SUMA 33
febrero 2000, pp. 37-44

La combinación de las observaciones: una aplicación práctica de los sistemas de ecuaciones lineales incompatibles

María Álvaro Calvache
Cristina Fernández Álvaro
Carmen Pérez Morilla

Las situaciones del mundo real que llevan al estudio de sistemas de ecuaciones lineales incompatibles no pueden ser resueltas, y frecuentemente se hace el frío comentario matemático de que no existe solución para los mismos. Ya que responden a problemas reales necesariamente tiene «algún tipo» de solución. Exponemos en el presente artículo cómo los astrónomos soslayaron el problema basándose en los sistemas de ecuaciones compatibles o bien en enfocar el problema en otra dirección, creando métodos que minimizarán los «errores» cometidos al resolver dichas ecuaciones. Ilustramos dichos enfoques a través de los hombres que desarrollaron las diferentes aproximaciones así como de los problemas originales que dieron lugar a dichos desarrollos.

ARTÍCULOS

CUANDO DESARROLLAMOS la enseñanza de un tema matemático, nos debemos cuestionar si estamos enseñando dicho tema como un fin en sí mismo o si estamos ayudando a que puedan resolverse verdaderos problemas del mundo real en el que están sumergidos. Probablemente si conectamos nuestro tema matemático con el mundo real, tanto en relación con el pasado que le dio vida, como con las futuras aplicaciones, haremos que el interés del alumno por el tema en cuestión crezca de modo sustancial. Ello es semejante a lo que ocurre si le hacemos aprender un idioma sólo para que vea lo bello que es y las obras que ha producido, o si hacemos que se exprese en dicho idioma en un contexto real; esta segunda vía sería más fructífera para su aprendizaje.

Esta situación es común a todo el sistema de enseñanza, ya que el profesor puede encontrarse más seguro dentro del reino que su teoría define, que cuando se aproxima al impacto de su enseñanza en el mundo real, donde pueden aparecer parcelas de inseguridad. Podemos poner uno de los ejemplos que más nos han llamado la atención, y que nos indican que nuestros contenidos, frecuentemente, adolecen de una conexión con el mundo real.

Uno de los problemas más importantes en la historia de la humanidad, que ha tardado mucho en ser resuelto, y que le ha ocasionado grandes quebraderos de cabeza a lo largo de su intento de resolución, ha sido el conocido como «problema de la longitud». La determinación de un punto sobre la superficie de la Tierra mediante un sistema de coordenadas, longitud y latitud, fue un problema resuelto por los griegos, al menos teóricamente. Pero, debido a los instrumentos que el hombre ha ido disponiendo a lo largo de los años, no fue hasta bien entrado el siglo XVIII cuando fue realmente resuelto para fines prácticos.

¿Qué importancia tenía para la humanidad este problema? Cuando el hombre viajaba por tierra tenía muchos puntos de referencia que evitaban el que se perdiera, pero cuando comenzó a navegar en mar abierto, sólo las estrellas y la brújula podían orientarlo, pero determinar el punto exacto dónde se encontraba fue un difícil problema, que tras varios días de navegación lo llevaban a un lugar desconocido. La determinación de la latitud era sencillo, pues bastaba con conocer la altura de la estrella Polar en el punto en cuestión, pero la longitud dependía de un reloj preciso. Ello tendría que ser construido por el hombre, cosa que ocurrió a mitad del siglo XVIII por J. Harrison, un carpintero inglés, o bien interpretar los múltiples relojes siderales que hay en nuestro cielo y crear, basándose en ellos, los célebres Almanaques Náuticos para la navegación, cosa que ocurrió en la misma época citada, por parte de los astrónomos.

Para darnos cuenta de la importancia y necesidad de resolución de este problema, citemos que en 1642 Abel Tasman zarpó de la isla Mauricio con dos naves cargadas de víveres para buscar el gran continente del Sur. La flota atraviesa el Océano Índico y ¡bordea Australia sin verla!, aunque encuentra una tierra en los mares del Sur que hoy día se denomina Tasmania. Existen otros muchos ejemplos de catástrofes ocurridas a grandes flotas debido a la imprecisión de su localización.

No es extraño, por tanto, los numerosos premios ofrecidos por los gobiernos dominantes de la época (España, Francia, Inglaterra...) a quien resolviese el problema de la longitud, lo que nos pone de manifiesto el impacto que éste tuvo a lo largo de los años. Intervinieron e intentaron resolver el problema todos los grandes científicos que lo conocieron, Galileo, Newton, Laplace, Euler... pero eso nos llevaría a otra historia.

Para un conocimiento del problema recomendamos se lea el libro de la divulgadora científica Dova Sobel, titulado *Longitud* donde se expone de una forma coherente la problemática relacionada con la cuestión citada. Una visión más novelesca de este problema puede verse en el libro de Umberto Eco titulado *La isla del día antes*.

La búsqueda de la resolución del problema de la longitud llevó a los astrónomos a precisar sus constantes astronómicas a través de las observaciones de los astros, realizadas durante siglos. Y para ello tuvieron que resolver sistemas de ecuaciones lineales, pero ¡donde el número de ecuaciones era muy superior al de incógnitas!

Hoy día en la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales, cuando hay incompatibilidad por exceso del número de ecuaciones, les decimos a los alumnos que el sistema no tiene solución. Pero esta respuesta, que matemáticamente es correcta, deja abierta una puerta no bien explicada en nuestra enseñanza, y que es necesaria su estudio desde el punto de vista real, pues si le decimos a los astrónomos que ese problema no tiene solución, ellos dirían que no es una buena respuesta, pues sus constantes astronómicas son reales. Lógicamente, como veremos, los astrónomos más cerca de la realidad que los matemáticos, nos muestran una solución al conocer el problema real que desean resolver, y tratan de dar respuesta lo mejor que pueden.

El objetivo de este trabajo es plantearnos este tipo de situaciones, que son mucho más frecuentes en el mundo real que aquellas que estudiamos de solución única del sistema, ver cómo se ha ido resolviendo a lo largo de los años, y mostrar cómo hoy día es un problema corriente en todos los campos científicos, aunque los matemáticos en nuestra enseñanza casi lo ocultamos, quizás porque su historia es excitante y ello puede hacer que nuestros alumnos se diviertan estudiando matemáticas.

El objetivo de este trabajo es plantearnos este tipo de situaciones, que son mucho más frecuentes en el mundo real que aquellas que estudiamos de solución única del sistema, ver cómo se ha ido resolviendo a lo largo de los años, y mostrar cómo hoy día es un problema corriente en todos los campos científicos, aunque los matemáticos en nuestra enseñanza casi lo ocultamos, quizás porque su historia es excitante y ello puede hacer que nuestros alumnos se diviertan estudiando matemáticas.

Planteamiento del problema

Cuando se estudia un sistema físico, biológico..., se suele desear explicar el comportamiento de una variable, posición de la Luna en el cielo, ritmo cardíaco..., en función de otras variables fuertemente relacionadas con ella, hora del día..., peso del animal..., lo que se escribe formalmente como:

$$y = f(x^1, \ldots, x^k)$$

lo que nos indica que la variable y es explicada por la función f a través de las valores que toman las variables conocidas x^i.

La búsqueda de la función f es una constante en la ciencia, así sabemos la función que da la fuerza de atracción entre dos masas del universo a través de la famosa fórmula dada por Newton, y conocida como ley de la gravitación universal.

A veces, para determinar la función f se obtienen numerosas observaciones de las variables x^i e y, y de ello se infiere dicha ley o función, siendo frecuente suponer el tipo de función y determinar, a través de los datos, algunas constantes que la determinan. Por comodidad de escritura y, sobre todo, de representación, supondremos que sólo existe una variable x.

Partimos, pues, de un conjunto de n observaciones (x_i, y_i) $i = 1, \ldots, n$, cuya representación nos sugiere un cierto modelo o función que nos explique el fenómeno estudiado, es decir la relación entre la variable y y la variable x.

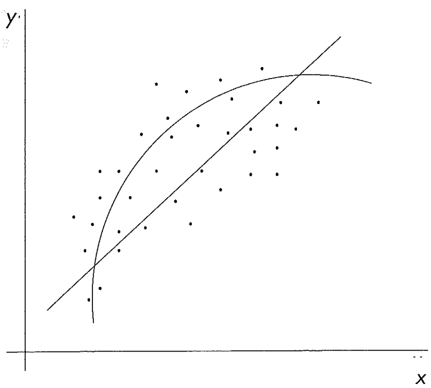

Figura 1

Si suponemos que esta relación es lineal, podemos escribir que:

$$y = b_0 + b_1 x + \varepsilon$$

donde b_0 y b_1 son las constantes (o parámetros) que debemos determinar, partiendo de las observaciones, para tener la función, o ley, que sigue nuestro sistema. La variable ε representa la desviación entre el valor observado (y_i), y el que nos daría el modelo que hemos supuesto $(\tilde{y}_i = b_0 + b_1 x_i)$, es decir:

$$\varepsilon_i = y_i - \tilde{y}_i = y_i - b_0 - b_1 x_i$$

Para determinar b_0 y b_1, debería poder encontrarse valores de modo que $\varepsilon_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Es decir, deberíamos poder resolver el sistema de n ecuaciones con dos incógnitas:

$$y_i = b_0 + b_1 x_i,\ i = 1, \ldots, n.$$

Pero como el sistema no suele tener solución, al ser el sistema incompatible

...los astrónomos dieron diferentes soluciones al problema, unas brillantes, otras bastante chapuceras, pero es la grandeza de la resolución de los grandes problemas.

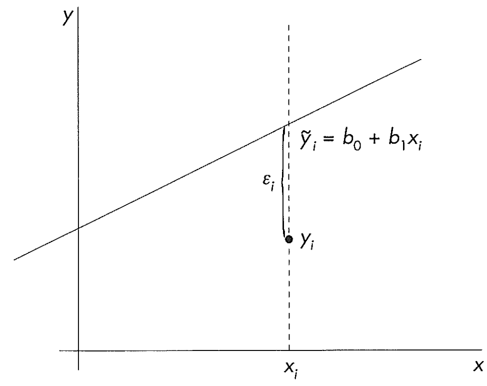

Figura 2

muy frecuentemente, debemos de pensar en el problema en relación con el fenómeno real.

Los astrónomos buscaron los parámetros b_0 y b_1, tratando de obtener los menores errores en el conjunto ε_i, $i = 1, \ldots, n$. Hoy día este planteamiento nos conduce a un problema de optimización multiobjetivo, al desear minimizar simultáneamente las «funciones», ε_i, $i = 1, \ldots, n$, pero esto no puede ser desarrollado en este trabajo; el lector interesado puede verlo en Carrizosa y otros (1996).

Como veremos a continuación, los astrónomos dieron diferentes soluciones al problema, unas brillantes, otras bastante chapuceras, pero es la grandeza de la resolución de los grandes problemas. Cuando dieron criterios, o principios implícitos, sobre este conjunto de errores se obtuvieron claras soluciones al problema, dando lugar a los criterios que hoy día seguimos empleando, y que denominamos de esta forma:

- *Regresión de mínimo valor absoluto medio.* Boscovich, 1757.

$$\min_{b_0, b_1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i|$$

- *Regresión que minimiza la máxima desviación absoluta.* Laplace, 1786.

$$\min_{b_0, b_1} \left(\max_i |\varepsilon_i| \right)$$

- *Regresión mínimo cuadrática.* Legendre 1805.

$$\min_{b_0, b_1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$$

Veamos este desarrollo en su contexto real.

Breve historia de la resolución del problema: sus autores y los problemas reales que deseaban resolver

Desde un principio observan que si hay un sistema de m ecuaciones con n incógnitas ($m > n$), podían resolver todos los sistemas de n ecuaciones con n incógnitas que se podrían formar, esto es

$$\binom{m}{n}$$

Entre ellos, buscan los que dieran residuales o desviaciones más «homogéneas». Pero comprendieron la dificultad, que hoy llamaríamos complejidad computacional, e intentaron evitar el problema abordando heurísticamente la situación.

Relatamos en esta historia sólo tres de los métodos de resolución y que dieron lugar a métodos que fueron empleados durante años en la resolución de problemas reales.

Mayer y el método de los promedios

La media aritmética era empleada como solución natural de los problemas astronómicos en aquellas situaciones en las que existían «varias soluciones», al promediar entre ellas. El astrónomo alemán Tobias Mayer (1723-1762) tuvo la genialidad de agrupar las ecuaciones, y tomar como representante de estos grupos la suma de las mismas, produciendo los grupos de modo que sus representaciones fueran lo más diferentes posibles, y al escoger un número de grupos igual al de parámetros a determinar, tenía un sistema compatible, cuya resolución se conoce como método de las sumas. Si dividimos por el número de ecuaciones en cada grupo tendremos el método de los promedios.

El astrónomo alemán Tobias Mayer (1723-1762) tuvo la genialidad de agrupar las ecuaciones, y tomar como representante de estos grupos la suma de las mismas...

Mayer estudiaba el comportamiento lunar, para realizar unas tablas lunares que permitiesen a los navegantes la posibilidad de determinar la longitud en el mar al observar este astro. En la determinación de la posición lunar el fenómeno de la libración de la Luna distorsiona la determinación de los parámetros lunares, pues ello indica que no es cierto que la Luna presente la misma figura visible, el movimiento de libración permite observar un 60% de su superficie. Mayer estudia el fenómeno a través de los cambios de posición del cráter Manilius visto desde la Tierra.

Mayer estudiaba el comportamiento lunar, para realizar unas tablas lunares que permitiesen a los navegantes la posibilidad de determinar la longitud en el mar al observar este astro.

Él llevó el problema a un sistema de ecuaciones, 27 observaciones, con tres incógnitas. Para resolverlo, inicialmente selecciona tres ecuaciones, pero ve cómo los residuales dependían fuertemente de las ecuaciones escogidas, por lo que propone dividir las ecuaciones en tres grupos de nueve ecuaciones cada uno, y suma las ecuaciones en cada grupo, buscando los grupos de modo que hubiese máximas diferencias entre las ecuaciones resultantes, resolviendo el sistema obtenido para hallar las constantes que buscaba.

Como astrónomo Mayer sabía que este método va a disminuir el error más que si toma las ecuaciones individualmente, aunque los cálculos del error cometido no los hizo con gran precisión. No obstante, el método será empleado durante bastantes décadas por los astrónomos.

Hoy día sabemos que la incertidumbre de una media es $1/n$ la de una observación. Además, los métodos de muestreo estratificado van a basarse, posteriormente, en la idea de agrupar las observaciones por grupos que sean lo más diferentes entre sí.

No es extraño que la precisión que Tobias Mayer pudo dar a las tablas lunares fuese tal que obtuvo un premio de la Comisión inglesa para la determinación de la longitud en el mar (aunque fue cobrado por su viuda en 1765). Tampoco nos debe de extrañar la felicitación recibida de Euler.

Euler dio un tratamiento diferente al problema de las ecuaciones. Él se enfrentó al problema cuando estudiaba las anomalías de los movimiento de Júpiter y Saturno. Euler presentó un magnífico tratado teórico *Recherches sur la questión des irrégularitiés du mouvement de Saturn et de Jupiter, sujet proposé pour le prix de l´année 1748, par l´Academie Royale des Sciences de Paris*, explicando el fenómeno y obteniendo el citado premio.

Aunque, cuando desea comprobar la teoría con la observación, obtiene un problema de siete parámetros y 75 observaciones, a cuyo sistema no supo dar una solución razonable como dio Mayer, al no pasar la barrera del problema conceptual al problema real, tal como Mayer hizo en 1750.

Boscovich y el método de mínima desviación absoluta

Fue Boscovich el primero que da un método basado en una función de valoración de los residuos de un modo explícito, aunque los presentó de un modo geométrico, por lo que parece un método no sistemático, pero coincide totalmente con el razonamiento analítico que haremos aquí y que corresponde con el que se da hoy día en nuestros textos.

Roger Joseph Boscovich (1711-1787) fue un sacerdote jesuita que en 1740 llegó a ser profesor de matemáticas en el Collegium Romanum, y por ello fue consultado por el Papa en trabajos geodésicos.

Un problema de aquella época era el confirmar las hipótesis de Newton de que la Tierra, debido a ser un fluido homogéneo en rotación, era un esferoide con radio ecuatorial que excedía al radio del polo en 1/230. Para chequear la teoría, Francia hizo observaciones en Laponia y en el Perú para medir un grado terrestre sobre un arco de meridiano y confirmar las hipótesis de Newton, o bien las de los astrónomos franceses que habían creído medir que la Tierra tenía forma de limón, no de naranja newtoniana, en el que el radio del ecuador era menor que el radio polar.

El Papa Benedicto XIV formó una comisión para medir un arco del meridiano y construir un nuevo mapa de los estados papales, al frente de lo cual puso a Boscovich y al rector del Colegio de Jesuitas ingleses en Roma, Christopher Maire.

Boscovich se encontró con un problema con menor número de incógnitas (sólo dos) del que los astrónomos habían estado trabajando. Era conocido que la relación entre la longitud de un arco y su latitud, en arcos pequeños, es dado por $y = b_0 + b_1 \mathrm{sen}^2 L$, donde y representa la longitud de un grado del arco del meridiano y L la latitud del punto medio de dicho arco.

La excentricidad buscada es $b_1/3b_0$ por lo que tiene que determinar los parámetros (b_0, b_1)en un problema que hoy llamamos de regresión lineal al escribir:

$$y = b_0 + b_1 x$$

con $x = \mathrm{sen}^2 L$, pues los parámetros se comportan linealmente, usando las observaciones efectuadas sobre diferentes puntos de la Tierra por diferentes expediciones.

Boscovich tuvo el acierto de introducir un criterio para escoger los parámetros. Hizo una formulación verbal del mismo:

Dado un cierto número de observaciones, encontrar los parámetros que consigan:

1. La suma de las desviaciones positivas deberá ser igual a la suma de las negativas.
2. La suma de todas las desviaciones, independientemente del signo, debe ser mínima.

Escrito con nuestra notación, estos principios se expresa como:

$$\min \sum_{i=1}^{n} |y_i - b_0 - b_1 x_i|$$

sujeto por

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 x_i) = 0$$

La resolución al problema que parte de Boscovich es propia de un genio, da un método geométrico de resolución que coincide con lo que nosotros hoy deducimos analíticamente. Veamos cómo procedemos en la actualidad para la resolución del problema.

Desarrollando la condición tenemos que $\bar{y} - b_0 - b_1 \bar{x} = 0$, por lo que b_0 ($b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$) será conocida al serlo b_1, y al sustituir en la función objetivo tenemos un problema con una incógnita b_1,que llamamos b por comodidad.

Debemos determinar b tal que produzca

$$\min \sum |y_i - \bar{y} - b(x_i - \bar{x})|$$

O bien $min[f(b)]$, donde

$$f(b) = \sum_{i=1}^{n} f_i(b) = \sum |\tilde{y}_i - b\tilde{x}_i|$$

al definir $\tilde{x}_1 = x_1 - \bar{x}$ e $\tilde{y}_1 = y_1 - \bar{y}$.

Esta función $f(b)$ no es derivable para todo valor de b, por lo que el cálculo del mínimo no es trivial, como veremos en el caso del criterio del error cuadrático medio.

Sin embargo, $f(b)$ es una función convexa, lineal a trazos.

Su demostración es sencilla ya que $f_1(b)$ es la función valor absoluto, por lo que es convexa y lineal en dos trazos, teniendo el mínimo en $b = y_1/x_1$ (ver figura 3).

Ahora dado que la suma de funciones convexa es convexa resulta que $f(b)$ tiene las propiedades que enunciábamos (ver figura 4).

Por ello los mínimos locales de esta función serán mínimos globales.

Para buscar dichos mínimos veamos que la función $f(b)$ tiene la siguientes propiedades:

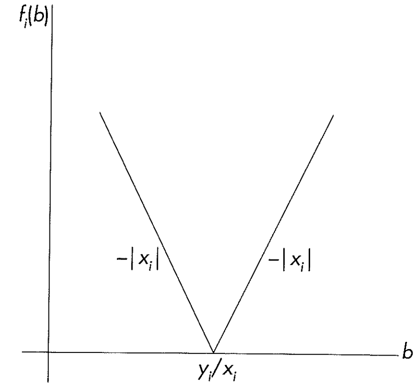

Figura 3

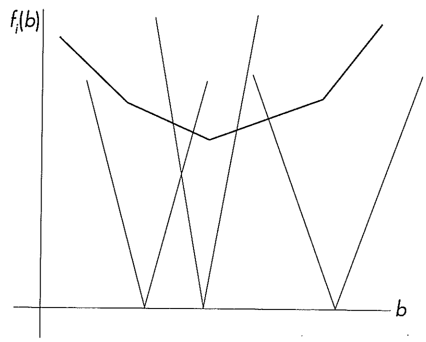

Figura 4

1. La pendiente del extremo lineal izquierdo es

$$-\sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

y similarmente la del derecho es

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

2. Los puntos donde cambia la pendiente de la función vienen dados por los valores y_i/x_i, $i = 1, ..., n$.

Si ordenamos los puntos $i_1, i_2, \ldots, i_n$, tal que $y_{i_1}/x_{i_1} \leq \ldots \leq y_{i_n}/x_{i_n}$, la pendiente de $f(b)$ se incrementa en cada punto $b_{(k)}$ en $2|x_k|$, siendo $b_{(k)} = y_{i_k}/x_{i_k}$.

La demostración, también es fácil:

1. Notemos que para $b \leq b_{(i)}$ todas las $f_i(b)$ tienen pendiente $-|x_i|$ por lo que $f(b)$ tiene pendiente

$$-\sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

y para $b \geq b_{(n)}$ tiene la pendiente

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

...el método se conoce a veces como método de la mediana.

por idéntica razón.

2. Para $b_{(1)} \leq b \leq b_{(2)}$ la pendiente de $f(b)$ es constante, pero ahora $f_{i_1}(b)$ tiene pendiente $|x_{i_1}|$ pues ha cambiado en $b_{(1)}$, y las restantes $f_i(b)$ continúan con pendiente $-|x_i|$, por lo que $f(b)$ tiene en este intervalo pendiente

$$-\sum_{i=1}^{n} |x_i| + 2|x_{i_1}|$$

Y así se sigue razonando en los restantes intervalos.

Como consecuencia de las propiedades anteriores, la pendiente de $f(b)$ va aumentando desde

$$-\sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

hasta

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

por lo que pasa de negativa a positiva, y en dicho momento alcanza el mínimo la función, es decir:

El min$f(b)$ se alcanza en $b = b_{(r)}$, tal que

$$-\sum_{i=1}^{n} |x_i| + 2\sum_{i=1}^{r-1} |x_i|$$

es negativa y

$$-\sum_{i=1}^{n} |x_i| + 2\sum_{i=1}^{r} |x_i|$$

es no negativa.

Si

$$-\sum_{i=1}^{n} |x_i| + 2\sum_{i=1}^{r} |x_i| = 0$$

entonces $b \in [b_{(r)}, b_{(r+1)}]$, sería un intervalo de valor óptimo.

Lo que puede escribirse como que el índice r debe verificar la relación

$$\sum_{i=1}^{r-1} |x_i| \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq -\sum_{i=1}^{r} |x_i|$$

lo que nos dice que la mediana de las observaciones x_i, ordenadas por los cocientes y_i/x_i, nos da la solución óptima, por lo que al $b_{(r)}$ correspondiente se le llama *mediana* de las b_i, y el método se conoce a veces como *método de la mediana.*

Este es el método de Boskovich pero que él propueso de un modo geométrico, como era usual en aquellas fechas.

Posteriormente Laplace empleó en su obra de 1786 *Mémorie sur la figure de la terre*, el método de minimizar el mayor valor absoluto de los residuales:

$$\min\left(\max_i \left|y_i - \bar{y} - b\left(x_i - \bar{x}\right)\right|\right)$$

Siendo en este caso

$$g(b) = \max_i \left|\tilde{y}_i - b\tilde{x}_i\right|$$

también una función convexa, lineal a trozos, por lo que el proceso para la obtención del mínimo de dicha función es similar al del problema anterior. No obstante, en este caso es un poco más compleja la determinación de los puntos donde la función cambia de pendiente.

Veremos como ambos métodos pueden resolverse a través de la programación lineal en un próximo artículo sobre las aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales indeterminados.

Desde el principio estos métodos de ajuste también fueron empleados para interpolar valores en las tablas de mortalidad, así Lambert en 1772 combina métodos gráficos y analíticos para ajustar tablas de vida a partir de las tablas de mortalidad de Londres del periodo 1728-1757.

Legendre y el método de los mínimos cuadrados

Legendre fue el primero en publicar el más famoso de los métodos, el método de los mínimos cuadrados, aunque no fue dado a conocer en una publicación aislada, lo que nos indica que estos procedimientos sólo suponían una herramienta para los astrónomos, no como los presentan los matemáticos con un fin en sí. El método en cuestión aparece en su obra de 1805 titulada *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*, a la que añade un apéndice titulado *Sur la méthode des moindres quarrés*, y en el que se describe el método tal como hoy se hace en nuestros textos, aunque con una notación diferente. Dicho método es muy fácil de usar, por lo que es posible que con anterioridad algún astrónomo lo hubiera empleado en sus cálculos, en especial el mismo C. F. Gauss como reclamó a la comunidad científica, pero en honor a la verdad nunca se tuvo un conocimiento explícito del mismo hasta la publicación de Legendre, y a partir de dicha fecha se empleó con gran profusión en todos los ámbitos científicos.

Legendre fue el primero en publicar el más famoso de los métodos, el método de los mínimos cuadrados, aunque no fue dado a conocer en una publicación aislada, lo que nos indica que estos procedimientos sólo suponían una herramienta para los astrónomos, no como los presentan los matemáticos con un fin en sí.

Adrien-Marie Legendre (1752-1833) fue un gran científico francés que trabajó en los numerosos campos que se estudiaban en su tiempo desde la mecánica celeste, como hemos indicado, hasta diferentes cuestiones matemáticas, así en 1794 publicó un tratado de geometría que fue ampliamente utilizado.

La exposición de Legendre sobre el principio de los mínimos cuadrados de los errores es muy ilustrativa de su pensamiento, y puede ser empleada en nuestras clases como introducción al mismo:

> De todos los principios que pueden proponerse para la distribución de los errores entre las ecuaciones, pienso que no hay ninguno más general, más exacto o más fácil de explicar, que el que uso en este trabajo; consiste en hacer *mínima* la suma de los cuadrados de los errores.

Con nuestra notación, y para el problema de dos incógnitas que estamos presentando, podemos desarrollar las ideas de Legendre

$$\min \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2$$

Como esta función

$$h(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2$$

es diferenciable para todos los valores de los parámetros, la búsqueda de los mismos lo hacemos a través de las condiciones de optimalidad, igualando a cero las derivadas parciales de la función respecto de los parámetros:

$$\frac{\partial h(b_0, b_1)}{\partial b_0} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 x_i) = 0$$

$$\frac{\partial h(b_0, b_1)}{\partial b_1} = \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - b_0 - b_1 x_i) = 0$$

Notemos que el principio de los mínimos cuadrados nos conduce a un sistema lineal en los parámetros siempre que el modelo de partida sea lineal, de ahí una de sus múltiples ventajas que el método posee.

La primera ecuación nos dice que:

$$b_0 + b_1\bar{x} = \bar{y}$$

condición que es equivalente a la primera propuesta por Boscovich, pero sin hacer hipótesis sobre ella.

La segunda ecuación puede escribirse:

$$b_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

De ambas ecuaciones podemos determinar que:

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \Big/ n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \Big/ n}$$

que es conocido como coeficiente de regresión lineal de y sobre x, pues representa la pendiente de la recta que se toma como modelo para explicar la variable y a través de la variable x.

Vemos la sencillez del método de los mínimos cuadrados, por lo que fue empleado con mayor frecuencia que los otros. No obstante, no es la única razón para su utilización.

A lo largo del resumen histórico que hemos realizado no hemos desarrollado una cuestión importante en la aplicación de los métodos, el problema de la determinación del error que se comete al emplear un método, en función de los errores que los datos tienen. Esta consideración nos llevaría a un tema importante como es la célebre controversia entre Laplace y Gauss, véase Stiegler (1996), que abre las bases matemáticas a la teoría moderna de los modelos lineales, pero que nos alejaría del tema central del trabajo, la consideración de los sistemas lineales incompatibles. Sólo añadiremos que hoy día la estadística matemática se ocupa del estudio de la distribución de los errores al emplear los parámetros que los métodos proporcionan.

Finalmente debemos de hablar sobre el futuro de dichos métodos. Cuando aparecen problemas reales donde existe un gran número de parámetros a determinar a partir de un enorme volumen de datos, poder determinar los parámetros no es un problema sólo del método a emplear, sino que depende también de los procedimientos de cálculo de que se dispongan. Por ello, en los últimos años al emplear los métodos de programación lineal para resolver el método de la mínima desviación absoluta, éste se ha convertido en un método mas robusto que su oponente, el método de los mínimos cuadrados, de todas formas la batalla entre Laplace y Gaus parece que continuará...

María Álvaro
IES Mateo Alemán.
San Juan de Aznalfarache
(Sevilla)
Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
«Thales»
Cristina Fernández
Carmen Pérez

Bibliografía

ARTHANARI T. S. y Y. DODGE (1981): *Mathematical programming in Statistics*, Wiley.

CARRIZOSA E., E. CONDE, F. FERNÁNDEZ, M. MUÑOZ, PUERTO J. (1995): «Pareto Optimality in Linear Regression», *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 190, 129-141.

HALL A. (1998): *A History of Mathematical Statistics*, Wiley.

ECO U. (1995): *La isla del día antes*, Lumen, Barcelona.

SOBEL D. (1997): *Longitud*. Destino.

STIEGLER S.(1996): *The History of Statistics*, Belknap Harvard Press.


XIX. — EL CON TRUNCAT

Recordeu la pàg. 39.
Ací tenim també:
a) con truncat;
b) con deficient.

Aquesta forma la trobareu en molts objectes que us són familiars: vasos, galledes, testos de flors, xemeneies, mesures, embuts, troncs dels arbres (més que cilíndrics), pàmpols pels llums, etc.

Càlcul del con truncat

Exactament el mateix que amb la piràmide truncada, pàg. 39.

V (Volum con total) − V (Volum con deficient) = V (Volum con truncat)

— 61 —

Cartilla de Geometria
Raimon Torroja Valls
Llibreria Montserrat
Barcelona, 1931