SUMA 33
febrero 2000, pp. 73-81

Las ideas de los alumnos respecto de la dependencia funcional entre variables

Carme Vall de Pérez
Jordi Deulofeu

ARTÍCULOS

Se describe una investigación cuyo objetivo general consiste en estudiar las ideas de los alumnos de secundaria respecto una noción importante en matemáticas, la dependencia funcional entre variables. Para una aproximación realista al objeto de esta investigación, se ha particularizado el estudio a dos variables, con una relación de dependencia expresable mediante una ecuación sencilla, y en situaciones caracterizadas por un contexto geométrico.

COMO TODOS SABEMOS, el concepto de función está presente en los currículos escolares de los distintos niveles de enseñanza, dada su gran importancia en la construcción del conocimiento matemático. Además, debido a su naturaleza unificante y generadora de modelos, las funciones son utilizadas en casi todos los campos de la ciencia. Los enseñantes de matemáticas sabemos también que, desde el punto de vista de su enseñanza-aprendizaje, éste es un concepto muy complejo. Ello es debido a su relación con muchos otros conceptos (variable, dominio, etc.) y a la diversidad de lenguajes de representación –tabla, gráfico, ecuación, descripción verbal– que admiten las funciones. Por otra parte, estas características originan también su gran potencia como instrumento matemático.

En los últimos años, han sido numerosos los estudios sobre los aspectos psicológicos del aprendizaje de las matemáticas y, como consecuencia de ello, la importancia de la actividad mental constructiva del alumno es hoy un principio ampliamente compartido. Este principio lleva a entender el aprendizaje, no como una adquisición acumulativa de conocimientos y habilidades sino como un proceso de construcción del conocimiento. Por tanto, conocer mejor los procesos mediante los cuales los alumnos aprenden matemáticas, profundizar en la comprensión de las ideas de los alumnos, nos permitirá después tener elementos para mejorar la enseñanza que impartimos en las aulas.

Desde la perspectiva que acabamos de exponer, y desde nuestra condición de enseñantes de matemáticas en educación secundaria, hemos realizado una investigación sobre las ideas de los alumnos respecto a la dependencia funcional entre variables, investigación que describimos en este artículo.

El aprendizaje de las matemáticas. La construcción de conceptos

Exponemos a continuación algunas de las teorías que se utilizan en la investigación de los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de conceptos matemáticos, y que hemos utilizado como marco teórico de nuestro estudio.

Diversos autores se refieren a la diferencia entre los conceptos matemáticos definidos formalmente y los procesos cognitivos utilizados para concebirlos. Tall y Vinner (1981) establecen una distinción entre:

- La *definición del concepto* (*concept definition*): una secuencia de palabras, una definición verbal que explica el concepto con precisión. Puede distinguirse entre las definiciones formales, aceptadas por la comunidad científica, y las definiciones personales que utilizan los individuos.
- La *idea del concepto* o *esquema conceptual* (*concept image*) que tiene una persona sobre un concepto matemático. Esta expresión describe la estructura cognitiva del individuo asociada al concepto, e incluye todas las imágenes mentales (en cualquier representación: simbólica, gráfica,...) junto con las propiedades y los procesos asociados a dicho concepto. Estos autores explican que la idea del concepto (*concept image*) se construye a través de experiencias de todo tipo y va cambiando cuando el individuo encuentra nuevos estímulos; puede no ser coherente globalmente y tener aspectos que difieran bastante de la definición formal del concepto.

Unos años más tarde, Vinner y Dreyfus (1989) añaden que la idea conceptual de un individuo es el resultado de su experiencia con ejemplos y contraejemplos del concepto, y derivan una serie de consecuencias para la enseñanza: la necesidad de dedicar tiempo a observar y comprender las ideas y comportamientos espontáneos de los estudiantes ante los problemas de matemáticas, y la importancia de tener en cuenta estas ideas y comportamientos en los métodos de enseñanza.

Otros autores –Artigue (1990), Sfard (1991)– utilizan los términos *concepto matemático* y *concepciones* de los alumnos. Con el primero designan las ideas matemáticas oficiales y con el segundo las representaciones internas. Nos parece especialmente interesante la definición que Michelle Artigue, después de analizar su origen y evolución en la comunidad didáctica francesa, da de estos dos términos:

De la misma manera que en un *concepto matemático* se distingue:

- la noción matemática tal como se define en el contexto del «savoir savant» de una época dada,
- el conjunto de significantes asociados al concepto,
- la clase de problemas en cuya resolución adquiere sentido,
- los instrumentos: teoremas, técnicas algorítmicas, específicas del tratamiento del concepto; en las *concepciones* de los sujetos se distinguirán diversas componentes y, en particular:
  - — la clase de situaciones-problema que dan sentido al concepto para el alumno,
  - — el conjunto de significantes que es capaz de asociarle, en particular las imágenes mentales, las expresiones simbólicas,
  - — los instrumentos, teoremas, algoritmos de que dispone para manipular el concepto.

Diversos autores se refieren a la diferencia entre los conceptos matemáticos definidos formalmente y los procesos cognitivos utilizados para concebirlos.

Por otra parte, Sfard (1991) también distingue el *concepto* matemático, término con que designa las ideas matemáticas como constructos teóricos que forman parte de lo que llama «universo formal del conocimiento ideal», de la *concepción, término* que utiliza para referirse al conjunto de representaciones y asociaciones internas del individuo que evoca el concepto. Una característica del conocimiento matemático es que la mayoría de nociones pueden jugar un papel de procesos u objetos, según la situación del problema o la conceptualización del estudiante. Por ejemplo, la noción de función puede considerarse como un conjunto de pares ordenados siguiendo la definición de Bourbaki, o bien se puede considerar como un proceso computacional, remarcando su aspecto operacional, con una definición históricamente más antigua, pero no menos interesante desde el punto de vista del aprendizaje del concepto. Siguiendo esta línea, Sfard establece dos tipos de concepciones: las *concepciones estructurales*, cuando se consideran las nociones matemáticas como objetos abstractos, y las *concepciones operacionales*, cuando se tratan las nociones matemáticas como procesos, algoritmos y acciones. Si miramos el proceso de formación de los conceptos matemáticos a lo largo de la historia, vemos que las concepciones operacionales preceden a las estructurales, que las nociones –por ejemplo: número, función,...– se han concebido primero operacionalmente y después de un proceso con sucesivas secuencias de abstracción se llega a la definición y concepción estructural que reconoce un nuevo objeto matemático. En el proceso de aprendizaje individual parece que se sigue la misma norma: la concepción operacional es un primer estadio –necesario e imprescindible– en la adquisición de una idea matemática nueva, lo cual entra en contradicción con cualquier enseñanza que introduzca los conceptos nuevos mediante definiciones formales acabadas, sin ninguna referencia explícita a los procesos relacionados con ellos.

Debemos añadir que las dos concepciones no son excluyentes entre sí, sino que son complementarias y «la habilidad para ver una función o un número de ambas formas, como un proceso o como un objeto, es indispensable para una comprensión profunda de las matemáticas».

Objetivos del estudio

Como decíamos en la introducción, en nuestra investigación nos hemos propuesto como objetivo general estudiar las ideas de los alumnos de secundaria respecto una noción importante en matemáticas, la dependencia funcional entre variables. Para aproximarnos de manera realista al objeto de nuestra investigación, hemos particularizado el estudio a dos variables, con una relación de dependencia expresable mediante una ecuación sencilla, y en situaciones caracterizadas por un contexto geométrico. Y hemos concretado el objetivo general en:

- Analizar y clasificar las estrategias que utilizan los estudiantes para conocer la relación de dependencia entre dos variables, a partir de un enunciado en lenguaje natural que se refiere a una situación de contexto geométrico.
- Analizar y clasificar las predicciones que realizan los alumnos respecto a la variación de una variable en situaciones de dependencia funcional expresable mediante una ecuación sencilla, y las argumentaciones o justificaciones en que basan sus predicciones.

Las ideas de los alumnos las conocemos a través de sus actuaciones y de sus explicaciones sobre ellas.

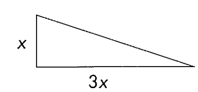
Como consecuencia de los análisis anteriores, también queremos conseguir clasificar las concepciones de los alumnos en diferentes categorías, según la estrategia que utilicen para determinar la relación entre las cantidades variables, y según sus argumentaciones sobre el significado de la relación.

El instrumento para la obtención de datos: una selección de problemas

Las ideas de los alumnos las conocemos a través de sus actuaciones y de sus explicaciones sobre ellas. Por ello elaboramos un cuestionario con unos problemas como primera aproximación hacia el objeto de nuestro estudio (Figura 1). Este primer cuestionario fue suministrado a

Problema A

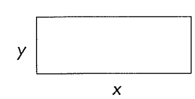
Consideremos un triángulo rectángulo tal que la longitud de un cateto es el triple de la longitud del otro.



Este es un dibujo que representa la situación

Problema B

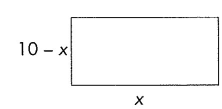
Consideremos un cuadrilátero rectángulo de 36 cm^2 de superficie. Queremos estudiar cómo cambia la altura del rectángulo cuando variamos la longitud de la base.



Este es un dibujo que representa la situación

Problema C

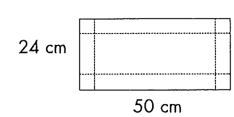
Consideremos un cuadrilátero rectángulo de 20 cm de perímetro. Queremos estudiar cómo cambia la superficie cuando variamos la longitud de los lados.



Este es un dibujo que representa la situación

Problema D

Construimos una caja sin tapa a partir de una cartulina rectangular de 50 cm de longitud y 24 cm de anchura. Lo hacemos recortando un cuadrado de cada esquina y luego doblando hacia arriba las pestañas. Queremos estudiar cómo cambia el volumen de la caja cuando variamos la longitud del lado del cuadrado que recortamos.



Este es un dibujo que representa la situación

Figura 1

diez alumnos de tercero de BUP cerca del final de curso, y los resultados que obtuvimos nos sirvieron para comprobar la validez del cuestionario como instrumento de obtención de datos y, a su vez, para revisar la formulación de algunos aspectos de los problemas. El cuestionario con el que realizamos la experiencia estuvo listo a principios del curso siguiente, por lo que decidimos suministrarlo a alumnos de COU, ya que su situación sería similar a la de los alumnos del estudio-piloto. La muestra elegida estuvo formada por 60 alumnos de COU, 33 de los cuales cursaban las opciones A o B (Ciencias) y los restantes 27 cursaban la opción C (Letras). Este cuestionario está formado por cuatro problemas. Cada problema consta de una breve presentación (3 a 5 líneas) sobre una situación de contenido geométrico sencillo y de un dibujo que representa la situación.

Las cuestiones planteadas en cada uno de los cuatro problemas tienen la misma estructura, que consiste en:

- *Apartado 1.* Completar una tabla donde hay unos valores numéricos de x ordenados de forma creciente.
- *Apartado 2.* Explicar detalladamente cómo se han hallado los valores numéricos de la tabla.
- *Apartado 3.* Escribir una ecuación que permita hallar el valor numérico de la variable dependiente a partir de un valor numérico de la variable x.
- *Apartado 4.* Explicar qué pasaría con el valor de la variable dependiente si seguimos aumentando el valor numérico de x, y explicar en qué se basan para realizar esta predicción.

Podemos resumir la estructura de los problemas con el siguiente esquema:

Situación + Dibujo —> Tabla y explicación —> ecuación —> Predicción y justificación

Como vemos, los cuatro apartados piden tareas distintas, pues en los apartados 1 y 3 se proponen tareas cerradas: completar una tabla de valores numéricos. escribir una ecuación, mientras que en los apartados 2 y 4 se proponen cuestiones abiertas: explicar el procedimiento utilizado para calcular los valores de la tabla, realizar una predicción y justificarla. Ha sido, sobre todo, en las respuestas a estas preguntas abiertas donde hemos encontrado una interesante información sobre las concepciones de los alumnos.

Ha sido, sobre todo, en las respuestas a estas preguntas abiertas donde hemos encontrado una interesante información sobre las concepciones de los alumnos.

El análisis de los datos

En este trabajo de investigación no teníamos ninguna hipótesis que verificar sobre las ideas de los alumnos ni tampoco ningún esquema previo de interpretación de datos en las preguntas abiertas. Ha sido a partir de repetidas lecturas a las respuestas literales a los problemas que nos hemos familiarizado con ellas, hasta captar sus principales características y llegar a establecer criterios de clasificación.

El primer apartado consistía en completar una tabla de valores numéricos, es una tarea que los alumnos realizan correctamente en los tres primeros problemas (sólo hubo una respuesta incorrecta al problema A y otra al problema B). El problema D presenta más dificultad, y hay tres respuestas en blanco y diez incorrectas. Que los alumnos respondan correctamente el primer apartado de los problemas es un resultado que no nos sorprendió, y nos permite asegurar que las dificultades que puedan aparecer en los otros apartados no dependen de la comprensión de la situación, exceptuando el último problema. Esta uniformidad, sin embargo, existe solamente en los resultados dados por los alumnos: los procedimientos utilizados para hallarlos pueden ser muy distintos, como demuestran las respuestas al segundo apartado de los problemas.

El segundo apartado de cada problema pide a los alumnos que expliquen detalladamente cómo han hallado los valores numéricos de la tabla. Los problemas A, C y D tienen una estructura multiplicativa, mientras que en el problema B, la operación que se realiza para hallar los valores es una división. Por ello, hemos podido clasificar las respuestas a los problemas A, C y D siguiendo el mismo criterio, mientras que el criterio seguido en el problema B es ligeramente distinto. La principal característica que diferencia las respuestas de los alumnos tiene que ver con la utilización del lenguaje algebraico. Así, mientras algunos alumnos no utilizan este lenguaje en su explicación y dan simplemente como respuesta en el problema A «multiplicando la base por la altura y dividiendo por dos», otros explican que hallan los valores numéricos de la tabla sustituyendo el valor de x en la fórmula $S = 3x^2/2$. Hay también alumnos que utilizan el lenguaje algebraico sin llegar a escribir la fórmula anterior, y explican que multiplican los catetos x y $3x$, y luego dividen por 2, algunos de estos alumnos escriben la fórmula $S = 3x{\cdot}x/2$. Teniendo en cuenta estas características de las respuestas hemos establecido tres categorías:

- *Algebraica-objeto.* Engloba a las respuestas que calculan los valores numéricos utilizando la ecuación algebraica que relaciona las dos variables expresada en forma de polinomio. En el problema A esta ecuación es $S = 3x^2/2$, en el problema C es $S = 10x{\cdot}x^2$, y en el problema D es $V = 4x^3 - 148x^2 + 1200x$.
- *Algebraica-proceso.* Se refiere a las respuestas que utilizan el lenguaje algebraico para explicar el procedimiento seguido para completar la tabla, pero sin escribir la ecuación que caracteriza la categoría anterior. En el problema A designan a los catetos con los símbolos x y $3x$, en el problema C indican la base y la altura del rectángulo con los símbolos x y $10 - x$, y en el problema D representan las dimensiones de la caja con los símbolos x, $50 - 2x$ y $24 - 2x$. En muchas de las respuestas de esta categoría está escrita la ecuación algebraica que relaciona las dos variables expresada en forma de producto, esta ecuación es $S = 3x{\cdot}x/2$ en el problema A, $S = x(10 - x)$ en el problema C y $V = x(50 - 2x)(24 - 2x)$ en el problema D.
- *Numérica.* Engloba a las respuestas que no utilizan el lenguaje algebraico para explicar el procedimiento que han utilizado para calcular los valores numéricos de la tabla.

Un rasgo que hay que destacar del conjunto de respuestas es la tendencia de los alumnos del grupo de Ciencias en utilizar el lenguaje algebraico frente a los alumnos del grupo de Letras que lo usan en una proporción muy inferior. Efectivamente, en este apartado de cada problema utilizan los símbolos del álgebra entre el 67% y el 79% de los alumnos del grupo de Ciencias, mientras que sólo lo hacen entre el 22% y el 44% del grupo de alumnos de Letras. Como hemos comentado, la mayoría de alumnos con respuesta algebraica al apartado 2, escriben la ecuación que relaciona las variables antes que el problema lo pida explícitamente, y la utilizan para calcular los valores de la variable dependiente. Es decir, son alumnos capaces de ver la ecuación algebraica como una forma de expresar la situación que plantea el problema y de utilizarla para hacer de forma más cómoda la tarea de cómputo de valores numéricos que se les pide en el apartado 1. Podemos decir, pues, que para estos alumnos el lenguaje algebraico tiene un significado y que, además, es una herramienta útil para realizar determinadas tareas.

Y, ¿qué pasa cuando en el apartado 3 pedimos a los alumnos que escriban la ecuación que relaciona las dos variables? Algunos alumnos con respuesta numérica en el apartado 2 utilizan ahora los símbolos de la geometría elemental, con lo cual la fórmula que escriben es $S = b{\cdot}h/2$ en el problema A, $S = b{\cdot}h$ en el problema C, etc. Estos alumnos son una pequeña parte de la muestra, entre el 3% y el 8%. La inmensa mayoría de alumnos utiliza correctamente la simbología algebraica y escriben la ecuación bien en forma de polinomio, o bien expresándola como el producto de las dimensiones del objeto que se estudia en el problema. Vemos, pues, que hay un grupo importante de alumnos que utilizan correctamente el lenguaje algebraico cuando se les pide explícitamente que escriban una ecuación, pero que no lo han utilizado para explicar cómo calculan los valores de la tabla numérica. Estos alumnos representan aproximadamente la mitad del grupo de Letras y entre un 12% y un 24% del grupo de Ciencias, según los problemas. Son alumnos que conocen el lenguaje algebraico, pero no hacen uso de él de forma natural y espontánea cuando ello puede facilitar la tarea que se les ha encargado. Para estos alumnos la simbología algebraica no es una forma útil de expresar la relación de dependencia entre las variables implicadas.

Pasamos ahora a explicar los resultados obtenidos en el último apartado de los problemas. Recordemos que en este apartado se efectuaban dos preguntas, la primera es: «¿Qué pasará con el valor de la variable dependiente (superficie, volumen,...) si seguimos aumentando los valores de x?» La mayoría de alumnos responde correctamente que aumentará o disminuirá según las características de la situación. A la segunda pregunta: «¿Por qué?», los alumnos responden con un texto que puede tener de 2 a 5 líneas. Hemos clasificado las respuestas con un criterio que es el mismo para los cuatro problemas y que se basa en el tipo de argumentación que expone el alumno. Las categorías que hemos definido son las siguientes:

- *Tabla,* que se refiere a las respuestas descriptivas, basadas sólo en la observación de los valores de la tabla del apartado 1.

Un rasgo que hay que destacar del conjunto de respuestas es la tendencia de los alumnos del grupo de Ciencias en utilizar el lenguaje algebraico frente a los alumnos del grupo de Letras que lo usan en una proporción muy inferior.

- *Geométrica,* corresponde a los argumentos relativos al contexto geométrico del problema.
- *Ecuación,* que se aplica a las respuestas que exponen argumentos relativos a las características de la ecuación que relaciona a las variables.

Dentro de la categoría *Ecuación* hemos realizado una nueva clasificación *–E-cómputo, E-foco* y *E-función–* ya que hay respuestas que se refieren básicamente al proceso de cómputo de los valores numéricos de la variable dependiente, otras focalizan la atención en el valor concreto de x que anula la otra variable (problema C y problema D) y, finalmente otras respuestas argumentan sobre la función como un objeto con características propias y que admite diversos lenguajes de representación. Si comparamos las respuestas obtenidas en este apartado con la de los apartados anteriores, observamos que existe correlación entre algunas categorías de respuestas: la mayoría (más del 70%) de alumnos con respuesta Ecuación en el apartado 4 de un problema habían dado una respuesta Algebraica en el apartado 2 de ese mismo problema, y si nos fijamos solamente en las respuestas Ecuación-funcional vemos que en más del 60% de los casos se corresponden con respuestas Algebraica-objeto en el apartado 2. Por otra parte, las respuestas Geométricas en el apartado 4 de un problema se corresponden con respuestas Algrebraica-proceso o Numéricas.

Las concepciones de los alumnos

El análisis de las respuestas a los tres primeros apartados de los problemas nos ha permitido clasificar las estrategias que los alumnos utilizan para conocer la relación de dependencia, clasificación que tiene como eje central la utilización de la expresión algebraica. Y el análisis de las respuestas al cuarto apartado nos ha llevado a clasificar las argumentaciones que realizan los alumnos sobre la relación de dependencia, argumentaciones que indican el significado que esta relación tiene para el alumno. E1 conjunto de significados que el individuo da al concepto y las expresiones simbólicas que le asocia forman parte de lo que Artigue (1990) llama concepciones de los sujetos. Con esta palabra, Sfard (1991) designa «todo el conjunto de representaciones internas y asociaciones que evoca el concepto.» Así, pues, los análisis y clasificaciones anteriores nos permitieron caracterizar y clasificar las concepciones de los alumnos de la muestra estudiada. En un primer momento, nos centramos en las respuestas al cuarto apartado de cada problema, para ampliar después al conjunto de todas las respuestas. El análisis expuesto anteriormente, nos permite detectar tres grandes concepciones:

El análisis de las respuestas a los tres primeros apartados de los problemas nos ha permitido clasifica las estrategias que los alumnos utilizan para conocer la relación de dependencia, clasificación que tiene como eje central la utilización de la expresión algebraica.

- *Ecuación.* Decimos que un alumno tiene concepción *Ecuación* si argumenta sobre la relación entre las variables refiriéndose a aspectos de la ecuación o más globalmente de la función.
- *Geométrica.* Los alumnos con concepción *Geométrica* son los que exponen argumentos relativos al contexto geométrico de los problemas.
- *No argumento.* Los alumnos con concepción *No argumento* son los que o bien no exponen ningún argumento y por tanto su respuesta ha sido clasificada como Tabla, o bien han dejado la respuesta en blanco.

Para fijar la clasificación hemos adoptado el siguiente criterio: Si el alumno da una respuesta de la misma categoría en 3 o en los 4 problemas diremos que tiene una concepción de dicha categoría: Ecuación, Geométrica o No argumento. Éstos son los alumnos de concepción pura. Si un alumno tiene dos respuestas de una categoría y dos de otra tiene una concepción mixta, y si no presenta estas regularidades diremos que no tiene una concepción definida. Observando las clasificaciones de las respuestas en los distintos apartados podemos explicar de manera más precisa los rasgos que caracterizan a cada una de estas concepciones, como veremos a continuación.

Los alumnos de concepción Ecuación justifican la relación de dependencia con argumentos relativos a las características de la ecuación que relaciona las dos variables y utilizan el simbolismo algebraico como la manera natural de expresar la relación de dependencia. Son capaces de pasar a la representación algebraica de la función cuando ello facilita la tarea que han de realizar sin que esto se les haya indicado explícitamente. La ecuación que relaciona las variables es un elemento central en la visión que estos alumnos tienen de la relación de dependencia. Sin embargo, las ideas de estos alumnos tienen distintos niveles de abstracción. Unos ven la ecuación como un instrumento de cómputo para calcular los valores numéricos de la variable dependiente, es decir, entienden la ecuación como un proceso, mientras que otros ven la ecuación como una de las formas de representación de un objeto matemático: la relación de dependencia funcional. Los alumnos de concepción Ecuación, que representan el 30% del total, tienen una presencia más importante en el grupo de ciencias (42%) que en el de Letras (27%).

Para los alumnos de concepción Geométrica es el contexto quien da significado a las variables y a su relación de dependencia. Algunos –al igual que los alumnos de concepción Ecuación– utilizan el lenguaje algebraico espontáneamente para expresar la relación de dependencia, pero lo hacen de forma que se conserva el significado del contexto: dejando sin efectuar el producto de las dimensiones de la figura que se estudia. Otros sólo utilizan el lenguaje algebraico cuando se les pide explícitamente que escriban una ecuación. Vemos que los alumnos de concepción Geométrica son capaces de utilizar correctamente el simbolismo algebraico para escribir la ecuación que relaciona las dos variables, pero este simbolismo no tiene el mismo papel en la estructura cognitiva de todos los alumnos. Unas dos terceras partes de los alumnos de concepción Geométrica pertenecientes al grupo de Ciencias ven la expresión algebraica como una forma importante, útil y significativa de expresar la relación de dependencia entre las variables. En cambio, esto no ocurre con una gran mayoría –el 70% aproximadamente– de los alumnos de concepción Geométrica del grupo de Letras. Los alumnos de concepción Geométrica son el 28,3% del total de la muestra, y su presencia relativa es ligeramente superior en el grupo de Letras (29,6%) que en el de Ciencias (27,3%).

El conjunto de alumnos de concepción No argumento no tienen una idea de la dependencia funcional que vaya más allá de una correspondencia numérica que, en nuestro caso, puede obtenerse mediante la aplicación de una fórmula geométrica. Estos alumnos se encuentran en una fase muy inicial en la construcción del concepto, y cuando han de argumentar sobre su significado o no responden o describen la tendencia de la tabla de valores numéricos. Algunos de estos alumnos utilizan el lenguaje algebraico sólo cuando se les pide que escriban una ecuación, y otros ni tan si quiera en ese caso lo utilizan. Todos los alumnos de concepción No argumento son del grupo de Letras (26%) y representan el 11,7% del total de alumnos.

Dentro de estas tres concepciones tenemos al 70% de alumnos de la muestra estudiada. Además, hay algunos alumnos que presentan una categoría de concepción u otra en los distintos problemas, lo que nos ha llevado a definir dos concepciones mixtas: *Ecuación-Geométrica* y *No argumento-Alto* que incluyen respectivamente al 10% y al 8,3% de los alumnos. Las ideas sobre la relación de dependencia de los alumnos con concepción Ecuación-Geométrica comparten las características de las dos tendencias: el papel de la representación algebraica es importante, pero también lo es el significado que el contexto da a las variables y a su relación. Los alumnos de concepción No argumento-Alto son del grupo de Letras y expresan unas ideas muy similares a las No argumento, aunque presentan alguna característica de las otras concepciones. Como acabamos de ver, nuestro estudio nos condujo a definir tres concepciones puras y dos concepciones mixtas que engloban casi al 90% de la muestra estudiada. El 10% restante no se adecua a la clasificación que hemos establecido, ya que sus respuestas varían según la naturaleza del problema.

Dentro de estas tres concepciones tenemos al 70% de alumnos de la muestra estudiada. Además, hay algunos alumnos que presentan una categoría de concepción u otra en los distintos problemas...

Conclusiones

De los resultados obtenidos se deducen unas conclusiones que hemos agrupado en tres apartados:

Respecto a las concepciones de los alumnos

Acabamos de explicar la clasificación de las concepciones de los alumnos y los rasgos característicos de cada categoría. Esta clasificación queda reflejada en los gráficos 1, 2 y 3.

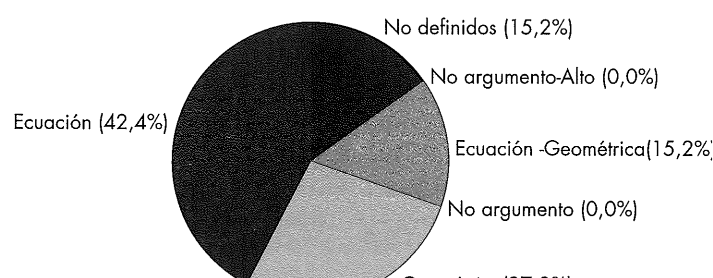


Gráfico 1. Concepciones de los alumnos del grupo de Ciencias

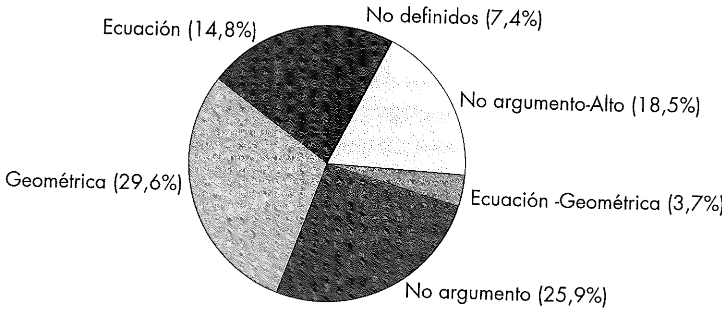


Gráfico 2. Concepciones de los alumnos del grupo de Letras

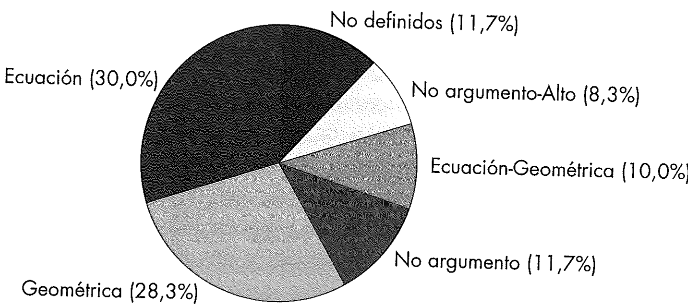


Gráfico 3. Concepciones del total de alumnos

Respecto a las diferencias entre los dos grupos de alumnos estudiados

La muestra estudiada en esta investigación estaba formada por 60 alumnos de COU: 33 alumnos de las opciones A y B formando el grupo de Ciencias y 27 alumnos de opción C, el grupo de Letras. Entre los dos grupos de alumnos hay importantes diferencias respecto a la capacidad de trabajar con el lenguaje algebraico y respecto a la visión que tienen de la relación de dependencia funcional.

Estas diferencias quedan reflejadas en el gráfico 4, donde se representa la proporción de alumnos de cada grupo pertenecientes a cada categoría de concepción.

Respecto a la enseñanza-aprendizaje de las funciones

El cuestionario que hemos utilizado como instrumento de obtención de datos presenta cuatro situaciones de dependencia funcional. La función que relaciona las variables es:

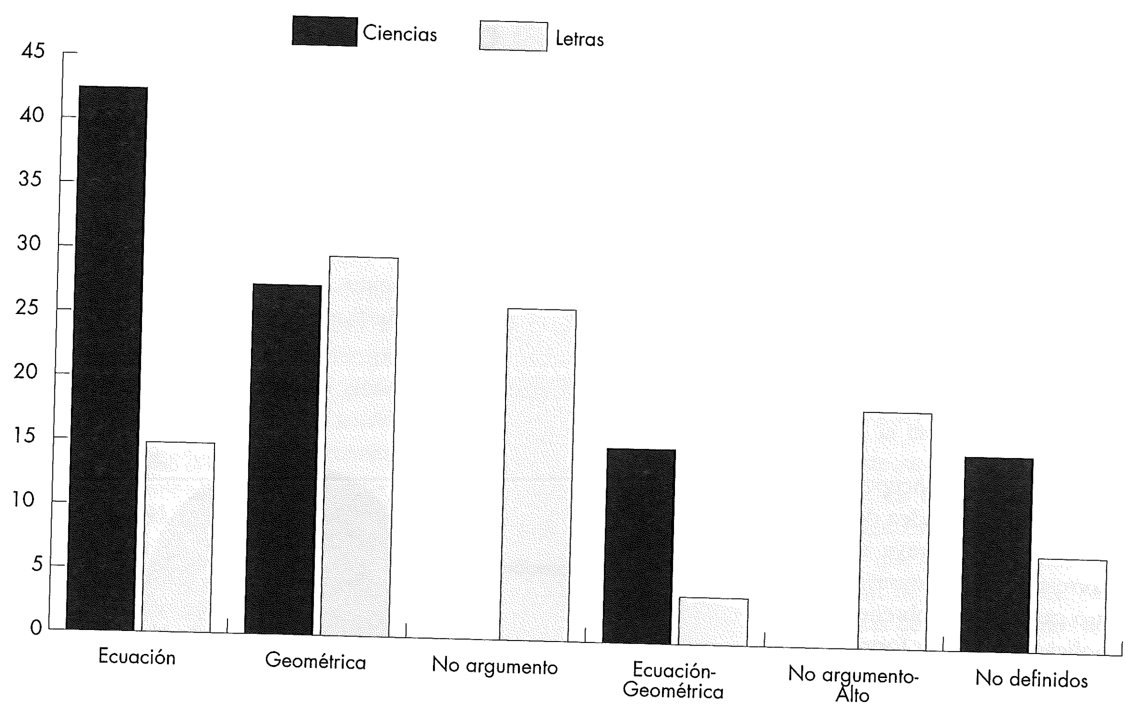


Gráfico 4. Distribución porcentual de los alumnos de cada grupo

- *Problema A.* Una función polinómica de segundo grado acotada inferiormente, cuya ecuación es del tipo $y = ax^2$.
- *Problema B.* Una función de proporcionalidad inversa.
- *Problema C.* Una función polinómica de segundo grado acotada superiormente, cuya ecuación es del tipo $y = ax^2 + bx$.
- *Problema D.* Una función polinómica de tercer grado con dos extremos relativos.

El análisis que hemos realizado de las respuestas de los alumnos se ha centrado principalmente en qué procedimientos utilizaban o en las argumentaciones que exponían, con independencia de su corrección. No ha sido un objetivo prioritario en nuestro estudio el análisis de las respuestas a los problemas desde el punto de vista de su corrección o incorrección, pero también hemos realizado una primera aproximación a este análisis. De él, parece deducirse que de los cuatro modelos de función que intervienen en el cuestionario, la función de proporcionalidad inversa es la que presenta menos dificultad conceptual para los alumnos, ya que en el problema B argumentan correctamente sobre la relación de dependencia 53 de los 60 alumnos de la muestra. Sigue en dificultad el problema A, donde la relación es una función cuadrática de la forma $y = ax^2$, pues hay 47 alumnos capaces de exponer argumentos correctos sobre la relación entre las variables. En el problema C, donde la ecuación cuadrática es $y = ax^2 + bx$, con $a < 0$, la dificultad aumenta, y solamente hay 21 alumnos (una tercera parte de la muestra) con argumentaciones de una calidad aceptable. Finalmente en el problema D nos encontramos con una función polinómica de tercer grado, y una cuarta parte de los alumnos argumenta de forma correcta.

Para construir el concepto de relación de dependencia funcional es necesario haber asimilado los modelos de función más sencillos: la dependencia lineal (proporcionalidad directa y función afín) y la proporcionalidad inversa y función cuadrática que intervienen en el cuestionario. Como acabamos de ver, los resultados obtenidos en nuestro estudio, nos ofrecen una secuencia de la dificultad que presentan estas funciones para los alumnos, y por tanto sugieren también una secuencia didáctica, donde la función de proporcionalidad inversa se introduzca después de las funciones lineal y afín, y antes de la función cuadrática. De los resultados obtenidos, creemos que merece ser destacada también la gran diferencia observada entre la función polinómica de segundo grado de la forma $y = ax^2$. y la función $y = ax^2 + bx$, con $a < 0$. De un 78% de respuestas correctas pasamos a un 35%, por tanto, podemos afirmar que hay un salto conceptual importante entre estos dos modelos de función cuadrática. Como enseñantes, conocíamos el aumento de dificultad que supone para los estudiantes pasar de la función $y = ax^2$ a la función cuadrática general, y de nuestra experiencia sabemos también que esta dificultad tiene mucho que ver con la traslación del eje de simetría de la función. Nuestro estudio nos confirma este importante aumento de dificultad. La función polinómica de tercer grado es –como ya esperábamos– la que presenta el menor porcentaje de respuestas correctas. Sin embargo, la diferencia de dificultad entre esta función y la función $y = ax^2 + bx + c$, con $a < 0$ (25% y 35% de respuestas correctas respectivamente) no es tan grande como la diferencia entre los dos modelos de función cuadrática estudiados.

El análisis que hemos realizado de las respuestas de los alumnos se ha centrado principalmente en qué procedimientos utilizaban o en las argumentaciones que exponían, con independencia de su corrección.

Carme Vall de Pérez
Jordi Deulofeu
Universidad Autónoma de Barcelona

Bibliografía

ARMENDÁRIZ M.V, C. AZCÁRATE y J. DEULOFEU (1993): «Didáctica de las Matemáticas y Psicología», *Infancia y Aprendizaje*, n.° 62-63, 77-99.

AZCÁRATE, C. y J. DEULOFEU (1990): *Funciones y Gráficas*, Síntesis, Col. Matemáticas, cultura y aprendizaje, n.° 26, Madrid.

ARTIGUE, M. (1990): «Epistémologie et didactique», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 10, n.° 2 y 3, 241-286.

JANVIER, C. (ed.) (1987): *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale.

LEINHARDT, G. y otros (1990): «Functions, Graphs and Graphing: Tasks, Learning and Teaching», *Review of Educational Research*, vol. 60, n.° 1, 1-64.

SFARD, A. (1991): «On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as differents sides of the same coin», *Educational Studies in Mathematics*, n.° 22, 1-36.

SHELL CENTRE (1990): *El lenguaje de funciones y graficas* (trad. y adapt. Félix Alayo), MEC y Universidad del País Vasco, Bilbao.

TALL, D. y S. VINNER (1981): «Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity», *Educational Studies in Mathematics*, n.° 12, 151-169.

VINNER, S. y DREYFUS, T. (1989): «Images and definitions for the concept of function», *Journal for Research in Mathematics Education*, vol 20, 356-366.