SUMA 33
febrero 2000, pp. 115-117

¿Ejercitar el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación?

Carlos Usón Villalba
Ángel Ramírez Martínez

DESDE LA HISTORIA

EN LA SEGUNDA PARTE del *Discurso del Método* afirma Descartes, comparando «el análisis de los antiguos y el álgebra de los modernos», que «el primero está tan sujeto a la consideración de las figuras que no puede ejercitar el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación». Se intuyen en esta frase, a pesar de estar sacada de contexto, la pretensión de buscar procedimientos generales y la creativa tensión dialéctica entre métodos antiguos y modernos. En realidad, la eterna dinámica de trabajo en matemáticas. Sí, eterna. Al menos desde hace dos mil quinientos años, si nos ceñimos a nuestro entorno cultural. Es cierto que el cambio teorizado por Descartes (teorizado; había ya mucho camino práctico recorrido desde la matemática islámica medieval) es un momento clave. Puesto que las matemáticas de la enseñanza secundaria (hasta primero de bachillerato) se distribuyen en un entorno que lo tiene como centro, el cambio metodológico que supone nos parece una de las más interesantes cuestiones históricas y filosóficas (en general, culturales) que pueden y deben resaltarse y ser aprovechadas didácticamente en el aula.

Artesanía y producción en serie

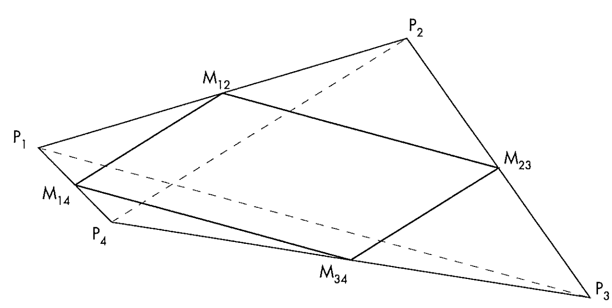
Lucio Lombardo Radice[1], sin citar a Descartes, contrapone la demostración de Euclides para la igualdad que da la potencia de orden dos de la suma de dos números –el conocido cuadrado cuyo lado está descompuesto en suma de dos segmentos– con la que haría un matemático de la época de Newton, desarrollando sin más la expresión $(a+b)^2$ según las reglas del cálculo algebraico, de la *logística speciosa* de principios del XVII. Sorprendentemente la demostración de Euclides es desconocida para muchos alumnos y alumnas de secundaria, a pesar de que ofrece una sencilla ocasión para mostrar las matemáticas como una materia viva, producto de un proceso de creación colectivo, frente al inmutable halo platónico y dogmático de que la recubre la pedagogía habitual. Todavía quedarán más claras las tensiones de ese proceso creativo si recurrimos a la cita de Cavalieri que recoge Radice, en la que el jesuita geómetra se queja del atrevimiento de los cultivadores del incipiente cálculo simbólico: «Los algebristas ... suman, restan, multiplican y dividen las raíces de los números, aun siendo inefables, absurdas y desconocidas y están convencidos de haber actuado correctamente, siempre que eso sirva para obtener el resultado deseado».

Si cambiamos ligeramente las condiciones del problema y pasamos al caso $(a-b)^2$, quien desee permanecer fiel a los métodos griegos deberá inventar un nuevo puzzle para justificar o llegar al resultado. El matemático del XVII ajeno a los prejuicios de Cavalieri no se inmutaría y volvería a aplicar su potente máquina algebraica. Somos conscientes de que nos permitimos unas cuantas licencias en la narración –las mismas que Radice, por otra parte– pero el fin perseguido, valorar en su justo punto la importancia del cambio, justifica los medios. Radice alcanza el momento más sublime de su texto en el final de este capítulo (págs. 58-59) cuando establece comparaciones entre la evolución de la actividad humana en la industria y en matemáticas, y cuando extrae consecuencias didácticas de esa comparación:

> No es nada exagerado decir que, para el progreso humano, la introducción y difusión del cálculo literal, en sustitución del álgebra geométrica, ha sido una revolución comparable a la adopción de la máquina en lugar del trabajo manual.
>
> La belleza, la fantasía, la originalidad y la individualidad de cada pieza es lo que le falta a la producción mecánica en serie. (...) Trataremos de conservar en nosotros, aunque usemos los nuevos instrumentos, el espíritu del viejo Euclides, la imaginación geométrica de los antiguos griegos, que será esencial para nosotros cuando no se trate de aplicar unas reglas sino de descubrir y crear otras nuevas.

Una propiedad de los cuadriláteros

Vamos a dejar de lado la tentación didáctica y nos centraremos exclusivamente en el placer histórico de la comparación de métodos. Una bonita propiedad de los cuadriláteros, muy sencilla y menos citada de lo que sería deseable, afirma que si se unen los puntos medios de los lados de uno cualquiera de ellos se obtiene siempre un paralelogramo, cuya área es además la mitad que la del cuadrilátero inicial. El resultado es debido a Varignon (1654-1722) pero podría haber sido firmado por Tales. La demostración «al estilo griego» requiere sólo del trazado de las diagonales del cuadrilátero (ver figura) y el recuerdo de su teorema. Los cuatro adjetivos empleados por Radice para los procesos no mecanizados son válidos en este caso. La idea es además tan sencilla que sorprende haberla desconocido tanto tiempo. Desde otro punto de vista, una de las indiscutibles ventajas de esta demostración artesanal radica en que sugiere casi con seguridad el germen del teorema. La observación del hecho debió llevar al enunciado.



La demostración «moderna», «mecanizada», funciona ciertamente como un rodillo. Elegidos cuatro puntos cualesquiera, $P_i(x_i, y_i)$ (i = 1, 2, 3, 4), las reglas del cálculo simbólico permiten comprobar que las pendientes de los segmentos $M_{12}M_{23}$ y $M_{14}M_{34}$ son iguales, y lo mismo para $M_{14}M_{12}$ y $M_{34}M_{23}$ (evidentemente llamamos M_{ij} al punto medio del lado P_iP_j). Como se ve no es necesario fatigar la imaginación para validar el resultado, pero la sensación de que se actúa a ciegas es muy fuerte. De hecho esta comprobación algorítmica no aporta información sobre la esencia del problema, sobre el porqué del resultado: es dudoso que nos haya permitido «ejercitar el entendimiento». Entraríamos en este deseable estado si aprovechamos su generalidad para ampliar el contexto en el que es válido el teorema. Puesto que las coordenadas iniciales han sido tomadas sin restricciones, el teorema será válido para todas las posiciones relativas posibles de los cuatro puntos (alineados los cuatro, tres alineados y uno fuera de la recta, etc.), incluso en los casos de coincidencia de algunos de ellos, aunque entonces sería necesario un planteamiento vectorial para evitar los denominadores nulos (cuando $P_i = M_{ij} = P_j$) y modificar la tesis de forma que no aparezca la palabra «paralelogramo».

Una opción interdisciplinar

Es evidente que sugerimos una mezcla metodológica de matemáticas, historia y filosofía. Las matemáticas evolucionan y es bueno conocer y comparar los distintos métodos y enfoques que han empleado a lo largo de su historia. Esa historia no ha estado aislada de la de las sociedades humanas en cuyo seno se ha producido la creación matemática, se ha visto influenciada por ellas y a su vez las ha influenciado. Finalmente, la pretensión globalizadora de Descartes cuadra muy bien con su racionalismo filosófico. La contemplación del conjunto, por más que esté simplificado, resulta mucho más rica que la consideración aislada de cada uno de sus componentes en clases especializadas.

Los problemas de geometría analítica ofrecen mil posibilidades. Veamos, como ejemplo, la obtención de la circunferencia que pasa por tres puntos no alineados. Para el enfoque griego «obtener» quiere decir construir con regla y compás. La solución «cartesiana dura» (no fatigar la imaginación, actuar sistemáticamente) supone partir de tres pares concretos de coordenadas que al ser sustituidos en la ecuación general $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ conducirán a un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas. «Obtener» es ahora construir una ecuación, no una figura. Un enfoque intermedio consistiría en trabajar con métodos algebraicos la solución griega, resolviendo el sistema formado por las mediatrices de dos de los segmentos determinados por los tres puntos para localizar el centro. De nuevo la opción más ciega a la «realidad física» de la situación de partida es la algebraica.

La historia de los distintos métodos empleados a lo largo del tiempo para trazar tangentes a una curva, y la evolución del concepto implícito de tangente que subyacía en ellos, proporciona otra buena ocasión para la confrontación de métodos antiguos y «modernos». Desde los métodos de los griegos para las cónicas (uno diferente para cada una aunque unificables desde el punto de vista de sus propiedades ópticas), pasando por la propuesta algebraica de Descartes (un sistema con dos parámetros indeterminados –los de la futura recta tangente– al que se le exigirá que sólo tenga una solución), válida sólo también para las curvas de segundo grado, hasta el decisivo aporte conceptual de Fermat (la tangente como límite de secantes) que permite acceder finalmente al concepto de derivada, aplicable a situaciones distintas de la de partida[2].

La realidad desbordará siempre los deseos

El deseo en este caso (Descartes, Leibniz) era el mecanismo universal de trabajo y a pesar de las frustraciones teóricas de nuestro siglo aún no concluido es inevitable mantenerlo, por lo menos localmente, como referencia metodológica. Pero señala Hegel, resaltando una tensión casi trágica, que «cuanto más sólido, bien definido y espléndido es el edificio erigido por el entendimiento, más imperioso es el deseo de la vida ... por escapar de él hacia la libertad». La advertencia es tan poética que casi se siente apuro al particularizar de nuevo. No se trataría de volver a trazar tangentes con regla y compás –en palabras de Radice de «volver a la lanzadera y al huso»– pero sí de reivindicar el disfrute de la belleza de la artesanía. Al ser englobados en enfoques generales se reducen al olvido resultados particulares muy hermosos. Recordaremos simplemente uno. Imaginemos dos esferas inscritas en una superficie cilíndrica y su plano tangente común. Su sección en el cilindro es una elipse cuyos focos son los puntos de tangencia de las esferas.

Afortunadamente, siempre habrá amantes de la historia (de la arqueología, incluso). Y, desde luego, el carácter tan decididamente abstracto de las matemáticas seguirá haciendo posibles sucesivas extensiones de conceptos que alejarán de nuevo el soñado perfil de la utopía racionalista. Puesto que el camino se hace desde el centro hacia el exterior, la cebolla que construimos tendrá con toda seguridad infinitas capas. Al menos de momento.

Y detrás de todo, la vida, claro

Un apunte político para terminar. Radice advierte en la dedicatoria de su libro que está escrito para sus hijos, nietos y sobrinos. Un texto sencillo de divulgación particularmente didáctico escrito por un matemático. Pero, aparte de esto, ¿quién es Radice? Desde luego no fue en la contraportada del libro de la editorial Laia donde pudimos obtener información sobre esta pregunta, puesto que no recoge ningún dato sobre el autor. Pues bien: hemos encontrado después a Radice en el libro de María Antonietta Macciocchi *Después de Marx, abril*[3]. Allí no es un matemático interesado en divulgar la historia de las matemáticas sino uno de los miembros del aparato del PCI que decide excluir de su seno a una incómoda militante para intentar superar desde el inmovilismo la crisis que la revuelta estudiantil italiana del 77 produce en la izquierda oficial. El mundo está lleno de desencuentros. Quienes conozcan a nuestro autor sólo por el libro comentado ignorarán que también compartió las incapacidades históricas de la izquierda europea. Quienes se hayan acercado a él sólo desde la política ignorarán que su opción marxista late fértilmente en el más hermoso pasaje de su pequeño gran libro sobre historia de las matemáticas.

Notas

1 *La matemática de Pitágoras a Newton*, Laia, Barcelona, 1983.

2 Un camino espléndidamente recorrido desde el punto de vista de la didáctica en el libro de Cruse y Lehman: *Lecciones de cálculo*, Fondo Educativo Interamericano, Méjico, 1982.

3 Pre-textos, Valencia, 1979.