SUMA 33
febrero 2000, pp. 91-97

Ajuste de una curva a un conjunto de datos con la calculadora TI-92

Leandro Tortosa Grau
Rosario Martín Rico

IDEAS Y RECURSOS

Este artículo trata de resolver el problema del ajuste de una curva a un conjunto de datos que se obtienen a partir de diferentes observaciones de la posición de un asteroide en su órbita alrededor del Sol. Utilizando este problema concreto, se realiza un análisis gráfico sobre la exactitud y complejidad que nos proporcionan los distintos modelos de ajuste que utilizamos, como son el lineal, cuadrático y cúbico. Con ayuda de la calculadora TI-92 se obtiene la ecuación de la cónica que mejor describe el movimiento de este astro. Utilizando las capacidades de cálculo simbólico que la TI-92 nos ofrece, se construye una función que nos permite predecir de una forma sencilla las sucesivas posiciones del asteroide en su órbita.

ESTE ARTÍCULO constituye un ejemplo completo del ajuste de una curva a un conjunto de datos obtenidos de un problema concreto, como es la posición de un asteroide a través de sucesivas observaciones. Se utiliza como herramienta básica de cálculo y visualización la calculadora TI-92, que lleva incorporado el CAS (Cálculo Algebraico Simbólico) para realizar todo tipo de cálculos algebraicos. Esta calculadora permite mecanizar los cálculos matemáticos imprescindibles para conseguir los distintos ajustes, a la vez que resulta amena dada la capacidad de visualización que nos ofrece.

Desde el punto de vista pedagógico, los distintos modelos de ajuste, que se realizan de forma inmediata con la ayuda de la máquina y que pueden ser visualizados simultáneamente, constituyen un excelente medio para relacionar la creciente complejidad de los modelos utilizados con la exactitud en la resolución del problema.

En el artículo se distinguen tres etapas:

- En la primera se realiza un ajuste de datos mediante funciones lineales, cuadráticas y cúbicas, comprobando la poca exactitud de estos modelos de ajuste para la predicción de futuras posiciones del asteroide.
- En la segunda etapa se hace una reflexión sobre la naturaleza del problema que se trata de resolver y las herramientas matemáticas más adecuadas para su resolución.
- En la tercera, se aprovechan las capacidades que la calculadora TI-92 ofrece para la edición de una función que permite simplificar los cálculos necesarios para la predicción de nuevos puntos en la órbita del asteroide.

Planteamiento del problema

Supongamos que disponemos de cinco puntos en el plano que representan distintas posiciones de un cierto asteroide en su órbita alrededor del Sol. Nuestro objetivo es ajustar una curva a estos datos para establecer la órbita que seguirá el astro. Desde el punto de vista matemático, debemos encontrar la curva que mejor se adapte a esas posiciones. Para ello, utilizamos como herramienta la calculadora gráfica TI-92, cuyas capacidades gráficas y de cálculo simbólico la convierten en un pequeño ordenador matemático en nuestras manos. Distintas observaciones del asteroide en tiempos sucesivos determinan los cinco puntos de coordenadas:

(5,764; 0,648), (6,286; 1,202), (6,759; 1,823)

(7,168; 2,526), (7,480; 3,360).

El problema que estudiamos es la obtención de una curva que se ajuste a estos datos y represente, por tanto, la ecuación de su órbita.

Resolución del problema

En principio, nos planteamos el problema de ajustar, mediante una curva, el conjunto de datos que tenemos. No nos planteamos inicialmente el tipo de curva que mejor se ajuste de acuerdo con los datos que tenemos. Queremos realizar varios ajustes utilizando diversas curvas, con el fin de que el alumno compruebe los diferentes grados de exactitud que se obtienen cuando se utilizan diferentes modelos de ajuste. Por ello, comenzaremos con el ajuste lineal, que es el más sencillo y continuaremos con modelos algo más complicados.

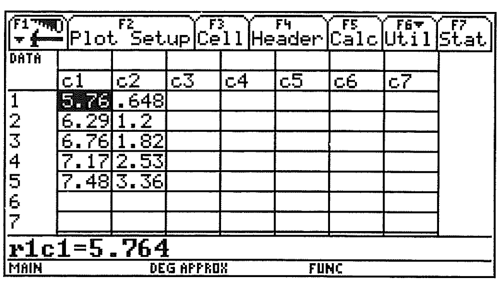

Figura 1. Editor de datos

Comenzamos introduciendo los cinco puntos anteriores en el editor de *Datos/Matrices* de la calculadora TI-92. El nombre que le damos al fichero de datos es *astro1*, como vemos en la Figura 1. Una vez introducidos los datos en el editor correspondiente, vamos a detallar los pasos necesarios que debemos realizar con la TI-92 para obtener distintos tipos de ajustes, según el tipo de función escogida para llevar a cabo el ajuste.

Primero obtendremos un ajuste lineal mediante una recta de regresión lineal. Para ello, presionando la tecla *F5* obtenemos una pantalla como la que se muestra en la Figura 2,

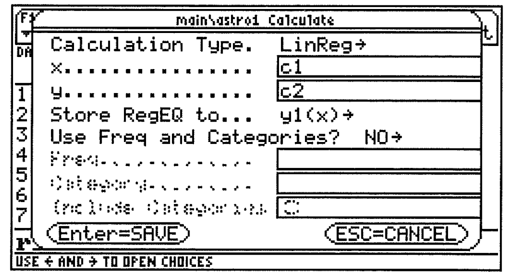

Figura 2. Regresión lineal

en la que hemos seleccionado la opción de regresión lineal. Además, queremos que la recta de regresión lineal quede almacenada en el editor de funciones en la variable *y1(x)*. De esta manera, la máquina nos proporciona, de forma inmediata, la recta de regresión y el coeficiente de correlación que aparecen en la Figura 3.

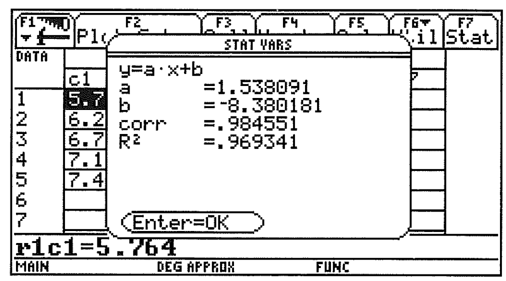

Figura 3. Recta de regresión lineal

Una vez obtenida la recta de regresión y almacenada en *y1(x)* en el editor de funciones, debemos indicar el tipo de gráfico que queremos representar con los puntos de la tabla. Eso lo hacemos presionando la tecla *F2* y efectuando las elecciones oportunas en los menús desplegables que allí nos aparecen. Lo vemos en la Figura 4, en la que se ha elegido el tipo de gráfico *scatter* y los puntos se representan como cajas (*box*).

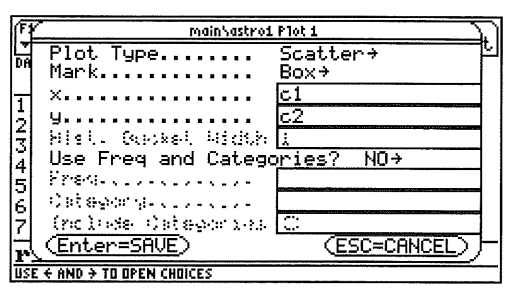

Figura 4. Tipo de gráfico para datos

Si ahora representamos gráficamente este gráfico de puntos en la variable *Plot1* y la función *y1(x)*, que es la recta de regresión, obtenemos un gráfico como el que muestra la Figura 5, en la que se ha realizado un *ZoomData* para que los datos que se representan ocupen el área máxima de la pantalla.

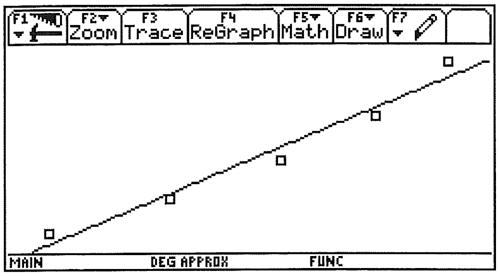

Figura 5. Gráfico de regresión lineal

Hasta aquí se ha realizado un ajuste de datos utilizando el modelo de regresión lineal sobre ese conjunto de puntos inicial. Observando el gráfico, notamos que la recta no se ajusta exactamente a ese conjunto de puntos, aunque el coeficiente de correlación (positivo y cercano a uno), nos indica una fuerte relación entre las variables. Sin embargo, pretendemos encontrar una curva que se ajuste perfectamente a esos puntos.

Ahora el siguiente paso va a ser probar con un ajuste cuadrático, es decir, vamos a calcular la función cuadrática de la forma:

$$y = ax^2 + bx + c \qquad [1]$$

que mejor se ajuste a los valores que tenemos. Para ello, realizamos los mismos pasos con la máquina que en el caso anterior. La Figura 6 muestra el cuadro de diálogo donde seleccionamos la regresión cuadrática, que quedará almacenada en el editor de funciones como *y2(x)*. La Figura 7 recoge el resultado que proporciona la calculadora para un ajuste cuadrático. En la Figura 8 vemos el editor de funciones de la TI-92 donde aparecen las dos funciones correspondientes a los dos tipos de regresión que hemos calculado. Si ahora representamos gráficamente las funciones almacenadas en el editor de funciones, se obtiene una representación gráfica como la que muestra la Figura 9. En esta figura se observa claramente que al ajustar por una función de segundo grado obtenemos una gráfica que se acerca mucho más a los puntos que tenemos representados. Podemos notar la diferencia en cuanto a la precisión que se obtiene al utilizar un modelo de tipo cuadrático frente al modelo lineal.

Podemos notar la diferencia en cuanto a la precisión que se obtiene al utilizar un modelo de tipo cuadrático frente al modelo lineal.

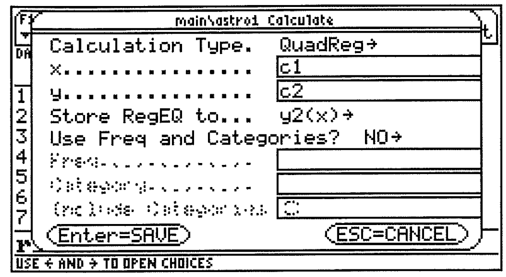

Figura 6. Regresión cuadrática

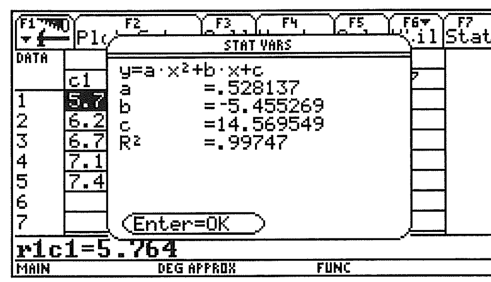

Figura 7. Función cuadrática de ajuste

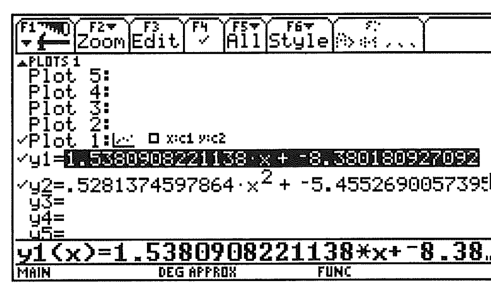

Figura 8. Editor de funciones

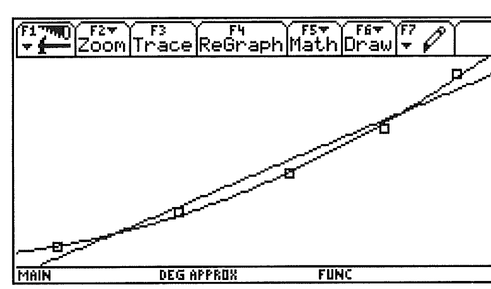

Figura 9. Regresión lineal y cuadrática

Podemos continuar el proceso decrito hasta aquí ajustando ahora mediante una función polinómica de tercer grado. Para ello elegimos la opción de ajuste mediante una regresión cúbica, que aparece en el mismo menú que el de las anteriores, como se muestra en la Figura 10. Ahora almacenamos la función cúbica en la variable *y3(x)* del editor, con el fin de poder comparar el nuevo resultado con los obtenidos anteriormente. El resultado de la función lo vemos en la Figura 11, donde se muestran los coeficientes para el polinomio de tercer grado que mejor se ajusta a los datos.

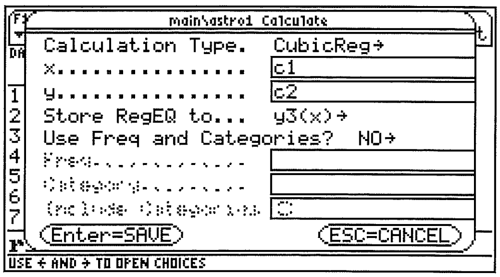

Figura 10. Regresión cúbica

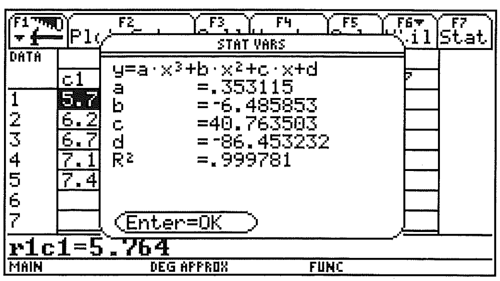

Figura 11. Ecuación cúbica del ajuste

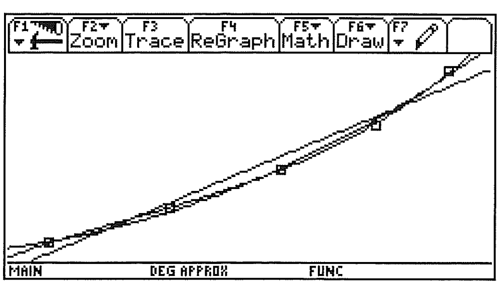

Figura 12. Comparativa de las regresiones

En la Figura 12 vemos la gráfica comparativa de los tres ajustes realizados, utilizando polinomios de grado uno, dos y tres. Se observa muy poca diferencia entre los ajustes que nos proporciona el polinomio de grado dos y el de grado tres (en el polinomio de grado tres se obtiene una aproximación casi perfecta). Si hacemos un *ZoomOut* en la máquina, obtenemos una gráfica como la que se muestra en la Figura 13.

...al aumentar el grado del polinomio de ajuste, la precisión es mayor; esto nos sugiere la idea de continuar aumentando su grado para obtener cada vez mejores resultados.

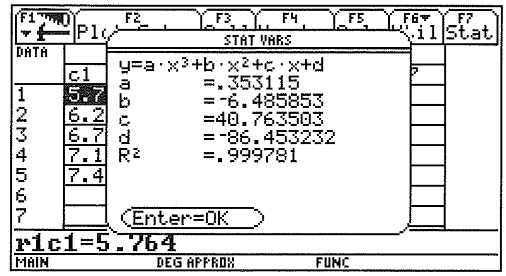

Figura 13. Zoom sobre la gráfica anterior

Observando la última gráfica, vemos que al aumentar el grado del polinomio de ajuste, la precisión es mayor; esto nos sugiere la idea de continuar aumentando su grado para obtener cada vez mejores resultados. Sin embargo, debemos siempre calibrar de algún modo la mejora en el ajuste frente a la complejidad en el cálculo. Además, hasta ahora no nos hemos planteado que estamos intentando ajustar un problema «real», como es el movimiento de un asteroide en torno al Sol. ¿Pensamos que su trayectoria es una recta? ¿Es una función cuadrática? Volveremos más tarde sobre esta cuestión.

Modificando el problema inicial

Modificamos ahora el problema inicial añadiendo un nuevo punto. Supongamos que en una observación posterior del asteroide se toman sus coordenadas de posición, que son (5,0; 5,363). De esta forma la lista de puntos que teníamos queda ampliada con este último valor, como se aprecia en la Figura 14.

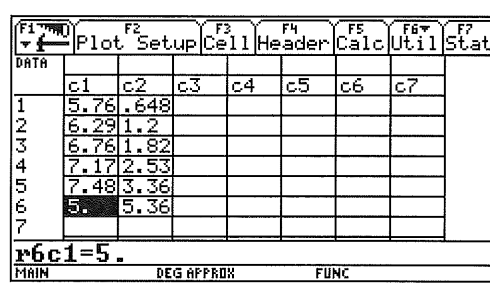

Figura 14 Nuevo dato

Realizamos un proceso similar al descrito anteriormente, pero ahora obtendremos funciones de tipo cuadrático y cúbico.

Los resultados que se obtienen pueden apreciarse en las Figuras 15, 16 y 17. Observamos de forma inmediata que la introducción de un nuevo punto en nuestro conjunto de datos modifica drásticamente las funciones que se obtienen al realizar los distintos tipos de regresión en la máquina. Podemos comparar los resultados obtenidos con los anteriores para darnos cuenta de que las funciones han cambiado totalmente. Es evidente que si realizáramos un ajuste lineal, los resultados serían muy distintos, ya que ahora es muy difícil encontrar una recta que se ajuste también al nuevo valor añadido. Esto nos da una idea de la dificultad y el riesgo que lleva el ajuste de datos por funciones simples como las que estamos utilizando.

...la introducción de un nuevo punto en nuestro conjunto de datos modifica drásticamente las funciones que se obtienen al realizar los distintos tipos de regresión en la máquina.

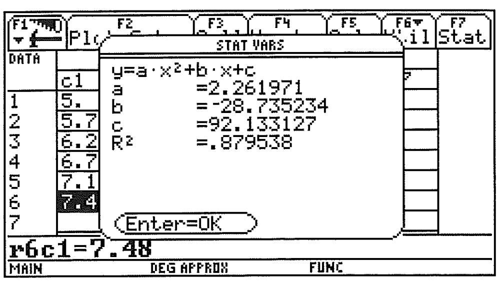

Figura 15. Regresión cuadrática

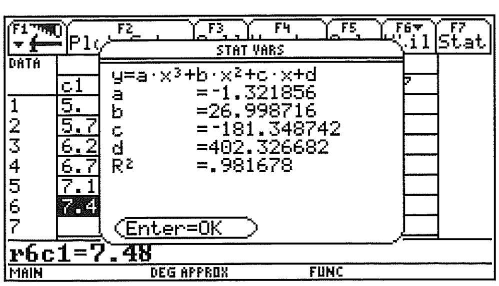

Figura 16. Regresión cúbica

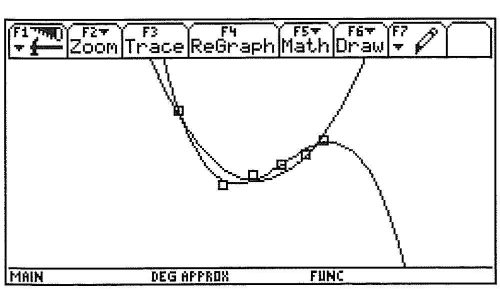

Figura 17. Comparativa de regresiones

Esta variación drástica en la forma de las curvas de ajuste se produce como consecuencia del problema particular que estamos estudiando. Debemos reflexionar sobre el problema que estamos resolviendo y la manera en la que lo hemos resuelto hasta ahora. Estamos tratando un problema concreto: el movimiento de un cuerpo en el sistema solar, es decir, estamos ajustando mediante polinomios de grado uno, dos o tres unos datos de un cuerpo que sigue una trayectoria en el espacio cuya representación matemática es la sección de una cónica. No sabemos, *a priori*, el tipo de cónica que describe su órbita; lo máximo que conocemos son un conjunto de posiciones dadas en función de dos coordenadas. En cuanto al modo de resolución, si pensamos un poco, debemos notar que estamos intentando ajustar unos puntos cuya trayectoria debe ser una sección cónica por medio de una cónica en particular, como es la parábola. Cuando ajustamos mediante una función del tipo 1), debemos tener en cuenta que estamos ajustando mediante una parábola con su eje de simetría paralelo al eje OY. Por lo tanto, pensamos que el ajuste que hemos realizado puede ser muy válido para estos puntos, pero seguramente no nos va a proporcionar demasiada información acerca del conjunto de la trayectoria que estamos analizando. Así, debemos utilizar otro método que nos proporcione más información.

El método que vamos a utilizar tiene cierta relación con el concepto de determinante de una matriz, como veremos a continuación.

La forma general de la ecuación de una sección cónica en el plano, ya se trate de una parábola, elipse o hipérbola, es:

$$c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2 + c_4x + c_5y + c_6 = 0 \qquad [2]$$

Esta ecuación tiene seis coeficientes que deben ser determinados para poder conocer su expresión analítica particular. Pero, en realidad sólo son necesarios cinco ya que podemos dividir por algún coeficiente no nulo. Si suponemos que c_1 es distinto de cero, entonces podemos hacer

$$x^2 + \frac{c_2}{c_1}xy + \frac{c_3}{c_1}y^2 + \frac{c_4}{c_1}x + \frac{c_5}{c_1}y + \frac{c_6}{c_1} = 0$$

o, lo que es lo mismo,

$$x^2 + Axy + By^2 + Cx + Dy + E = 0.$$

De esta forma, vemos que únicamente es necesario determinar cinco de los seis coeficientes para obtener la ecuación de la cónica. Esto significa que con cinco puntos que tengamos ya podemos ser capaces de determinar la misma, por medio de determinantes. Si llamamos a dichos puntos:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5),$$

entonces la ecuación de la cónica puede escribirse en forma de determinante como:

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad [3]$$

De acuerdo con nuestro ejemplo, sustituyendo los puntos

$$(x_1, y_1) = (5{,}764;\ 0{,}648)$$
$$(x_2, y_2) = (6{,}286;\ 1{,}202)$$
$$(x_3, y_3) = (6{,}759;\ 1{,}283)$$
$$(x_4, y_4) = (7{,}168;\ 2{,}526)$$
$$(x_5, y_5) = (7{,}480;\ 3{,}360)$$

en el determinante [3], se obtiene:

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 33{,}224 & 3{,}735 & 0{,}420 & 5{,}764 & 0{,}648 & 1 \\ 39{,}514 & 7{,}556 & 1{,}445 & 6{,}286 & 1{,}202 & 1 \\ 45{,}684 & 12{,}322 & 3{,}323 & 6{,}759 & 1{,}823 & 1 \\ 51{,}380 & 18{,}106 & 6{,}381 & 7{,}168 & 2{,}526 & 1 \\ 55{,}950 & 25{,}133 & 11{,}290 & 7{,}480 & 3{,}360 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Introducimos en la calculadora esta matriz de tamaño 6 x 6 y la llamamos *mat*. Después calculamos el determinante de esta matriz mediante la instrucción *det(mat)*, con lo que obtenemos en la calculadora la expresión:

$$.0025(x^2 - 1.136x(y + 5.057) + 1.077(y^2 - .0863y + 3.485))$$

Con el fin de obtener un polinomio con variables x e y, empleamos la instrucción *expand*, escribiendo en el editor *expand(det(mat))* → *b*, con lo que obtenemos el siguiente polinomio:

$$.0025x^2 - .0028xy - .0141x + .0027y^2 - .0002y + .0092 \quad [4]$$

Mediante la instrucción anterior conseguimos la ecuación de la cónica de la forma dada por [2], además de guardar el resultado en una variable que hemos llamado *b*. De esta forma, hemos calculado de forma inmediata, con la ayuda de la TI-92, la ecuación de la cónica que representa el movimiento del asteroide. Notemos que han sido suficientes cinco puntos para determinar la ecuación, ya que el número de coeficientes a determinar era de cinco.

Ahora vamos a representar gráficamente la ecuación obtenida despejando la variable y del polinomio que representa la sección cónica. Para ello, utilizamos la instrucción *solve* del menú de álgebra. Escribimos *solve(b = 0, y)* ,con lo que en pantalla nos aparecen las dos soluciones de esta ecuación en función de la variable x. Ahora tenemos las dos partes de la función que queremos representar. Basta con pegar cada uno de los resultados en el editor de funciones en dos funciones distintas y seleccionar aquellas funciones que queremos representar para obtener una representación gráfica de la curva. Para obtener una representación gráfica adecuada mantenemos el dibujo de los datos que ya teníamos anteriormente. Las representaciones que se obtienen son las que aparecen en las Figuras 18 y 19.

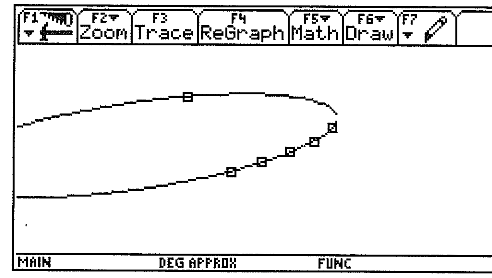

Figura 18. Representación gráfica de la sección cónica

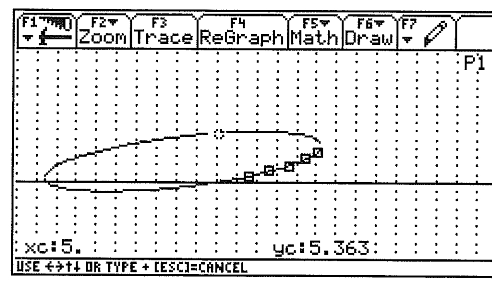

Figura 19. Zoom de la gráfica anterior

...en muchos de los problemas con que nos encontramos nos conformamos con ajustes de tipo lineal o exponencial, ya que intuimos que el tipo de ajuste va a ser de ese tipo.

Debemos notar, al observar las últimas gráficas, que hemos realizado un cálculo de la sección cónica basado en los cinco puntos iniciales; no hemos considerado el último punto que añadimos. El ajuste del sexto punto a la cónica es perfecto. De esta forma, cuando es conocida la curva que describen los puntos que debemos ajustar, el resultado es perfecto. En este caso particular estudiamos un problema del que conocemos su resultado final, ya que sabemos que los puntos van a seguir una sección cónica. Ello nos permite utilizar elementos muy básicos de la teoría de determinantes para su resolución. Sin embargo, en muchos de los problemas con que nos encontramos nos conformamos con ajustes de tipo lineal o exponencial, ya que intuimos que el tipo de ajuste va a ser de ese tipo.

Una vez obtenida la ecuación que gobierna el movimiento del asteroide, nos planteamos la estimación de una posición del mismo a partir de una de sus coordenadas. Vamos a ver ahora cómo con la ayuda de una máquina del tipo TI-92 esta tarea puede resultar muy simple. En principio, podemos despejar de [4] la variable y, escribiéndola en función de x. Sustituyendo el valor adecuado de x calculamos el valor particular de y, con lo que tenemos calculadas las dos coordenadas del punto.

Sin embargo, podemos crear una función en la TI-92 que nos resuelva este problema. Para ello, construimos en el editor de programas y funciones una nueva función, que llamaremos *aste1*, que va tener dos entradas y como salida nos proporciona la coordenada y del punto. La función es:

```
:aste1(x,y)
:Func
:.0024613994000665*x^2 - .0027973729800917*x*y - .014145192500744*x + .0026507504200284*y^2 - 2.2864397947563E-4*y + .0092383901094095
:solve(.0024613994000665*x^2 - .0027973729800917*x*y - .014145192500744*x + .0026507504200284*y^2 - 2.2864397947563E-4*y + .0092383901094095=0,y)
:EndFunc
```

Leandro Tortosa Grau
IES Haygón.
San Vicente del Raspeig.
(Alicante).
Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi».

Rosario Martín Rico
IES Haygón.
San Vicente del Raspeig.
(Alicante).

La función comienza con la declaración de dos variables de entrada, que son las dos coordenadas del punto de la sección cónica. La siguiente expresión es el polinomio [4], que representa la ecuación de la sección cónica que describe el movimiento del cuerpo. En la siguiente línea de función resolvemos la variable y para el valor de x que le hayamos introducido inicialmente. De esta forma, si introducimos en el editor la expresión *aste1(5,y)*, obtenemos como resultado:

$$y = 5.363 \text{ or } y = .0009$$

que son los resultados de las dos coordenadas y para $x = 5$. Esto significa que los puntos:

$$(5;\ 5{,}363) \text{ y } (5;\ 0{,}0009)$$

representan dos posiciones de la órbita del asteroide en su movimiento en torno al Sol. Análogamente podríamos crear una función que al introducir la coordenada y nos diera como resultado la coordenada x de su posición.

Bibliografía

BERRY, J., E. GRAHAM y A. WATKINS (1997): *Learning Mathematics through the TI-92*, Chartwell-Bratt, Browley.

BERRY, J., E. GRAHAM y A. WATKINS (1997): *Mathematical Activities with DERIVE*, Chartwell-Bratt, Browley.

DEMANA, F., B. WAITS, S. CLEMENS y G. FOLEY (1994): *Precalculus. Functions and Graphs*, Addison-Wesley.

FINNEY, R.L., G.B. THOMAS, F. DEMANA y B. WAITS (1994): *Calculus. Graphical, Numerical, Algebraic*, Addison-Wesley.