

SUMA 33

febrero 2000

Freudenthal es un arma cargado de futuro

MATHEMATICS AS AN EDUCATIONAL TASK

Hans Freudenthal

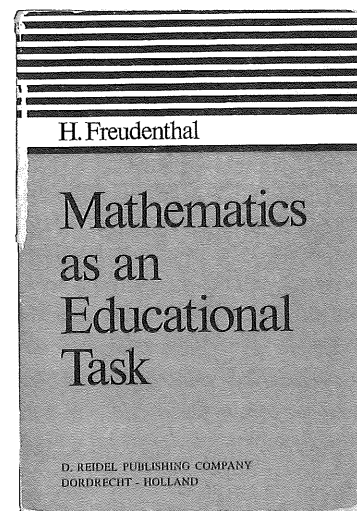
D. Reidel Publishing Company

Dordrecht (Holland), 1973

Primera edición

ISBN: 90 277 0322 1

680 páginas



En la contraportada del libro puede leerse:

Las matemáticas modernas han sido un slogan durante una década. Las matemáticas modernas, interpretadas literalmente matan la educación; interpretadas de acuerdo con su espíritu pueden darle vida. El autor sitúa las matemáticas en sus contextos, histórico, social y de desarrollo intelectual, y la educación matemática en el contexto de la educación en general, así como su desarrollo pasado y presente. En la cúspide de la producción científica, generalmente se reconoce que las matemáticas son una actividad, mucho más que un almacén de conocimientos bien establecido. La filosofía sobre la enseñanza que el autor proclama es que esta idea se aplica a todos los niveles del proceso de aprendizaje. Se analizan estos niveles en numerosos ejemplos. Esta teoría general va seguida de un análisis de varios conceptos y campos matemáticos cruciales. En oposi-

RECENSIONES

ción a la tendencia moderna a sobreestimar los aspectos cardinales, el concepto de número se analiza desde un amplio espectro, tomando en consideración los aspectos lógicos y de desarrollo intelectual. El autor muestra cuáles son los usos de la teoría de conjuntos, simultáneamente advierte de sus malas utilidades. La geometría no se presenta como la cumbre de la deductividad; su actividad pasa a ser la de explorar el espacio en que vivimos, y la de ofrecer un campo para la actividad matemática. En el capítulo dedicado al análisis se destacan la comprensión intuitiva y su relación con las aplicaciones. La probabilidad se estudia como otro modo de relacionarse con la realidad; mucho más que como ejemplo de la teoría de la medida. El ejemplo más impresionante de que la letra mata y es el espíritu el que da la vida, a saber, la lógica, se trata en el último capítulo. En un apéndice se analizan algunos trabajos de Piaget.

La característica más destacada de este libro es que es una filosofía comprensiva de la educación matemática y que analiza una gran parte de los temas matemáticos de la enseñanza de un modo en el que se integran los aspectos científicos y de enseñanza. La teoría educativa de niveles en el proceso de aprendizaje no habría sido nunca aplicada al aprendizaje matemático de una manera tan amplia como la del presente libro. También se tratan las implicaciones sociales de las matemáticas. La enseñanza de algunas partes de las matemáticas, como el análisis y la lógica nunca antes habían sido manejadas con tanta minuciosidad.

El libro se dirige a profesores de matemáticas, diseñadores de currículo, educadores, matemáticos en general, y también a físicos e ingenieros.

Hans Freudenthal nació en 1905 en Holanda, se formó como matemático en Göttingen, al lado de, entre otros, Hilbert, van der Waerden... Fue un matemático de primera fila en los años centrales de este siglo. Se dedicó a los problemas de la enseñanza de las matemáticas desde muy pronto: pues en 1950 estaba ya en la constitución de la CEIAEM (Comisión internacional para el estudio y mejora de la enseñanza de las matemáticas), al lado de Gattegno, Papy, y otros. Los miembros de esta Comisión, a la que pronto se sumaron Emma Castelnuovo y Pedro Puig Adam, conocían bien las disputas que mantenían Papy y Freudenthal. (Yo he oído al propio Freudenthal calificar a Papy de dictador, por cierto éste último todavía vive, retirado, muy mayor en Bélgica). En dicha comisión también había conocidos psicólogos como Piaget y Wallon. También eran sonados las discusiones y enfrentamientos entre Piaget y Freudenthal. Hans Freudenthal murió un día del Pilar de 1990, sentado en un banco del parque por donde le gustaba pasear.

Ya en el prólogo de su libro nos anuncia el estilo habitual de presentación de las matemáticas en su época: la inversión didáctica. Cuando hay que imprimir un resultado, un trabajo de matemáticas, el camino que lleva al resultado es justo el inverso al camino por el que se encontró; en especial, las definiciones que son el toque final de una estructura se ponen al principio. Anunciando inmediatamente que durante muchos años ha contrapuesto a la inversión didáctica el experimento mental. El experimento mental trata de mostrar cómo un estudiante puede reinventar lo que se está esperando que aprenda.

Podríamos situar esta obra de Hans Freudenthal, en una línea, mejor en un camino que continúa el trabajo de Courant y

*...durante
muchos años
ha contrapuesto
a la inversión
didáctica
el experimento
mental.
El experimento
mental trata
de mostrar cómo
un estudiante
puede reinventar
lo que
se está esperando
que aprenda.*

Robbins, en su *¿Qué es la matemática?*. Ya iniciado a su vez en este siglo por las preocupaciones que llevaron a Felix Klein a publicar *Matemáticas Elementales desde un punto de vista superior*. Camino en el que no conviene olvidar los inestimables trabajos de Polya. Que podrían resumirse en una de las frases más utilizadas por el propio Freudenthal: enseñar las matemáticas cargadas de relaciones. Muy alejados por supuesto de pensadores como Bertrand Russell, o Hardy, o el grupo Bourbaki.

Pero no sólo matemáticas cargadas de relaciones, sino también presentando las matemáticas en su enseñanza como una actividad, no como un cuerpo de doctrina terminado lista para ser exhibido.

El libro es de una enorme extensión (casi 700 páginas), está dividido en varios capítulos, diecinueve y dos apéndices. Los capítulos se pueden clasificar en dos bloques, el primero formado por los capítulos I al X, habla de ideas de tipo general, y el segundo, formado por los capítulos XI al XIX en los que aborda los grandes temas que deben ser enseñados en matemáticas. Destaca el gran espacio dedicado al desarrollo del concepto de número, cuatro capítulos, dedicando después el XV a conjuntos y funciones, el XVI a la geometría, el XVII al análisis, el XVIII a la probabilidad y estadística y el XIX a la lógica. En el apéndice I, critica a Piaget y sus investigaciones sobre el desarrollo de los conceptos matemáticos.

Los títulos de los primeros capítulos son:

- I. La tradición matemática.
- II. Las matemáticas hoy.
- III. Tradición y educación.
- IV. El método socrático.
- VI. Re-invencción.
- VII. Organización de un campo por matematización.
- VIII. El rigor matemático.
- IX. Instrucción.
- X. El profesor de matemáticas.

Dedicamos estas páginas a entresacar las ideas más importantes de tipo general, las de los diez primeros capítulos, dejando la mayoría del tiempo que sea el propio Freudenthal el que hable, es decir que esto sea un resumen, breve, de este enorme trabajo, de gran interés para todos los profe-

sores de matemáticas, pero que se ha divulgado escasamente entre nosotros por la falta de una traducción. Yo conocí este libro gracias a las noticias que de él tenía a través de Paco Hernán, a principios de los ochenta. Personalmente conocí a Hans Freudenthal en la reunión de la CIEAEM del verano del 82, en la que aproveché para invitarle a pronunciar una conferencia en las III JAEM que íbamos a organizar en marzo de 1983 en Zaragoza.

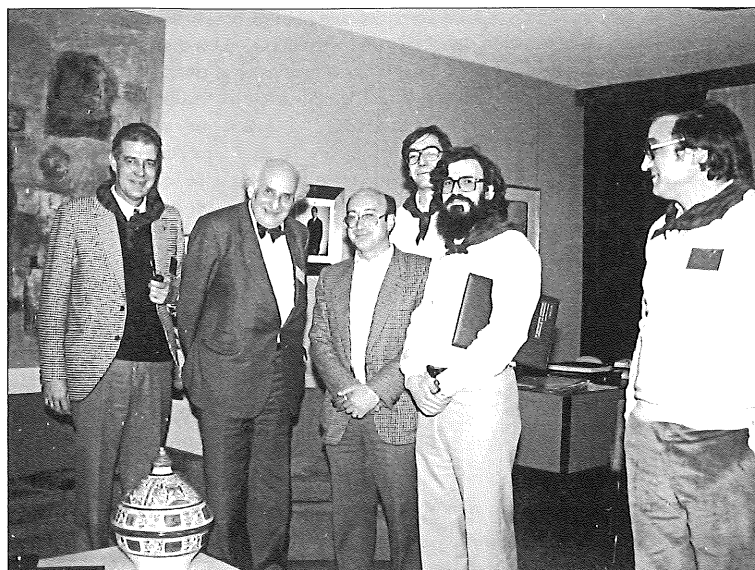
En el primer capítulo hace un resumen del desarrollo histórico de las matemáticas, desde los tiempos prehistóricos hasta el siglo XIX. Finaliza dicho capítulo con los siguientes párrafos:

El entusiasmo por la teoría de números, la geometría algebraica y las categorías no debería impedirnos a todos reconocer cuanto más pobres serían las matemáticas sin el impulso recibido de sus aplicaciones. Las matemáticas empezaron como una actividad útil, y hoy es más útil de lo que lo ha sido nunca. Esto es, sin embargo, una modesta declaración. Se debería decir: si no son útiles, las matemáticas no deberían de existir.

¿Por qué esta insistencia en la utilidad de las matemáticas? Porque no hay nada tan fácil de olvidar como un tópico. Incluso las personas responsables de la instrucción y la educación lo olvidan a menudo. No pretendo que puedan o deban negarlo. Sin embargo, la enseñanza y la educación son acción, y lo que se admite pronto de palabra, pasa normalmente mucho tiempo antes de que influya en la acción.

En el segundo capítulo habla de los cambios producidos en las matemáticas en el último siglo, haciendo especial hincapié en el cambio de estilo en la presentación de las matemáticas. Dice que los matemáticos son tan conservadores como cualquier otra persona, y que, por ello, los viejos hábitos persisten durante decenios, los nuevos se aceptan cuando se hacen inevitables. Insiste también en el papel del lenguaje y en especial del lenguaje matemático, recalando que el perfeccionamiento del lenguaje matemático es un proceso continuo, cuyo estadio final debería de ser un lenguaje tan exacto como para ser manejado por un ordenador. Uno de los rasgos de las matemáticas de este siglo es la formalización del lenguaje, otro de los rasgos es la abstracción, seguido de la axiomatización. Describe como surge un sistema axiomático con la historia del con-

*Las matemáticas
empezaron como
una actividad
útil,
y hoy es más útil
de lo que
lo ha sido nunca.
[...]
si no son útiles,
las matemáticas
no deberían
de existir.*



Hans Freudenthal en 1983, durante las III JAEM en Zaragoza
[De izquierda a derecha: G. Dorda, H. Freudenthal,
T. Escudero, F. Martín, F. Villarroja y E. Palacián]

cepto de grupo, señalando que cuando en 1870 se formula este concepto, existían ya, no sólo un gran número de grupos conocidos, sino una amplia experiencia en teoría de grupos. El concepto de grupo no se produjo coleccionando en una clase todo aquello que se consideraba grupo, sino destacando las características comunes dentro de la variedad de grupos conocidos. Es una construcción por tanto, axiomatizadora, y no extensionalista.

Acaba el capítulo diciendo que no se debe de pensar que los esfuerzos formalizadores y axiomatizadores han sido los más importantes del siglo; sino que las matemáticas aplicadas han tenido también un enorme desarrollo, destacando la estadística y la investigación operativa, incluyendo en ésta la teoría de autómatas y los sistemas de análisis de los ordenadores.

En el tercer capítulo analiza las relaciones entre el progreso y la tradición, contraponiendo ideas tales como que «el progreso técnico es tan viejo como la humanidad» al hecho de que «desde la antigüedad, la tradición ha sido el cemento de la sociedad humana». Las leyes y las clases, costumbres y hábitos son instituciones sobrehumanas, por tanto, es peligroso rebelarse contra la tradición. Hay toda una corriente filosófica de la historia que defiende la tradición y ataca el progreso, pero pese a ella, la historia humana ha sido una historia del progreso. Los inventores y artistas sabían, y saben bien, que es peligroso ser innovador; por ello nunca pretendían innovar.

También señala que los prejuicios pueden sobrevivir un tiempo sorprendentemente largo, incluso entre los científicos.

Acaba este capítulo diciendo:

Hasta ahora, la educación en Europa Occidental ha sido educación de elite, es decir educación de una elite, o al menos para

una elite. Esta tendencia, ¡ay!, ha sido reforzada por muchos de los movimientos de innovación. Igual que en matemáticas, temo que estos programas y métodos educativos estén influidos por la creencia, natural para todo matemático, de que la educación matemática es la educación para llegar a ser matemático —aquellos que no pueden seguir el ritmo tienen que abandonar—. Y para aquellos que abandonan o que ni siquiera se han embarcado nunca, se les da otra taza de esas matemáticas para la elite. Incluso en los Estados Unidos con su mayor experiencia en matemáticas para todos, la educación matemática de masas está todavía en estado experimental, sin una imagen convincente de unas matemáticas nuevas para todos. Hay una cosa que nos hace mucha falta, saber qué es una matemática para una elite o para todos —una imagen de las matemáticas para la totalidad de la educación—.

El capítulo cuarto está dedicado a analizar la utilización y objetivos de la educación matemática, empieza diciendo que el gran problema de la educación matemática es la distancia entre su uso y sus objetivos. Distancia que es mucho mayor en educación matemática que en otras materias, por ejemplo cuando un niño aprende a leer y/o a escribir, el objetivo está claro.

En ese sentido la aritmética no sería muy diferente, pero cabe preguntarse: cuál es el objetivo del aprendizaje de la aritmética. El uso de $2+3$ está claro, pero cuál es el de las largas divisiones o de las fracciones de fracciones en numerador y denominador. Las personas se han vuelto cada vez más escépticas respecto de la aritmética pura como asignatura, porque si los problemas se vuelven más complicados, confían más en los ordenadores.

Está hablando en 1970, y todavía hoy, año 2000, nos encontramos que en muchos centros escolares la situación no ha cambiado.

Inmediatamente advierte contra el peligro de una clase en la que los alumnos sean unos fantásticos calculadores,

puesto que los alumnos de poca edad son fácilmente moldeables y los experimentos educativos muestran que casi todo puede ser enseñado, a condición de que se haga bien y de modo tajante. Entre los maestros de escuela hay, o había, fanáticos del cálculo, que creen en él y en su valor educativo.

A continuación, se siente asustado por el peligro de que pronto las matemáticas serán enseñadas por personas que ni siquiera saben lo que son las matemáticas. Añade:

no hay manera de decir positivamente cuál es el objetivo de la instrucción matemática, las matemáticas admiten numerosas aplicaciones, pero no podemos decir qué conceptos y técnicas matemáticos necesitarán nuestros alumnos en el futuro no es sencillo, al contrario, las matemáticas son tan flexibles que ni individual ni colectivamente podemos dar contornos más precisos, que un puñado de generalidades. Esto podría significar libertad casi total para prescribir currículos.

Un profesor que tenga éxito enseñando un tema aislado puede ser aclamado, pero su éxito es pasajero, pues ninguna materia aislada se puede enseñar con éxito. Lo que realmente importa es saber cómo el tema encaja en el cuerpo de la enseñanza de las matemáticas, si se integra en el todo, o es tan aislado que no dejará ninguna huella.

Por otro lado, que algunos temas se puedan enseñar, no quiere decir que se deban enseñar, en la instrucción matemática hay prioridades que no se pueden ignorar. Es muy peligroso argumentar que el tema es divertido; es un argumento hipócrita porque no se utiliza el criterio de placer de los estudiantes para ele-

*...junto con
el futuro
matemático
hay otros
muchos alumnos
que deben
de aprender
matemáticas,
que son
una minoría los
que en un futuro
aplicarán
unas matemáticas
sofisticadas,
y que incluso
los que nunca
aplicarán
las matemáticas
en su vida,
deben
de aprender
matemáticas
porque
las necesitan
como uno de
los aspectos
de su existencia
como seres
humanos.*

gir los temas. A los niños les gusta resolver problemas de cálculo, dibujar, copiar, pero el profesor que abuse de ello no es un educador, es un demagogo. Sencillamente, el gusto también se puede educar.

No se puede decir que no importa qué matemáticas se enseñen, pues nadie puede predecir lo que un niño necesitará, pero con bastante certeza se puede predecir que probablemente no será un matemático. Certeza que disminuye al pasar de la escuela primaria a la secundaria, vuelve a disminuir si en secundaria superior elige la rama de ciencias, y de nuevo en la universidad. Una y otra vez deberíamos resaltar este punto: que junto con el futuro matemático hay otros muchos alumnos que deben de aprender matemáticas, que son una minoría los que en un futuro aplicarán unas matemáticas sofisticadas, y que incluso los que nunca aplicarán las matemáticas en su vida, deben de aprender matemáticas porque las necesitan como uno de los aspectos de su existencia como seres humanos.

La inclinación natural de un matemático es formar matemáticos; al preparar una lección el profesor es probable que se imagine al alumno al que le gustaría enseñar y que sea bastante parecido a él; pero un matemático nunca debe olvidar que las matemáticas son demasiado importantes para estructurar su enseñanza de acuerdo con las necesidades de los futuros matemáticos. La mente matemática se expresa ella misma en la tendencia a matematizar las matemáticas. Por supuesto que los estudiantes deben de aprender a matematizar: para empezar situaciones reales; matematizar situaciones matemáticas puede ser el punto de llegada, pero nunca el de partida. El sistema de las matemáticas irradia un innegable encanto estético que, sin embargo, no puede ser aprehendido por las personas que no tienen un profundo conocimiento de las matemáticas, pero no puede ser el objetivo de una educación matemática general. Si la enseñanza sigue el sistema, es antididáctico, por ejemplo la anticipación del punto de vista afín frente al métrico, dictada por el sistematismo.

Un poco más adelante, habla de las aplicaciones, y entre otros ejemplos cita la situación de los profesores de física de secundaria que evitan en lo posible el uso de funciones, tratando de reducir todas las matemáticas a la sustitución de valores numéricos.

Esta desmatematización de la ciencia perjudica, a la vez, a la educación matemática y a la científica. Es el resultado de cultivar una matemática estéril y una ciencia depravada. Ni las matemáticas ni la ciencia podrían haber llegado a su estado actual si

las matemáticas no hubiesen ayudado a la ciencia y si los matemáticos no hubieran aprendido de esta ayuda cuáles son los problemas importantes. Si queremos enseñar a los alumnos a aplicar las matemáticas, deberíamos hacer más fácil para él, el aplicarlas. En general, el profesor de matemáticas no sabe cómo se aplican las matemáticas, y no podemos culparlo de esta ignorancia. ¿Dónde tendría que haberlo aprendido?

Pasa a continuación al argumento fundamental del capítulo y del libro: los temas relacionados se aprenden más rápido y se retienen más tiempo. Pero hay más de una clase de conexiones, unas las del profesor, otras las del autor del libro de texto.

Cita la mala traducción de la palabra aplicadas, desde el francés, que mejor sería haber traducido por matemáticas aplicándose, lo que le sirve para decir que no quiere que se enseñen matemáticas aplicadas, sino que se enseñe a aplicar las matemáticas. Ya Comenius decía que cualquier cosa que se aprende debe de hacerse CARGADA DE RELACIONES.

No obstante, no se puede evitar que al principio de la instrucción en aritmética, geometría y teoría de conjuntos, falten las relaciones esenciales de estos dominios. En un nivel más alto pueden construirse, pero no se deben anticipar, ni siquiera si el profesor no puede evitar dar gusto a sus pasiones lógico estéticas en el aula. Los temas matemáticos deben estar interconectados, pero las conexiones no necesitan ser dirigidas, ni intramatemáticas.

Para enseñar matemáticas conectadas no es prudente empezar buscando conexiones directas, más bien se deben encontrar los puntos de contacto en los que las matemáticas se ligan a la realidad vivida del estudiante. La realidad es el almacén al que las mismas matemáticas se ligan y, en un oportuno proceso de maduración las conexiones se desarrollarán.

Cualquiera puede comprobar consigo mismo lo rápido que los temas no relacionados se olvidaron. Antes citaba que los niños pueden aprender (casi) cualquier cosa, pero otro hecho innegable es que después lo olvidan completamente. Un experimento de enseñanza es irrelevante si no dice con qué profundidad se fija el tema enseñado, y cuánto tiempo permanece activo. La profundidad de la fijación no es más que la propiedad de conectarse con la realidad vivida, y su persistencia puede garantizarse por la fuerza de estas relaciones.

*...como
educadores
rehusamos
aceptar
la selección
como objetivo
de la educación
y como
matemáticos
creemos que
las matemáticas
son demasiado
nobles
para ser
utilizadas
con tal fin.*

Dedica interesantes párrafos a la analogía:

La analogía es un medio muy efectivo de construcción de relaciones dentro y fuera de las matemáticas debido a que es el más natural y primitivo de todos los medios que se han utilizado para intentar organizar el mundo. Su sobreestimación es peligrosa, en particular en matemáticas, pero para valorarlo correctamente uno tiene que aprender su aplicación conscientemente.

El argumento principal que subyace en el capítulo es que las matemáticas que se van aprendiendo sirvan para conectar diversos campos de conocimiento y además que perduren en la mente del aprendiz, durante tiempo, por ello dice:

La riqueza de las relaciones debe de garantizar que las matemáticas una vez aprendidas no se olviden fácilmente. Pero no ser olvidadas no es un criterio suficiente para decidir qué matemáticas deben ser aprendidas, no es ni siquiera necesario. Lo que importa es la operatividad, y esto es verdad, tanto en la vida individual como en la historia. Cientos de intentos abortados sobre la trisección del ángulo fueron necesarios para preparar la teoría de Galois, no eran callejones sin salida, sino que eran intentos operativos. Lo que importa no es que las matemáticas que uno aprende no se olviden, sino que hayan sido y sean todavía, operativas. Para intentarlo, se deben enseñar las matemáticas cargadas de relaciones.

Entre las siete artes liberales, cuando las humanidades incluían las matemáticas; éstas eran las ciencias de linaje más noble, eran una disciplina mental, una piedra de afilar el ingenio, así eran queridas por todos los que querían disciplinar la mente. En Francia, el interés de Napoleón por las matemáticas estableció las Grandes Écoles, como escuelas matemáticas con fundamentos militares. Los militares franceses decían que su éxito se debía a las matemáticas; pero no era la educación matemática la que elevaba a los militares franceses por encima de las otras naciones, sino más bien la selección por medio de las matemáticas, que aparentemente estaba mejor hecha que por privilegios de nobleza o por capacidades juristas o filológicas. Así históricamente las matemáticas como disciplina de la mente fueron un factor importante. Montones de alumnos desafortunados tuvieron que aprender muchas matemáticas para justificar la existencia de sus profesores que a su vez estudiaban matemáticas para justificar a otros profesores que creaban matemáticas que, cuando la tecnología las necesitaba, mostraron ser útiles. Hoy las matemáticas son una ciencia enormemente útil que para alcanzar este estado ha tenido, sin embargo, que atravesar el desierto de la inutilidad, unas matemáticas inútiles, como disciplina mental.

No es la Historia una extraña consejera. Colón descubrió América creyendo que era la India. Posiblemente el talento matemático es universal, en el sentido de que es un síntoma de capacidades más generales. Cualquier enseñante lo confirma: la persona que es buena en matemáticas, normalmente es también buena en otros campos. Que lo único que significa es que las matemáticas son un buen examen de selección. Se podría concluir de ello que el objetivo de la enseñanza de las matemáticas es la selección de estudiantes. Pero nuestro objetivo es luchar contra este objetivo, como educadores rehusamos aceptar la selección como objetivo de la educación y como matemáticos creemos que las matemáticas son demasiado nobles para ser utilizadas con tal fin.

No obstante señala:

Examinar es una actividad significativa: el enseñante tiene que ser capaz de comprobar la influencia del proceso de enseñanza, y el estudiante tiene derecho a saber si realmente aprende algo.

Volviendo a la cuestión de si las matemáticas son una disciplina de la mente, su respuesta es «sí»:

Desde la antigüedad estaba claro que el pensamiento lógico tenía que formarse a través de las matemáticas. Junto al famoso «Todos los hombres son mortales...» hay otros patrones de pensamiento; a menudo el pensamiento procede informalmente, es decir por analogía.

Otro factor imprescindible a tener en cuenta es el lenguaje, frente a ello señala que muchas experiencias de Piaget se refieren no al desarrollo cognitivo, sino al lingüístico.

Las matemáticas tienen tan alta consideración porque son un medio de resolver muchos problemas. Esta fe en las matemáticas tiene una primera fuente: el encanto de los números y, una segunda, las reminiscencias de la instrucción aritmética. Cuando faltan algunos datos para resolver un cierto problema, las personas se dirigen a los matemáticos. Cuando un matemático resuelve un problema, le distingue del no-matemático que una vez resuelto intenta unificar los resultados en una demostración. De manera que esta manera de enfrentarse a los problemas para inventarse en ellos demostraciones sería una actividad más allá de la resolución local de problemas para construir un sistema de autoconfianza en matemáticas.

El capítulo cinco está dedicado al método socrático, expuesto en el Menón de Platón. Empieza señalando que el método socrático es uno de los fundamentales de la enseñanza, o mejor dicho debería serlo, pues muchos de nuestros contemporáneos son todavía pre-socráticos. Incluso un conferenciante puede utilizar dicho método; el conferenciante ha sido sólo el partero de los pensamientos de los oyentes, que sienten que el orador «expresó mis pensamientos más íntimos».

Método socrático o método del experimento mental como lo llamó Mach que lo describió como un método de la física teórica, el método central desde Galileo hasta Einstein.

Freudenthal en didáctica entiende por experimento mental la actitud de un profesor o de un autor de libro de texto que se imagina a un estudiante o un grupo de estudiantes y les enseña sus pensamientos mientras reacciona por adelantado a sus probables reacciones. Los estudiantes imaginados son activos y su actividad permite al profesor determinar su camino. En cierto sentido la cuestión por enseñar se re-inventa, se re-descubre, en el transcurso de la enseñanza. La materia no se presenta de modo dogmático sino que se origina a los ojos de los estudiantes. Si bien, en el método socrático, la actividad de los estudiantes es una ficción.

Lo contrario de este método es lo que los franceses llaman «paracaidismo», donde las ideas «vienen del cielo». Los matemáticos sucumben fácilmente a la tentación de este método. La matemática está interrelacionada lógicamente; de una definición se deduce un teorema que se prueba; el camino discurre por un riguroso sistema lógico que alguien ha diseñado y, por tanto, decretado. Es muy difícil cambiar la mentalidad del profesor que ha inventado dicho sistema. El peligro es que dicho profesor apenas puede comprender que además del sistema lógico existen otros puntos de vista.

Empieza a esbozar cómo habría de enseñarse, sin pretender nunca más que dar sugerencias, que el resto de enseñantes puedan readaptar a su situación:

*Pretender que
las ideas
se enseñen
genéticamente
no quiere decir
que tengan
que presentarse
en el orden
en que surgieron,
ni tampoco
con todos
los callejones
sin salida
ni todos
sus vericuetos.
Genéticamente
quiere decir
en desacuerdo
con Bourbaki.*

Pretender que las ideas se enseñen genéticamente no quiere decir que tengan que presentarse en el orden en que surgieron, ni tampoco con todos los callejones sin salida ni todos sus vericuetos. Genéticamente quiere decir en desacuerdo con Bourbaki. Como educador no me importa cómo se desarrollan espontáneamente las matemáticas en un individuo, me gusta saber cómo se originan las matemáticas bajo la guía de un buen profesor y cómo yo podría enseñarlas. El énfasis está en «se originan» que es lo contrario de «se imponen».

Pero no necesitamos hoy compartir la creencia de Sócrates en la preexistencia; así lo que queda es el aprendizaje por redescubrimiento; donde el «re» no quiere decir la prehistoria del aprendiz, sino la historia de la humanidad.

Existe otro método totalmente diferente; su filosofía es que la instrucción tiene que ser sistemática, y el sistema tiene que ser el resultado de un análisis lógico del tema. De tal suerte que si el análisis de las matemáticas muestra que las matemáticas tienen una estructura deductiva, entonces las matemáticas tienen que ponerse en marcha según dicha estructura, o más precisamente según un sistema deductivo especial; es lo que llamo la inversión antididáctica. Es el modo en que los matemáticos escribimos nuestros artículos. Concebimos la formación del pensamiento que nos lleva al resultado; el modo en que nos viene una idea concreta no le importa a nadie. Como matemáticos servimos para objetivar que, en sí mismo es un buen hábito. Los artículos matemáticos están escritos para expertos que conocen los trucos, que están bien formados para leer en el artículo acabado, la manera como se podría haber inventado. Los autores de los textos escolares, a los que fascina este estilo, olvidan que no están escribiendo para matemáticos, y que el estudiante probablemente no tiene la menor idea de cómo utilizar el texto.

A continuación comienza un análisis de los numerosos programas de matemáticas modernas que circularon durante los años sesenta, diciendo:

puede ser importante discutir cuánta teoría de conjuntos o cuánta álgebra lineal o moderna tiene que enseñarse en la escuela; pero luego los argumentos decisivos deben ser todos de naturaleza didáctica, pero aquellos programas no permitían una discusión didáctica: el matemático ha suplantado al educador. Si un matemático tuviera que publicar alguna de las ideas que le llevan al resultado sentiría como si le pusieran en ropa interior en medio de la calle; comunica el resultado, a la vez que

oculta el modo en que lo ha logrado. Pero lo que resulta entonces no es objetivo, sino dogmático.

Sigue un análisis más profundo respecto de la geometría afín que revela que lo que se pretende enseñar a los alumnos son matemáticas terminadas, prefabricadas por el matemático adulto que sabe las partes que se conectan, pero que al alumno le parecen un montón de ladrillos aislados y sin sentido.

Plantea a continuación el problema que tendrían los autores de libros de textos si los escribieran en el modo en que se desarrolla una clase comenzando por definiciones provisionales que unas páginas más tarde se deben cambiar, es lo que llama la «maldición de la imprenta».

El libro ha sido el mayor enemigo del método socrático. ¿Qué debería de sustituir al libro de texto? ¿Publicando experimentos? Sí, pero entiendo por ello lecciones que realmente han sido enseñadas. Pero esto no se ha hecho a menudo. El ejemplo más llamativo es el conjunto de libros de G. Polya.

Sigue uno de los capítulos más interesantes el sexto dedicado a la Re-inversión, empieza con una cita de Comenius:

El mejor método de enseñar una actividad es mostrarla.

El principio más importante de Comenius es que el alumno aprende tomando la realidad en su totalidad sensual y no sólo por palabras. Las tres etapas del método de enseñanza de Comenius son: ejemplo, prescripción e imitación. La tarea del alumno es experimentar, comprender e imitar.

Freudenthal prefiere parafrasear a Comenius así:

El mejor modo de aprender una actividad es practicarla.

Es decir, el interés se cambia del enseñar al aprender, de la acción del profesor a la del alumno, de los efectos sensitivos a los motores.

Desde Comenius todo se ha vuelto más complejo, pero sobre todo la teoría se ha desarrollado tanto y su carácter ha variado tan profundamente que ya no se puede sostener la división del proceso de enseñanza de Comenius. También se ha desarrollado mucho la pedagogía, además las pretendidas fronteras entre experiencia sensual, teoría y praxis se desvanecen.

¡Qué extraño parece un mundo que tiene fronteras artificiales entre el pensamiento y

*No es
una metáfora
decir
que pensar
y planear
es actuar.*

*...el alumno
abandonaba
la escuela con
una imagen
perversa de
las matemáticas
que quedaba
instalada
en su mente
durante
muchos años.*

la acción! Pero hay un ejemplo sobresaliente de ello: *Los Elementos* de Euclides.

Otro asunto que ha cambiado desde entonces es la relación entre el pensar y el actuar. Se hizo una distinción entre el trabajo intelectual y el manual, pero ¿dónde empieza uno y donde termina el otro?

No es una metáfora decir que pensar y planear es actuar.

El punto esencial del capítulo es la distinción entre matemáticas terminadas, listas para su uso y matemáticas en acción, aplicándose. Hay que saber que junto a la matemática terminada existe una matemática como actividad.

Hasta la fecha las matemáticas sólo se han analizado como un producto terminado. Por ejemplo en los *Principia Mathematica* de B. Russell y Whitehead. No hay preguntas, no hay problemas, además carece de todos los medios lingüísticos para formular cuestiones y problemas.

Explica cómo lee personalmente los artículos de matemáticas:

Empiezo con los resultados, reflexiono sobre ellos, si no los puedo confirmar busco a través del artículo alguna indicación; si al final y por mis propios medios y un poco de copia confirmo los resultados, estoy preparado para leer los artículos otra vez sistemáticamente. Creo que casi todo el mundo lee los artículos así, tratan de re-inventar los contenidos del artículo.

Sabemos que nadie puede entender el producto terminado. En pocos siglos el centro de gravedad cambió de la ciencia terminada a la ciencia activa; proceso que condujo a la formación y secesión de las matemáticas escolares. Difieren tanto de las matemáticas verdaderas que ya al comienzo del siglo XX se advirtió una doble fractura en la educación matemática, incluyendo discontinuidades en la formación de los profesores de matemáticas que al pasar de la escuela e institutos a la universidad tenían que olvidar las matemáticas escolares, mientras que unos años después cuando volvían a la escuela como profesores tenían que olvidar las matemáticas universitarias y reconstruir los hilos que habían roto unos pocos años antes. Esta doble ruptura fue advertida, pero no fue reparada. El antagonismo se produjo entre una ciencia activa bajo la responsabilidad competente de sus adeptos, y una ciencia acabada, colección de algoritmos, un bello cuento para niños de escuela. Por supuesto que para ser enseñada la ciencia tiene que ser adaptada al nivel de los alumnos, pero lo que aquí señalo es que la versión de cuento de hadas se desarrolló independientemente de las verdaderas matemáticas. Después de un siglo de autonomía, las matemáticas escolares han llegado a un callejón sin salida que no lleva ni a las matemáticas superiores, ni a la vida.

Este desarrollo fue consecuencia de la colisión entre dos esfuerzos poco compatibles. El primero de ellos era el de enseñar matemáticas, enseñar un sistema deductivo, una ciencia terminada. El segundo esfuerzo venía de la pedagogía, era estimular un aprendizaje activo. Así la única oportunidad que se dejaba a la actividad de los estudiantes era en las llamadas aplicaciones, es decir, en los problemas; que no podían traer consigo verdaderas matemáticas puesto que esta posibilidad había sido extirpada cuando las matemáticas se introdujeron como ciencia terminada. Lo que quedaba para los problemas eran unas matemáticas ridiculizadas, cuyo nivel más bajo era el de sustituir valores particulares para los parámetros en fórmulas generales o modelos de pensamiento de la teoría; ... a esto le llamaban aplicaciones. Entonces el alumno abandonaba la escuela con una imagen perversa de las matemáticas que quedaba instalada en su mente durante muchos años.

H. F. señala que estamos en peligro de repetir la misma historia, hoy estamos en condiciones de afirmar que efectivamente se ha repetido en bastantes lugares de Europa. Los temores que él expresa de ver las matemáticas nuevas como unas matemáticas escolares autónomas, se han confirmado plenamente con un conjunto de problemas que compiten con éxito en el absurdo con los problemas tradicionales. La causa es la misma, lo único que el alumno puede hacer con las matemáticas terminadas es reproducirlas.

La importancia creciente de las matemáticas ha incrementado la urgencia del problema didáctico. Si las matemáticas existen para ser aplicadas, entonces aplicar las matemáticas tiene que ser enseñado y aprendido; pero las matemáticas se aplican creándolas cada vez de nuevo; esta actividad no se puede ejercer nunca aprendiendo matemáticas como un producto terminado. Dominar los algoritmos puede ser indispensable, pero no crea ocasiones de aprender matemáticas aplicándose.

Hoy pedimos que el propio alumno re-invente las matemáticas. Ningún tema del programa se debe imponer al estudiante como un producto ya terminado. La ciencia en su punto máximo siempre ha sido invención creativa. El proceso de aprendizaje debe incluir fases de invención directa, no en su sentido objetivo, sino en el subjetivo, desde el punto de vista del estudiante. Se cree que el conocimiento y la capacidad adquiridas por reinención se comprenden mejor y se mantienen más fácilmente que si se adquieren de un modo menos activo.

Con estos antecedentes, lo que a continuación defiende H. F. es que hay que analizar el tema que se va a enseñar como una actividad; pero que se ha hecho poco para analizar las matemáticas como una actividad. Un ejemplo antiguo y bello se debe a T. Ehrenfest-Afanasjewa, de 1931, su análisis de la geometría activa se distingue claramente e influyó fuertemente en los van Hiele.

Fueron precisamente estos trabajos de Ehrenfest los que hicieron caer en la cuenta a H. F.:

de que el método de enseñanza debe de ser la re-inversión, analizando las matemáticas como una actividad.

Lo que aquí llamo reinversión en otros lugares se llama redescubrimiento; pero considera la palabra reinversión más amplia, cita a continuación a los Van Hiele como los que mejor han interpretado los niveles en el proceso de aprendizaje.

A continuación sigue una larga explicación de los niveles de van Hiele, explicación que sirvió en los años 70 y 80 en nuestro país para que grupos como el Cero de Valencia, y otros los conociesen y empezasen a difundirlos a través de escuelas de verano o de otro tipo de cursos. La idea fundamental de los niveles es que si comparamos dos niveles sucesivos, en el más alto la acción del nivel más bajo se convierte en objeto de análisis.

Otro punto importante que señala en este capítulo es que la actividad matemática es, además, una actividad de organización de campos de experiencia.

La geometría, según los van Hiele, y con ello está de acuerdo H. F. debería de empezar con la organización matemática de los fenómenos en el espacio, dando oportunidad al estudiante de aprender a matematizar un tema no-matemático; una importante conexión entre matemáticas puras y aplicadas.

*Si
las matemáticas
existen para
ser aplicadas,
entonces aplicar
las matemáticas
tiene
que ser enseñado
y aprendido;
pero
las matemáticas
se aplican
creándolas
cada vez
de nuevo;
esta actividad
no se puede
ejercer
nunca
aprendiendo
matemáticas
como un producto
terminado.
Dominar
los algoritmos
puede
ser indispensable,
pero no crea
ocasiones
de aprender
matemáticas
aplicándose.*

Cita más adelante un texto de los van Hiele:

Si se le enseñan a un alumno habilidades por encima de su nivel real, hay que describir las acciones que tiene que realizar por medio de reglas planas, los algoritmos, que pueden ser manipuladas sin ninguna referencia al sentido de las acciones. Con ello puede suceder que un proceso de aprendizaje sea obstruido definitivamente porque al alumno no se le ha dado la oportunidad de avanzar al nivel más alto.

Además los van Hiele advirtieron saltos en el proceso de aprendizaje; saltos que revelan la presencia de niveles.

A continuación insiste en que

la actividad en el nivel inferior, no debe ser descuidada en el proceso de aprendizaje, nivel prematemático, por tanto relevante en grado máximo. El niño está jugando un juego; el juego es enormemente importante pero es el nivel más bajo, que quiere decir indispensable y transitorio.

En el siguiente nivel el niño debe reflexionar sobre lo que hizo en el nivel inferior; aquí empezarían las matemáticas.

Advierte socarronamente que «se le pueden enseñar al niño una cantidad asombrosa de temas matemáticos, siempre que se hayan eliminado de ellos todas las matemáticas».

Pero ello significa que están en el nivel inferior, y los alumnos deben ser orientados en sus actividades para poder progresar al siguiente nivel.

Termina el capítulo resumiendo:

...la actividad estimulada por re-inversión en el nivel inferior es una necesidad. Es significativa en tanto en cuanto tiene lugar bajo condiciones en las que es preparatoria más que un juego no esencial. La re-inversión, que es un principio didáctico para investigar el nivel, debe de ser el principio de toda la educación matemática, no sólo en el nivel inferior, donde está demasiado próxima del juego, para mostrar rasgos acusadamente matemáticos.

El capítulo VII se titula «Organización de un Campo por matematización», después del análisis local, pasa a estudiar la posibilidad de un análisis global de las matemáticas, indicando que la estructura global de las matemáticas no es un esqueleto rígido, sino algo que nace y parece en el proceso de aprendizaje.

La fuerza global estructurante debe de ser vivida a través de la realidad. Sólo de esta manera podemos enseñar matemáticas cargadas de relaciones, para que el estudiante

pueda integrar las matemáticas que ha aprendido y garantizar así la aplicabilidad de las matemáticas aprendidas.

La tradicional enseñanza de la aritmética nos muestra el camino correcto; si se tienen que enseñar las matemáticas cargadas de relaciones, se deben de ligar al otro término de la relación, empezar con ello una y otra vez. Por ejemplo, los números negativos deben empezar en la palanca si tienen que aplicarse en la palanca, los logaritmos con la presión del aire o la hipérbola si es allí donde se tienen que aplicar, la derivada con la velocidad, la densidad y la aceleración, y la función lineal con todas aquellas proporcionalidades que hay en la naturaleza y la sociedad.

El estudiante debe de aprender a matematizar situaciones no matemáticas, comprender las formas espaciales como figuras es matematizar el espacio. Ordenar los teoremas geométricos para obtener todos ellos a partir de unos pocos es matematizar (o axiomatizar) la geometría. De nuevo, organizar este sistema con medios lingüísticos es matematizar un tema, es la formalización. La historia se repite: cada afirmación general sobre paralelogramos es una afirmación matemática, pero el total de estas afirmaciones es en sí mismo un revoltijo, que se convierte en matemáticas si se estructura por medio de relaciones lógicas, y esto es matematizar. Los teoremas de geometría son un desorden, por matematización axiomática, este conglomerado se matematiza. Este mismo es lingüísticamente un galimatías, como todo lo que se expresa en lenguaje ordinario; aquí la organización lingüística conduce a un sistema formal.

No hay duda de que los alumnos tienen que aprender a matematizar, en todos los niveles en que actúen; hasta dónde se deba llegar se podrá discutir más adelante. Sin embargo si la axiomática y la formalización se enseñan, axiomatizar y formalizar no pueden ser omitidos. No hay matemáticas sin matematizar, ni axiomática sin axiomatizar, ni formalismo sin formalizar.

A veces esto se entiende de manera estrecha, por ejemplo los que hablan de *problem solving*, presentan en general el problema de una manera demasiado abstracta; el problema debería de nacer de la situación, y el estudiante debería de aprender a reconocer el problema en la situación. El nacimiento de un problema también son matemáticas.

Ahora está claro lo que H. F. entiende por organización de un campo por matematización: es el acercamiento en sentido amplio, que tiene que garantizar la estructura global.

*No hay duda de
que los alumnos
tienen
que aprender
a matematizar,
en todos
los niveles
en que actúen;
hasta dónde
se deba llegar
se podrá
discutir...*

Si las matemáticas se tratan a partir de sus temas, sacaremos más partido de ellos; los más convincentes vienen de la geometría: tipos de cuadriláteros, simetrías, embalsados, concepto de ángulo, algebraización de la geometría; pero también de otros dominios: las leyes de la palanca, la matematización de la microeconomía, la construcción del análisis a partir de métodos numéricos, el estudio de las ondas. Muchos de los temas vienen de la física, lo que nos lleva a hablar de la integración de disciplinas, y el estudio de la ciencia integrada, a través de los proyectos: el agua, la nutrición, el espacio, apropiados para la exploración fenomenológica, pero menos para practicar la ciencia de modo más teórico. Al menos desde los catorce años una coordinación bien organizada debería de ser mejor que la integración, sino antes. Puesto que las matemáticas tienen gran ventaja en su comienzo sobre las otras ciencias, al menos en nuestro sistema educativo; pero esto no debe impedirnos la coordinación, en particular con la física. Por ejemplo, en física se establece la ley de refracción, pero no se puede formalizar porque la tradición de enseñanza matemática no permite usar los senos hasta más adelante, porque en el sistema, la trigonometría es un todo. En el sistema o todo o nada. ¿No podría ser el seno un maravilloso ejemplo de una función matemática introducida gráficamente a partir de un círculo? Incluso es uno de los primeros ejemplos de función que tiene que aprender un estudiante. Otro ejemplo: el cálculo siempre llega demasiado tarde para la física. Sin embargo lo que el físico necesita, conceptos de cociente diferencial e integral y derivadas e integrales de unas pocas funciones no debería de llegar tarde; incluso conceptos matemáticos fuertemente motivados por sus aplicaciones en las lecciones de física, como gradiente, ni siquiera se mencionan en las clases de matemáticas. Pero no olvidemos que los físicos están mucho más hipnotizados por el sistema: Leyes del tipo de la gravitación o la de Coulomb, que matemáticamente van juntas, se tratan por separado. Todas las magnitudes específicas que podrían ayudar al matemático a ilustrar y motivar las funciones lineales llegan mucho más tarde en física.

Pero si la instrucción física y matemática tienen que estar coordinadas, tanto físicos como matemáticos tienen que abjurar del sistema. Pero ¿es prudente complicar la tarea de modernizar la instrucción matemática modernizándola con la física? Se ha hecho en Alemania, donde hay una unión personal de la enseñanza física y matemática, pero en otros países necesitarían serias medidas de formación del profesorado.

A lo que añade otra cuestión:

¿es realmente necesaria la coordinación de la enseñanza de ambas materias? Al examinar libros de texto de física se diría que no, el físico no se fía de las matemáticas, y por tanto el matemático no necesita hacer esfuerzos para agradar al físico. Es el círculo vicioso de la indiferencia, pero si sigue así, acabará con el aislamiento mutuo y completo de las enseñanzas de la física y la matemática.

Después hace un análisis de los algoritmos, comenzando por el de la suma, comparando el ábaco, como nivel inferior, donde el calculador no necesita saber lo que está haciendo, pero al traducir sus acciones del ábaco al papel necesita comprender lo que está haciendo, si bien esto se puede hacer automatizando las acciones hasta tal punto que las reglas desaparecen de la propia consciencia, o si se conoce como funcionan las cifras, se pueden corregir los errores de cálculo.

Por supuesto que se puede confrontar al niño con algoritmos listos para su uso, para hacerle saltar niveles intermedios, pero eso puede detener un proceso de aprendizaje. El mejor modo de

aprender un truco es descubrirlo; nada es tan convincente como el descubrimiento personal; si no se le da al niño el tiempo que necesita, y el algoritmo se le impone bruscamente, seguirá una mala reacción. Los algoritmos tienen que aplicarse como rutinas, pero hasta que no funcionen perfectamente no es útil aplicarlos como rutinas.

No hay que olvidar que los algoritmos son de la mayor importancia en matemáticas. Hay hoy fuertes tendencias a la algoritmización y en la enseñanza los algoritmos son tentadores, tanto para profesores como para alumnos; para los primeros que en lugar de enseñar matemáticas enseñan algoritmos, para los alumnos que fácilmente se sienten cautivados por el buen funcionamiento del algoritmo.

Junto a los algoritmos están las estrategias, las tácticas, los patrones, que deben de ser practicados pero no demasiado temprano, y no hasta que el alumno sea capaz de reinventarlos por sí mismo.

Concluye el capítulo con una lección:

...problemas didácticamente fértiles no deben ser demasiado sencillos, no deben ser demasiado especiales y no deben ser formulados demasiado finamente.

El capítulo VIII se dedica a los niveles de rigor. Cita para empezar al Poincaré de 1900, cuando dijo en el 2.º Congreso internacional de matemáticas de París,

...las demostraciones no son todo en la ciencia, la intuición tiene asignada una parte complementaria, como contrapunto o antídoto de la lógica.

Continúa H. F.:

¿Quién juzga si las matemáticas enseñadas son rigurosas o no?

No hay duda de que el estudiante no puede aprender rigor matemático de modo diferente al resto de las matemáticas, es decir, por re-inversión, y esto también debe de suceder en diferentes niveles. Sin embargo no es fácil de hacer. Además en el curso de la historia el rigor matemático no ha sido el mismo en la mente de todos los matemáticos.

Las matemáticas del descubrimiento libre son mucho más importantes que las que se confinan a unos axiomas impuestos por el profesor o el libro de texto y no hay razón para decir que sea menos rigurosa. Hay niveles de rigor y para cada tema hay un nivel de rigor que se le adapta, el aprendiz debe de pasar a través de los niveles y adquirir su rigor. La transición de un sistema de reglas al siguiente es discontinua aunque natural.

La tarea del rigor es convencer, pero las matemáticas listas para su uso nunca convencen. Para progresar en el rigor, el primer paso es dudar del rigor en el que uno cree en ese momento. Sin esta duda, poco se aprende, dejando a otras personas que le ordenen a uno mismo nuevos criterios de rigor.

Pasa después a hablar de la organización local de un campo, eligiendo como tema la geometría:

...los conceptos geométricos y las relaciones se analizan siempre hasta una cierta frontera más bien arbitraria, hasta el punto en que a simple vista se distingue lo que significan las nociones y si las proposiciones son verdaderas. Todo el mundo razona a partir del horizonte cambiante y confuso de los hechos que suceden y que se suponen como verdaderos y nunca a partir de los axiomas. El campo está organizado localmente.

Otra cuestión de la que trata aquí es sobre la separación de la teoría matemática y el mundo real.

Separación que empieza cuando se olvida que siete son siete unidades, el alumno empieza a poner las matemáticas entre parén-

*Hay hoy
fuertes
tendencias a
la algoritmización
y en la enseñanza
los algoritmos
son tentadores,
tanto
para profesores
com
para alumnos;
para los primeros
que en lugar
de enseñar
matemáticas
enseñan
algoritmos,
para los alumnos
que fácilmente
se sienten
cautivados
por el buen
funcionamiento
del algoritmo.*

tesis para que no se estropeen con el contacto con la realidad y para funcionar con más seguridad, lo que también es útil para comprender que hay verdades que no dependen ni del tiempo ni de la buena voluntad. Así la separación de la teoría matemática y el mundo real puede experimentarse mejor en los primeros estadios y con ejemplos sencillos que más tarde con otros más sofisticados.

El capítulo IX se dedica a la instrucción (en todo el texto la palabra instrucción está tomada en su significado más etimológico, o en el casi-militar, de reglas que se aprenden y se obedecen). Instrucción considerada como opresora, frente a educación como generadora de libertad.

Empieza por analizar la autoridad del teórico, criticando a los que acostumbran a decir a los demás como tienen que enseñar, expresando que esta cuestión es una de las muchas variaciones sobre el tema «ideal y realidad»; pero sin olvidar que los ideales también son realidad, la realidad vista por las personas que ven un poco más allá que sus contemporáneos. Añade que

...la esencia de este libro no es promover en la enseñanza una teoría por la que yo debería prescribir a los educadores prácticos sus métodos de enseñanza. Pero esta es mi filosofía para combatir cualquier intento de influir en la instrucción escolar de un modo antididáctico. En particular me opongo a toda la instrucción puramente orientada por los contenidos, y a todos los puntos de vista dogmáticos sobre las matemáticas que descuidan todas las presuposiciones psicológicas e implicaciones sociales de la instrucción matemática.

Es fácil imaginar cómo actúa la influencia dogmática; si una autoridad declara que algo es riguroso de un modo e impreciso de otro, esto puede afectar crucialmente a la instrucción, si bien no importa si dicha afirmación ha sido propiamente comprendida o no. Por ejemplo, en Alemania, las repercusiones no previstas de Klein han bloqueado muchos desarrollos razonados; en los Países Bajos ocurrió algo parecido en 1937 con una reforma de los currículos de matemáticas llevada a cabo honestamente por un grupo de profesores que confiaban en imponer la deductividad como agente matemático y que no sentían la necesidad de ninguna argumentación pedagógica ni didáctica, ni social para justificar sus propuestas. Programa que era irreal, pero nadie se atrevía a protestar contra sus ideas, salvo excepciones, como D. Van Dantzig, pero sus argumentos no indujeron a nadie a

renunciar a aquellas teorías idealistas. Muchos profesores podían creer que estaban llevando a cabo dicho programa; otro muchos sin embargo, no querían admitir que no eran capaces de llevar adelante un programa tan irreal, puesto que gozaba del acuerdo general. Esta historia muestra, no sólo la poca fiabilidad de los programas y currículos, sino también que esta historia se repetirá. El papel jugado en 1937 por «riguroso» o «impreciso», ahora lo desempeñan «moderno» y «pasado de moda». A veces parece más una tienda de modas que cualquier otra cosa. Que algo sea nuevo no es un criterio para ser enseñado. Siento que si los profesores pagan su justo precio a las matemáticas «modernas» y al rigor «moderno», no es sólo un signo de respeto, sino también de frustración: temiendo el ojo crítico de la autoridad y temiendo ser considerado un reaccionario o un pasado de moda. Lo importante es que no puedo comprender por qué los profesores de instituto casi nunca protestan, ni siquiera contra los proyectos en los que todas las evidencias muestran que son ilusorios.

Por otro lado, es muy difícil averiguar cuál es la práctica en el aula. Los currículos son casi siempre vagos, los programas muestran más detalles pero sobre todo incluyen objetivos y mínimos; nunca dicen si esos objetivos se logran o si los mínimos fueron alcanzados por la educación real. Si se analizan los libros de texto, en todos los países hay buenos y malos, ¿cuáles son los más influyentes? Otra fuente de información son los exámenes, pero debe de ser usado sólo por aquellos que estén bien enterados de las peculiaridades de la habilidad de preparar exámenes y de las técnicas de evaluación de los resultados. La investigación teórica sobre la enseñanza tiene la característica de decir a otras personas cómo tienen que enseñar, entonces es programática y a menudo irreal, está basada en la creencia firme de la persona que presenta sus ideas: los experimentos con clases de prueba son especialmente sospechosos si suceden bajo condiciones que difieren de las condiciones ordinarias de las escuelas; el laboratorio del psicopedagogo es un entorno aún menos deseable para experimentos que se puedan llamar representativos.

La educación en matemáticas verdaderamente modernas exige un laboratorio en el que el método de invención se pueda desarrollar libremente, en el que los estudiantes trabajen individualmente o en pequeños grupos, mientras el profesor observa sus actividades para intervenir si lo considera necesario. Otro aspecto para abolir el aula, el profesor no debe enseñar solo, sino en equipos de dos o tres, donde uno observa al otro, cada uno aprende del

*Para enseñar,
por supuesto
hay que saber
los contenidos,
pero para enseñar
también
hay que saber
cómo enseñar,
aunque esto
no se enseñe
propriadamente
en la universidad.*

otro. Por supuesto el trabajo de laboratorio se tiene que completar con un diálogo amplio del profesor con un grupo.

Acaba con una premonición que sigue fresca y válida 25 años después:

En los países europeos aproximadamente un 1% de la población trabaja en la educación; con seguridad la demanda de educación se duplicará en las próximas décadas, y esto sucederá en gran parte en sectores en los que hoy el número de estudiantes por profesor es pequeño. Esto significa que con los métodos actuales de instrucción el número de trabajadores en educación tendría que multiplicarse por cinco o diez. Lo que indica que nuestros métodos actuales están seguros de fracasar. La instrucción de grupos de edad superior por profesores individuales estará, dentro de poco, tan anticuada como los libros de texto escritos a mano. Esto debería de ser recalcado a los jóvenes de hoy, radicales y románticos, cuando piden una instrucción más personalizada. Del mismo modo que un matemático adulto ha aprendido a acomodar la lectura de la literatura a la libertad de la reinención, así deberíamos enseñar esta actitud a nuestros adolescentes, y el modo de hacerlo sería programando la reinención en el proceso de aprendizaje.

El capítulo X se dedica al profesor de matemáticas:

«Se busca profesor de natación que sepa nadar». Todos están de acuerdo en un punto: la persona que está enseñando debe de saber más de lo que enseña, y no sólo en el momento de enseñarlo, sino más pronto. Pero ¿cuánto debe ser este «más» y este «más pronto»? ya no hay acuerdo ni entre los expertos, ni entre los legisladores, ni entre las naciones.

Un niño papúa aprende de sus padres exactamente lo que necesita en su vida, vida que no es muy distinta de la de sus padres. Esta es la gran diferencia entre países desarrollados y en vías de desarrollo que nuestros niños y adolescentes tienen que aprender mucho más de lo que propiamente necesitan. El exceso se puede justificar siempre por el supuesto valor formal del tema estudiado, y en matemáticas se justifica como disciplina intelectual.

Para enseñar, por supuesto hay que saber los contenidos, pero para enseñar también hay que saber cómo enseñar, aunque esto no se enseñe propiadamente en la universidad.

Volviendo al término doble olvido de Klein se pregunta H. F.:

¿cuál es la utilidad de este periodo de estudio en la universidad intercalada entre el primero y el segundo olvidos? Por supuesto apreciamos que tiene que haber un cierto intervalo en alguien entre que aprende matemáticas en el aula y las enseña en una clase, y si este intervalo tiene que llenarse de algún modo no es extraño pedir que se llene con matemáticas.

En los últimos años se han hecho esfuerzos para que las matemáticas escolares recuperen su retraso de un siglo, también se han hecho esfuerzos en la formación del profesor, éste debe ser capaz de enseñar de acuerdo con el programa que difiere ampliamente del que estaba de moda cuando él iba a la escuela.

¿Por qué se ha retrasado tanto tiempo la cimentación de la brecha entre las matemáticas escolares y las universitarias? ¿Por qué se intenta hacer ahora algo que hace medio siglo o más se demanda? Las matemáticas crecían por todos lados, no sólo fuera de las matemáticas escolares, sino también hacia las matemáticas escolares, reestructurar las matemáticas significa a menudo que preferentemente sus ideas más elementales sean puestas en duda otra vez, y a menudo, esas ideas residen precisamente en el plano de ruptura entre las matemáticas escolares y las universitarias. La brecha está siendo llenada gracias al desarrollo de las matemáticas desde ambos lados, del uno hacia el otro.

Hoy, cualquiera que quisiera resumir el intento de Klein para enseñar «matemáticas elementales desde un punto de vista superior» tendría que hacerlo en un nivel mucho más bajo, mucho más cerca de la matemática escolar. Que lo más fundamental está más ligado a lo más elemental es una idea que necesitó medio siglo para madurar.

Finalmente formula las exigencias mínimas para la formación de los profesores de matemáticas:

- 1) que capacite al profesor para emplear con autoconfianza los métodos fundamentales de las matemáticas de hoy,
- 2) que mejore el conocimiento fundamental que se necesita para comprender la estructura de las matemáticas de hoy,
- 3) que desarrolle ciertas nociones sobre cómo se aplican las matemáticas, (obviamente, incluye matemáticas de ordenadores)
- 4) que de una primera visión de cómo investigan los matemáticos.

A esto hay que añadir la formación pedagógica, obviamente la enseñanza también se aprende a hacerla, por ello no es bueno permanecer en el nivel más bajo. Ello implica que el primer estudio en la universidad puede contribuir sólo en una modesta parte a la formación pedagógico-didáctica. Si pedimos que la teoría hoy se deba reinventar y que, por tanto, no puede preceder a la práctica, sólo hay una pequeña cantidad de teoría de la enseñanza que se deba aprender antes de que un profesor empiece a enseñar, a saber, aprender de los ejemplos de uno mismo y de otros para analizar la instrucción que se está intentando dar, se está dando y se ha dado. El futuro profesor debería de aprender el método del experimento mental y cómo informar sobre él.

Hasta hace pocos años la formación continua del profesorado se limitaba a conferencias ocasionales sobre ciencia, o participaban en los movimientos de innovación como oyentes, de didáctica no se discutía. Se cambió el modelo en muchos países, con dos extremos: enseñar al profesor exactamente lo que él mismo debería de enseñar dentro de unos pocos años, o proporcionarle una ciencia fundamental que nunca puede aplicar en la enseñanza.

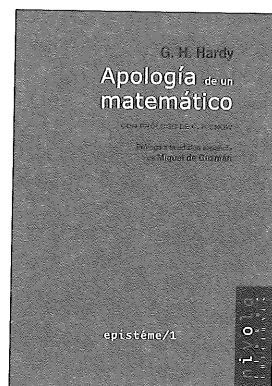
El gran problema es el de los profesores de la escuela primaria (seis años de escuela primaria). Desde que las matemáticas han sido abolidas como materia obligatoria en la formación de profesores de la escuela primaria, puede ocurrir que se permita a un profesor enseñar aritmética y matemáticas en la escuela primaria, o incluso en los primeros años de secundaria, incluso si la última nota que recibió en matemáticas fue insuficiente y estaba relacionada con ecuaciones lineales de una incógnita y aplicaciones numéricas del teorema de Pitágoras. El número de profesores de escuela primaria es aproximadamente 50 veces el de profesores de bachillerato.

Acabamos aquí esta recensión, que ha sido un resumen de las principales ideas de Freudenthal sobre cómo se debe enseñar matemáticas, sin ánimo de ser dogmático. Sus ideas han sido fundamentales en el cambio de la enseñanza de las matemáticas, sin duda en su país, donde el principal centro de enseñanza matemática, el antiguo IOWO, lleva hoy el nombre de Instituto «Freudenthal», y en los países de alrededor; contra lo que otros piensan sostengo que la didáctica de las matemáticas tanto en Francia, como en Alemania o Inglaterra ha adoptado adaptado muchas de las ideas expuestas en este libro.

H. Freudenthal escribió muchísimos más textos sobre enseñanza de las matemáticas, en particular, en 1978, *Weeding and Sowing*, en 1983, *Didactical Phenomenology of Mathematical*

Structures y en 1991, *Revisiting Mathematics Education. Chine Lectures*, donde vuelve a replantearse y retomar sus ideas y trabajos anteriores, pero el análisis de estos libros lo dejamos para otra ocasión.

Florencio Villarroya



**APOLOGÍA
DE UN MATEMÁTICO**
G. H. Hardy
Nivola Libros Ediciones
Col. Epistème, n.º 1
Madrid, 1999
ISBN: 84-930719-0-0
136 páginas

Este clásico se publicó por primera vez en 1940 con el título *A Mathematician's Apology*. En español, se publicó una parte de este libro en el

tomo quinto de la magnífica *Sigma. El mundo de las matemáticas*, con un comentario inicial de James R. Newman. Ahora, aparece completo con un prólogo a la edición inglesa de C. P. Snow y con otro a la edición española de Miguel de Guzmán.

Hardy (1877-1947) fue un matemático, de los que denominaríamos ahora puro, que escribió sobre temas como convergencia y sumación de series, desigualdades y teoría analítica de números. Su texto *A Course of Pure Mathematics* estableció un nuevo modelo para la enseñanza inglesa en matemáticas. Su colaboración con Littlewood, iniciada en 1911 y que duró prácticamente hasta su muerte, fue excepcionalmente larga y fructífera escribiendo conjuntamente cerca de un centenar de artículos. Otra colaboración, en este caso precedida de un «descubrimiento» fue con Ramanujan; Snow narra de forma fascinante en el prólogo de este libro, junto con muchos otros aspectos de su personalidad, cómo llegó a Hardy un manuscrito del matemático hindú y cómo en una noche, tras su estudio y previo intercambio de opiniones con Littlewood, se percató de estar delante de un matemático excepcional.

Pasados los sesenta años, en su ocaso como creador matemático, escribe Hardy su *Apología*, en la que da su visión de lo que es la matemática. Sólo por esto merece la