquímedes

> Amigo, si has heredado la sabiduría, calcula cuidadosamente a qué número ascendía la multitud de las reses del Sol que en otro tiempo pacían en las llanuras de Trinacria, divididos en cuatro manadas de distinto pelaje: una, de color blanco como la leche, otra de negro lustroso, una tercera

oscura y la cuarta manchada. Los toros, que superaban en número a las vacas, se repartían en cada manada de la siguiente manera: imagina, amigo mío, que los toros blancos eran en igual número que la mitad y un tercio de los negros además de todos los oscuros, mientras que los negros eran en igual número que la cuarta más la quinta parte de los manchados, más todos los oscuros. Considera además que los manchados eran en igual número que la sexta más la séptima parte de los blancos, más todos los oscuros. Las vacas estaban así repartidas por su parte: las blancas eran en igual número que la tercera más la cuarta parte de toda la manada negra, mientras que las negras eran en igual número que la cuarta más la quinta parte de toda la manada manchada; a su vez, las manchadas eran en igual número que la quinta más la sexta parte de toda la manada oscura, mientras que las oscuras eran en igual número que la mitad de la tercera parte más la séptima parte de toda la manada blanca.

Amigo, si me dices cuántas eran las reses del Sol, y, en particular, cuál era el número de toros y vacas de cada pelaje, no se te podrá calificar ni de ignorante ni de inhábil en el manejo de los números, pero aún no podrás contarte entre los sabios. Pues atiende aún a dos distintas maneras en que las reses del Sol solían disponerse: cuando los toros blancos unían su multitud a la de los toros negros, formaban un grupo compacto de igual medida en profundidad que en anchura, que llenaba enteramente las inmensas llanuras de Trinacria. Por otra parte, reunidos solamente los oscuros y los manchados, se agrupaban por filas de tal manera que, estando constituida la primera de ellas por uno solo de ellos, formaban gradualmente una figura triangular, sin faltar ni sobrar ninguno. Amigo, si encuentras la relación oportuna entre todas estas cosas y, en una palabra, si concentrando tu espíritu expresas todas las cantidades correspondientes a esas manadas, podrás vanagloriarte de haber conquistado la victoria y estar convencido de ser juzgado consumado conocedor de esta ciencia.

Se ha transcrito el problema con el mismo estilo retórico con el que se muestra en E. Fernández y M. Banzo (1999) y merece la pena destacar la importancia de cuatro aspectos del mismo: en primer lugar, cabe comentar la importancia del propio texto, la composición de las manadas se narra tal y como surgen los problemas de la vida ordinaria, con lo que se manifiesta el carácter aplicado de las matemáticas; en segundo lugar, si la transcripción del lenguaje verbal al simbólico algebraico es, por sí misma, un ejercicio de cambio de registros sumamente interesante para el alumno, en este problema lo es más por la redacción verbal, aunque la transcripción de la segunda parte no resulte tan sencilla para todos los alumnos; en tercero, el propio problema muestra dos niveles de resolución y, según el propio Arquímedes, aunque el primer nivel requiere cierta habilidad en el manejo de los números, al segundo le considera de un nivel muy superior; finalmente, en cuarto lugar, aparece un aspecto motivador en el propio enunciado del problema, ya que, además de que el texto se muestra como un reto para quien trate de hallar el número de reses del rebaño del Sol, ligados a los dos niveles de resolución se muestran sendos reconocimientos a la capacidad resolutoria: el de habilidad en el manejo de los números, para la primera parte, y el de consumado conocedor de esta ciencia y así poderse contar entre los sabios, para el que obtenga la solución completa.

...considerando los valores didácticos que se han mostrado antes, además de poder hacer referencia a los intercambios culturales en la Antigüedad Clásica, etc., sería interesante redactar una segunda parte del problema, conservando la primera condición, para obtener una solución única del problema, que se pueda obtener fácilmente manejando software muy sencillo o con la calculadora, manejando aritmética entera, incluso manualmente, dejando la solución como producto de factores primos.

En el citado artículo de E. Fernández y M. Banzo, entre otras, se hace una referencia al trabajo de A. Amthor en 1880, se muestra el planteamiento algebraico de la primera parte del problema, que da lugar a un sistema homogéneo de ecuaciones diofánticas, y cómo las dos condiciones de la segunda parte llevan a una ecuación de Pell cuya solución completa, que tiene 206545 cifras, la imprimió, por primera vez, Harry Nelson en 1981, utilizando *software* de ordenador. El artículo termina con la implementación que hicieron E. Fernández y M. Banzo para calcular el número total de reses del rebaño.

Modificación del problema

El enunciado de Arquímedes no tiene mucho sentido para una clase de resolución de problemas de Educación Secundaria, pero, considerando los valores didácticos que se han mostrado antes, además de poder hacer referencia a los intercambios culturales en la Antigüedad Clásica, etc., sería interesante redactar una segunda parte del problema, conservando la primera condición, para obtener una solución única del problema, que se pueda obtener fácilmente manejando software muy sencillo o con la calculadora, manejando aritmética entera, incluso manualmente, dejando la solución como producto de factores primos. Lógicamente hay muchos enunciados alternativos, aquí se propone la modificación que aparece en el siguiente texto:

Amigo, si me dices cuántas eran las reses del Sol, y, en particular, cuál era el número de toros y vacas de cada pelaje, no se te podrá calificar ni de ignorante ni de inhábil en el manejo de los números, pero aún no podrás contarte entre los sabios. Pues atiende aún a dos distintas maneras en que las reses del Sol solían disponerse: cuando los toros blancos unían su multitud a la de los toros negros, formaban un grupo compacto de igual medida en profundidad que en anchura, que llenaba enteramente las inmensas llanuras de Trinacria. Por otra parte, reunidos solamente los oscuros y los manchados, se agrupaban por filas de igual longitud y los toros de una de ellas llenan un cuadrado igual de ancho que la anchura de todas las filas, sin faltar ni sobrar ninguno. Si al resolverlo, amigo, encuentras más de una solución, quédate con la menor de ellas, pues, a buen seguro, que habrá reses más que suficientes para saciar el hambre del mundo entero mientras éste dure. Amigo, si encuentras la relación oportuna entre todas estas cosas y, en una palabra, si concentrando tu espíritu expresas todas las cantidades correspondientes a esas manadas, podrás vanagloriarte de haber conquistado la victoria e irte convenciendo de que estás en el camino de conocer esta ciencia.

La propuesta de este problema debe hacerse para que los alumnos lo trabajen en grupos, siguiendo una metodología de autoaprendizaje guiado, orientándolos por etapas, según propone T. Ortega (1999: 93-95) en su metodología de Educación en la Diversidad, que trata de poner en práctica la orientación curricular de la LOGSE, que su artículo 20, página 28532, BOE de 4 de octubre de 1990, expresa que «La metodología didáctica de la educación secundaria obligatoria se adaptará a las características de cada alumno, favorecerá su capacidad para aprender por sí mismo y para trabajar en equipo,...» A continuación se describen estas etapas:

La propuesta de este problema debe hacerse para que los alumnos lo trabajen en grupos, siguiendo una metodología de autoaprendizaje guiado, orientándolos por etapas...

1. Plantear el sistema de las siete ecuaciones lineales y darse cuenta de la necesidad de encontrar soluciones enteras.
2. Expresar las ocho incógnitas en función de un parámetro.
3. Plantear las ecuaciones cuadrática y cúbica.
4. Determinar la condición que deben cumplir los factores primos para ser los menores cuadrado y cubo.
5. Buscar la población de la tierra y el origen del universo para dar una respuesta a la última afirmación del problema.

Solución del problema modificado

Es evidente que las soluciones de este problema sólo pueden ser números naturales y éste debe ser el primer convencimiento de los alumnos. Denotando por A, B, C y D al número de los toros blancos, negros, manchados y oscuros, y por a, b, c y d al de las vacas del mismo color, la primera parte da lugar a un sistema de 7 ecuaciones con 8 incógnitas, del que las tres primeras ecuaciones forma un subsistema con tres incógnitas:

$$A = (1/2+1/3)B + D \Rightarrow A = 5B/6 + D;$$

$$B = (1/4+1/5)C + D \Rightarrow B = 9C/20 + D;$$

$$C = (1/6+1/7)A + D \Rightarrow C = 13A/42 + D;$$

$$a = (1/3+1/4)(B + b) \Rightarrow a = 7(B + b)/12;$$

$$b = (1/4+1/5)(C + c) \Rightarrow \mathrm{b} = 9(C + c)/20;$$

$$c = (1/5+1/6)(D + d) \Rightarrow c = 11(D + d)/30;$$

$$d = (1/6+1/7)(A + a) \Rightarrow d = 13(\mathrm{A} + a)/42.$$

A la vista de las ecuaciones, su forma hace pensar que sería más fácil, primero, expresar la relación que tienen que cumplir las incógnitas y, después, traducir este simbolismo algebraico al correspondiente enunciado verbal, tarea que resulta muy interesante, para ayudar al alumno a expresar sus ideas en uno y otro lenguaje. El primer subsistema, que es compatible e indeterminado, se transforma fácilmente en otro con coeficientes enteros,

$$6A - 5B = 6D;$$

$$20B - 9C = 20C;$$

$$42C - 13A = 42D;$$

cuya solución, fácil de obtener, depende de una de las incógnitas

$$A = 742D/297;$$

$$B = 178D/99;$$

$$C = 1580D/891.$$

Poniendo $D = 891\lambda$, se obtiene que $A = 2226\lambda$, $B = 1602l$ y $C = 1580\lambda$, siendo λ un número natural arbitrario. Sustituyendo en el segundo bloque de ecuaciones, se tiene:

$$12a - 7b = 11214\lambda;$$

$$20b - 9c = 14220\lambda;$$

$$30c - 11d = 9801\lambda;$$

$$42d - 13a = 28938\lambda;$$

que nos dan lugar a las soluciones:

$$a = 7206360\lambda/4657;$$

$$b = 4893246\lambda/4657;$$

$$c = 3515820\lambda/4657;$$

$$d=5439213\lambda/4657.$$

Para obtener soluciones enteras se debe poner $\lambda = 4657\delta$, siendo δ un número natural, que habrá que determinar aplicando las condiciones de la segunda parte del problema, pero de momento permite expresar a todas las incógnitas en función de este parámetro:

$$A = 10366482\delta,$$

$$B = 7460514\delta,$$

$$C = 7358060\delta,$$

$$D = 4149387\delta,$$

$$a = 7206360\delta,$$

$$b = 4893246\delta,$$

$$c = 3515820\delta,$$

$$d = 5439213\delta.$$

Conviene tener en cuenta que las cuatro primeras igualdades de éstas, que expresan *A*, *B*, *C* y *D* en función de δ tienen a 4657 como factor. Esta reflexión será utilizada después, para hallar las descomposiciones factoriales del número de toros blancos y negros y del de oscuros y manchados.

Segunda parte del problema

> ...los toros blancos unían su multitud a la de los toros negros, formaban un grupo compacto de igual medida en profundidad que en anchura, ...

Esta condición se mantiene y quiere decir que la suma de los toros blancos y negros es el cuadrado de un número natural y, por tanto, δ debe completar los factores primos para que sean cuadrados. La descomposición factorial se ha hecho con *DERIVE*. Con la calculadora es evidente que, para aislar el número primo 4657, hay que ensayar con todos los números primos hasta el 71. Tampoco es mal ejercicio que los alumnos hagan estas exploraciones numéricas. Siendo cuidadosos en la resolución, se debiera saber que este número es un factor de *A*, *B*, *C* y *D*, ya que

λ es un factor de estos números y, además, $\lambda = 4657\delta$.

$$A + B = (10366482 + 7460514)\delta = 17826996\delta = 22\cdot3\cdot11\cdot29\cdot4657\delta.$$

> ...reunidos solamente los oscuros y los manchados, se agrupaban por filas de igual longitud y los toros de una de ellas llenan un cuadrado igual de ancho que la anchura de todas las filas, sin faltar ni sobrar ninguno.

Esta es la condición que se introduce, sustituyendo a la disposición en forma triangular, y quiere decir que la suma de los toros manchados y los oscuros es el cubo de un número natural y, por tanto, δ debe completar los factores primos para que sean cubos. La descomposición factorial se ha hecho con *DERIVE*.

$$C + D = (7358060+4149387)\delta = = 11507447\delta = 7\cdot353\cdot4657d$$

Ahora la exploración numérica es más complicada que antes y podría ser un trabajo «de chinos» si no se aprovecha la información obtenida antes y comprobar que este número, 11507447, es múltiplo de 4657. Con ello, fácilmente, se aísla al número primo 353.

La parte más delicada es la discusión de los valores que puede tomar δ para que cumpla las dos condiciones, es decir, para que pueda completar un cuadrado y un cubo: de la primera condición se deduce que $\delta = 2^{2m}\cdot(3\cdot11\cdot29\cdot4657)^{2n+1}\cdot k^{2l}$, siendo m un entero positivo, y n, k y l enteros no negativos; y de la segunda, para completar un cubo, forzosamente $\delta = (7\cdot353\cdot4657)^{3p+2}\cdot h^{3q}$, siendo p, h y q enteros no negativos. Finalmente se deduce que los valores que δ puede tomar son:

$$\delta = (3\cdot11\cdot29\cdot4657)^3\cdot(7\cdot353\cdot4657)^2\cdot m^{6n},$$

siendo m y n enteros no negativos.

El menor valor de δ es

117222908778911686972120440635111941

y con él resulta que el número de reses del rebaño del Sol, $(A + B + C + D + a + + b + c + d)\delta$, es:

$$(10366482 + 7460514 + 7358060 + 4149387 + 7206360 + 4893246 + + 3515820+5439213)\cdot117222908778911686972120440635111941 =$$

5906754762739100865596508597039164030281 62 ≈
≈5.90675·1041

Rebaño de las reses del Sol ≈
≈5.90675·1041 *reses*

La población mundial actual es muy inferior a 10.000.000.000 habitantes, pero suponiendo que cada habitante consumiera 10 reses al año, lo que, sin duda, ya es mucho consumir, habría suficiente comida para $5.90675 \cdot 10^{30}$ años.

Para relacionar esta cifra con la aseveración última del problema sobre el final del mundo conviene saber que, en la actualidad, se estima que el *Big Bang* tuvo lugar hace unos 12.000 millones ($1{,}2 \cdot 10^{10}$) de años, con lo que este número de reses el final de la humanidad por escasez de alimentos no se produciría hasta un número de años del orden de 1018 veces el período que ha transcurrido desde el principio de la existencia del mundo hasta nuestros días.

Lógicamente, el matemático que resuelva esta cuestión sólo está haciendo una aplicación simple de su oficio, resolver problemas, pero el alumno que llegue hasta el final sí que puede ser calificado de habilidoso en el manejo de las ecuaciones y de los números, y suponerle en el camino correcto del aprendizaje de las Matemáticas.

Tomás Ortega
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de las Matemáticas
Facultad de Educación.
Universidad de Valladolid.
Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas

Bibliografía

FAUVEL, J. (1990): *Mathematics through history: a resource guide*, QED Books.

FERNÁNDEZ, E. y M. BANZO (1999): «El problema de Arquímedes del rebaño de las reses del Sol», *Suma*, n.° 31, 67-72.

GUELFOND, A. O. (1979): *Resolución de Ecuaciones en Números Enteros. Lecciones populares de matemáticas*, Mir, Moscú.

NCTM (1991): *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*, S.A.E.M. Editado por Thales, Utrera, Sevilla.

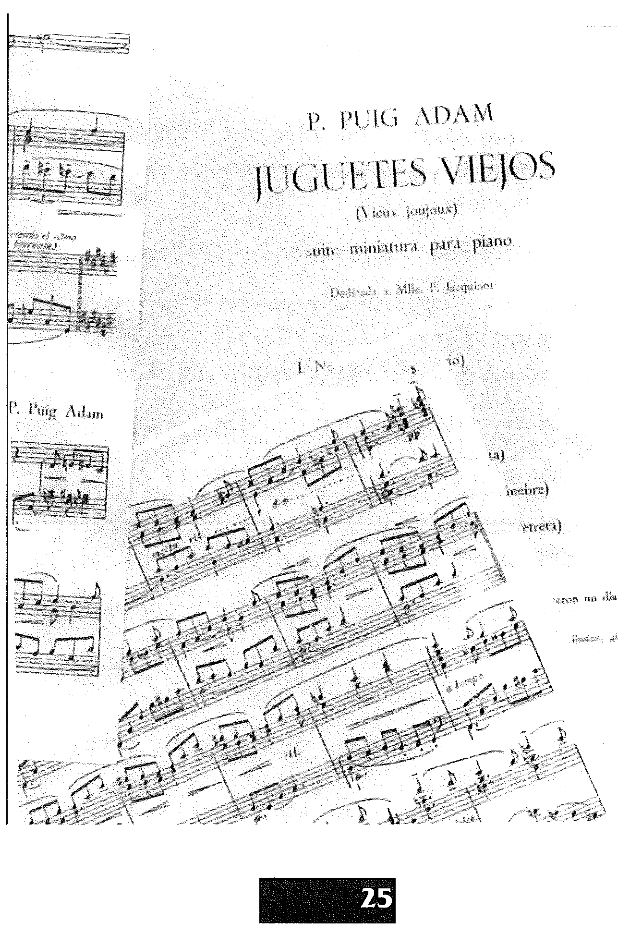
REY PASTOR, J. (1976): *Elementos de Análisis Algebraico*, Biblioteca Matemática, S. L. (Herederos de Julio Rey Pastor), Madrid, 433-441.

ORTEGA, T. (1999): «Educación en la Diversidad. Su evaluación», en T. ORTEGA (ed.): *Temas controvertidos en Educación Matemática*, Universidad de Valladolid, Valladolid.

RICO, L (1997): «Los organizadores del currículo de Matemáticas», en L. RICO (ed.): *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, Horsori-ICE Universitat de Barcelona, Barcelona, 39-60.

SIERRA, M. (1999): «Uso de la Historia de la Matemática en el aula», en T. ORTEGA (ed.): *Temas controvertidos en Educación Matemática*, Universidad de Valladolid, Valladolid.

VERA, F. (1970): *Científicos griegos*, Aguilar, Madrid.



Puig Adam
compositor musical