SUMA 33
febrero 2000, pp. 25-36

Historia de un problema: el reparto de la apuesta

Juan Antonio García Cruz

ARTÍCULOS

En un juego de azar interesa la probabilidad de ganar en un lance o partida. También es importante, incluso más, saber qué se puede esperar si se juega una serie larga de partidas, es decir, la esperanza matemática del juego o ganancia promedio. El 27 de abril de 1657 Christiaan Huygens envió a su tutor van Schooten un manuscrito, que más tarde sería conocido con el título *De ratiociniis in ludo aleae*, donde entraba en la polémica de cómo dividir la apuesta en un juego que se ha de interrumpir antes de finalizar. El joven Huygens no sólo resolvió el problema, sino que lo hizo definiendo y utilizando un concepto hasta entonces ausente: la *expectatio* o esperanza matemática de un juego de azar.

EL PROBLEMA y su historia

En la historia de la matemática hay problemas que ilustran, de forma especial, las dificultades que los matemáticos han encontrado al construir una nueva teoría. Uno de esos problemas es el reparto de la apuesta o del juego interrumpido. Conocido desde el Renacimiento y abordado sucesivamente por diferentes matemáticos no se encontró un método correcto de solución hasta finales del siglo XVII. Su formulación general sería algo así:

Dos jugadores compiten por un premio que es otorgado después de que uno de ellos haya ganado n *lances en un juego. El jugador* A *ha ganado más que el jugador* B *y, debido a alguna intervención externa, deben abandonar el juego antes de llegar al número* n. *¿Cómo debe dividirse la apuesta entre los jugadores?*

La polémica motivada por la certeza

Fra Luca Pacioli

El primer matemático conocido que aborda el problema es Fra Luca Pacioli (ca1445-ca1514). En su obra *Summa* *de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità* (Venecia, 1494) presenta la siguiente versión del problema:

> *Un grupo juega a la pelota de modo tal que se necesita un total de 60 puntos para ganar el juego. La apuesta es de 22 ducados. Por algún incidente no pueden terminar el juego y un bando queda con 50 puntos y el otro con 30. Se quiere saber qué participación del dinero del premio le corresponde a cada bando.*

La solución dada por Pacioli involucra los siguientes cálculos:

$$\frac{5}{11}+\frac{3}{11}=\frac{8}{11}$$

luego 8/11 equivale a 22 ducados y, por lo tanto, se tiene que al bando que va ganando le corresponderá 5/11 de 22 ducados (13 + 3/4 ducados) y al bando que va perdiendo le corresponderá 3/11 de 22 ducados (8 + 1/4 ducados).

Observemos que en la formulación del problema no se explicita que en el juego intervenga el azar. Una primera aproximación a la solución es que se trata de un problema de reparto, un simple problema de aritmética, y así es como lo enfoca Pacioli. Su solución parte del principio de que la apuesta debe dividirse de acuerdo con los puntos anotados por cada bando en el momento en que el juego se interrumpe. Sin embargo, las palabras de Pacioli: «He encontrado que las opiniones sobre la solución difieren de una persona a otra, pero todos parecen insuficientes en sus argumentos. Yo afirmo la verdad y doy la forma correcta de solucionar el problema», indican claramente que el problema proviene de una fuente anterior y que había diferencias de opinión sobre su solución. El argumento de Pacioli sólo tiene en cuenta lo que ha ocurrido mientras se ha podido celebrar el juego. Sin embargo, el bando que va perdiendo podría argumentar que la apuesta debería repartirse por igual, pues tal apuesta se pactó a término y no hubo acuerdo previo sobre otra contingencia del juego.

Medio siglo después Niccolo Tartaglia (ca1499-1557) aborda el problema en su obra *Trattato generale di numeri et misure* (Venecia, 1556). Tartaglia reproduce la solución dada por Pacioli y lanza la siguiente objeción:

> Supongamos que en un juego, un bando ha ganado 10 puntos y el otro bando 0 puntos. En esta situación el bando que tiene 10 puntos debería recibir toda la apuesta, lo cual no tiene sentido.

A continuación resuelve un problema cuyos datos son los mismos de la situación que le ha servido como objeción al método de Pacioli.

> En una partida a 60 puntos, A ha ganado 10 y B ha ganado 0. ¿Cómo debería dividirse la apuesta si cada jugador ha colocado 22 ducados?

Una primera aproximación a la solución es que se trata de un problema de reparto, un simple problema de aritmética, y así es como lo enfoca Pacioli.

Niccolo Tartaglia

Solución:

$$\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$$

parte de 22 ducados, o también

$$\frac{22}{6}=3\frac{2}{3}\text{ ducados}$$

Por lo tanto, el jugador *A* recibirá

$$22+3\frac{2}{3}=25\frac{2}{3}\text{ ducados}$$

y el jugador *B:*

$$22-3\frac{2}{3}=18\frac{1}{3}\text{ ducados}$$

De la solución se desprende que el método de Tartaglia consiste en dar, al jugador que va ganando, su apuesta más la parte proporcional correspondiente a los puntos ganados. Sin embargo es, en el siguiente problema con los mismos datos que el de Pacioli, donde se ve claramente su método de solución.

> En una partida a 60 puntos, *A* ha ganado 50 y *B* ha ganado 30. ¿Cómo debería dividirse la apuesta si cada jugador ha colocado 22 ducados?

Solución: 50-30=20;

$$\frac{20}{60}=\frac{1}{3};\ \frac{22}{3}=7\frac{1}{3}$$

luego el jugador *A* recibe

$$22+7\frac{1}{3}=29\frac{1}{3}\text{ ducados}$$

y el jugador *B* recibe

$$22-7\frac{1}{3}=14\frac{2}{3}\text{ ducados}$$

Ahora sí que está claro el método de Tartaglia *el jugador que lleva ventaja recibe su apuesta más la parte del remanente proporcional a su ventaja.* Es decir, dado que la ventaja de *A* sobre *B* (20) es un tercio del total requerido para ganar (60), debe recibir esta proporción del remanente. El jugador *B*, por lo tanto recibe lo que resta una vez *A* toma su parte. Esto es equivalente a dividir el total de la apuesta como 2:1 para el jugador que lleva ventaja.

Frente al argumento de Pacioli, puntos ganados por cada jugador, el argumento de Tartaglia se basa en la ventaja de un jugador respecto del otro en el momento en que debe interrumpirse el juego. Si el juego continuara, esa ventaja podría anularse e, incluso, podría ganar el jugador que va perdiendo. Esto último, es un argumento de peso en contra de la solución adoptada por Tartaglia. Prueba de que no quedó muy conforme con su solución es la siguiente observación con la que concluye su exposición: «la resolución de tal pregunta debe ser más judicial que matemática, de modo que, cualquiera que sea la manera en que se lleve a cabo la división, habrá causa para litigar».

La vía hacia lo incierto

El siguiente en retomar el problema del reparto de la apuesta es Girolamo Cardano (1501-1576). En su obra *Practica arithmeticae generalis* (1539) señala una nueva dirección para abordar la solución del problema. Critica la solución de Pacioli y observa que no se ha tenido en cuenta el número de juegos que a cada jugador le quedan por ganar, en la eventualidad de que el juego continuara. Sin embargo, no es capaz de obtener la solución correcta al problema. Su expresión para el reparto de la apuesta es

$$\frac{\text{parte de } A}{\text{parte de } B} = \frac{1+2+3+\cdots+(n-q)}{1+2+3+\cdots+(n-p)}$$

donde n es el número total de puntos a jugar, y p y q son los números de puntos ganados por A y B, respectivamente. Tal expresión da la proporción correcta en el caso particular enunciado por Pacioli pero no es válida en general.

Sin embargo, Cardano escribió posteriormente un tratado sobre los juegos titulado *Liber de ludo aleae*, cuya fecha de redacción es incierta aunque el propio Cardano menciona, en el capítulo 20 del libro, que fue escrito en 1526. El tratado se encontró entre los papeles de Cardano a su muerte en 1576, más no se publicó hasta 1663 (Maistrov, 1974, p. 18). Por primera vez tenemos un título de una obra cuyo tema es los juegos de azar. Entre otras cuestiones, en este libro Cardano trata de cómo deben establecerse las apuestas en el juego de los dados.

Girolamo Cardano

Blaise Pascal

Pierre de Fermat

> Siempre, la mitad del número total de caras representa igualdad; luego las posibilidades son iguales a que un punto dado caiga hacia arriba en tres tiradas, ya que el circuito total se completa en seis, o también que uno de tres puntos dados caiga hacia arriba en una tirada. Por ejemplo, se puede de igual forma lanzar 1, 3 o 5 que 2, 4 o 6. Por lo tanto las apuestas deben realizarse de acuerdo a esta igualdad si el dado es honesto y, si no, aumentan o decrecen en proporción a la desviación de la verdadera igualdad.

La probabilidad de que un punto dado caiga hacia arriba en tres tiradas es igual a 1 menos la probabilidad de que no salga ninguna vez, es decir,

$$1-\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}=\frac{91}{216}$$

Probabilidad cuyo valor es menor que 1/2.

La probabilidad de que uno de tres puntos dados caiga hacia arriba en una tirada es 3/6 = 1/2. Sin embargo, Cardano argumenta sobre la igualdad de ambas probabilidades. Es cierto que el valor esperado, *esperanza matemática*, de que un punto dado ocurra en tres tiradas es

$$3\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

El razonamiento de Cardano indica que confunde *probabilidad* y *esperanza matemática*. Sin embargo, señala el espacio de sucesos elementales (circuito) y tiene claro lo que significa un juego justo, relacionado con un dado honesto, al establecer claramente las apuestas y señalar que éstas variarán en proporción a la desviación (diferentes probabilidades) respecto de la igualdad (equiprobabilidad). La idea de equilibrio asociada a un juego justo es una noción previa y necesaria al concepto de esperanza matemática. Pero para llegar a cristalizar tal noción debe relacionarse con el concepto matemático de media aritmética o media aritmética ponderada. Esto, como veremos más adelante, no fue posible hasta la época de Christiaan Huygens.

Los primeros métodos de solución correctos

La siguiente aparición del problema de la división de la apuesta ocurre en la Francia del siglo XVII. En 1654 se inicia una correspondencia entre B. Pascal (1623-1662) y P. de Fermat (1608-1665) sobre algunos problemas que habían sido propuestos al primero por un personaje misterioso conocido con el nombre de Chevalier de Méré.

Entre los problemas propuestos se encuentra el problema del reparto de la apuesta. La primera carta de la correspondencia se ha perdido. Pero, afortunadamente, se conserva bastante del resto.

Carta de Pascal a Fermat, Miércoles 29 de julio de 1654 (Smith, 1959):

> Para conocer el valor del reparto, cuando participan dos jugadores en tres tiradas y pone cada uno 32 monedas en la apuesta:
>
> Supongamos que el primero de ambos tiene 2 puntos y el otro 1 punto. Si, ahora, vuelven a lanzar el dado las posibilidades son tales que si el primero gana, ganará el total de monedas en la apuesta, es decir 64. Pero si es el otro el que gana, estarán 2 a 2 y en consecuencia, si desean acabar o se interrumpe el juego, sigue que cada uno tomará su apuesta, es decir 32 monedas.
>
> Por lo tanto Señor, se ha de considerar que, si el primero gana, 64 monedas le pertenecerán y si pierde, entonces sólo le pertenecerán 32 monedas. Si no desearan jugar este punto, y desearan separarse, el primero podría argumentar «Tengo seguras 32 monedas, pues incluso si pierdo las recibiré. Las 32 restantes, quizás las gane o quizás no, el riesgo es el mismo. Por lo tanto, dividamos esas 32 restantes por la mitad, y dadme además las 32 que tengo seguras».
>
> El primero tendrá 48 monedas y el segundo tendrá 16.

El reparto se hará, por lo tanto, en la proporción 3:1.

La solución aportada por Pascal supone un giro importante en el tipo de razonamiento utilizado por Pacioli y Tartaglia, no así por Cardano que, como hemos visto, aventuró el camino adecuado pero no fue capaz de resolver el problema coherentemente.

La respuesta de Fermat a Pascal se ha perdido pero, afortunadamente, se conserva el resto de la correspondencia. Por ella sabemos que Fermat respondió a Pascal con otro método para resolver el problema. En carta fechada el 24 de agosto de 1654, Pascal critica la solución aportada por Fermat, «un método bueno sólo en casos aislados pero no válido siempre».

El método de Fermat, según se desprende del resto del comentario de Pascal es como sigue. Supongamos que hay dos jugadores. Al primer jugador, le faltan dos lances para ganar y al segundo jugador, le faltan tres lances. Obsérvese el cambio en el enunciado: independientemente del número de lances requeridos y el tanteo particular, lo que importa es el número de lances que le falta a cada jugador para concluir el juego. Sigamos con la exposición de Pascal del método de Fermat. En primer lugar, hay que determinar *necesariamente* en cuántos lances el juego quedará decidido con toda seguridad. Fermat supone que el juego acabará en cuatro lances. Luego habrá que ver cómo se distribuyen los cuatro lances entre los dos jugadores, cuántas *combinaciones* harán ganar al primero, cuántas al segundo, y dividir la apuesta de acuerdo con tal proporción. Supongamos, pues, que el juego se desarrolla con un dado de dos caras en el que en una cara aparece la letra *a* (gana el primer jugador) y en la otra cara la letra *b* (gana el segundo jugador). ¿Cuántas *combinaciones* posibles hay? La siguiente tabla 1 es la respuesta.

a	a	a	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b	b	b	b
a	a	a	a	b	b	b	b	a	a	a	a	b	b	b	b
a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	2	2	2

Tabla 1

La solución aportada por Pascal supone un giro importante en el tipo de razonamiento utilizado por Pacioli y Tartaglia, no así por Cardano...

Luego todas las combinaciones en las que hay dos *a* significa que gana el primer jugador y todas en las que hay tres *b* gana el segundo jugador. Por lo tanto, la apuesta debe dividirse como 11 es a 5.

Pascal expresa en la carta las dificultades que tiene de comprender tal razonamiento que involucra *combinaciones*, y hace una objeción seria al método de Fermat «pues no es necesario, cuando al primero le faltan dos lances para ganar, tener que jugar cuatro lances pues podrían ser dos o tres o quizás cuatro». Además Pascal le pone otra objeción mucho más sería para el caso en que participen tres jugadores, faltando un lance para el primero, y dos para cada uno de los restantes.

> Para realizar el reparto, siguiendo el método de las combinaciones, es necesario descubrir en primer lugar cuántos lances serán necesarios para acabar el juego. Será en tres lances, pues no pueden jugar tres lances sin necesariamente llegar a una decisión.

A continuación, Pascal presenta la tabla 2 (página siguiente) con las posibles *combinaciones.*

> Ya que al primero le falta un lance, todas las formas en las que haya una *a* le son favorables. Hay 19 de tales. Como al segundo le faltan dos lances, todas en las que haya dos *b* le son favorables. Hay 7 de tales. Como al tercero le faltan dos lances, todas en las que haya dos *c* le son favorables. Hay 7 de tales. Si concluimos que debemos realizar el reparto de acuerdo con la proporción 19:7:7, cometeremos entonces un serio error y dudaría que usted hiciera tal cosa.

a	a	a	a	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b	b	b	b	b	c	c	c	c	c	c	c	c	c
a	a	a	b	b	b	c	c	c	a	a	a	b	b	b	c	c	c	a	a	a	b	b	b	c	c	c
a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			1			1	1	1	1			1		
				2						2		2	2	2		2						2				
									3								3			3			3	3	3	3

Tabla 2

Obviamente el serio error, como se desprende de la tabla, es que por la necesidad de jugar tres lances, hay resultados que son favorables a más de un jugador. Sin embargo, si asignamos la combinación al primero que gana el juego y no el lance parcial, entonces el método de Fermat sí es válido. Por ejemplo, en el caso *abb*, está claro que tal combinación es para el primer jugador.

Para el propósito de este trabajo no es necesario seguir con la correspondencia entre Pascal y Fermat, tal correspondencia se puede seguir en Smith (1959: 546-565), sólo señalar que después de una amplia correspondencia, Fermat refinó su método basado en las *combinaciones*, superando los obstáculos propuestos por Pascal. Al final Pascal reconoció la validez y generalidad del método de Fermat. Sin embargo, ambos métodos son difíciles de seguir en casos complicados y adolecen de un planteamiento general sencillo.

Antes de pasar al siguiente episodio demos un pequeño salto en el tiempo, casi un siglo. Creo que la primera reseña histórica sobre el cálculo de probabilidades aparece al final del *Essai philosophique sur les probabilités* de Pierre-Simon de Laplace (1749-1827). En tal reseña Laplace, en un alarde de *chauvinismo*, asigna todo el mérito de la resolución del problema del reparto de la apuesta a sus paisanos Pascal y Fermat, atribuyéndoles el establecimiento de los principios y métodos que conducen a la solución del problema. Se olvida que el principio, hacia dónde había que mirar, fue señalado por Cardano y que el método, más general y definitivo, en la nueva y naciente teoría será del holandés Christiaan Huygens, cuya obra tilda de pequeña recopilación de problemas ya resueltos por otros. En lo que sigue veremos lo injusto del juicio de Laplace.

Christiaan Huygens

...la primera reseña histórica sobre el cálculo de probabilidades aparece al final del Essai philosophique sur les probabilités *de Pierre-Simon de Laplace (1749-1827).*

La esperanza de Christiaan Huygens

En 1655 a la edad de 26 años, Christiaan Huygens (1629-1695) realiza su primer viaje a Francia. Durante su estancia en París establece relaciones con los ambientes matemáticos del momento y queda impresionado por los problemas investigados por Pascal y Fermat. A su conocimiento llegó sin duda la respuesta de Pascal al problema de la división de la apuesta, pero no así el método de solución. Al retornar a Holanda se pone a investigar por su cuenta.

El 27 de abril de 1657 envía a su tutor Frank van Schooten un manuscrito titulado *Van Rekinigh in Spelen van Geluck*. En la carta introductoria, Huygens explica a su tutor el contenido del manuscrito. Por tal carta sabemos que, los problemas de los que trata, ya fueron tema de ocupación de grandes matemáticos de Francia y que, por lo tanto, el mérito de la nueva teoría que presenta no se le debe atribuir sólo a él. También cuenta que tales problemas eran propuestos, entre los sabios franceses, sin mostrar los métodos de solución, con el objetivo de ponerse a prueba entre ellos. La carta finaliza en los siguientes términos:

> Por lo tanto he tenido que examinar y profundizar por mi cuenta en esta materia, empezando con lo más básico. Por esta razón, para mí es imposible afirmar que haya partido desde los mismos principios. Finalmente he hallado que mis respuestas, en muchos casos, no difieren de las de ellos.

El manuscrito de Huygens, escrito en holandés, es traducido al latín por el propio van Schooten (Todhunter, 1949: 22), con el título *De ratiociniis in ludo aleae*, y publicado como un apéndice al libro quinto de su obra *Exercitationvm Mathematicorum*, sirviendo de introducción la carta antes referida.

De ratiociniis in ludo aleae se desarrolla en catorce páginas (521-534) y consta de catorce proposiciones, más un apéndice de cinco problemas propuestos y no resueltos.

Las tres primeras proposiciones tienen el sentido de la generalidad.

Proposición I: Si puedo obtener igual de fácil, a o b, entonces mi *expectatio* es $(a + b)/2$.

El desarrollo de la proposición tiene dos partes. En la primera parte, utiliza el álgebra y resuelve una ecuación que le dará el valor de la *expectatio*. Veamos cómo procede. Supone que su *expectatio* es x y que puede llegar a ella mediante un juego equitativo. En el juego participa Huygens y un oponente. Cada uno ha colocado x como apuesta y acuerdan que el que gane dará la cantidad a al que pierda. Luego hay la misma probabilidad de ganar a que de ganar $2x - a$. Sea $2x - a = b$, se sigue que

$$x = \frac{a+b}{2}$$

Una vez obtenido ese valor, comprueba que es la solución a la ecuación anterior. Como cada jugador ha puesto la misma cantidad, el montante total de la apuesta es $a + b$. Si ahora gano entonces daré a mi oponente a, y me quedaré con b. Si pierdo ganaré a y mi oponente b. Y ambos sucesos tienen la misma probabilidad (*ganar igual de fácil*, a o b).

Huygens termina esta proposición con un ejemplo numérico concreto en el que a y b son iguales a 3 y 7, y su *expectatio* es 5. En otras palabras, la *expectatio* de Huygens es la *ganancia promedio* en un juego equitativo.

Proposición II: Si puedo obtener igual de fácil, a o b o c, entonces mi expectatio es $(a + b + c)/3$.

Huygens utiliza el mismo método algebraico que en la anterior proposición con la salvedad de que introduce un nuevo contrincante en el juego. Ahora el juego es entre Huygens y dos más.

La tercera proposición es la más genérica de todas y el método de desarrollo el mismo que las anteriores.

Proposición III: Sea p el número cualquiera de casos para a, sea q el número cualquiera de casos para b, tomando todos los casos igualmente posibles (*proclivi*), mi *expectatio* es

$$\frac{pa+qb}{p+q}$$

Las siguientes proposiciones tratan ejemplos concretos del reparto de la apuesta entre dos o más jugadores y en distintas contingencias del juego. Pero echemos un vistazo a la siguiente proposición.

Proposición IV: Así pues, para que lleguemos primeramente a la cuestión propuesta, sobre cómo hacer la distribución entre diversos jugadores, cuando las suertes de estos son desiguales, es necesario que empecemos por las más fáciles. Supongamos que juego contra mi oponente al primero que gane tres lances, habiendo yo ganado ya dos y mi oponente uno. Deseo saber qué parte de la apuesta me corresponde si decido no jugar los lances restantes.

¡De nuevo encontramos aquí el problema del reparto de la apuesta en los mismos términos propuestos por Pascal a Fermat!

Sigamos a Huygens en su exposición:

> Para calcular la proporción para cada uno de nosotros, debemos considerar que ocurriría si el juego hubiera continuado. Es cierto, que si yo gano la primera ronda entonces habré acabado el juego y por lo tanto ganaría el monte total de la apuesta, a lo que llamaré a. Pero, si es mi oponente el que gana la primera ronda, entonces nuestras posibilidades serán iguales a partir de ese mismo momento, dado que a cada uno nos restará un punto para acabar el juego; por lo tanto cada uno podrá reclamar $a/2$. Evidentemente, tengo las mismas posibilidades de ganar que de perder la primera ronda. Luego, tengo iguales posibilidades de conseguir a o $a/2$, de acuerdo con la primera proposición mi proporción es $3a/4$ y la de mi oponente $a/4$.

Huygens es el primero que introduce, en la historia de la matemática, la noción de esperanza matemática, a partir de la noción de juego equitativo.

Encontramos en Huygens la misma elegancia de exposición que en Pascal, pero aquí al contrario que allí, hay algo más. En las tres primeras proposiciones Christiaan Huygens define un nuevo concepto matemático: *expectatio*, y da una expresión para su cálculo en cualquier situación que se pueda presentar. El resto de las proposiciones las dedica a exponer diferentes situaciones y calcular la *expectatio* correspondiente. Huygens es el primero que introduce, en la historia de la matemática, la noción de *esperanza matemática*, a partir de la noción de juego equitativo. La esperanza matemática es tanto lo que espero ganar como el valor de la apuesta para tal ganancia. Recordemos que tal noción fue ya avanzada por Cardano. Sin embargo, Huygens fue mucho más allá de forma que el enfoque y solución del problema del reparto de la apuesta hizo de la esperanza matemática un concepto más básico que el de la probabilidad y esto se mantuvo así durante, aproximadamente, un siglo (Hacking, 1995: 123). Pero la contribución de Huygens a la nueva teoría es mucho más importante de lo que cabría esperar de su pequeño tratado.

La obra de Huygens sirve de punto de partida para el desarrollo y evolución posterior del cálculo de probabilidades.

La próxima obra importante, *Ars Conjectandi*, es el trabajo de un gran matemático suizo: Jakob Bernoulli (1654-1705). A él debemos el primer teorema o *Ley de los grandes números.* La obra se publicó en 1713, después de muerto su autor, y consta de cuatro capítulos. El capítulo I es una revisión comentada del *De Ratiociniis in ludo aleae.* La revisión comentada al trabajo de Huygens muestra que Jakob Bernoulli se inspiró en el mismo para obtener nuevas fórmulas para el cálculo de probabilidades. La más notable de todas es el caso general de determinar las suertes de que un suceso ocurra al menos m veces en n lances, cuando se conoce la suerte de que ocurra en un lance sencillo. Si las suertes de éxito y fracaso en un lance sencillo son b/a y c/a respectivamente, entonces la *suerte* requerida consiste en los términos del desarrollo del binomio

$$\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)^n$$

desde el término

$$\left(\frac{b}{a}\right)^n$$

hasta el término

$$\left(\frac{b}{a}\right)^m\left(\frac{c}{a}\right)^{n-m}$$

ambos inclusive. Esta fórmula nos indica cómo hacer el reparto en el caso de dos jugadores con diferentes habilidades en los lances del juego, pero Jakob Bernoulli no se refiere explícitamente a este hecho (Todhunter, 1949: 60).

Entre los problemas propuestos y no resueltos por Huygens en el *Ratiociniis* es interesante la observación que hace Bernoulli al segundo problema:

> Tres jugadores *A*, *B* y *C* toman 12 cálculos de los que 4 son blancos y 8 negros. Juegan con la condición de que el primero que, con los ojos cerrados, saque un cálculo blanco gana y la primera elección es para *A*, la segunda para *B*, la tercera para *C* y siguiendo de nuevo *A* alternativamente. Búsquese la razón futura de las suertes.

Jakob Bernouilli

La historia del problema de la división de la apuesta es una historia ejemplar de cómo se produce el tránsito entre un conocimiento consolidado, la aritmética y las operaciones básicas de división, reparto y media aritmética, a una nueva teoría matemática: la probabilidad.

Bernoulli sugiere tres posibles interpretaciones del problema:

i) se tiene un solo conjunto de 12 cálculos y cada vez que sale un cálculo negro, se devuelve al conjunto (esta parece ser la interpretación que tenía en mente Huygens);

ii) tenemos extracciones sin reposición (interpretación de Huddel, alcalde de Amsterdam);

iii) cada jugador extrae, sin reposición, de su propio conjunto de 12 fichas.

Esto es una muestra de la ambigüedad de la formulación de Huygens, y fue no sólo motivo de diversas interpretaciones como la de Bernoulli, sino que además suscitó una verdadera polémica epistolar entre Huygens y Huddel (Hacking, 1995: 124). Señalemos que la interpretación de Huygens (i) conlleva un proceso estocástico infinito, que retomaremos en la parte segunda de este trabajo.

El último problema planteado por Huygens es el primer ejemplo sobre la duración de un juego, aspecto que influirá el trabajo de De Moivre sobre el azar (Todhunter, 1949: 61).

> *Problema 5:* *A* y *B* acuerdan jugar con 12 monedas cada uno y tres dados, con la siguiente condición: si se lanzan 11 puntos, *A* entregue la moneda a *B*, pero si se lanzan 14 puntos *B* entregue la moneda a *A*, de manera que saldría vencedor aquel jugador que tendría todas las monedas primero. Encuéntrese la razón de la suerte de *A* para la de *B*.

La historia del problema de la división de la apuesta es una historia ejemplar de cómo se produce el tránsito entre un conocimiento consolidado, la aritmética y las operaciones básicas de división, reparto y media aritmética, a una nueva teoría matemática: la probabilidad. Los intentos de solución del problema presentados por Pacioli y Tartaglia se centraron en lo que ha ocurrido, puntos ganados por los contrincantes en Paccioli y ventaja del que va ganando en Tartaglia, es decir en aquello sobre lo que tenemos la más absoluta certeza. Girolamo Cardano fue el primero que aventuró otro camino, el camino de lo incierto, de lo que está por ocurrir, pero no fue capaz de arbitrar un algoritmo para la resolución del problema. La correspondencia entre Pascal y Fermat retoma el problema en el punto en que lo había dejado Cardano y, aunque su método de solución es correcto, no establecen una nueva noción conceptual. Esto último es el mérito de Christiaan Huygens. El interés de Huygens está centrado en los *riesgos* o *suertes* que son los que permiten, de forma fácil, definir las apuestas y pagos en un juego de azar, y que más tarde serán la base del estudio de las pensiones vitalicias y de los seguros de vida. Tal punto de partida lleva a la noción de esperanza matemática. Como señalará más tarde J. Bernoulli en su *Ars Conjectandi* (1713), el significado de la palabra *expectatio* es diferente del uso común de la misma. La expectativa o esperanza, en el sentido ordinario del término, se refiere al resultado posible más favorable, aunque sabemos que puede también ocurrir lo menos favorable. En el uso empleado por Huygens del término debemos entender, *expectatio*, como la esperanza de conseguir lo mejor, disminuida por el temor de conseguir lo peor. De este modo, nuestra *expectatio* se sitúa a medio camino entre lo mejor que podemos esperar y lo peor que podemos temer. Con el poder que da la generalidad expresada en su tercera proposición, Christiaan Huygens acabó, de una vez por todas, con la polémica que el problema había suscitado desde el Renacimiento y que además había consumido las energías y el tiempo de grandes *geómetras*. La influencia que sobre la obra de Jakob Bernoulli y otros matemáticos ejerció ese pequeño tratado, que según Laplace escribió, hizo que Christiaan Huygens entrara por la puerta grande como maestro y fundador de la nueva ciencia del azar.

La reflexión didáctica

El estudio de la génesis y evolución de los conceptos matemáticos nos proporciona una mejor y más profunda comprensión de los mismos. De igual forma, nos pueden servir para comprender las dificultades de aprendizaje que muestran los alumnos. Mi interés sobre la historia es, pues, doble. Por un lado, me interesa en el sentido en que mi conocimiento matemático se amplía. Por el otro, en que espero, me suministre situaciones que pueda utilizar con mis alumnos. En lo que sigue expondré las ventajas que tiene el problema del reparto de la apuesta como situación didáctica.

Como punto de partida se puede presentar a los alumnos la formulación siguiente:

Dos jugadores participan en un juego. Cada uno coloca sobre la mesa 32 monedas. Acuerdan que el primero que consiga 3 puntos gana el total de la apuesta. Por algún motivo el juego debe interrumpirse cuando un jugador lleva ganados 2 puntos y el otro 1 punto. ¿Cómo debe repartirse la apuesta inicial? Justificar el reparto.

Como se ve, es la formulación del problema en Pascal y Huygens. Pienso que tal formulación es la más sencilla de las posibles, sin llegar a ser trivial (partir de un empate).

Espere un tiempo prudencial y observará la cantidad de preguntas que surgen de los alumnos sobre aclaraciones del juego. En primer lugar, en ningún sitio se ha dicho que el juego sea al azar. Como queremos que tal situación sirva de punto de partida, podemos aclarar este término. Por ejemplo, los jugadores utilizan un artefacto aleatorio en cada lance del juego. Además garantizamos la equidad en los lances. Estas son dos ideas importantes en la conceptualización del azar. Luego vendrán las soluciones.

El estudio de la génesis y evolución de los conceptos matemáticos nos proporciona una mejor y más profunda comprensión de los mismos. De igual forma, nos pueden servir para comprender las dificultades de aprendizaje que muestran los alumnos.

Por lo general, los alumnos presentan la de Pacioli, es decir, el reparto proporcional a los puntos ganados. De forma similar a Pacioli y Tartaglia, los alumnos se centran en lo ocurrido, en la certeza del juego. Este es un obstáculo difícil de superar. Sólo la argumentación y la toma de posición en el juego puede hacer que se acepte otra forma de solución. Para tal fin, se debe conseguir que los alumnos se pongan en la situación del jugador que lleva 1 punto, de esa forma aceptarán como conveniente el argumento de que eso no es lo acordado al principio y por lo tanto, no satisface al que va perdiendo. Hay que hacerles ver que si el juego continuara podrían ganar y que tal posibilidad no se tiene en cuenta con la solución de Pacioli. La solución dada por Tartaglia no suele proponerse por los alumnos. Es bastante sutil. Pero se puede dar como una forma de solución para discutir en clase. Después de estas discusiones se debe explicitar que ambas soluciones sólo tienen en cuenta lo que ha ocurrido y no lo que podría ocurrir. La certeza frente a lo incierto.

Ahora viene lo difícil. ¿Cómo seguir? Lo más probable es que nadie presente una solución como la de Pascal y menos como la de Huygens.

Cuente la historia del problema hasta ese momento. Es una buena oportunidad para que los alumnos se trasladen en el tiempo y vean la importancia matemática que tuvo el problema. Además les llamará la atención que, la solución dada por ellos, corresponda con un personaje de la antigüedad. Ahora es el momento de que aparezcan en clase Pascal y Fermat.

Es el momento de introducir dos herramientas visuales que permiten analizar la situación: el diagrama figurado y el diagrama de árbol.

Reparto de las monedas (diagrama figurado).

En el momento en que se tiene que interrumpir el juego, el primer jugador gana por 2:1. Luego se han efectuado tres lances del juego. Sea cual sea el resultado *del 4.° lance del juego (gana el primero, resultado parcial 3:1; gana el segundo, resultado parcial 2:2), el primer jugador tiene aseguradas 32 monedas (parte superior en la figura 1 izquierda).*

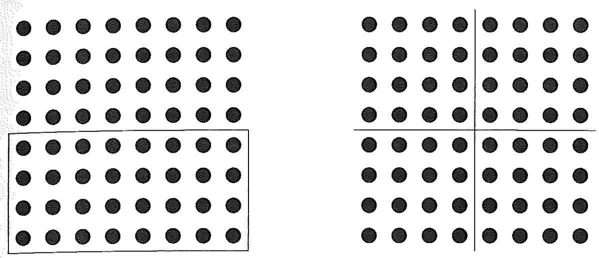

Figura 1

Quedan 32 monedas (recuadro), y estamos en la situación 2:2. Como el riesgo es el mismo (equiprobabilidad en los dos posibles resultados), las 32 monedas restantes deben dividirse por igual, quedando 48 monedas (tres cuadrantes) para el primer jugador.

El reparto se hace de acuerdo con la proporción tres a uno, favorable al primer jugador.

La exposición no basta y debe darse la oportunidad a cada alumno que haga el reparto de forma individual. Propóngase el problema de nuevo, pero ahora para acabar en 4 puntos y los contendientes están en la situación 3:1 (Proposición V del libro de Huygens).

Una vez ejercitados, en esta primera herramienta, introducimos el diagrama de árbol (figura 2).

El diagrama de árbol tiene dos funciones...

Sean A y B el primer y segundo jugador, respectivamente. Si el juego pudiera continuar, cabrían tres posibles formas de terminarlo que no son equiprobables. El valor de 3:1 es el doble de cualquiera de las otras dos alternativas.

Una respuesta muy común, entre el alumnado, es asignar a cada resultado del diagrama de árbol (izquierda) la probabilidad 1/3. No siendo los resultados equiprobables. Para poder contemplar la equiprobabilidad en el diagrama, hay que completarlo mediante dos alternativas que nunca ocurrirían, incluso si el juego pudiera haber continuado. Ahora sí es fácil observar la proporción *tres a uno* favorable al primer jugador (A). Éste es, en esencia, el método de *combinaciones* propuesto por Fermat.

Propóngase a los alumnos que resuelvan, utilizando el diagrama de árbol, la misma situación anterior (juego a 4 puntos y están 3:1).

El diagrama de árbol tiene dos funciones: la primera es facilitar el recuento sistemático de todas las posibilidades (hechos o sucesos) del juego, en segundo lugar hacer operativo el cálculo de la probabilidad de cada evento.

Uno de los errores que suele cometer el alumnado, al utilizar el diagrama de árbol, es sumar las probabilidades que se sitúan en ramas consecutivas.

Si combinamos las dos representaciones (monedas y diagrama de árbol) podemos introducir el cálculo de las probabilidades de cada evento y de este modo intentar que no se produzca tal error.

A tal fin se debe mantener las dos representaciones a la vista y señalar qué partes de cada representación corresponden entre sí. Se debe comenzar por el diagrama de las monedas y aclarar que el reparto se hará al mismo tiempo que se enumeran las alternativas del juego mediante el diagrama de árbol.

Así, a la alternativa gana *A*, resultado 3:1, corresponde la mitad de la apuesta total (señalada en el diagrama de monedas). A la alternativa gana *B*, resultado 2:2, corresponde la parte no recuadrada del diagrama de monedas.

Ahora, el diagrama de árbol continúa a partir de este último resultado, y tendríamos que gana *A* (3:2), mitad de lo restante (cuarta parte del total) o gana *B* (2:3), la otra mitad (cuarto restante). (Ver figura 3 de la página siguiente).

Una vez que se han identificado las partes correspondientes en los dos diagramas, queda por introducir la ley multiplicativa de las probabilidades parciales.

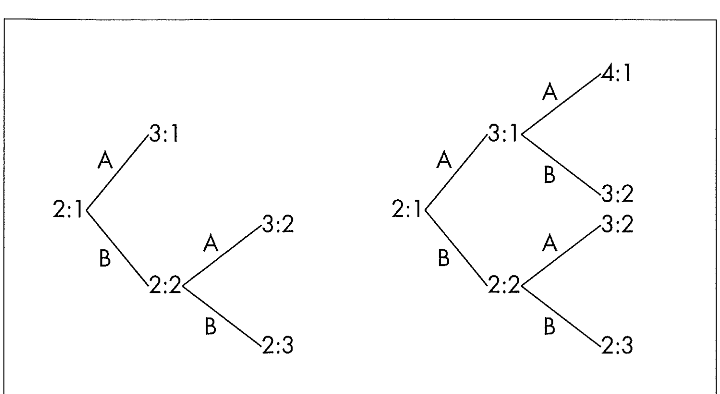

Figura 2

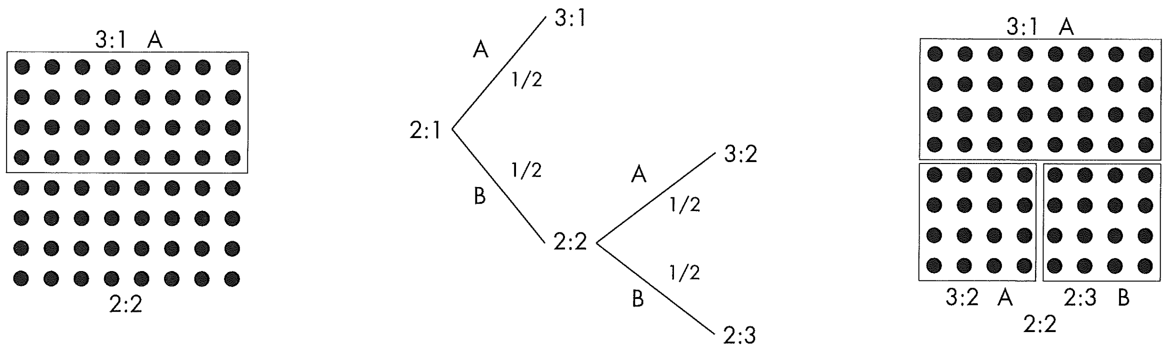

Figura 3

Se mostrará que el resultado

$$\frac{1}{2}\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

corresponde con la probabilidad de la alternativa *BA*, por ejemplo, dado que su valor es equivalente a la parte correspondiente del diagrama de monedas (3:2 *A*). De igual forma, se debe señalar la otra alternativa *BB* que corresponde con la parte del diagrama de monedas (2:3 *B*). Es conveniente hacer notar al alumnado que no se deben sumar las probabilidades, pues

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

y tal valor otorgaría el total de la apuesta, lo que no tiene sentido. Pienso que ésta es una forma natural de introducir la ley de multiplicación de probabilidades parciales para obtener la probabilidad total a través de un itinerario posible del juego. Este ejercicio debe repetirse por el alumnado varias veces, con distintas situaciones de partida (4:1, 5:2, etc.), hasta que se adquiera destreza y comprensión en los elementos mostrados. Con estas herramientas y la situación en que se utiliza se hace especial hincapié en el significado de una fracción como valor de una probabilidad.

Veamos ahora un caso en que las herramientas vistas no sirven. Retomemos el problema segundo propuesto por Huygens al final de su obra.

> Tres jugadores *A*, *B* y *C* toman 12 bolas de los que 4 son blancas y 8 negras. Juegan con la condición de que el primero que, con los ojos cerrados, saque una bola blanco gana y la primera elección es para *A*, la segunda para *B*, la tercera para *C* y siguiendo de nuevo *A* alternativamente. Búsquese la razón futura de las suertes.

La interpretación de Huygens conlleva un proceso estocástico infinito, que puede ser visualizado mediante un grafo (el diagrama de árbol no es una herramienta apropiada para representar la situación). El grafo se compone de estadios. El estadio inicial (*S*) es el punto de partida, los estadios *A*, *B* y *C* son los finales correspondientes a cada jugador y, por último los estadios de transición (*i*1,*i*2).

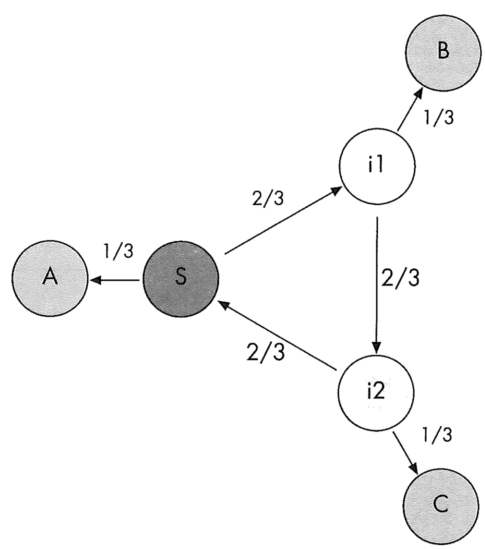

Figura 4. Grafo interpretación de Huygens

Hay varios procedimientos para evaluar las probabilidades. Fijándonos en el grafo, observamos que se puede alcanzar A, desde S, directamente (probabilidad 1/3) o recorriendo el bucle interno hasta S y de ahí directamente a A. Y es esta segunda opción la que produce el espacio infinito de sucesos. Pues el recorrido podemos hacerlo una vez (probabilidad (2/3)(2/3)(2/3)(1/3)), dos veces, tres veces, etc. Tenemos, por tanto, que la probabilidad de alcanzar A desde S es igual a la suma de una serie infinita, que afortunadamente es geométrica de razón menor que la unidad.

$$p(A) = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^6+\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{3n}+\cdots =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{9}{19}$$

De igual forma, se tiene para alcanzar B desde S:

$$p(B) = \frac{2}{3}\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^4+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^7+\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{3n+1}+\cdots =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\frac{2}{3}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{6}{19}$$

Y para alcanzar C desde S:

$$p(C) = \left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^5+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^8+\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{3n+2}+\cdots =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{4}{19}$$

La evolución del problema es una lección importante...

Luego los jugadores tienen riesgos o suertes como 9:6:4 para A, B y C, respectivamente.

Veamos otro procedimiento basado en ecuaciones lineales. En el grafo denominemos $P(X)$ a la probabilidad de alcanzar el estadio final A desde el estadio X. Luego $P(A) = 1$, $P(B) = P(C) = 0$. Tenemos las siguientes ecuaciones:

$$p(S) = \frac{1}{3}P(A)+\frac{2}{3}P(i1)$$

$$p(i1) = \frac{1}{3}P(B)+\frac{2}{3}P(i2)$$

$$p(i2) = \frac{1}{3}P(C)+\frac{2}{3}P(S)$$

equivalente al sistema

$$p(S) = \frac{1}{3}+\frac{2}{3}P(i1)$$

$$p(i1) = \frac{2}{3}P(i2)$$

$$p(i2) = \frac{2}{3}P(S)$$

Por último, tenemos que

$$p(S) = \frac{1}{3}+\frac{8}{27}P(S) \quad \Rightarrow \quad P(S) = \frac{9}{19}$$

De forma similar, y planteando ahora el sistema para B y luego para C, se obtienen las correspondientes probabilidades.

Hemos visto tres herramientas para la resolución de problemas de probabilidad: el diagrama figurado (monedas), el diagrama de árbol y el grafo. El grafo es, como se ha visto, una herramienta importante en el caso en que el espacio de sucesos sea infinito (numerable). El grafo además permite observar esta particularidad de forma evidente por medio del bucle. Pienso que tal herramienta y métodos de solución asociados como son las series geométricas infinitas y los sistemas de ecuaciones lineales están al alcance de los alumnos de bachillerato. Es más, podríamos introducir matrices, pero creo que sería forzar la situación.

Por encima de tales herramientas visuales y los algoritmos de cálculos involucrados, está otro aspecto de la historia, que merece ser resaltado y al que se debe dedicar un tiempo de discusión y reflexión. La evolución del problema es una lección importante, pues los distintos enfoques que recibió a lo largo de casi dos siglos, muestran el cambio del interés desde lo que es cierto, los hechos ocurridos, hacia lo incierto, lo que está por venir. Tal enfoque permitió la conceptualización del azar, de lo que es imprevisible. Pacioli y Tartaglia consideraron el problema como un reparto aritmético directamente proporcional. Cardano utiliza una expresión inversamente proporcional a los puntos que le quedan, a cada contendiente, para alcanzar el número de puntos acordados. Todos estos métodos se apoyan en un conocimiento matemático ya muy desarrollado y utilizado ampliamente en su época: la aritmética básica. Pascal hace algo similar y, es Fermat el que introduce las combinaciones para resolver el problema. Huygens define un nuevo concepto, *expectatio*, que va a permitir el desarrollo posterior del cálculo de probabilidades y de la estadística, permitiendo a ambas ramas cierta autonomía dentro de las matemáticas. Sin embargo, recordemos que para definir tal concepto, Huygens utiliza un concepto ya consolidado como es el de media aritmética o media ponderada. Además, en su solución a la cuarta proposición del *Ratiociniis*, utiliza un planteamiento puramente algebraico, pues primero plantea una ecuación que permite calcular su *expectatio* y después muestra, comprueba, que es válida para los datos del problema. Todos se apoyaron en un conocimiento básico y previamente consolidado como es la aritmética en unos casos y, la aritmética y el álgebra en otro. A partir de tales conocimientos, y mediante un sencillo problema, sentaron las bases para la conceptualización de la probabilidad y comenzar la domesticación del fenómeno del azar. Considero que ésta es una lección didáctica importante que arroja la historia del problema y que puede ser útil para nosotros los profesores.

Utilizar la resolución de problemas como vía para la construcción del conocimiento no ha sido muy explotada en el tema de probabilidad, el problema del reparto de la apuesta puede ser una buena introducción. Los conceptos de *espacio muestral* (circuito en Cardano), *combinaciones* (en Fermat y Pascal), *suceso con mayor probabilidad* (mayor expectativa de ocurrencia), *juego equitativo* y *esperanza matemática* constituyen elementos importantes en la conceptualización del azar. Tales elementos, como hemos visto en el desarrollo histórico, no son fáciles, requieren de discusión y clarificación. Los diferentes intentos de resolución del problema del reparto de la apuesta, sirvieron para tal fin.

La presentación y discusión de las diferentes soluciones, que marcan el cambio de enfoque, es una tarea que puede ser desarrollada en el aula con alumnos de secundaria obligatoria. El problema suministra el material para la acción. La discusión y reflexión serán el medio mediante el cual cristalicen las ideas. La riqueza de ideas que muestra la historia del problema es un buen alimento para los espíritus inquietos y curiosos. Es en ese espíritu donde se gesta el joven científico. Lo que yo he disfrutado, estudiando y comprendiendo la génesis y evolución del problema, lo he compartido con mis alumnos y, espero, que también a usted paciente lector le haya sido grato. Vale.

La riqueza de ideas que muestra la historia del problema es un buen alimento para los espíritus inquietos y curiosos. Es en ese espíritu donde se gesta el joven científico.

Nota

La reconstrucción del problema de la apuesta ha sido posible gracias a los trabajos utilizados como referencias, a falta de las fuentes originales. Sin embargo he de hacer notar que he encontrado disparidad en las obras consultadas. Al final opté por una reconstrucción que correspondiera a la solución que Maistrov da del problema por Pacioli. Gracias a mis amigos Manolo Salas, especialista en Latín medieval, y a Martin Kindt, que me proporcionó el original del trabajo de Huygens, he podido realizar este artículo.

Referencias

HACKING, I. (1995): *El surgimiento de la probabilidad*, Gedisa, Barcelona. (Traducción de José A. Alvarez de la obra: *The emergence of probability*, Cambridge University Press, 1975).

HUGENIUS, C. (1657): «De ratiociniis in ludo aleae», en F. Schooten: *Exercitationvm Mathematicorum. Libri quinque*, 517-534.

LAPLACE, P. S de (1985): *Ensayo filosófico sobre las probabilidades*, Traducción de Pilar Castrillo, El libro de bolsillo, Alianza Editorial, Madrid.

MAISTROV, L.E. (1974): *Probability Theory. A Historical Sketch*, Academic Press, New York.

TODHUNTER, I. (1949): *A history of the Mathematical Theory of Probability. From the time of Pascal to that of Laplace*, Chelsea Publishing Company, New York.

SMITH, D.E. (1959). *A source book in mathematics*, Dover Publication Inc, New York.

Juan Antonio García Cruz
IES Domingo Pérez Minik.
La Laguna
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»