SUMA 33
febrero 2000, pp. 103-106

El problema isoperimétrico en la Arquitectura, Literatura, Música..., en la Naturaleza

Grupo Construir las Matemáticas*

TALLER DE PROBLEMAS

PRESENTACIÓN

Por Rafael Pérez Gómez

Siempre me ha interesado la Historia de las Matemáticas cuando la resolución de problemas ha sido su columna vertebral. Ahora que estamos en el 2000, tenemos muy presente aquella famosa lista de 23 problemas dados por Hilbert hace 100 años. En ella propuso, lógicamente, problemas que después se ha visto que no tenían solución, otros que han dado lugar a nuevos campos de las Matemáticas y hasta algunos que aún hoy no sabemos resolver. Sin lugar a dudas, se trataba de buenos problemas para quienes investigan en Matemáticas. Éstos, y otros muchos problemas, tienen ocupados y preocupados a muchos grupos de trabajo que se afanan en su solución porque la resolución de problemas es el corazón mismo de la actividad matemática. De esa actividad surgen nuevas teorías que aportan modelos aplicables a situaciones reales que contribuyen al progreso de la Humanidad. Quizá debería matizar y decir «progreso científico», porque del social habría que hablar más despacio. Las Matemáticas son llamadas «reina de las ciencias» porque a todas resuelve problemas. ¿Qué hay en el pensamiento matemático que haga imprescindible su concurso en diversos campos de la actividad humana? La respuesta a esta pregunta puede ser un criterio que me permite calificar como bueno a un problema. Es decir, en esta sección, que tan amablemente me han solicitado mantener, durante once números de SUMA Emilio Palacián y Julio Sancho, algunos miembros del grupo, que me honro en coordinar –y que trabajamos bajo el eslogan *Construir las Matemáticas*– iremos presentando una colección de problemas «históricos» de Matemáticas y con valor cultural actual, lo que les hace tener interés educativo. ¡Ya salió la educación!, ¿es que no puede tener valor un problema por el mero hecho de ser de Matemáticas? Sí, claro, pero la selección que he hecho no va en esa dirección. Veamos. ¿Desde cuándo

* Los componentes del Grupo Construir las Matemáticas son Rafael Pérez, Isabel Berenguer, Luis Berenguer, Belén Cobo, M.ª Dolores Daza, Francisco Fernández, Miguel Pasadas y Ana M.ª Payá.

ha interesado tal problema y cuánto tiempo ha esperado su solución? ¿Por qué ese empeño en resolverlo? ¿Puede enunciarse y ser entendido por cualquier persona? ¿Tiene interés su solución en la sociedad actual? ¿Admite soluciones parciales? ¿Pueden obtenerse soluciones parciales interesantes dependiendo del grado de conocimiento que un posible resolutor tenga en Matemáticas? ¿Qué puede aprenderse, en cuanto a pensamiento matemático se refiere, en la reconstrucción de las soluciones?, ¿qué heurísticos, procedimientos o métodos pueden emplearse?

Belén Cobo es la persona de nuestro grupo con quien comparto mi interés por la Geometría. M.ª Dolores Daza, Ana M.ª Payá y Francisco Fernández son piezas fundamentales en el mismo para desarrollar estrategias para la enseñanza de Funciones y Gráficas. Miguel Pasadas, además de ser un buen matemático aplicado todoterreno, está capacitado para hablar de tú a cualquier ordenador. María Isabel Berenguer se emplea a fondo en una «cocina» llamada Álgebra con las especies propias de las incógnitas y las ecuaciones. Y, por último, Luis Berenguer es el encargado de «materializar» los conceptos para «jugar» con ellos. Entre todos, hemos elegido el primer buen problema para todos vosotros.

El Taller de problemas para (re)construir matemáticas

En esta ocasión no diremos «nunca perteneceré a un club que me tenga como socio» (Groucho) porque es para nosotros un honor ser miembros de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Más aún lo es el que se nos invite a mantener una nueva sección sobre problemas «históricos» en SUMA, durante unos números, y que comencemos en este emblemático 2000.

Lógicamente, se nos ha pedido que expongamos en unas líneas en qué vamos a emplear las páginas asignadas. ¿Qué hacer? Bueno, es claro que haremos Matemáticas. No sabemos aún qué Matemáticas, pero seguro que construiremos Matemáticas y nos divertiremos. Claro, ¿pero qué Matemáticas construiremos si, probablemente, ya están construidas todas las que podamos construir en esta sección de SUMA?

¿Hacemos un hueco para construir...? ¿Por qué no para resolver...? ¿Por qué no para explicar...? Mejor aún, ¡por qué no para dejarnos seducir por las Matemáticas! Entonces, lo mejor será que intentemos descubrir juntos el placer de (re)construir las Matemáticas trabajando sobre un solo problema. ¡Los problemas son el corazón de la actividad matemática! Sí, decididamente, haremos un solo problema con el que podamos trabajar en 1.° de ESO, en 2.° de ESO,..., en la Licenciatura de Matemáticas y en el año 2000, porque aún no se sabe su solución bajo determinadas condiciones. Trabajaremos un solo problema que está en la Literatura, en la Música, en la Arquitectura, en la Historia (también en la de las Matemáticas), en la Naturaleza y, sobre todo, tiene interés en nuestra cultura: **el problema isoperimétrico**. Lo presentaremos en 11 «entregas», que es un número insignificante para ciudadanos y ciudadanas de nuestro país que practican el seguimiento de ciertos temas que son suministrados por idéntico procedimiento, ¿o no? Bromas aparte, deseamos os guste el trabajo que hemos desarrollado para quienes leéis asiduamente nuestra queridísima SUMA. Esperamos vuestros comentarios, sugerencias y críticas, que presentaremos en la última entrega. Y, cómo no, nos gustaría que esta sección que ahora abrimos tenga un largo futuro. De todos y todas depende.

Propuesta de entregas

- *Primera*
  Presentación de la sección. El problema de los isoperímetros en la Naturaleza, Literatura, Música, Arquitectura... Los isoperímetros en la Educación: distintos enunciados del problema.
- *Segunda*
  Historia en la época griega.
- *Tercera*
  Historia en la época del Islam.
- *Cuarta*
  Ficha didáctica en geometría. Métodos trigonométricos.
- *Quinta*
  Ficha didáctica en álgebra. Desigualdades.
- *Sexta*
  Lapsus intermedio. Estudio del panal de abejas.
- *Séptima*
  Nueva aparición al final del siglo XVII. El cálculo de variaciones.
- *Octava*
  Ficha didáctica en funciones. Resolución mediante la función cuadrática.
- *Novena*
  El problema isoperimétrico y su resolución mediante el uso de derivadas.
- *Décima*
  En el siglo XIX se hace la penúltima aportación: Weierstrass y el problema de la existencia de solución.
- *Undécima*
  Visión global y análisis de sugerencias recibidas en la Redacción de SUMA

El problema isoperimétrico en la Arquitectura, Literatura, Música..., en la Naturaleza

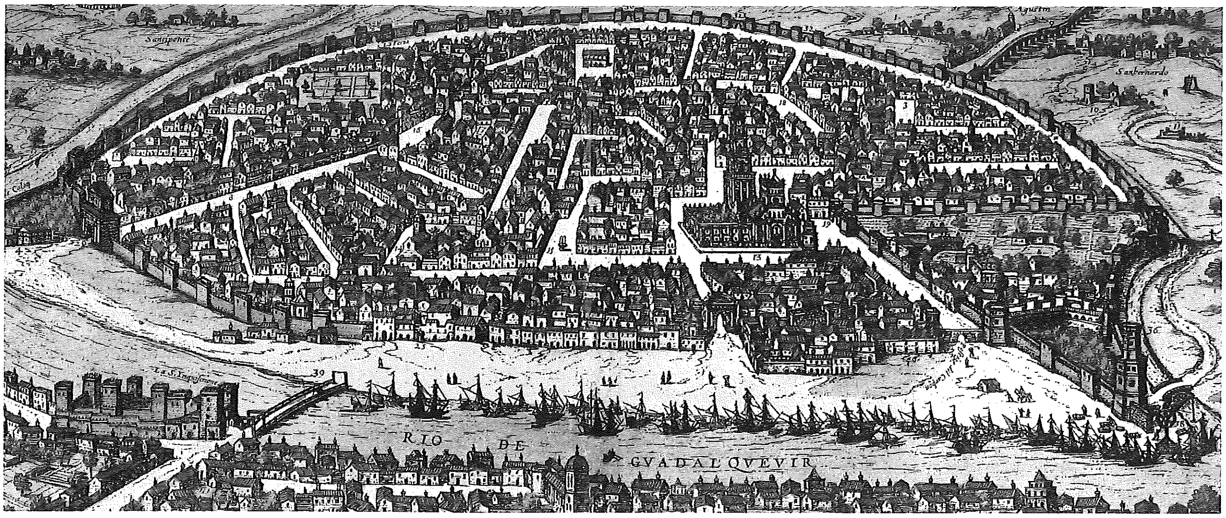
Fotografía y Matemáticas es una de las actividades que vienen despertando gran interés entre nuestro alumnado. La imagen que se muestra es una fotografía hecha por Pilar Moreno, una de las mejores fotógrafos sobre el tema y asidua colaboradora de SUMA.

¡Qué raro!, un balcón circular en el Ensanche de Barcelona. ¡Estos arquitectos modernistas estaban de la cabeza!, pensarán algunos. Sin embargo, nada hay de extraño en este caprichoso diseño arquitectónico si se recuerda el gusto por imitar a la Naturaleza de Antoni Gaudí, genial arquitecto catalán, que nos dejó, entre otras construcciones, la casa de la Pedrera como ejemplo singular de lo que decimos.

Balcón modernista. Barcelona
(Foto: Pilar Moreno)

Un balcón demasiado grande, o demasiado pequeño, rompería la estética de una fachada; es decir, independientemente de su forma, el tamaño debe ser el «habitual» en su entorno. Todo balcón que se precie incorpora unos cristales cuya función no es otra sino la de permitir la visión a su través; entonces, para un tamaño dado, ¿qué forma es la óptima? Es decir, cómo conseguir la mayor iluminación posible dentro de la habitación o cómo tener la mayor superficie acristalada para poder ver el exterior es el problema que debió presentársele al arquitecto, pero con la limitación, ya dicha, de ciertas dimensiones dadas. Matemáticamente, podemos plantear la situación diciendo que entre un cristal rectangular, con unas determinadas dimensiones, y otro con una forma diferente y dimensiones similares, ¿cuál optimiza su función? Evidentemente, su diseñador debía haber pensado en la forma que adopta una gota de aceite cuando la vemos flotar en la sopa o, quizá, en la forma de las ondas provocadas sobre la superficie del agua en un estanque, o... ¡vaya usted a saber cómo!, dio con la propiedad maximal de la circunferencia en la Naturaleza y la incorporó a su Arquitectura. Aunque es probable que también conociese la leyenda sobre la reina Dido, fundadora legendaria de la ciudad de Cartago, que el poeta romano Virgilio (70-19 a.C.) narra en la *Eneida*, epopeya mitológica que está reconocida como obra maestra de la literatura latina.

Dido, en la mitología griega, era una princesa fenicia hija de Belo, rey de Tiro, ciudad del sur del Líbano, junto al Mediterráneo, la ciudad más importante de aquellos fenicios que obsequiaron a la Humanidad regalándole un alfabeto. Su hermano Pigmalión asesinó al marido de Dido para quitarle todas sus posesiones y convertirse en rey. Ésta huye por mar hasta llegar a las costas de África. Era el año 900 a.C., aproximadamente. Quiso comprar unas tierras al cacique local, llamado Jarbas de Numidia, donde pudiesen vivir ella y sus gentes. El trato fue difícil, no tanto porque Dido regatease demasiado sino porque Jarbas no estaba dispuesto a que se estableciera una colonia en su territorio, y se cerró con la condición de que le vendería más tierra que la que pudiera delimitarse con la piel de un buey. Dido supo sacar el mayor provecho de lo acordado ya que hizo cortar la piel en finas tiras, las cosió una a continuación de otra y, aprovechando la costa, determinó una semicircunferencia. Suponiendo que la piel fuese equivalente a la superficie lateral de un cilindro de 2 m de altura y 0,5 m de radio y que se cortasen tiras de 2 mm, la semicircunferencia que pudo construir Dido pudo ocupar algo más de millón y medio de metros cuadrados o, equivalentemente, más de 150 hectáreas de terreno. Eso es lo que la Historia dice que fue la fundación de la ciudad de Cartago que, en la actualidad es un suburbio residencial de Túnez. Mas no debemos ver un hecho aislado el uso que Dido hizo de esta propiedad de la circunferencia ya que Proclo (ca. 450) describe situaciones análogas en sus comentarios al primer libro de



Reproducción de las murallas medievales de Sevilla

Euclides ya que indica que era frecuente encontrar embaucadores que basaban un trato sobre compra de tierras en la comparación de la extensión de terrenos con el tiempo de duración de su circunvalación, siendo conscientes de que había figuras que teniendo un perímetro menor podían tener mayor superficie. Por último, cabe decir que el urbanismo medieval fue quien mejor imitó a la reina Dido, ya que no hay más que observar la forma de las murallas que rodean a ciudades como, por ejemplo, Sevilla que se construyeron en la ribera de un río.

Asimismo en la *Divina comedia* de Dante, en la que Dido es condenada al segundo círculo del Infierno por haberse suicidado al ver cómo se iba Eneas, aquel príncipe troyano que fundara Roma, del que se enamoró perdidamente en un amor que, por mandato del dios Júpiter, era imposible. Claro que en Barcelona hay una gran afición a la ópera y también pudiera haber sido éste el camino seguido por nuestro arquitecto ya que el británico Henry Purcell plasmó esta historia en la ópera llamada Dido y Eneas.

Realmente, no parece probable nada de lo anterior, pero es claro que nuestro desconocido arquitecto conocía el problema de los isoperímetros y aplicó magistralmente de un modo «natural».

Quienes leemos SUMA tenemos como denominador común el interés por la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Desde esta perspectiva, un problema es más interesante si podemos llevarlo al aula. Sin ninguna duda, nos atrevemos a animarte a que isoperimetrees (¡vaya palabro!) con tu alumnado. Dependiendo de su nivel, elige el enunciado conveniente de entre los que aparecen en el recuadro que figura debajo.

Hasta aquí llega el primer capítulo de la historia de los isoperímetros. Prometemos seguir en el próximo número narrando cómo lo abordaron aquellos griegos que crearon una ciencia que convinieron en llamar Matemáticas.

FIN DE LA PRIMERA ENTREGA

- ***Enunciado 1*** (do Carmo, *Geometría diferencial de curvas y superficies*, Alianza Universidad Textos, 1976, Madrid):
  De todas las curvas cerradas simples en el plano con longitud dada l, ¿cuál es la que encierra un área máxima?
- ***Enunciado 2*** (Roshdi Rashed y otros, *Histoire des sciences arabes*, vol 2, Seuil, 1997):
  Se trata de demostrar que entre los dominios planos, con un perímetro dado, la circunferencia encierra un área mayor; de todos los sólidos del espacio que presentan igual área lateral, la esfera encierra el volumen mayor.
- ***Enunciado 3*** (Polya, *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas, 1981):
  De entre los cuadriláteros con igual perímetro, determinar el de mayor superficie.
- ***Enunciado 4*** (Rafael Pérez Gómez y otros, *Construir las Matemáticas*, vols. 1.° y 3.° E.S.O., Proyecto Sur, 1997):
  Con un listón de 3 metros de longitud se desea enmarcar un cuadro lo más grande posible. Hallar sus dimensiones.