SUMA

REVISTA SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

n.º 32

NOVIEMBRE 1999

SUMA 32

noviembre 1999

Índice

Edita
Federación Española de Sociedades
de Profesores de Matemáticas

Diseño portada
José Luis Cano
Diseño interior
Concha Relancio y M.ª José Lisa
Maquetación
E. Palacián, J. Sancho, D. Sierra

Revista SUMA
ICE Universidad de Zaragoza
C. Pedro Cerbuna, 12
50009-ZARAGOZA

Tirada: 6.200 ejemplares
Depósito Legal: Gr. 752-1988
ISSN: 1130-488X
Impresión: INO Reproducciones. Zaragoza

Las ilustraciones de este número corresponden a obras literarias con título matemático.

SUMA 32
noviembre 1999

Noticias de la Federación

EDITORIAL

LOS ÚLTIMOS MESES han sido pródigos en acontecimientos en el seno de nuestra Federación. Unos, usuales, que indican el correcto funcionamiento de las actividades ya consolidadas. En junio tuvo lugar la fase nacional de la Olimpiada, organizada por la recién creada Sociedad Castellano Manchega de Profesores de Matemáticas; el pasado mes de septiembre, se celebraron en Lugo las IX Jornadas sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas, a cargo de la Sección de Matemáticas de ENCIGA, con cerca de un millar de asistentes; ya están designadas las sociedades que se van a hacer cargo de las próximas ediciones de estas dos actividades, FEEMCAT va a organizar la próxima Olimpiada que se celebrará en diversas ciudades catalanas y la Sociedad Aragonesa hará lo propio con las X JAEM que tendrán lugar en Zaragoza, repitiendo la sede de 1983; la Federación participa activamente en la preparación del año 2000 como Año Mundial de las Matemáticas, se está trabajando activamente en la constitución de sendas federaciones de sociedades de profesores iberoamericanos y europeos; la revista SUMA va apareciendo con la regularidad establecida...

Pero, además, se ha producido un hecho que puede tener cierta importancia en el futuro de la Federación: se han aprobado unos nuevos estatutos y un nuevo reglamento de régimen interno.

La Federación se creó en 1988 cuando existían cuatro sociedades y se dotó de unos estatutos que han funcionado muy correctamente durante estos años. Hoy, la Federación está formada por dieciséis sociedades y cerca de cinco mil socios. Se pensó que era preciso elaborar unos nuevos estatutos que contemplasen esta nueva realidad. Tras varios meses de debates se ha logrado aprobar, por *amplia mayoría, los estatutos que, una vez que exista la sanción administrativa reglamentaria, serán publicados en SUMA.*

Las principales novedades consisten en que, a partir de ahora, va a haber una cierta ponderación en el voto de cada sociedad, según el número de socios que tenga; los órganos de gobierno colegiados pasan a ser dos, la Junta de Gobierno formada por representantes de las sociedades y la Comisión Ejecutiva constituida por los cargos unipersonales que va a tener que llevar a cabo, con las directrices emanadas de la Junta de Gobierno, todas las acciones requeridas para el buen funcionamiento de nuestra Federación.

Los nuevos estatutos han producido algunos cambios en los órganos unipersonales. Han cesado, a petición propia, la Secretaria General, Carmen Azcárate, y el Tesorero, Florencio Villarroya –que seguirá ejerciendo sus funciones hasta el cierre del ejercicio económico–. Desde SUMA deseamos poner de manifiesto el buen hacer de Carmen Azcárate durante estos años que ha ocupado la Secretaría General y la óptima sintonía que hemos mantenido con ella y por ello no podemos dejar de agradecer su constante apoyo. Ha sido sustituida por José Luis Álvarez; como lo conocemos, estamos seguros de que va a ser un gran Secretario General y que va a saber consolidar la Federación y adecuarla a sus estatutos. A Florencio, ya lo despediremos...

Un nombramiento para un nuevo cargo, la vocalía de prensa, ha recaído en Antonio Pérez Sanz, que ya comenzó a ejercer admirablemente sus funciones en las pasadas JAEM. ¡Enhorabuena!

Finalmente, deseamos dar la bienvenida más efusiva a una nueva sociedad: la Sociedad Murciana de Educación Matemática, que ya forma parte de la Federación desde la Junta que se celebró en Lugo durantes las JAEM.

SUMA 32
noviembre 1999, pp.5-9

La paradoja de San Petersburgo: una reivindicación didáctica

Gabriel Ruiz Garzón

ARTÍCULOS

Este trabajo trata de reivindicar la Paradoja de San Petersburgo como una mejor arma didáctica para introducir, a través de la equidad en un juego, el concepto de esperanza matemática.

LOS QUE ENSEÑAMOS Matemáticas sabemos que muchos conceptos matemáticos se nos presentan en los libros de texto, y por tanto los enseñamos a nuestros alumnos, totalmente descontextualizados, fuera de su génesis histórica. No siempre esa descontextualización va en beneficio de la claridad y de la compresión del concepto. La asepsia de muchos libros de texto, que despoja a los conceptos de su origen histórico, no siempre es beneficiosa.

El término paradoja viene del griego *para* y *doxos* y significa «más allá de lo creíble». Hoy su significado viene a ser «una creencia o afirmación contraria a las expectativas u opiniones aceptadas».

La utilización de paradojas en nuestras explicaciones, al igual que la resolución de problemas, es conveniente para que el alumno llegue a comprender determinados conceptos en toda su extensión. Son famosas, por ejemplo, las paradojas ligadas al continuo espacio tiempo, como las de Zenón de Elea (siglo V a.C.), siendo la de Aquiles y la tortuga la más conocida. O la paradoja de Galileo que enuncia que hay tantos números que sean cuadrados perfectos como números enteros. O las formuladas por David Hilbert en 1920, como la del hotel infinito, relacionadas con propiedades de los conjuntos infinitos. También son conocidas las paradojas de reordenación de los términos de una serie que afirman que la suma de una serie puede cambiar al redisponer sus términos.

Por ejemplo,

$$0=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots=1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots=1+0+0+\ldots=1$$

La paradoja de San Petersburgo está ligada al concepto de esperanza matemática. Concretamente, presenta una variable con esperanza infinita.

En los libros de probabilidad de comienzos de siglo, esta paradoja ocupaba un lugar preponderante. Con el paso de los años ha casi desaparecido de los manuales de texto, quedando si acaso, como un mero ejercicio rutinario de problemas, todo ello en aras del formalismo. Como pretendo demostrar en este trabajo, su utilización es altamente conveniente desde un punto de vista metodológico para la introducción del concepto de esperanza.

El juego

Imagínese que le ofrezco poder participar en el siguiente juego. ¿Lo haría?:

> Se trata de lanzar al aire continuamente una moneda hasta que salga cara por primera vez. Si esto no ocurre hasta que salga el vigésimo lanzamiento (o después), usted gana mil millones de pesetas. Si la primera cara sale antes, paga 100 pesetas.

El juego que le planteo es una variante de la paradoja de San Petersburgo. ¿Quizás piense que es una manera fácil de ganar veinte duros? Mientras lo decide, veamos algo de Historia.

El término de esperanza matemática se debe al matemático holandés Christian Huygens (1629-1695). En 1657 escribió una monografía en latín titulada *De ratiociniis in alae ludo* definiendo el concepto de *expectatio* y que después se tradujo por la palabra *esperanza.*

Christian Huygens (1629-1695)

Hay dos maneras de que un juego o lotería no sea justo. Bien porque los premios no sean iguales o bien porque los billetes no puedan ser extraídos con la misma «facilidad».

Huygens necesitaba saber la *expectatio,* o sea, el valor de cualquier juego en particular. Huygens pensaba que en una lotería justa está claro que cada apostador paga el mismo precio por cualquier billete. Mas aún, si el premio es z entonces cada uno de los n billetes debería costar z/n. Si los billetes cuestan más, el dueño de la lotería obtendría ganancias sin riesgo. Si los billetes cuestan menos, los apostadores podrían formar una asociación que obtendría ganancias sin riesgo.

Hay dos maneras de que un juego o lotería no sea justo. Bien porque los premios no sean iguales o bien porque los billetes no puedan ser extraídos con la misma «facilidad».

En el primer caso supóngase un juego con dos personas y quien gane puede conseguir un premio a o b con la misma facilidad. El precio por participar en el juego supongamos que es z y lo vamos a determinar en función de a y b. Luego cada jugador ha puesto una cantidad z y llegan al acuerdo de que el ganador debe pagar al perdedor la cantidad b. Esto significa que el ganador alcanzaría la cantidad $2z-b$ y el perdedor b. Para que el ganador consiga su premio a entonces la apuesta por participar en el juego debe valer

$$E(X) = z = \frac{a+b}{2}$$

luego el precio justo de la apuesta o la esperanza de cada jugador debe ser ésa.

En el segundo caso, supongamos que los billetes tienen distinta posibilidad de ser extraídos o lo que es lo mismo supongamos que compramos más de un billete en una lotería justa. Entonces, supongamos que hay p posibilidades de ganar a y q de ganar b. Mediante un razonamiento similar al primero llega a que el valor de esa jugada es

$$E(X) = z = \frac{pa+qb}{p+q}$$

Luego en ambos casos, tanto si el juego es justo o no, si se nos invita a jugar con un esquema dado de premios que dependen de los diversos resultados, exigimos un precio justo para aceptar la apuesta. La esperanza matemática de esa apuesta es lo que vale la apuesta. Si se paga más de la esperanza se tenderá a perder y si se paga menos se tenderá a ganar. Un juego o experimento aleatorio se dice justo o equilibrado si su esperanza global es cero, si un juego no es equilibrado se dice que es un juego con ventajas.

La paradoja o problema de San Petersburgo fue el problema quinto, propuesto por Nicolás Bernoulli (1687-1759) a Pierre Remond de Montmort en una carta con fecha 9 de septiembre de 1713 y que se reproduce en la figura 1.

El primo de Nicolás, Daniel Bernoulli (1700-1782) lo estudió en la Memoria de la Academia de Ciencias de San Petersburgo, por cuyo motivo se conoce el problema con el nombre de esa ciudad rusa. Daniel permaneció en San Petersburgo durante un período de 8 años donde escribió diversos tratados dedicados a desarrollar la teoría probabilística de los errores. En uno de ellos, visto retrospectivamente, utilizó lo que hoy denominamos el método de máxima verosimilitud, en otro, incluyó un contraste de aleatoriedad sobre las órbitas de los planetas. Otros escritos tratan de hidrodinámica, mecánica y otros razonaban estadísticamente las ventajas de la vacunación contra la viruela, etc. Daniel llegó a ser muy conocido en vida. Para aseverar este hecho, a Daniel le gustaba contar la siguiente anécdota que un día le sucedió. En cierto viaje entabló conversación con un personaje ilustrado y versado en las Ciencias. Conforme la conversación se fue sucediendo, a este personaje le entraron ganas de saber quién era su joven acompañante. «¡Yo soy Daniel Bernoulli!», respondió él. «¡Y yo, Isaac Newton!», replicó el desconocido, convencido de que le estaba engañando.

D. Bernouilli

En palabras de Daniel, la Paradoja de San Petersburgo queda como sigue:

> Pedro tira una moneda al aire tantas veces como sea necesario para sacar cara. Si esto ocurre en la primera tirada, tiene que dar a Pablo un ducado; si en la segunda 2; si en la tercera, 4; si en la cuarta, 8, y así sucesivamente, duplicando el número de ducados a cada jugada que es necesario efectuar. ¿Cuál es la esperanza de ganar correspondiente a Pablo? En otras palabras, ¿cuál es el precio justo que Pablo debe pagar por este juego?

Pedro paga a Pablo 2^{n-1} ducados si la moneda sale cara por primera vez en el n-ésimo lanzamiento, con probabilidad $(1/2)^n$, luego la esperanza de Pablo es:

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$$

Es decir, Pablo debería pagar un precio infinito por participar en el juego y a cambio sólo recibiría un pago finito en cada lanzamiento. Es más, recibiría como mucho 4 ducados con probabilidad 7/8. Seguramente, nadie en el puesto de Pablo querría poner una suma considerable con vistas a la ganancia anhelada, se consideraría más justo aportar una suma relativamente menor. El resultado parece estar en contradicción con el sentido común, y sin embargo es cierto, de ahí la paradoja.

Históricamente hubo matemáticos que intentaron resolver la paradoja. Gabriel Cramer en 1728 propuso a Nicolás Bernoulli las siguientes suposiciones para resolver la paradoja:

1. Suponer que el dinero debía valer en proporción, no a su valor intrínseco, sino al uso que se puede hacer

> *Quatriéme Problême.* *A* promet de donner un écu à *B*, ſi avec un dé ordinaire il amene au premier coup ſix points, deux écus s'il amene le ſix au ſecond, trois écus s'il amene ce point au troiſiéme coup, quatre écus s'il l'amene au quatriéme, & ainſi de ſuite; on demande quelle eſt l'eſperance de *B*. *Cinquiéme Problême.* On demande la même choſe ſi *A* promet à *B* de lui donner des écus en cette progreſſion 1, 2, 4, 8, 16, &c. ou 1, 3, 9, 27, &c. ou 1, 4, 9, 16, 25, &c. ou 1, 8, 27, 64, &c. au lieu de 1, 2, 3, 4, 5, &c comme auparavant.

Figura 1

de él o a la satisfacción que da, lo que después se llamó *utilidad*. Estableció un umbral, a partir del cual, la adición de una cantidad más de dinero no proporciona ya ningún placer a las personas, fijándolo en 2^{24} ducados. Según esa suposición el dinero que debería pagar Pablo por jugar era de 13 ducados, ya que

$$E(X)=\sum_{n=1}^{24}2^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\sum_{n=25}^{\infty}2^{24}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=13$$

2. O bien suponer que el placer ofrecido por una cantidad grande de dinero puede crecer indefinidamente pero es proporcional a la raíz cuadrada del importe, entonces

$$E(X)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}=\frac{1}{2-\sqrt{2}}\approx 2{,}9$$

luego Pablo debería pagar 2,9 ducados.

Daniel Bernoulli propone en 1731 en *De Mensura Sortis*, que la utilidad o el valor que para una persona representa un aumento de bienes es inversamente proporcional al capital primitivo. Esto significa que un pequeño crecimiento dx en la fortuna de una persona causará un incremento en su utilidad de

$$du=k\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

integrando da

$$u=k\log x+c$$

esto es, la utilidad de una fortuna x es proporcional a $\log x$. Daniel llamó a la utilidad *emolumentum*, y Laplace, *valor moral del crecimiento de bienes*. Los economistas y matemáticos Carl Menger (1840-1921), William Stanley Jevons (1835-1882), precursor de la media geométrica como medida de la variación de los precios y Léon Walras (1834-1910), famoso por promover un modelo para calcular el equilibrio de actividades y precios en una economía cerrada, volvieron a recoger la idea de utilidad de Daniel Bernoulli y lo aplicaron al ámbito económico.

Daniel razona que el pago de Pablo depende de su capital inicial. Si Pablo comienza con una fortuna a y paga z por el juego, tendrá al acabar la cantidad de $a-z+2^{n-1}$. Así pues, la utilidad final esperada será igual a la utilidad inicial si z satisface

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[k\log(a-z+2^{n-1})+c\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=k\log a+c$$

O sea,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\log(a-z+2^{n-1})\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\log a$$

En particular, si el capital incial de Pablo es $a=10$ ducados entonces lo que debe pagar es de $z\approx 3$ ducados. Obviamente z crece si lo hace a.

Georges Louis Leclerc, Conde de Buffon (1701-1788), en su *Essai d'Arithmétique Morale*, amén de exponer el conocido Problema de la Aguja, intenta resolver la paradoja de San Petersburgo. Propone despreciar las probabilidades pequeñas, concretamente menores que 1/10000, ya que, según sus tablas de mortalidad, la probabilidad de que un hombre de 56 años muera en el transcurso del día era de 1/10189 y si, para un hombre de esa edad, dicha probabilidad no le causa temor y le parece pequeña, con igual motivo lo será 1/10000 en nuestro problema. Con estas premisas, como $2^{13}=8192$ y $2^{14}=16384$, tenemos que la esperanza del juego es de

$$E(X)=\sum_{n=1}^{13}2^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=6{,}5$$

No contento con todo esto, encargó a un niño el experimento de tirar una moneda 2048 veces. Al final, todas estas partidas produjeron 10057 ducados. Luego el valor de cada partida es de 10057 : 2048 = 4,9, es decir, casi 5 ducados.

Simón Denis Poisson (1781-1840) pensaba que Pedro no podía pagar a Pablo el dinero que no tiene. Poisson pensaba que 50 millones de francos, de aquella época, era ya una suma desorbitante para cualquier particular, luego la partida no podía prolongarse más allá de la tirada 26 porque en caso de perder el número de francos que Pedro debía entregar a Pablo, en la tirada 27 era de $2^{26}=67.108.864$ francos, muy superior a la fortuna de Pedro. Recíprocamente, Pablo conociendo la fortuna de Pedro no jugaría más de 26 tiradas y sólo arriesgaría 13 francos.

Incluso si suponemos que Pedro fuera el todo poderoso Estado y fuera éste el que organizara una lotería con las condiciones del juego, esto es, la Administración emitiera billetes, el número 1 conllevara un premio de 1 franco a su portador si sale cara en la primera tirada, el número 2 conllevara un premio de 2 francos si sale cara en el segundo lanzamiento, etc. El Estado pondría un precio a cada número, estando el precio de cada billete en sentido creciente al de su número. Pues bien, habría un número que no podría ser comprado por ningún particular lo que hace que

Daniel Bernoulli propone en 1731 en De Mensura Sortis, *que la utilidad o el valor que para una persona representa un aumento de bienes es inversamente proporcional al capital primitivo.*

Poisson

la paradoja no pudiera establecerse en la realidad. El enunciado original de la paradoja de San Petersburgo equivale a un ciudadano que comprara un billete de cada una de las series de números que la lotería hacer poner en circulación.

Otro gran matemático francés Condorcet (1743-1749) argumentó que un precio infinito no era justo para Pablo porque no tendría el tiempo suficiente para repetir las tiradas y que las ganancias medias se aproximaran al precio. Esta argumentación tiene mucho que ver con el nacimiento del punto de vista frecuencial de la probabilidad. También Buffon pensaba que sólo habría tiempo, durante la vida de una persona, para jugar un número finito de tiradas. Concretamente, Buffon calculó que si se juegan 1048566 partidas y se estima en 2 minutos la duración para cada partida, comprendiendo el tiempo para pagar, esto supondría 2097132 minutos, es decir, casi 16 años jugando 6 horas al día, porque no sólo de juego vive el hombre, y tan sólo para una ganancia esperada de 10 ducados.

Grandes matemáticos como Venn, Feller, et se han ocupado también de la paradoja, pero entrar en más detalles haría muy prolijo este artículo.

Conclusiones

A modo de resumen decir que, a mi juicio, la introducción del concepto de esperanza a través de la paradoja de San Petersburgo presenta algunas ventajas metodológicas frente a la presentación clásica como una suma de los productos de los valores de la variable por sus probabilidades. Éstas son:

a) Definimos la esperanza en términos de equidad de un juego y no en términos de probabilidad, con todo lo que presenta de motivador para el alumno.

b) Presenta el caso de una variable con esperanza infinita. El alumno está mal acostumbrado, piensa que todas las variables tienen esperanza finita y tiende a creer que es innecesaria la comprobación de que los momentos de segundo orden sean finitos, por ejemplo, en el Teorema Central del Límite. Las variables sin esperanza juegan un papel muy importante. La distribución de Cauchy que tiene por función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

con $-\infty < x < \infty$, así como otras muchas variables ligadas al tiempo de espera y de recurrencia en física carecen de esperanza.

c) Podemos utilizar la Historia de la Estadística para ver cuales han sido las tentativas para su resolución. Aunque otras veces es contraproducente, en este caso particular, la introducción de la esperanza matemática como la expresión de equidad de un juego refleja la génesis histórica del concepto. La formalización del concepto fue posterior.

d) La resolución de la paradoja lleva asociada la introducción del concepto de utilidad, tan importante en las ciencias económicas y administrativas.

En cuanto al juego que le propuse al comienzo, aunque es prácticamente seguro que en una apuesta particular pierda las cien pesetas, la ganancia media para este juego es de aproximadamente 1807 pesetas,

$$E(X) = \frac{1}{524.288} 1.000.000.000 + \frac{524.287}{524.288}(-100) \approx 1.807$$

lo que posiblemente hiciese cambiar su reticiencia a no jugar, si no hubiera que ajustar cuentas hasta que hubiera acabado la partida y si en vez jugar una sola vez, pudiera jugar tan a menudo y tan seguido como quisiera.

...la introducción de la esperanza matemática como la expresión de equidad de un juego refleja la génesis histórica del concepto. La formalización del concepto fue posterior.

Gabriel Ruiz
Escuela Universitaria
de Empresariales.
Universidad de Cádiz. Jerez
Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
«Thales»

Bibliografía

BERNOULLI, D. (1738): «Specimen theoriae novae de mensura sortis», *Comentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, n.° 5, 175-192.

BUFFON, G. L. (1777): «Essai d'Arithmétique Morale», *Supplément à l'Histoire Naturelle, générale et particulière, avec la description du cabinet du Roy, vol. 4*, París.

COURNOT, A. A. (1843): *Exposition de la Théorie des Chances et des Pro-babilités*, Librairie de L. Hachette, París.

HUYGENS, C. (1742): *De Ratiociniis in Ludo Alae*, Opera Varia, Lugduni Batavorum.

MONTMORT, P. R. (1713): *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, París.

PAULOS, J. A. (1990): *El hombre anumérico: El analfabetismo matemático y sus consecuencias*, Tusquets Editores, Barcelona.

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Comisión Ejecutiva

Presidenta: María Jesús Luelmo
Secretario General: José Luis Álvarez García
Vicepresidente: vacante
Tesorero: Florencio Villarroya Bullido
Secretariados:
Prensa: Antonio Pérez Sanz
Revista SUMA: Emilio Palacián/Julio Sancho
Relaciones internacionales: Luis Balbuena/Florencio Villarroya
Actividades: vacante
Publicaciones: vacante

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidente: Xavier Vilella Miró
Apartado de Correos 1306. 43200-REUS (Tarragona)

Organización Española para la Coeducación Matemática «Ada Byron»
Presidenta: Fidela Velázquez
Almagro, 28. 28010-MADRID

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»
Presidente: Antonio Pérez Jiménez
Apartado 1160. 41080-SEVILLA

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo»
Presidente: Florencio Villarroya Bullido
ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12.
50009-ZARAGOZA

Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»
Presidente: José Joaquín Arrieta Gallastegui
Apartado de Correos 830. 33400- AVILÉS (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»
Presidente: Francisco Aguiar Clavijo
Apartado de Correos 329. 38201-LA LAGUNA (Tenerife)

Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas
Presidente: Tomás Ortega
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Villalar, s/n.
09006-BURGOS

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García
Avda. España, 14, 5ª planta. 02006-ALBACETE

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidenta: Remedios Peña Quintana
IES Francisco de Goya. C./ Caravaca, s/n.
30500-MOLINA DE SEGURA (Murcia)

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Luis Carlos Cachafeiro Chamosa
Apartado de Correos 103.
SANTIAGO DE COMPOSTELA

Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»
Presidente: Ricardo Luengo González
Apartado 536.
06080-MÉRIDA (Badajoz)

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»
Presidenta: María Jesús Luelmo
Apartado de Correos 14610.
28080-MADRID

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: Claudia Lázaro del Pozo
CPR de Santander. C./ Peña Herbosa, 29.
39003-SANTANDER

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea Tornamira
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.
Campus de Arrosadía.
Universidad Pública de Navarra.
31006-PAMPLONA

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Despacho 3517. Facultad de Educación.
Universidad Complutense.
28040-MADRID

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departament de Didàctica de la Matemàtica.
Apartado 22045.
46071-VALENCIA

SUMA 32
noviembre 1999, pp. 11-16

Matemática conceptual: la propuesta didáctica de F.W. Lawvere y S.H. Schanuel

Luis Español

ARTÍCULOS

El texto que sigue es un comentario sobre un libro de F.W. Lawvere y S.H. Schanuel, de publicación reciente pero con una década de gestación, que contiene una experiencia concreta de introducción de conceptos de la teoría de categorías en un estadio temprano de la enseñanza de las matemáticas. El comentario incluye un breve análisis comparativo de esta experiencia actual con la protagonizada por P.J. Hilton en torno al año setenta. La diferencia entre ambas propuestas se explica en términos de la evolución general de la teoría a lo largo de la segunda mitad del presente siglo, particularmente en el último cuarto.

ESQUEMA de la evolución de la teoría de categorías

Este apunte histórico sobre la teoría de las categorías es por necesidad breve y en consecuencia selectivo, dirigiendo la selección como es natural hacia el tema de este trabajo, que se explica mejor insertándolo en una perspectiva histórica, pues la obra que vamos a comentar (Lawvere y Schanuel, 1997) responde a un punto de vista que ha ido tomando forma con la evolución de la teoría de categorías, especialmente desde los enfoques ideológicos de F.W. Lawvere.

La formulación explícita de las definiciones básicas de la teoría de categorías fue realizada en los primeros años cuarenta por S. Eilenberg y S. Mac Lane (1945). Esta aparición se produjo en el ámbito de la investigación en topología algebraica y con la finalidad de obtener un lenguaje que permitiera expresar de modo concreto y simple construcciones matemáticas cuya complejidad en detalle era muy aparatosa. El propio fundador Mac Lane aplicó ya en 1950 esta función unificadora y simplificadora a las categorías lineales (con sumas y productos finitos isomorfos, por ejemplo grupos abelianos). Hasta finales de los años cincuenta no varió la situación, si bien el lenguaje categorial se trasladó a otros ámbitos vecinos, como la teoría de haces que se utilizaba en el análisis complejo o la geometría algebraica. El concepto de par de funtores adjuntos, formulado por D.M. Kan a finales de los cincuenta, puede considerarse como el punto clave para el cambio de estatuto que se produjo en la década siguiente (Mac Lane, 1988), de modo que los teoremas sobre funtores adjuntos iniciaron propiamente la teoría de categorías.

Este cambio fue simultáneo con el movimiento de reforma educativa que implantó la «matemática moderna» en los niveles básicos de la enseñanza a lo largo de todo el mundo occidental. En cuanto a los contenidos, la reforma trasladaba a los niveles educativos básicos la matemática estructural elaborada a principios de siglo en el entorno alemán de D. Hilbert y difundida por la obra del colectivo francés N. Bourbaki, a la que no se había incorporado la teoría de categorías, nacida norteamericana. La teoría de conjuntos y los conjuntos dotados de diversas estructuras fueron el nuevo elemento conductor de la enseñanza de la matemática desde los niveles más elementales. Pero la reforma no sólo cambió los objetivos de aprendizaje y los contenidos de la educación matemática, sino que también proclamó la necesidad de aumentar la formación matemática de la población, lo que implicó un crecimiento notable de los estudiantes universitarios de matemáticas y con ello del contingente de jóvenes investigadores.

Este hecho sociológico propició que la teoría de categorías fuera cultivada por un grupo numeroso de matemáticos, muchos de ellos jóvenes, que la desarrollaron de manera intensiva en los años sesenta y setenta, destacando entre otros los grupos norteamericanos reunidos en torno a los fundadores y las escuelas francesas de A. Grothendieck y de Ch. Ehresmann. Los primeros pusieron más énfasis en el desarrollo estructural de la teoría y los segundos en su aplicación a la geometría. Un fruto importante de la fusión de ambas tendencias fue la elaboración de la teoría de topos en torno a 1970 por parte de Lawvere y M. Tierney, teoría que recoge aspectos geométricos y lógicos de la experiencia matemática[1]. A lo largo de la década de los setenta, primero la teoría general de categorías y después la teoría particular de topos completaron su desarrollo básico y aparecieron los primeros libros monográficos de referencia que todavía están vigentes.

Un precedente esencial de la noción de topos fue la caracterización de la categoría de los conjuntos sin usar el predicado primitivo «pertenencia», realizada por Lawvere en 1963, que abrió camino a una fundamentación de la matemática más flexible que el habitual paraíso de G. Cantor. Es bien conocido que hay un lapso de tiempo entre la elaboración de un nuevo clima conceptual en el mundo de la investigación matemática y su incorporación a los centros universitarios primero y a la educación matemática general después. Resulta curioso que en la década de los sesenta coexistió la extensión al nivel básico de las imágenes de la matemática estructural, fundamentada en el rígido paraíso idealista de Cantor-Hilbert-Bourbaki, con la irrupción en el nivel investigador de una multiplicidad de paraísos flexibles de porte dialéctico, innovación que tuvo a Lawvere como conductor.

Por los mismos años centrales del siglo hizo aparición otro elemento llamado a introducir cambios importantes en la práctica matemática, el ordenador. Desde los años setenta existe una relevante línea de investigación que aplica la teoría de categorías a la computación teórica, corriente que a partir de los ochenta ha absorbido a buena parte de los matemáticos que inicialmente trabajaron en la teoría general de categorías[2]. Ya sea en la matemática más tradicional, presidida por el infinito, o en la nueva computación teórica, necesariamente finitaria, la teoría de categorías se está mostrando como una herramienta conceptual útil para guiar la investigación, el estudio y la transmisión del conocimiento matemático en sus aspectos continuos y discretos. Unas veces se presenta como el marco de trabajo adecuado para conectar diversas estructuras matemáticas –como en su origen histórico–, otras como una estructura matemática muy general que tiene su propio desarrollo –que comenzó en los sesenta– y, en tercer lugar, las categorías describen teorías formales –como señalan Barr y Wells (1995) en su texto de categorías para uso en computación– de modo más eficaz que otros medios usados antes por lógicos y algebristas.

...son un paso adelante en la línea estructuralista de Bourbaki, y por ello es natural que se hicieran sugerencias para incorporar la teoría de categorías a la enseñanza secundaria, como una especie de colofón a las diversas estructuras que eran el soporte para el aprendizaje de los conjuntos de números o de transformaciones geométricas.

Las categorías y la matemática moderna de los sesenta

Las categorías, que surgen en la matemática superior como un lenguaje universal unificador y simplificador, se convierten luego en una teoría sistematizadora de las diversas estructuras matemáticas e incluso en una formalización de la propia noción heurística de estructura (Corry, 1996). En este sentido, son un paso adelante en la línea estructuralista de Bourbaki, y por ello es natural que se hicieran sugerencias para incorporar la teoría de categorías a la enseñanza secundaria, como una especie de colofón a las diversas estructuras que eran el soporte para el aprendizaje de los conjuntos de números o de transformaciones geométricas. Aunque estas sugerencias no llegaron a implantarse en los planes de estudios, en algunos países jugaron un papel importante en la formación de los profesores de la matemática moderna.

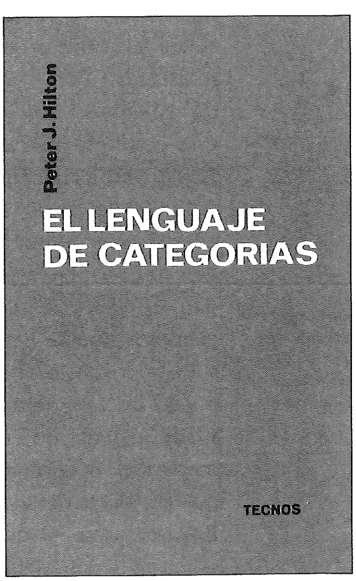
1 El diverso origen de los topos puede verse en McLarty (1990). Más resumido es Bunge (1984). Puede verse también Español (en prensa).

2 Como muestra del origen histórico puede verse Manes (1974). Un libro de texto reciente, escrito por teóricos relevantes de la teoría de categorías para uso específico de investigadores y estudiantes de ciencias de la computación es Barr y Wells (1995).

Baste recordar aquí unas iniciativas de P.J. Hilton, investigador de primer nivel en teoría de categorías y topología algebraica, a la vez que preocupado por y ocupado en la enseñanza de las matemáticas. En los primeros setenta tuvieron amplia difusión en los círculos de la educación matemática unas propuestas de Hilton que presentaban materiales para la introducción en secundaria de la teoría de categorías (las nociones primeras de categoría, funtor, transformación natural y construcción universal) y de un programa básico de topología dedicado al grupo fundamental de un espacio, que es un ejemplo de funtor que tiene como dominio una categoría de estructuras topológico-geométricas y como rango otra de estructuras algebraicas (Hilton, 1975). Este autor, por los mismos años, publicó junto con H.B. Griffiths un texto de gran calidad dedicado a la enseñanza en el primer nivel universitario de la matemática clásica (Hilton y Griffiths, 1970), presentada desde un punto de vista estructural contemporáneo. El libro empieza con la teoría descriptiva de conjuntos, concebida como el lenguaje de las matemáticas, sigue con la exposición de los elementos de las ramas clásicas, aritmética, geometría coordenada (no la de Euclides), álgebra y análisis –precedido éste por la construcción formal de los sistemas de números y la topología elemental del espacio n-dimensional, con homotopía y grupo fundamental–, y termina con una parte dedicada a los fundamentos, que incluye un mínimo de teoría de categorías y lógica matemática. Se trata pues de una aplicación pedagógica en el espíritu moderno de Bourbaki-Piaget, con un complemento sobre los aspectos fundacionales en el que aparece la teoría de categorías.

Baste recordar aquí unas iniciativas de P.J. Hilton, investigador de primer nivel en teoría de categorías y topología algebraica, a la vez que preocupado por y ocupado en la enseñanza de las matemáticas.

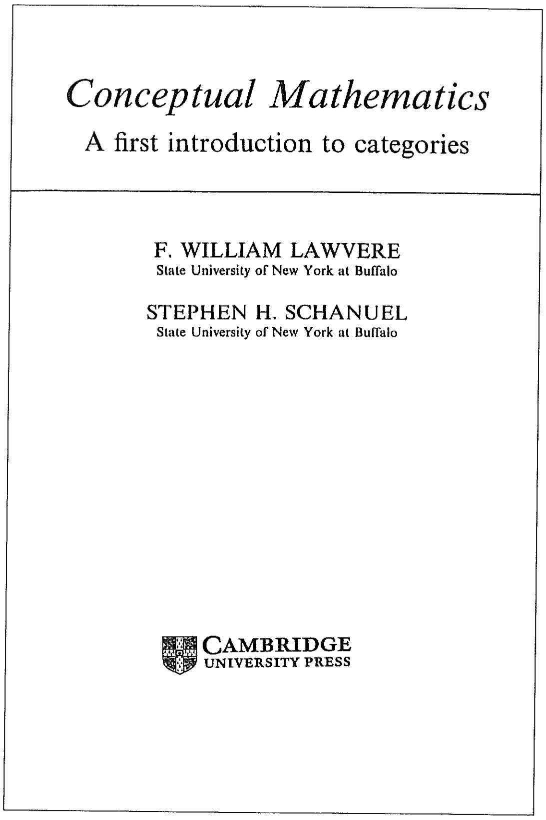
En la presentación de la obra se menciona la importancia creciente de los elementos computacionales en las matemáticas, aunque quedaban fuera de la finalidad que inspiraba el texto. Este reconocimiento fue todavía más explícito en la presentación de la reedición de 1978, en la que se defiende la pervivencia del texto a pesar de los avances del computador en la sociedad y en la educación.



Matemática conceptual y enseñanza

El libro que motiva este comentario (Lawvere y Schanuel, 1997) recoge una nueva experiencia docente, esta vez aislada y no en la onda de una reforma en marcha, realizada veinte años después con una mentalidad mucho más radical en lo que se refiere al posible papel de la teoría de categorías en la educación matemática, pues los conceptos primeros aparecen en un estadio temprano y no como colofón de un conocimiento previo, extenso y estructurado, en varias ramas tradicionales de las matemáticas. Además, el conocimiento del esqueleto categorial de las matemáticas por parte del estudiante principiante se defiende por su utilidad para la formación de futuros científicos en ramas com la física, la computación, la lógica, la lingüística, etc., además de las matemáticas.

Pero es mejor describir la obra antes de comentarla. Que *Matemática Conceptual* haya aparecido en 1997 bajo el prestigioso sello editorial de Cambridge University Press da un nuevo alcance, y sin duda multiplicará su difusión, a un libro que vio la luz en 1991, en una edición doméstica de la Universidad de Buffalo (Estado de New York, EE.UU.) de la que son profesores los autores, y fue traducida en 1994 al italiano. Lawvere y Schanuel han sido protagonistas de primera línea en el desarrollo de la teoría de categorías en las últimas décadas, especialmente el primero de ellos, que ha liderado la actividad internacional en amplias corrientes de investigación. Al mismo tiempo, ha defendido desde hace décadas que las categorías son no sólo un instrumento para guiar la investigación y el uso de las matemáticas avanzadas, sino que también están indicadas en la enseñanza de esta disciplina por su eficacia conceptual y porque abundan ejemplos útiles de naturaleza elemental (Lawvere, 1986). Este es el terreno apenas explorado que los autores abordan con su acción directa en un aula experimental, reflejada después en el libro.


Conceptual Mathematics
A first introduction to categories
F. WILLIAM LAWVERE
State University of New York at Buffalo
STEPHEN H. SCHANUEL
State University of New York at Buffalo
CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

La obra (360 pp.) se divide en una sección previa y cinco partes, formada cada una de ellas por un «artículo» y varias «secciones». Los artículos (que juntos suman unas 70 páginas) contienen el texto básico de su parte respectiva, que los profesores entregan como material escrito a los estudiantes. Las secciones reflejan en formato texto la acción directa en el aula[3], en la que se discuten los conceptos contenidos en los artículos, se dan ejemplos, se aclaran dudas, se precisan o completan cuestiones, etc. En algunas secciones se eleva un poco la dificultad media de la obra, que lleva intercalados ejercicios para que el alumno o lector ponga a prueba su comprensión; muchos de ellos se resuelven luego en el texto por un procedimiento de búsqueda de la solución, y no por simple exposición sintética de la misma. Abundan los diagramas internos, para reflejar la estructura de los conjuntos y las estructuras que se manejan, y externos, para representar mediante flechas los vínculos entre los objetos de una categoría. Como se ve por el número de páginas, el contenido expositivo lineal (artículos) ocupa la quinta parte de la obra, estando las otras cuatro (secciones) dedicadas a la aclaración recurrente de los contenidos con un criterio pedagógico basado en la comunicación.

Los títulos de cada parte y del correspondiente artículo son muy similares, así que es suficiente con dar los de las primeras:

Las secciones reflejan en formato texto la acción directa en el aula, en la que se discuten los conceptos contenidos en los artículos, se dan ejemplos, se aclaran dudas, se precisan o completan cuestiones, etc.

3 En la preparación de las notas del aula los autores tuvieron la colaboración de E. Faro.

I. La categoría de los conjuntos.

II. Isomorfismos.

III. Categorías de conjuntos estructurados.

IV. Propiedades elementales de aplicación universal.

V. Propiedades superiores de aplicación universal.

La primera parte introduce la noción de categoría (objetos X, morfismos $f:X\to Y$, identidades $Id_X:X\to X$, y composición $gf:X\to Z$, siendo f como antes y $g: Y\to Z$) partiendo del ejemplo de los conjuntos finitos y las aplicaciones entre ellos. Compara la composición con el producto de números observando la mayor riqueza de la primera parte de la analogía. Luego introduce los isomorfismos ($fg=Id=gf$) y con ellos las secciones y las retracciones (ecuación $pj=Id$), junto con los morfismos idempotentes ($ff=f$) y las involuciones ($ff=Id$). En la tercera parte se presentan de un modo muy simple las ideas de conjunto con estructura y de aplicación que conserva la estructura. Se utiliza, por ejemplo, un conjunto X estructurado con un endomorfismo $\alpha:X\to X$, lo que se puede representar de modo muy intuitivo como el conjunto X de los estados de un sistema dinámico o de una máquina, con un procedimiento α de cambio de estado que actúa de modo discreto, siendo la composición iterada α^n el resultado de repetir n veces el cambio de estado. Así, un morfismo $(X,\alpha)\to(Y,\beta)$ de la categoría de conjuntos con estructura será en este caso una aplicación $f:X\to Y$ tal que $f\alpha=\beta f$, verificando que la composición, definida de modo natural, cumple las condiciones requeridas por la noción de categoría. En la parte cuarta se abordan, a través de la gama variada de ejemplos que se han ido desarrollando a lo largo de la obra, las nociones de objeto inicial y final, y las de producto y de suma de objetos, definidos mediante construcciones universales que las determinan salvo isomorfismo. Es interesante, y muy característico del enfoque categorial, el estudio de los puntos de un objeto X, que son los morfismos $1 \rightarrow X$ cuyo dominio es el objeto final; en los conjuntos un punto equivale a un elemento, pero no es así en otras categorías bien simples, lo que está relacionado con las condiciones de extensionalidad que establecen cuando dos morfismos (entre los mismos objetos) son iguales. Por ejemplo, en la categoría de los conjuntos punteados, cada conjunto punteado tiene un punto único que corresponde al elemento seleccionado. Junto con los productos y las sumas se analizan el posible isomorfismo entre ambas construcciones universales y la relación distributiva[4]. Finalmente, en la quinta y última parte se realiza un somero encuentro con la noción de topos, un tipo especial de categorías que admiten dos construcciones muy características de los conjuntos: el objeto Y^X de morfismos de X en Y (exponenciación[5]) y el conjunto ordenado (o categoría) $\mathcal{P}(X)$ de las partes de un objeto X. Los autores exponen con detenimiento cómo se determina cada parte A de X mediante un morfismo característico $X \rightarrow \Omega$ cuyo codominio es un objeto de valores de verdad, lo que hace que el topos lleve adherida una lógica, que en los conjuntos es la clásica asociada a verdadero-falso; pero la obra incluye ejemplos simplicísimos en los que esta lógica no es bivaluada ni booleana.

Por ejemplo, un grafo dirigido es un conjunto de flechas con otro de vértices junto con relaciones de incidencia que hacen que cada flecha tenga un vértice inicial y otro final, estructura representable en muchos casos de modo gráfico. Si tomamos un subgrafo A de un grafo X (A es un subconjunto de flechas con los objetos iniciales y finales correspondientes a cada una de ellas) y una flecha x de X, podemos estudiar la relación de pertenencia de la flecha x al subgrafo A, observando dos puntos de vista:

1. El meramente conjuntista nos hace ver los dos valores de verdad habituales del predicado pertenencia: verdadero o falso.

En su conjunto, la obra recopila un experimento pedagógico que avanza en la introducción de las categorías hasta quedarse a las puertas de los funtores adjuntos, noción que aparece implícita en algún ejemplo concreto (por ejemplo la exponenciación) pero que no se introduce de modo explícito.

4 Como ejemplos negativos de la distributividad se consideran la categoría de los conjuntos punteados y las categorías lineales.

5 Aprovecha la noción de categoría cartesiana para discutir el argumento diagonal de Cantor, explicado en una sección de la parte cuarta para una categoría con productos finitos.

2. Desde el punto de vista de la estructura la situación es más rica, pues la flecha x puede pertenecer efectivamente al subgrafo A (valor verdadero de la pertenencia) o puede no pertenecer en absoluto, entendiendo por ello que ni x, ni su vértice inicial, ni su vértice final están en A (valor falso de la pertenencia); pero hay otros tres valores de verdad intermedios, que el lector puede fácilmente determinar, en función de la pertenencia o no de los vértices de la flecha. Este conjunto de cinco valores de verdad posee una estructura lógica (unión, intersección, negación, implicación), parecida pero no igual a la booleana, que se puede analizar por medio de tablas de verdad.

En su conjunto, la obra recopila un experimento pedagógico que avanza en la introducción de las categorías hasta quedarse a las puertas de los funtores adjuntos, noción que aparece implícita en algún ejemplo concreto (por ejemplo la exponenciación) pero que no se introduce de modo explícito. El método consiste básicamente en introducir conceptos que se realizan y discuten mediante ejemplos sencillos (sobre todo conjuntos con estructuras simples de naturaleza discreta) pero que admiten una gran cantidad de generalizaciones útiles en ámbitos muy diversos de la matemática superior discreta y continua. No obstante, aparecen también numerosos ejercicios y algunos fragmentos más formales con sencillos teoremas demostrados que forman una incipiente teoría de categorías abstracta.

Ha dicho Mac Lane (1988) que las matemáticas consisten en realizar cálculos y elaborar conceptos, distinción que sin duda han tenido en cuenta los autores de *Matemática Conceptual*, porque advierten en la presentación del libro que ponen el énfasis no tanto en los cálculos algorítmicos cuanto en «el análisis que permite decidir qué cálculos hay que hacer y en qué orden», y ello desde los estadios más elementales de las matemáticas. En este libro, los conceptos nuevos se motivan y ejemplifican con una aritmética elemental, con ideas cinemáticas simples, con modelos combinatorios discretos como los grafos, con relaciones de parentesco, etc.

Volviendo al proceso histórico, recordemos que el objetivo de Hilton y Griffiths (1970) era ofrecer a lectores y estudiantes de segundo nivel (profesores de niveles elementales muchos de ellos) una relectura de las matemáticas clásicas que permitiera ver las ideas recurrentes que surgen por doquier, mostrando la unidad de las partes que aparecieron separadas en la experiencia matemática previa. Según estos autores, este propósito de unificación es parcialmente estético, pero tiene también la finalidad práctica de ayudar a controlar masas ingentes de conocimiento detallado. Por esta razón incluyeron el capítulo sobre categorías y funtores, sin ir más allá de introducir el lenguaje categórico.

Para Lawvere y Schanuel, las categorías no aparecen como la fase avanzada de un enfoque estructural, sino como expresión de conceptos muy generales pero a la vez muy básicos «que atraviesan las fronteras artificiales que separan la aritmética, la lógica, el álgebra, la geometría, el cálculo, etc.» y por ello sirven como preparación inicial para el pensamiento abstracto común a las diversas ramas, clásicas y actuales, en que dividimos a la más antigua de las ciencias, así como sus aplicaciones más diversas. Además, a la vez que se conoce la categoría de los conjuntos clásicos, proponen el conocimiento temprano y simultáneo de otras categorías, en particular de los topos, que dan un soporte más flexible a las más variadas partes de las matemáticas. Por eso, y con ellos el editor, sostienen que las ideas y las técnicas de las categorías deberán ser conocidas por todo aquel que desee estar al corriente de las matemáticas y sus aplicaciones, desde los niveles más elementales, en el siglo veintiuno.

Como ya decía Klein a principios del siglo que ahora termina, los profesores de matemáticas deben dominar algo más de lo concreto que tienen que enseñar, en particular el espíritu matemático de su época. Siguiendo su dictado podemos concluir que, aunque la materia no se incorpore a los programas elementales, los profesores deberían conocer las categorías del modo como son presentadas por Lawvere y Schanuel. Por otra parte, repasar desde el punto de vista categorial las matemáticas ya sabidas es un magnífico estímulo para mantener vivo y actualizado el conocimiento. Si cunde el ejemplo que los autores han dado con su experiencia personal, que algunos entusiastas secundan en diversos niveles educativos, llegará el momento en que los expertos en educación matemática dedicarán su esfuerzo y mejor preparación a la didáctica de la teoría de categorías.

Agradecimiento

El autor agradece a la Cátedra Miguel Sánchez Mazas, de la Universidad del País Vasco, la oportunidad que le brindó de exponer el contenido de este artículo en las Jornadas sobre Matemáticas y su Enseñanza, celebradas en San Sebastián los días 26 y 27 de octubre de 1998, en el acogedor marco de la E. U. del Profesorado de Guipuzkoa.

Como ya decía Klein a principios del siglo que ahora termina, los profesores de matemáticas deben dominar algo más de lo concreto que tiene que enseñar, en particular el espíritu matemático de su época.

Luis Español
Departamento de Matemáticas y Computación.
Universidad de La Rioja

Bibliografía

BARR, M. y Ch. WELLS (1995): *Category Theory for Computing Science* (2nd ed.), Prentice Hall, New York.

BUNGE, M. (1984). «Topos in logic and logic in topos», *Topoi,* 3, 13-22.

CORRY, L. (1996): *Modern algebra and the rise of mathematical structures,* Birkhäuser, Basel.

EILENBERG, S y S. MAC LANE (1945): «General theory of natural equivalences», *Trans. Amer. Math. Soc.*, 58, 231-294.

ESPAÑOL, L. (en prensa): «Dialéctica del cálculo infinitesimal», en E. AUSEJO y M. HORMIGÓN (eds.): *Ciencia e Ideología,* Siglo XXI, Madrid.

HILTON, P.J. (1975): *El lenguaje de categorías* (Traducción J. de Lorenzo), Tecnos, Madrid.

HILTON, P.J. y H.B. GRIFFITHS (1970): *A comprehensive textbook of Classical Mathematics. A contemporary interpretation,* Van Nostrand Reinhold, New York (1978, Springer-Verlag).

LAWVERE, F.W. (1986): «Taking categories seriously», *Revista Colombiana de Matemáticas XX* (Memorias del Seminario-Taller en Teoría de Categorías, Bogotá, agosto de 1983), 147-178.

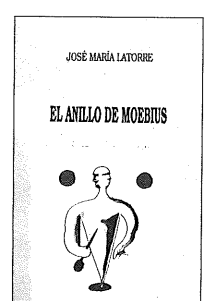
LAWVERE, F.W. y S.H. SCHANUEL (1997): *Conceptual Mathematics: a first introduction to categories,* Cambridge University Press.

MAC LANE, S. (1988): «Concepts and categories in perspective», en P. DUREN (ed.), *A century of mathematics in America,* Providence, A.M.S., Part I, 323-365.

MCLARTY, C. (1990): «The uses and abuses of the history of topos theory», *Brit. J. Phil. Sci.*, 41, 351-375.

MANES, E.G. (ed.) (1974): *Category theory applied to computation and control (Proceedings of the First International Simposium),* University of Massachusetts at Amherst.

El ocho
Katherine Neville



El anillo de Moebius
José María Latorre

SUMA 32
noviembre 1999, pp. 17-22

Las posibilidades y peligros del pensamiento basado en imágenes en la resolución de problemas matemáticos*

Norma C. Presmeg

El planteamiento de dos problemas permite iniciar la reflexión sobre algunas de las posibilidades y peligros del pensamiento basado en imágenes en matemáticas. Se introducen las definiciones de imaginería, de pensamiento basado en imágenes y visualización, y se presentan, a través de ejemplos, diferentes tipos de imaginería visual. Se analiza la efectividad del pensamiento basado en imágenes en la resolución de problemas, justificando que la visualización no siempre es efectiva, sino que la utilización de imágenes visuales puede generar también dificultades. Se proponen estrategias de aula para fomentar y hacer más efectivo el pensamiento basado en imágenes en los alumnos.

* Conferencia leída en Tarragona el 29 de enero de 1998 con motivo del proyecto TIEM98 patrocinado por el Centre de Recerca Matemàtica del Institut d'Estudis Catalans.

Traducción: Julio Sancho

ARTÍCULOS

COMO PARTE de un movimiento mundial de mejora de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en los Estados Unidos y en otros países se ha animado a los profesores a usar actividades de resolución de problemas para enseñar matemáticas. A menudo, tales actividades se organizan de forma que los alumnos trabajan en pequeños grupos de dos a cuatro alumnos en los que se comunican sus estrategias y soluciones. Los cuatro temas comunes que aparecen en los «estándares» nacionales en USA (NCTM, 1989 y 1991) son la resolución de problemas, el razonamiento, la comunicación y las conexiones. En esta sesión también comenzaremos con una actividad de resolución de problemas en la que os animaré a trabajar conjuntamente y a comunicaros vuestras estrategias y soluciones. Después de hacer una puesta en común de todo el grupo y reflexionar sobre la actividad consideraremos juntos algunas definiciones de imaginería[1], visualización y los constructos relacionados. Esto nos conducirá al núcleo de mi presentación que trata de la efectividad del uso de imaginería en la resolución de problemas matemáticos y también algunas de las dificultades potenciales asociadas a este tipo de cognición. Finalmente, consideraremos algunas formas de actuar con las que los profesores pueden animar a los alumnos a usar, en la resolución de problemas matemáticos, su potencial y evitar los peligros.

Una actividad

Coger un trozo de papel y doblarlo verticalmente por la mitad. A continuación, plegar el vértice superior derecho (al que se llamará C) hasta la posición C' que está en la línea del pliegue, como se muestra en la figura 1. Si ahora se dobla el papel a lo largo de BC', *parece* que se obtiene un triángulo equilátero. ¿Es eso cierto?

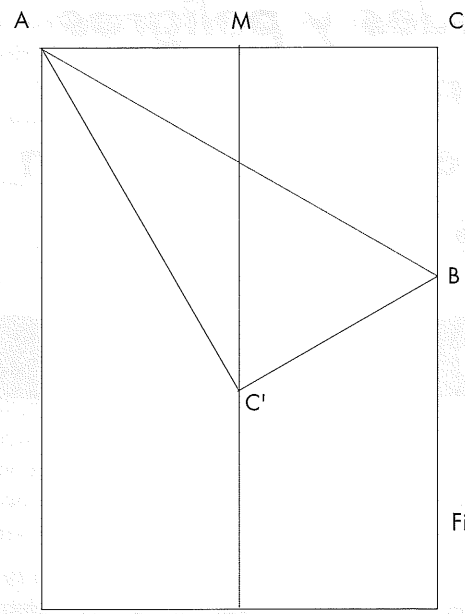


Figura 1

Emplear unos minutos reflexionando sobre la situación y comentándola hasta estar lo suficientemente seguros, de una forma o de otra, como para convencer a cualquiera de que es un triángulo equilátero o de lo contrario. ¿Puede probarse vuestra conclusión? ¿La demostración es lo que os ha convencido de ello? ¿La demostración, es formal o informal?

Estas consideraciones ilustran algunas de las posibilidades y peligros del uso del pensamiento basado en imágenes en matemáticas, pero antes de fijarnos en las definiciones y entrar con mayor profundidad en estas cuestiones vamos a extender esta actividad. Se puede dibujar un círculo, con bastante precisión, usando el dedo índice verticalmente para marcar el centro y un rotulador para dibujar la circunferencia y *girar el papel* mientras la mano está quieta. Se recorta el círculo y se busca y marca el centro plegándolo dos veces. Al plegar tres veces la circunferencia sobre su centro se obtiene un triángulo equilátero (podemos estar seguros de ello por la simetría rotacional de la figura). Por último, se pliega este triángulo equilátero en cuatro pequeños triángulos con lo que se forma un tetraedro.

La siguiente cuestión es: si extendemos las cuatro caras del tetraedro de forma que tengamos cuatro planos que se cortan entre sí, ¿en cuántas regiones dividen el espacio? En primer lugar se intentará imaginar la situación, luego, se trabajará con un modelo o de cualquier otra forma que permita llegar a una respuesta en cada grupo. Cuando la tengáis, emplearemos algo de tiempo comparando soluciones y métodos.

A partir de estas actividades y de otras, está claro no sólo que para algunas personas el pensamiento basado en imágenes es más fácil que para otras, sino también que algunos *prefieren* esa forma de pensar cuando resuelven problemas: en efecto, hay visualizadores para los que el uso de imaginería visual es esencial en su tarea. He desarrollado un instrumento para medir «las preferencias para la visualización» que se ha usado hasta ahora en tres países. Lejos de demostrar que los alumnos rechazan el uso de métodos visuales en la resolución de problemas matemáticos, como sostenían Eisemberg y Dreyfus (1991), la gráfica siguiente, figura 2, muestra que, aunque hay diferencias entre los alumnos de los tres países, siempre hay visualizadores que prefieren el uso de imágenes visuales o diagramas en casi todos los problemas (este punto se discute con mayor profundidad en Presmeg y Bergsten, 1995 y Presmeg, 1997). Si es cierto que algunos alumnos *necesitan* trabajar visualmente, entonces está claro que este conocimiento es importante para el profesor. A través de los tiempos, los buenos profesores han adoptado su pedagogía a las necesidades de los alumnos como lo confirmó mi tesis doctoral (Presmeg, 1985) en la que algunos profesores que usaban pocos métodos de visualización cuando resolvían problemas, sin embargo empleaban pedagogía visual con sus alumnos.

...está claro no sólo que para algunas personas el pensamiento basado en imágenes es más fácil que para otras, sino también que algunos prefieren esa forma de pensar cuando resuelven problemas...

Pero, ¿qué significan términos como pensamiento basado en imágenes, visualización, visualizadores? Vamos a considerar algunas definiciones.

Definiciones de imaginería y constructos relacionados

El *pensamiento basado en imágenes* es un término deliberadamente amplio que incluye el uso de imágenes mentales no sólo de varias modalidades como visuales, auditivas, táctiles y cinestéticas sino también de varios tipos dentro de cada modalidad. Las imágenes visuales parecen ser las que con más frecuencia se usan en la resolución de problemas matemáticos. En mi investigación, consideré las *imagenes visuales* como constructos mentales que describen información visual o espacial (Presmeg, 1987 y 1997). Aunque la imaginería puede estar implícita en el uso de diagramas, en

1 N. del T. En castellano la palabra «imaginería», traducción literal de la inglesa *imagery*, tiene una acepción distinta al término utilizado en el texto. Aquí usamos el término imaginería para designar «al conjunto de imágenes mentales, no sólo de varias modalidades como visuales, auditivas táctiles y cinestéticas, sino también de varios tipos dentro de cada modalidad».

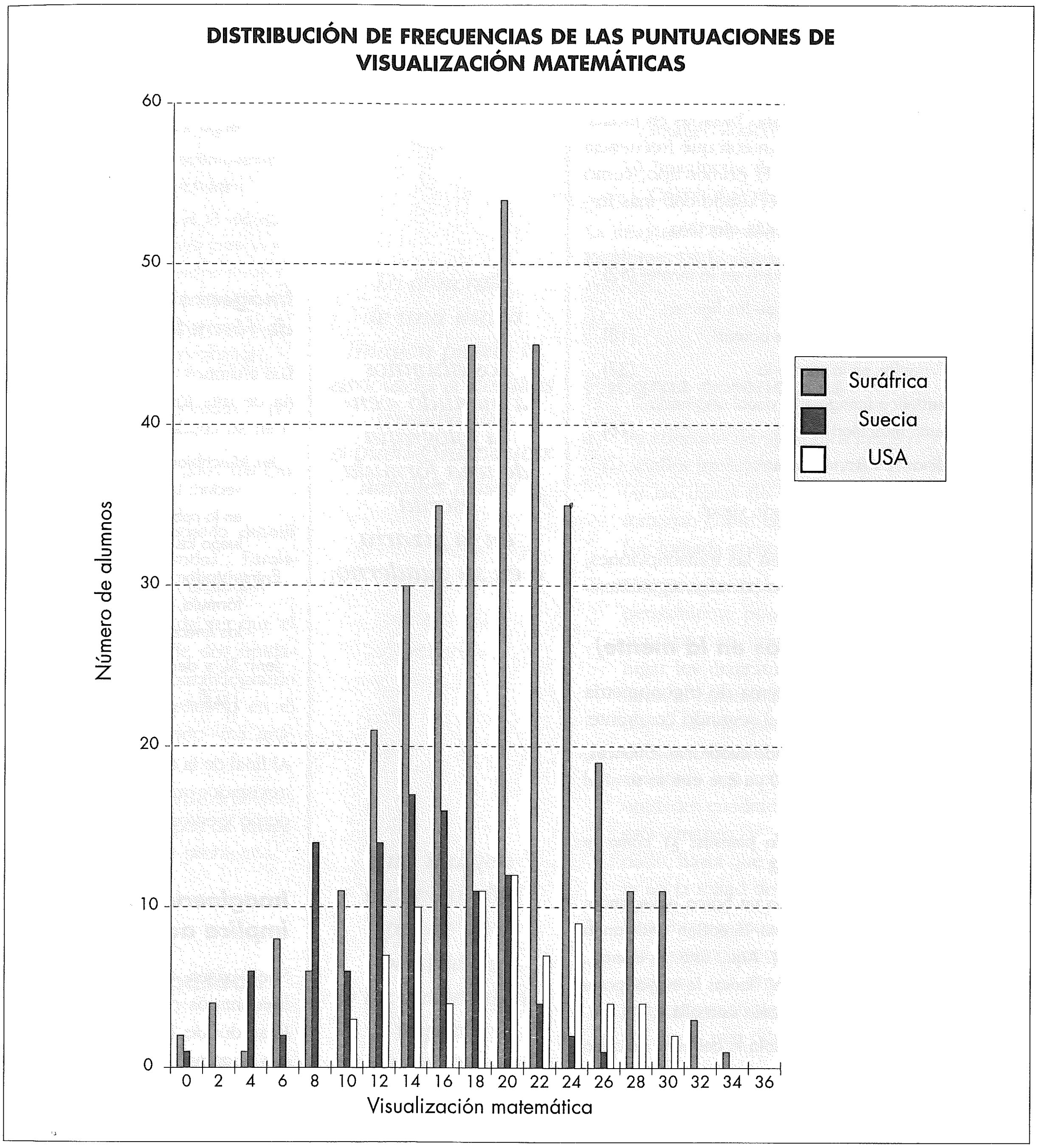


Figura 2. Preferencias de los alumnos por los métodos visuales en tres países

papel o pantallas de ordenador, usaré aquí el término de imaginería en el sentido de constructos *mentales*.

La *visualización* la usaré para incluir el uso de diagramas de diversos tipos (incluyendo gráficos de ordenador) e imaginación visual. *Visualizadores* son las personas que cuando tienen que escoger prefieren el uso de métodos visuales.

Uso de imaginería como una forma de resolver problemas

En el curso de la investigación de mi tesis doctoral, a lo largo de un periodo de ocho meses, entrevisté a 54 visualizadores en su último año de escolarización, dentro de un sistema de doce cursos. El análisis de las transcripciones de las 188 entrevistas grabadas indicó que usaron muchas clases diferentes de imaginería cuando resolvían problemas matemáticos. Algunos tipos fueron más efectivos que otros. Clasifiqué los tipos como se ve en la tabla 1: el número que va entre paréntesis indica cuántos de los 54 alumnos usó cada tipo de imaginería en la resolución de problemas propuestos en las entrevistas basadas en tareas. Sin embargo, esos números no indican con qué frecuencia se usó cada tipo por cada alumno. El primer tipo, como un dibujo en la mente, era de lejos el usado con más frecuencia, aunque no siempre fue el más efectivo.

- concreta, imaginería pictórica (dibujos en la mente) (52)
- imaginería de pautas (descripción de las figuras de manera inconcreta en forma de pautas) (18)
- imágenes de fórmulas en la memoria (32)
- imaginería cinestética (imaginería visual originada en el movimiento muscular) (16)
- imaginación dinámica (en movimiento) (2)

Tabla 1. Tipos de imaginería visual

Hay ejemplos de todos estos tipos en las transcripciones, algunos de los cuales aparece en los párrafos siguientes.

Imaginería concreta (dibujos en la mente)

Alison estaba resolviendo un problema de trigonometría en el que se necesitaba trabajar en el segundo cuadrante.

Alison: Entonces sería el seno... segundo cuadrante. Entonces, 180, entonces lo tomo desde 180 ya que éste es su nivel de agua.

Entrevistador: ¡Oh, es así como tu lo piensas! ¿Y cómo te ayuda el nivel de agua a saberlo?

Alison: ¡Oh!, ¡hum!, tienes... Es como un barco navegando: realmente puede navegar en esta dirección (indicando arriba y abajo, es decir, el eje *Y*). Aquí, éste, es como... puede. Lo obtienes a partir de ahí. Tomas la mayor parte de... porque esto es tu 360. También está allá.

Entrevistador: ¿Se te ha ocurrido a ti sola lo del nivel de agua o alguien te lo ha sugerido?

Alison: No, se me acaba de ocurrir.

Imaginería de pautas (relaciones puras representadas en un esquema espacio-visual

Seguro de sí mismo y con comodidad, Crispin usó con frecuencia una imaginación de pautas, por ejemplo, al buscar las componentes x e y de un vector.

Crispin: El segmento es cuatro; cuatro veces coseno de 120. Tienes los cuatro cuadrantes luego el coseno es, estará en el segundo cuadrante luego es negativo. Es mejor que te muestre como lo veo. Seno, coseno, tangente: el seno es + + − −, el coseno es + − − +, la tangente es + − + −.

Los alumnos a menudo «ven» la fotografía de una fórmula escrita en la pizarra o en su cuaderno.

Entrevistador: Entonces, ¿tu no necesitas un dibujo de los cuadrantes, sólo necesitas esta pauta?

Crispin: De nuevo es otra pauta. De hecho tengo unas cuantas.

Entrevistador (resumiendo más tarde): Lo importante era la pauta.

Crispin: Sí, la regularidad, es lo que te ayuda.

Imágenes memorísticas de fórmulas

Los alumnos a menudo «ven» la fotografía de una fórmula escrita en la pizarra o en su cuaderno.

Jeni (describiendo la fórmula del módulo de un vector): Lo sé, es como si tuviera su foto en la cabeza. Tenemos, como el vector y luego las dos líneas del valor absoluto.

Entrevistador: ¡Oh, ya veo!, es la foto de la fórmula, ¿no es así? ¿Ves el vector con las líneas del valor absoluto?

Jeni: Si, y después la raíz cuadrada.

$$\left(\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

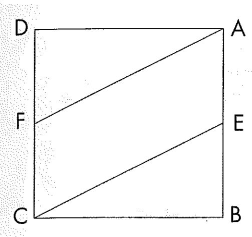
Al final de la entrevista, Jeni le dijo al entrevistador que había visualizado su cuaderno y entonces había visto la fórmula.

Imaginería cinestética (que implica actividad muscular)

Sue «pasea» alrededor de cuadrantes imaginarios con sus dedos para identificar dónde la tangente de un ángulo era negativa. Alison «recorrió» cuatro o cinco vectores de un extremo al otro para ilustrar su concepto de desplazamiento. Muchos alumnos trazan con sus dedos la imagen de una parábola o de una hipérbola, sobre todo cuando no pueden recordar sus nombres.

Imaginería dinámica (movimiento)

Paul estaba intentando resolver el siguiente problema. El diagrama estaba originalmente inclinado pero Paul lo redibujó y lo alineó con su página.



Dado el cuadrado ABCD, cuya área es 4 unidades cuadradas y los puntos medios de los lados AB y DC, E y F, encontrar el área de AECF (como paso previo habrá que probar que es un paralelogramo)

Paul: Cuatro unidades cuadradas... (12 segundos)

Entrevistador: Piensa en la mitad del cuadrado.

Paul: La mitad de mi cuadrado deberá tener 2 unidades cuadradas... Paralelogramo... ¡Tendrá dos unidades!

Paul explicó que después de ver que el rectángulo de arriba era de dos unidades cuadradas «deslizó» el paralelogramo entre las paralelas hasta ponerlo en el lugar del rectángulo, usando una imagen en movimiento.

En la siguiente sección se analiza la efectividad de los diferentes tipos de imaginación en la resolución de problemas.

Las posibilidades del pensamiento basado en imágenes

- Las imágenes intensas de cualquier tipo, tienen ventajas mnemotécnicas (varios alumnos se sirvieron de forma efectiva de imágenes intensas de triángulos especiales con ángulos de 45° y de 60°).
- Las imágenes concretas son efectivas en alternancia con modos no visuales tales como el análisis lógico o uso fácil no visual de fórmulas (muchos alumnos demostraron esta eficacia).
- La imaginación dinámica es potencialmente efectiva (la imagen dinámica de Paul ilustra este aspecto).

Lo concreto de una única imagen puede ir asociada a detalles irrelevantes o puede introducir detalles falsos.

Una imagen incontrolable puede ser persistente y de esa manera impedir la apertura de caminos más provechosos

- La imaginación que está al servicio de una función abstracta es potencialmente efectiva:
  a) Haciendo concreto el referente (el nivel de agua de Alison es un ejemplo del uso metafórico de una imagen concreta con una finalidad práctica).
  b) Imaginería de pautas (la imaginería de pautas de Crispin fue efectiva en varias ocasiones).

La imaginería no siempre fue una ayuda para estos visualizadores. En la siguiente sección se ilustran algunas dificultades.

Peligros potenciales

1. Lo concreto de una única imagen puede ir asociada a detalles irrelevantes o puede introducir detalles falsos (si las líneas de un diagrama parecían paralelas las tomaron como tales; una línea que parecía tangente fue tomada como si lo fuese de hecho).
2. Una imagen estándar de una figura puede inducir un pensamiento poco flexible que impida reconocer un concepto en un diagrama no estándar. (En primer lugar los diagramas estándar de los teoremas dificultaron el razonamiento de muchos alumnos. En segundo, antes de que Paul pudiera resolver el problema del área descrito más arriba, tenía una imagen de un cuadrado con una pequeña cruz en el interior: «cuatro unidades cuadradas». Tuvo dificultad para romper con esta imagen y reconciliarla con el paralelogramo dado, hasta que el entrevistador le sugirió que pensara en la mitad del cuadrado original).
3. Una imagen incontrolable puede ser persistente y de esa manera impedir la apertura de caminos más provechosos (en otro problema diferente, Paul tenía una imagen prototípica de una parábola simétrica respecto del eje *Y*, que dificultó la resolución).
4. Especialmente si es vaga, la imaginería que no está asociada a un proceso de pensamiento analítico riguroso puede ser de poca ayuda (esta dificultad surge repetidamente).

Todos estos peligros están relacionados de una u otra forma con la dificultad de generalizar una imagen que es, por su naturaleza, un caso concreto. Por tanto, podría decirse que los peligros son problemas de generalización. Las formas en las que estos problemas pueden aparecer quedan ilustrados en el uso metafórico del nivel de agua en el caso de Alison y en la imaginación de patrones de Crispin. Además de presentar los diagramas en orientaciones variadas, ¿qué podemos hacer los profesores para ayudar a los alumnos a hacer más efectivo el uso de su imaginería?

¿De qué forma pueden los profesores ayudar a los alumnos a usar las potencialidades y evitar los peligros?

A continuación se dan algunas aspectos que pueden facilitar el pensamiento visual (Presmeg, 1985).

- Un ambiente de clase controlado, pero que es relajado y sin apresuramientos.
- El uso de dibujos por el profesor: aparecen diagramas que no son indispensables.
- Uso de la imaginería del profesor: el profesor muestra mediante gestos o de otra forma que está usando una imagen.
- Uso de la imaginería de los alumnos: el profesor les pide a los alumnos que se hagan una imagen o que piensen en figuras en movimiento.
- Uso de un componente móvil: se usa el brazo, dedo o el cuerpo en movimiento de los alumnos; el uso de modelos manipulativos y concretos.
- Uso del color: por el profesor y por los alumnos.
- Enseñanza sin barreras metodológicas: el profesor
  - apela a la intuición de los alumnos;
  - usa métodos de búsqueda de patrones;
  - retrasa el uso del simbolismo;
  - usa deliberadamente conflictos cognitivos;
  - muestra y acepta métodos alternativos.

Uno de los resultados más sorprendentes e inesperados de este proyecto de investigación (descrito con más detalle en Presmeg, 1997) fue que para estos visualizadores la enseñanza de un grupo de profesores «visual» que aplicó estos consejos en sus clases no fue tan efectiva como la del grupo «medio» que empleó alguno de los consejos, pero que enfatizaba la generalización y la abstracción en su metodología. Los visualizadores normalmente tenían dificultad en las clases de los profesores «no visuales» incluso cuando estos profesores eran efectivos con otros alumnos. Por tanto, parece ser importante que los profesores animen al uso de métodos visuales, por ejemplo, por los medios descritos más arriba, pero teniendo cuidado de los peligros relacionados con el uso de la imaginería en movimiento, diagramas en orientaciones y la imaginería de patrones que representan relaciones puras espacio-visuales.

Los visualizadores normalmente tenían dificultad en las clases de los profesores «no visuales» incluso cuando estos profesores eran efectivos con otros alumnos.

Norma C. Presmeg
The Florida State University

Reconocimientos

Quiero agradecer el apoyo del CRM durante la preparación de esta presentación.

Referencias

EINSENBERG, T. y T. DREYFUS (1991): «On the reluctance to visualize in mathematics», en W. ZIMMERMANN y S. CUNNINGHAM (eds.): *Visualization in teaching and learning mathematics*, 25-37. Mathematical Association of America. Washington, D.C.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1989): *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, NCTM, Reston, Virginia.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1991): *Professional standards for teaching mathematics*, NCTM, Reston, Virginia.

PRESMEG, N. C. (1985): *The role of visually mediated processes in high school mathematics: A clasroom investigation*, Tesis doctoral no publicada. University of Cambridge.

PRESMEG, N. C. y C. BERGSTEN (1995): «Preference for visual methgods: An international study», en L. MEIRA y D. CRRAHER (Eds.): *Procedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Recife, Brasil, 22 a 27 de julio, Vol. 3, 58-65.

PRESMEG, N. C. (1997): «Generalization using imagery in mathematics», en L. D. ENGLISH (Ed.): *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey, 299-312.

SUMA 32
noviembre 1999, pp. 23-34

Estudio sobre implicación lógica: modelos prácticos, modelos teóricos y claridad de las situaciones modélicas

Alberto Martínez Delgado

ARTÍCULOS

Después de contextualizar teóricamente el problema de la formación del pensamiento lógico, el autor describe el estudio empírico que ha llevado a cabo sobre la relación sujeto-objeto en el razonamiento por implicación lógica.
El objetivo de la investigación consiste en la comprobación de si las relaciones de implicación se resuelven mejor en situaciones vinculadas a la vida práctica, con enenuciados abstractos generales o, dentro de un planteamiento abstracto, en situaciones de enunciado eliminador de ambigüedades de interpretación.

CONTEXTO TEÓRICO: el problema de la formación del pensamiento lógico

El pensamiento lógico reúne, en un grado de extremo contraste, dos características que han jugado un papel histórico como polos interpretativos del conocimiento; estas características pueden sintetizarse en su universalidad y en su aplicabilidad. La validez universal de la lógica, su independencia de contingencias materiales y el hecho de que se constituya en la mente humana con cierta, al menos, independencia de la experiencia personal, facilita una visión de la lógica como manifestación de una sustancia, el espíritu, radicalmente distinta de la materia sensible. Por otra parte, la aplicabilidad general del pensamiento lógico a situaciones científicas y de la vida ordinaria y el hecho de que en su funcionamiento pueda observarse la influencia de la experiencia, invitan a una interpretación no dualista de la realidad. Dos planteamientos filosóficos cuya contraposición, a pesar del auge actual del «pensamiento único», persiste. Los intentos para unificar o conciliar los polos que frecuentemente se representan como mente y realidad sensible (o en una tendencia más espiritualista, alma y materia), no pueden considerarse definitivos, a pesar del prestigio de los enfoques de Kant, reivindicados, por otra parte, por distintas tendencias.

La presencia del dualismo y del monismo no se reduce, a pesar de su importancia, a los problemas de las *esencias* de las cosas y de las *sustancias* y *causas* últimas, aspectos que pueden considerarse como metafísicos, y por lo tanto, irresolubles, al menos científicamente. Dentro de planteamientos filosóficamente monistas, como los representados por el materialismo marxista de Lenin, surge una forma de dualismo al analizar la relación teoría-práctica; aunque se conceda primacía a la práctica sobre la teoría, ésta conserva un importante papel en su relación dialéctica con la práctica, «ciega» sin la orientación de la teoría. La separación teoría-práctica, al menos en su origen, llega a plasmarse en la idea leninista (y kautskiana) de que «los obreros no podían tener conciencia socialdemócrata. Ésta sólo podía ser introducida desde fuera..., la doctrina del socialismo ha surgido de teorías filosóficas, históricas y económicas...» (Lenin, 1975, tomo I: 142).

Dentro de la misma corriente monista del materialismo dialéctico aparece una dualidad, de importancia epistemológica y educativa, entre las contradicciones internas y las contradicciones externas como motores del desarrollo:

> ...los cambios en la naturaleza se deben principalmente al desarrollo de las contradicciones internas en la naturaleza [...] las causas externas constituyen la condición de los cambios y las causas internas la base de los cambios [...] las causas externas actúan a través de las causas internas (Mao Tse-tung, 1974: 21-32).

En el terreno epistemológico-educativo adquiere especial relieve la dualidad sujeto-objeto, incluso dentro de posiciones filosóficas no manifiestamente dualistas. A pesar del papel relativo de los conceptos de sujeto y de objeto, que pueden suponerse como elementos de una misma naturaleza, puede establecerse una diferenciación entre ellos en función de la existencia de membranas de separación, de estructuras diferenciadas y del desempeño de papeles biológicos y culturales distintos.

Piaget (1977: 48), dentro de su visión biológica del conocimiento, plantea con claridad el problema y la importancia de la relación entre el sujeto y el medio:

> ...todo conocimiento, de la naturaleza que sea, plantea el problema de las relaciones entre el sujeto y el objeto, y este problema da lugar a múltiples soluciones, según que se atribuya este conocimiento al sujeto solamente, a una acción del objeto o a interacciones de diversas formas.

La posición de Piaget, centrada en la identidad básica entre la cognición y los procesos vitales de asimilación y acomodación, no disuelve la dualidad sujeto-objeto, como posteriormente ha hecho el constructivismo radical en su nombre, aunque otorga la primacía al sujeto (de forma similar a la opinión marxista mencionada acerca de las contradicciones internas y las externas). Así, Piaget (1978: 121) sostiene:

> ...hay que buscar el factor primordial, no en las acciones negativas (pura selección) o positivas (esquema estímulo-respuesta o ER) de ese entorno, sino en las acciones que el organismo o el sujeto ejercen sobre ese entorno, y esto gracias a iniciativas esencialmente endógenas [...] el entorno desempeña un papel fundamental en todos los niveles, pero a título de objeto de conquista y no de causalidad formadora, habiéndose de buscar ésta, y de nuevo en todas las escalas, en las actividades endógenas del organismo y del sujeto...

No es este el momento oportuno para una discusión teórica sobre el carácter conformador o no del medio, ni para analizar hasta qué punto es coherente la idea de *fenocopia* defendida por Piaget con la negativa a reconocer al medio externo un cierto papel estructurador del conocimiento. Constatemos, sin embargo, la existencia de cierta ambigüedad en la última fórmula que hemos recogido de Piaget –ambigüedad de la que difícilmente podremos deshacernos– proveniente de que la rechazada influencia conformadora del medio, reaparezca a través de las aceptadas «actividades endógenas» que remiten de nuevo al exterior del sujeto, a pesar de su origen interno.

La rotundidad de la primacía del sujeto en la cognición, es coherente con otras posiciones piagetianas como la controvertida rigidez cronológica en el establecimiento de distintas etapas de desarrollo y el isomorfismo entre estructuras internas de la mente y las estructuras matemáticas que sirvió de base a una avalancha de matemática moderna en la escuela elemental.

La rotundidad de la primacía del sujeto en la cognición, es coherente con otras posiciones piagetianas como la controvertida rigidez cronológica en el establecimiento de distintas etapas de desarrollo y el isomorfismo entre estructuras internas de la mente y las estructuras matemáticas que sirvió de base a una avalancha de *matemática moderna* en la escuela elemental.

La problemática anterior se concreta al tratar del razonamiento lógico o formal, y en particular respecto al razonamiento basado en la implicación lógica (del que nos ocupamos específicamente en este trabajo), en la importancia concedida, en la formación de dicho razonamiento a las estructuras puramente formales de la mente y a la experiencia práctica, fruto de relaciones con el medio exterior.

Independientemente de la postura de Piaget respecto a la influencia o no del medio en el razonamiento formal (sobre la que pueden encontrarse algunas variaciones a lo largo de los escritos de Piaget), se ha formado, en el marco del constructivismo (sobre todo de tendencia psicológica o cognitiva), y como reacción, en gran medida justificada frente al conductismo, una negación de la influencia conformadora del medio exterior (incluso de la propia existencia del objeto exterior) en el la formación del conocimiento.

El paradigma constructivista en la enseñanza, predominante en los niveles oficiales, predominio que podría vincularse con la hegemonía del «pensamiento único», no parece gozar, sin embargo, de un apoyo similar entre el profesorado practicante. Esta contradicción entre administración educativa y estamentos académicos, por un lado, y «prácticos» de la enseñanza, por otro, así como la necesidad de debate científico y de discusión ideológica para el progreso de la ciencia, reclama la realización de trabajos empíricos y experimentales, no sometidos a obediencia, sobre puntos cruciales del conocimiento como pueden ser el pensamiento lógico y su relación con el medio entorno, y ello a pesar del rechazo de estos métodos de investigación por parte del constructivismo radical.

La investigación propuesta en este trabajo. Objetivos e hipótesis

En el contexto teórico del que hemos señalado algunas notas características, y desde posiciones de no adscripción conductista ni constructivista, nos hemos propuesto realizar un estudio empírico, y con una componente experimental, sobre la relación sujeto-objeto en el razonamiento por implicación lógica, en sujetos que, de acuerdo con las etapas descritas por Piaget, ya han alcanzado la fase de razonamiento formal y, en consecuencia, desde el punto de vista piagetiano, «la forma operatoria se disocia entonces en su totalidad del contenido del pensamiento» (Inhelder y Piaget, 1972: 225).

El objetivo de esta indagación consiste en la comprobación de la existencia o no de un impacto significativo en el pensamiento formal de aspectos experienciales y de modelizaciones de la realidad, especialmente en cuanto éstas no ofrezcan ambigüedades interpretativas notables. Se tratará de comprobar empíricamente si las relaciones de implicación se resuelven mejor en situaciones vinculadas a la vida práctica, con enunciados abstractos generales o, dentro de un planteamiento abstracto, en situaciones de enunciado eliminador de ambigüedades de interpretación. Como situaciones vinculadas con la experiencia práctica de los sujetos observados se utilizará la referencia al funcionamiento de vehículos de motor, y como situación abstracta, relativamente artificial y lejana, pero formulada con mayor precisión y simplicidad que la que resulta incluso de situaciones familiares, utilizaremos un enunciado formalizado referente a un sistema jurídico penal «perfecto»; la estructura de la norma jurídica «si es A debe ser B» de Kelsen ha sido privada del relativismo que, en la práctica socio-política, conlleva el «deber ser» jurídico.

Se tratará de comprobar empíricamente si las relaciones de implicació se resuelven mejor en situaciones vinculadas a la vida práctica, con enunciados abstractos generales o, dentro de un planteamiento abstracto, en situaciones de enunciado eliminador de ambigüedades de interpretación.

El objetivo señalado se concreta en el análisis de las seis hipótesis siguientes, establecidas de forma escalonada, las tres primeras de las cuales pueden considerarse de carácter empírico, observacional, y las otras tres de tipo experimental, formuladas estas últimas, sobre la base de considerar la resolución de implicaciones «prácticas» y de implicaciones abstractas «precisas» como tratamientos experimentales, dentro de un diseño típico pretest-postest:

Hipótesis 1.ª (H1): Si llamamos ILG (implicación lógica general) a la variable que mide el rendimiento en la resolución de tareas de implicación lógica general, bajo enunciado típico de teorema de Matemáticas «si A, entonces B», y llamamos IPF (implicación práctica familiar) a la variable que recoge los resultados en la resolución de tareas de implicación referida a situaciones que tienen una connotación práctica relacionada con la vida cotidiana, en la forma de enunciado «cuando se acaba el combustible de un vehículo se para el motor del mismo», el rendimiento medio en la primera variable $\mu(ILG)$ será significativamente menor que en la segunda $\mu(IPF)$:

$$H1: \mu(ILG) < \mu(IPF).$$

Esta hipótesis ha recibido ya apoyo empírico en otras investigaciones, subrayando la importancia de un «contexto realista» (Wason y Johnson-Laird, 1972: 193;...), o el papel del contexto social (Newman, Griffin y Cole, 1989; Duschl, 1995;...), y hasta que el constructivismo se ha convertido en doctrina hegemónica, parecía formar parte de las evidencias comunes. Borrizas Veses y Carrillo Quintelo, (1987: 73), señalan cierto acuerdo generalizado en torno a esta hipótesis, manifestando que «numerosos tests, [...], muestran que el razonamiento lógico es muy diferente –y mucho más fácil– en un contexto familiar que en una situación más formal lógicamente hablando» y, aunque previamente habían admitido ciertas reservas (ibidem: 69), mantienen:

> ...una de las razones esgrimidas para explicar los pobres resultados [...] ha sido que se proponen situaciones poco realistas y muy abstractas [...]. Aunque las variaciones pueden ser de muy distinta índole, parece que, en efecto, puede afirmarse que un contexto más favorable contribuye a aumentar la proporción de éxitos. ¿En qué medida? Eso no es fácil de asegurar ya que depende grandemente de cuál sea la situación concreta que es objeto de estudio...

Hipótesis 2.ª (H2): Los resultados, comparados por la media aritmética (μ), de la variable implicación lógica general (ILG), son inferiores, significativamente, a los de la variable resolución de tareas sobre implicaciones abstractas «precisas» (IAP), poco relacionadas con la vida práctica cotidiana, pero cuyo enunciado elimina algunas ambigüedades sobre las relaciones antecedente-consecuente, tareas referidas a «un sistema penal, en el que todos los delitos son sancionados y donde no se castiga a inocentes» y en el que «se sabe que si se comete el delito A se es condenado con la pena C y que si se comete el delito B también se es condenado con la pena C»:

$$H2: \mu(ILG) < \mu(IAP).$$

El contenido de esta hipótesis se presta a distintas interpretaciones, según el paradigma epistemológico que se adopte; entre ellos cabe destacar la posibilidad de una interpretación constructivista que, en contra de la hipótesis primera o modificando profundamente su inspiración *realista*, resalte la importancia de la construcción misma realizada por el sujeto sobre la base material que puede servir de base, al menos en parte, a dicho constructo. Sin embargo el planteamiento de la actividad a que se somete al sujeto referente a esta hipótesis, no facilita esta interpretación por el carácter *transmitido*, y no creado, del constructo sobre el que se realiza la prueba.

Hipótesis 3.ª (H3): Los resultados medios (μ), de la variable IPF (implicación práctica familiar) son significativamente inferiores a los de la variable IAP (implicaciones abstractas «precisas»):

$$H3: \mu(IPF) < \mu(IAP).$$

Esta hipótesis es susceptible de interpretación en contraposición con el paradigma *realista* que subyace en la hipótesis primera, aunque dicha interpretación no se impone necesariamente.

Hipótesis 4.ª (H4): Si consideramos la resolución de tareas de implicación práctica familiar (IPF) como un tratamiento experimental (variable independiente: TRAT-IPF) capaz de modificar los resultados en resolución de tareas de implicación lógica general (ILG), en el papel de variable dependiente, el progreso medio (PROG-ILG) en la variable ILG (obtenido mediante diferencia entre los resultados antes del tratamiento –pretest– y los obtenidos, en la misma variable después del tratamiento –postest–) es superior, de forma significativa, al progreso medio obtenido, en la variable ILG, medido también por la diferencia postest-pretest, en el grupo de control, no sometido a tratamiento propiamente dicho (CONT):

$$H4: \mu_{TRAT\text{-}IPF}(PROG\text{-}ILG) > \mu_{CONT}(PROG\text{-}ILG).$$

Hipótesis 5.ª (H5): Si, de forma alternativa, consideramos la resolución de tareas de implicación abstracta «precisa» (IAP) como tratamiento experimental (variable independiente: TRAT-IAP) capaz de modificar los resultados en resolución de tareas de implicación lógica general (ILG), también en esta hipótesis en el papel de variable dependiente, el progreso medio (PROG-ILG) en la variable ILG (obtenido también en ese caso mediante diferencia postest-pretest) es superior, de forma significativa, al progreso medio obtenido, en la variable ILG, medido también por la diferencia postest-pretest, en el grupo de control (CONT):

$$H5: \mu_{TRAT\text{-}IAP}(PROG\text{-}ILG) > $$
$$> \mu_{CONT}(PROG\text{-}ILG).$$

...el planteamiento de la actividad a que se somete al sujeto referente a esta hipótesis [segunda], no facilita esta interpretación por el carácter transmitido, y no creado, del constructo sobre el que se realiza la prueba.

Hipótesis 6.ª (H6): Si, por último, comparamos el progreso medio realizado en la variable «implicación lógica general» (ILG) tras el tratamiento mediante ejercicios de implicación abstracta «precisa» (TRAT-IAP) y el progreso (en ILG) correspondiente al tratamiento con ejercicios de implicación práctica familiar (TRAT-IPF), establecemos como hipótesis que el primer progreso es significativamente superior al segundo:

$$H6: \mu_{TRAT\text{-}IAP}(PROG\text{-}ILG) > $$
$$> \mu_{TRAT\text{-}IPF}(PROG\text{-}ILG)$$

Esta hipótesis requiere algún comentario justificativo de por qué, *a priori*, concedemos una mayor eficacia al tratamiento «abstracto preciso» que al de connotaciones «prácticas familiares». Conviene dejar claro que las tres formas de razonamiento sobre implicación que utilizamos como variables están referidos a enunciados verbales y no a manipulaciones concretas con objetos. Las tres formas consideradas forman parte de la lógica de proposiciones, aunque con distintos contenidos y evocaciones.

Desde el punto de vista de la hipótesis cuarta (H4), la presentación de una referencia a situaciones familiares, en las que la implicación se presenta con bastante nitidez, y que muestra con base en la experiencia del sujeto la existencia de distintos antecedentes de la implicación, supone una mejora significativa en la resolución de formulaciones «similares» de carácter abstracto, sin evocaciones experienciales directas ni aclaraciones adicionales. Por otra parte, desde la perspectiva de la hipótesis quinta (H5), el razonamiento condicional sobre situaciones no familiares, formuladas de forma abstracta, pero con datos inequívocos que permiten distinguir la implicación de la equivalencia, haciendo explícito cómo dos, o más, antecedentes diferenciados conducen a una misma situación final como consecuente, produce una mejora significativa en la resolución de formulaciones «similares» de carácter «abstracto general», sin indicaciones experienciales directas ni aclaraciones adicionales que permitan afirmar si el antecedente presentado es único o no.

Vemos, por lo tanto, que en ambos casos la base de una acertada resolución de razonamientos condicionales, se encuentra fundamentalmente en la claridad semántica de la situación que se debe resolver. Esta claridad puede provenir de una base experiencial de contornos suficientemente precisos, especialmente en lo que se refiere a la existencia de otros antecedentes distintos del formalmente presentado (en el caso de pararse el motor por falta de combustible, pensar en otras razones por las que el motor puede pararse: avería,...); pero también puede dimanar la claridad semántica de la delimitación explícita de la existencia de más de una condición como antecedente. ¿Cuál de las dos circunstancias, existencia de evocación práctica o definición explícita de antecedentes, conduce a mejores resultados en la resolución de ejercicios de implicación? Nos hemos inclinado a favor de la definición explícita de antecedentes, como muestra la hipótesis sexta (H6), por considerar que aunque la referencia práctica puede suponer una cierta luz sobre la concatenación entre causa, o causas, y efecto, también pueden producirse, con cierta facilidad, interferencias motivadas por la reflexión sobre elementos adicionales, no pertinentes al desnudo esquema de la implicación, que hacen más compleja la situación y no facilitan la rotundidad propia de la implicación formal.

Cuando la realidad evocada no es suficientemente tajante, en relación a lo que el sujeto de la prueba puede deducir de las intenciones del «examinador», o cuando falta un correlato fáctico en que apoyarse, puede producirse un desconcierto conducente a un mayor fracaso en la resolución de las tareas propuestas.

Desde este punto de vista gran parte del fracaso en la resolución de ejercicios de implicación podría proceder de una intencionalidad *científica* por parte del sujeto que, más que en el mero enunciado formal quizás mitificado por el aparato académico, busca en la realidad que el enunciado puede evocar, si la relación que se presenta conlleva un antecedente o más de uno. Cuando la realidad evocada no es suficientemente tajante, en relación a lo que el sujeto de la prueba puede deducir de las intenciones del «examinador», o cuando falta un correlato fáctico en que apoyarse, puede producirse un desconcierto conducente a un mayor fracaso en la resolución de las tareas propuestas.

La postura que hemos planteado, sobre la claridad en la unicidad o no del antecedente, coincide, en líneas generales, con la defendida por Lawson (1992), con su «teoría de hipótesis múltiples», según la cual «los tests de razonamiento operacional formal realmente miden hasta qué punto las personas han adquirido la habilidad de iniciar el razonamiento con más de una condición antecedente específica» (p. 965). Sin embargo, esta capacidad de imaginar distintos antecedentes quizás debiera enmarcarse en la cuestión, más amplia, de la delimitación semántica de la situación y del propósito general del sujeto de ir más allá de los términos formales, buscando alguna base real.

La necesidad de un enfoque no restringido a la unicidad o no de antecedentes, se deduce no sólo de la crítica a la teoría de Lawson, formulada por Preece (1993), basada en la discrepancia entre la clasificación, realizada por el propio Lawson, de las dificultades de las distintas tareas para imaginar distintos antecedentes y la clasificación, del mismo aspecto, realizada por estudiantes.

La incidencia de la unicidad o pluralidad de antecedentes en la implicación se traduce, en la perspectiva de Lawson, en la adopción de un «patrón condicional» (varios antecedentes) o de un «patrón bicondicional» (un solo antecedente), de manera que la suma de los que emplean uno u otro «patrón» debiera aproximarse al 100% de los sujetos. Sin embargo, como se comprueba con los propios datos de Lawson, en la mayoría de las pruebas realizadas, dicho porcentaje oscila entre un 73,3% y un 80%, pasando por un 76% para la prueba del «combustible de un coche...». Pero más relevante nos parece el hecho –que no hemos encontrado que sea destacado por el autor– de que en la cuarta tarea de Lawson, de las «cuatro tarjetas», clasificada por éste como «arbitraria» («Si hay una E en la parte delantera de una tarjeta, entonces hay un 4 en la parte posterior...», p. 975), y, sobre todo, en la quinta tarea propuesta por Lawson, que él clasifica, curiosamente, como «material» («Si Hitler fue un gran hombre, entonces yo soy el tío de un mono...») (p. 975), los porcentajes de ambos «patrones» desciende hasta aproximadamente un 58,5% y un 54,5%, respectivamente, casi 20 puntos por debajo del porcentaje inferior de las cinco tareas que podemos considerar más propicias al enfoque de los «antecedentes múltiples». Esta notable variación sugiere que ante conexiones condicionales caprichosas, como la cuarta («E-4»), o disparatadas (o incluso repugnantes para los sujetos), en el significado del antecedente y del consecuente, como la quinta («Hitler-mono»), las respuestas de los sujetos parecen afectadas sustancialmente por otros motivos; de ahí nuestra propuesta de que los aspectos semánticos de los enunciados, su relación con realidades más o menos reconocidas, sean objeto de investigación en trabajos posteriores.

Diseño de la investigación

En este estudio distinguiremos el diseño correspondiente a la parte empírica (tres primeras hipótesis) y la parte referente a la parte experimental (las otras tres hipótesis), con elementos generales de planificación en gran parte comunes a ambos aspectos (muestras, variables estudiadas y medida de las mismas...).

La parte experimental puede encuadrarse como un «diseño de grupo de control pretest-postest» (Campbell y Stanley, 1973: 23), aunque con la deficiencia de no haberse producido una aleatorización formal de los integrantes de cada grupo, por las condiciones objetivas que se imponen en la formación de los grupos de estudiantes (agrupamiento por asignaturas optativas...); esta falta de aleatorización inicial (aunque la asignación de tratamientos a cada uno de los grupos sí se ha producido aleatoriamente) hace que Campbell y Stanley califiquen el diseño de cuasiexperimental. La toma y tratamiento de datos será de tipo cuantitativo, con tratamiento estadístico paramétrico. En particular, la comparación de los resultados y estadísticos relacionados las hipótesis formuladas la realizaremos a través del test de hipótesis de *t* de Student, una prueba cuyos resultados «no se ven seriamente afectados, aun cuando no se hayan cumplido los supuestos del modelo» (Arnau Grass, 1986: 38). El nivel de significación, para considerar estadísticamente respaldada cada hipótesis (formulada como alternativa a la «hipótesis nula» correspondiente), lo hemos fijado en el valor P = 0,05, «aceptable para la mayoría de los investigadores» (Keppel, 1982: 69).

La toma y tratamiento de datos será de tipo cuantitativo, con tratamiento estadístico paramétrico.

La población objeto de estudio está constituida por estudiantes del Curso de Orientación Universitaria, adolescentes con un currículum académico y vital relativamente común (entre otros aspectos con conocimiento de teoremas de matemáticas de implicación y bicondicionales), con edades situadas alrededor de los 17-18 años (etapa del razonamiento lógico formal).

La población objeto de estudio está constituida por estudiantes del Curso de Orientación Universitaria...

La muestra directamente sometida a observación y experimentación está formada por 98 alumnos de COU del Instituto de Secundaria Tartesos de Camas (Sevilla), divididos en tres grupos: el grupo sometido a pruebas de «implicación abstracta precisa» («sistema penal...»), GRB (IAP), formado por 36 alumnos, el grupo que ha realizado las pruebas de «implicación práctica familiar», GRC (IPF), formado por 38 alumnos, y el grupo en funciones de grupo de control, no sometido a un tratamiento específico (aunque bajo condiciones equiparables a las de los otros dos grupos propiamente experimentales), GRA (CON), formado por 24 alumnos.

Las variables principales consideradas ILG, IPF y IAP, son objeto de medición a través de respectivas pruebas (ver páginas siguientes), contabilizando las respuestas correctas en cada uno de los ítems. A partir de estas variables y para someter a prueba estadística la eficacia de los tratamientos sobre la variable ILG, hemos definido también las correspondientes medidas de progreso (en cada ítem, y globalmente), por diferencia de los resultados del postest y del pretest. La prueba de la primera variable, empleada en todos los pretest y postest, así como en el tratamiento (o si se prefiere placebo) del grupo de control, recoge las cuatro formas que pueden presentarse en un teorema de matemáticas (directo: $H \Rightarrow T$; recíproco: $T \Rightarrow H$; contrario: $H' \Rightarrow T'$; contrarrecíproco: $T' \Rightarrow H'$, donde ' indica negación).

El orden de los ítems en el pretest y postest es idéntico, con la intención de evitar posibles diferencias motivadas por la diferencia de orden en la preguntas formuladas. Sin embargo, cuando esta prueba se ha administrado como placebo, se ha seguido un orden distinto entre los ítems, coincidiendo con el orden seguido en los ítems de los dos tratamientos; con ello hemos intentado impedir efectos memorísticos en las respuestas del tratamiento y del postest y, por otra parte, homogeneizar las condiciones de los dos tratamientos y del placebo.

El instrumento para medir la variable «implicación práctica familiar» (IPF), utilizada como tratamiento en uno de los grupos, consta de una prueba («si se acaba el combustible ..., se para el motor...») similar a la utilizada por Lawson (1992: 974). La variable «implicación abstracta precisa» (IAP) se basa en la estructura indicada por Kelsen para la norma jurídica.

Para controlar la posible acción de otras variables de maduración o ambientales se ha procurado realizar las pruebas en las condiciones más parecidas posibles. Cada grupo ha realizado las pruebas de pretest-tratamiento-postest en una misma sesión, de forma sucesiva, y previa retirada de una prueba antes de comenzar la siguiente, y sin que los alumnos intercambien información durante las pruebas o entre ellas. El tiempo empleado en la resolución ha sido de aproximadamente 10 minutos para cada una de las pruebas. Los dos grupos propiamente experimentales han realizado la prueba el mismo día, en noviembre de 1996, en proximidad de temas del programa de COU (teorema de Bolzano, Teorema de Rolle...), en que una correcta utilización de la implicación adquiere especial relieve; el grupo de control, sin embargo ha realizado la prueba en diciembre de 1996.

El tiempo empleado en la resolución ha sido de aproximadamente 10 minutos para cada una de las pruebas.

Desarrollo y resultados de la experimentación

Para interpretar los resultados obtenidos y, sobre todo, para nuevos trabajos, es interesante recoger las opiniones (*a posteriori*) de los alumnos participantes en la experimentación, sobre la vinculación entre el contenido de los ejercicios del tratamiento (resolución de «implicaciones prácticas familiares», IPF, y resolución de «implicaciones abstractas precisas», IAP). Entre los alumnos que siguieron el tratamiento del «combustible...» (IPF), dos manifestaron que dichos ejercicios no tenían nada que ver con los del pretest y postest, once afirmaron que habían aprovechado el trabajo del «tratamiento» para responder al postest; sin embargo, entre los alumnos que siguieron el tratamiento «penal...», abstracto, las cifras están prácticamente invertidas, 11 pensaron que el tratamiento no tenía nada que ver con el pretest y postest, y sólo uno dijo haber aprovechado el tratamiento para responder al postest. Estas manifestaciones no favorecen, en principio la verificación de la hipótesis 6 de este trabajo.

Las respuestas a los ítems de cada prueba, incluida la prueba-tratamiento, se recogen en la tabla 1, de frecuencias de respuestas correctas para cada ítem y para cada variable, de los tres grupos analizados. Con independencia del orden en que se aplicaron los ítems de cada prueba, para el estudio de los datos hemos establecido el orden: 1.°) implicación directa o *modus ponens*; 2.°) recíproco; 3.°) contrario; 4.°) contrarrecíproco o *modus tollens*.

Los datos recogidos en la tabla 1, muestran claramente la mejora de resultados en los tratamientos específicos («familiar» IPF, y «penal», IAP). En cuanto a mejoras pretest-postest, las más notables se perciben en el tratamiento «familiar, en el enunciado recíproco (ítem 2: 15,8% de aumento en los aciertos); en el tratamiento «penal» la mejora más destacable se produce en el enunciado contrarrecíproco (ítem 4: 11,1% de aumento en los aciertos), situaciones que se han subrayado en la tabla 1. También se produce algún retroceso al pasar del pretest al postest (en los tres grupos estudiados).

Grupo	*Ítem*	*Pretest*		*Tratamiento*		*Postest*	
GRC(IPF)	1: DIREC.	36	(94-,7%)	37	(97,4%)	33	(86,8%)
	2: RECIP.	18	(47,4%)	35	(92,1%)	24	(63,2%)
	3: CONTR.	10	(26,3%)	27	(71,1%)	13	(34,2%)
	4: C-REC.	21	(55,3%)	34	(89,5%)	24	(63,2%)
	GLOBAL	7	(18,4%)	26	(68,4%)	11	(28,9%)
GRB(IAP)	1: DIREC.	31	(86,1%)	36	(100%)	32	(88,9%)
	2: RECIP.	15	(41,7%)	30	(83,3%)	14	(38,9%)
	3: CONTR.	6	(16,7%)	22	(61,1%)	9	(25,0%)
	4: C-REC.	20	(55,6%)	33	(91,7%)	24	(66.7%)
	GLOBAL	5	(13,9%)	21	(58,3%)	7	(19,4%)
GRA(CON)	1: DIREC.	19	(79,2%)	20	(83,3%)	18	(75,0%)
	2: RECIP.	11	(45,8%)	13	(54,2%)	12	(50,0%)
	3: CONTR.	9	(37,5%)	11	(45,8%)	8	(33,3%)
	4: C-REC.	12	(50,0%)	11	(45,8%)	14	(58,3%)
	GLOBAL	5	(20,8%)	7	(29,2%)	6	(25,0%)

Tabla 1. Frecuencias absolutas y relativas (porcentajes) de respuestas correctas

PRUEBAS PARA MEDICIÓN DE LAS VARIABLES

EJERCICIOS DE RAZONAMIENTO. COU-CONTROL. Diciembre1996

PRETEST (ILG): Un teorema de matemáticas tiene la forma: «si A, entonces B». De acuerdo con la información dada, elegir la respuesta adecuada a las preguntas que se formulan en cada uno de los supuestos siguientes:

A: Si se cumple B, ¿se cumple A?:

a) SI b) NO c) NO PUEDE AFIRMARSE NI NEGARSE

B: Si no se cumple B, ¿se cumple A?:

a) SI b) NO c) NO PUEDE AFIRMARSE NI NEGARSE

C: Si se cumple A, ¿se cumple B?:

a) SI b) NO c) NO PUEDE AFIRMARSE NI NEGARSE

D: Si no se cumple A, ¿se cumple B?:

a) SI b) NO c) NO PUEDE AFIRMARSE NI NEGARSE

TRATAMIENTO («PLACEBO», ILG): Un teorema de matemáticas tiene la forma: «si A, entonces B». De acuerdo con la información dada, elegir la respuesta adecuada a las preguntas que se formulan en cada uno de los supuestos siguientes:

A: Si no se cumple A, ¿se cumple B?:

a) SI b) NO c) NO PUEDE AFIRMARSE NI NEGARSE

B: Si se cumple A, ¿se cumple B?:

a) SI b) NO c) NO PUEDE AFIRMARSE NI NEGARSE

C: Si se cumple B, ¿se cumple A?:

a) SI b) NO c) NO PUEDE AFIRMARSE NI NEGARSE

D: Si no se cumple B, ¿se cumple A?:

a) SI b) NO c) NO PUEDE AFIRMARSE NI NEGARSE

POSTEST (ILG): Un teorema de matemáticas tiene la forma: «si A, entonces B». De acuerdo con la información dada, elegir la respuesta adecuada a las preguntas que se formulan en cada uno de los supuestos siguientes:

A: Si se cumple B, ¿se cumple A?:

a) SI b) NO c) NO PUEDE AFIRMARSE NI NEGARSE

B: Si no se cumple B, ¿se cumple A?:

a) SI b) NO c) NO PUEDE AFIRMARSE NI NEGARSE

C: Si se cumple A, ¿se cumple B?:

a) SI b) NO c) NO PUEDE AFIRMARSE NI NEGARSE

D: Si no se cumple A, ¿se cumple B?:

a) SI b) NO c) NO PUEDE AFIRMARSE NI NEGARSE

EJERCICIOS DE RAZONAMIENTO. Octubre1996. GRUPO B (IAP)

PRETEST (ILG): Un teorema de matemáticas tiene la forma: «si A, entonces B». De acuerdo con la información dada, elegir la respuesta adecuada a las preguntas que se formulan en cada uno de los supuestos siguientes:

A: Si se cumple B, ¿se cumple A?:

a) SI b) NO c) NO PUEDE AFIRMARSE NI NEGARSE

B: Si no se cumple B, ¿se cumple A?:

a) SI b) NO c) NO PUEDE AFIRMARSE NI NEGARSE

C: Si se cumple A, ¿se cumple B?:

a) SI b) NO c) NO PUEDE AFIRMARSE NI NEGARSE

D: Si no se cumple A, ¿se cumple B?:

a) SI b) NO c) NO PUEDE AFIRMARSE NI NEGARSE

TRATAMIENTO (IAP): En un sistema penal, en el que todos los delitos son sancionados y donde no se castiga a inocentes, se sabe que si se comete el delito A se es condenado con la pena C y que si se comete el delito B también se es condenado con la pena C.

A: Si no se comete el delito A, ¿se es condenado con la pena C?:

a) SI b) NO c) NO PUEDE AFIRMARSE NI NEGARSE

B: Si se comete el delito A, ¿se es condenado con la pena C?:

a) SI b) NO c) NO PUEDE AFIRMARSE NI NEGARSE

C: Si se es condenado con la pena C ¿se ha cometido el delito A?:

a) SI b) NO c) NO PUEDE AFIRMARSE NI NEGARSE

D: Si no se es condenado con la pena C, ¿se ha cometido el delito A?:

a) SI b) NO c) NO PUEDE AFIRMARSE NI NEGARSE

POSTEST (ILG): Un teorema de matemáticas tiene la forma: «si A, entonces B». De acuerdo con la información dada, elegir la respuesta adecuada a las preguntas que se formulan en cada uno de los supuestos siguientes:

A: Si se cumple B, ¿se cumple A?:

a) SI b) NO c) NO PUEDE AFIRMARSE NI NEGARSE

B: Si no se cumple B, ¿se cumple A?:

a) SI b) NO c) NO PUEDE AFIRMARSE NI NEGARSE

C: Si se cumple A, ¿se cumple B?:

a) SI b) NO c) NO PUEDE AFIRMARSE NI NEGARSE

D: Si no se cumple A, ¿se cumple B?:

a) SI b) NO c) NO PUEDE AFIRMARSE NI NEGARSE

EJERCICIOS DE RAZONAMIENTO. Noviembre 1996. GRUPO C (IPF)

PRETEST (ILG): Un teorema de matemáticas tiene la forma: «si A, entonces B». De acuerdo con la información dada, elegir la respuesta adecuada a las preguntas que se formulan en cada uno de los supuestos siguientes:

A: Si se cumple B, ¿se cumple A?:

a) SI b) NO c) NO PUEDE AFIRMARSE NI NEGARSE

B: Si no se cumple B, ¿se cumple A?:

a) SI b) NO c) NO PUEDE AFIRMARSE NI NEGARSE

C: Si se cumple A, ¿se cumple B?:

a) SI b) NO c) NO PUEDE AFIRMARSE NI NEGARSE

D: Si no se cumple A, ¿se cumple B?:

a) SI b) NO c) NO PUEDE AFIRMARSE NI NEGARSE

TRATAMIENTO (IPF): Se sabe que cuando se acaba el combustible de un vehículo se para el motor del mismo. De acuerdo con la información dada, elegir la respuesta adecuada a las preguntas que se formulan en cada uno de los supuestos siguientes:

A: Si el combustible no se acaba, ¿se para el motor?:

a) SI b) NO c) NO PUEDE AFIRMARSE NI NEGARSE

B: Si se acaba el combustible, ¿se para el motor del vehículo?:

a) SI b) NO c) NO PUEDE AFIRMARSE NI NEGARSE

C: Si el motor de un vehículo se para, ¿se le ha acabado el combustible?:

a) SI b) NO c) NO PUEDE AFIRMARSE NI NEGARSE

D: Si el motor de un vehículo no se para, ¿se le ha acabado el combustible?:

a) SI b) NO c) NO PUEDE AFIRMARSE NI NEGARSE

POSTEST (ILG): Un teorema de matemáticas tiene la forma: «si A, entonces B». De acuerdo con la información dada, elegir la respuesta adecuada a las preguntas que se formulan en cada uno de los supuestos siguientes:

A: Si se cumple B, ¿se cumple A?:

a) SI b) NO c) NO PUEDE AFIRMARSE NI NEGARSE

B: Si no se cumple B, ¿se cumple A?:

a) SI b) NO c) NO PUEDE AFIRMARSE NI NEGARSE

C: Si se cumple A, ¿se cumple B?:

a) SI b) NO c) NO PUEDE AFIRMARSE NI NEGARSE

D: Si no se cumple A, ¿se cumple B?:

a) SI b) NO c) NO PUEDE AFIRMARSE NI NEGARSE

La significación de los resultados de la tabla 1, especialmente en cuanto se relacionan con las seis hipótesis formuladas en este trabajo se recogen en la tabla 2 (comparaciones dentro del mismo grupo) y 3 (comparaciones entre grupos). En ambas tablas hemos recogido la media correspondiente a cada una de las, dos variables o/y grupos comparados, las desviaciones típicas respectivas, el valor del parámetro *t* y el grado de significación, *P*, de dicho valor de *t*.

Grupo Variable	Ítem	M_1	M_2	S_1	S_2	*t*	*P*	*H*
C	1-DI	1,00	0,86	0,00	0,35	2,38	0,023	1
IPF-ILG	2-RE	0,83	0,42	0,38	0,50	4,51	**0,000**	1
	3-CO	0,61	0,17	0,49	0,38	4,78	**0,000**	1
	4-CR	0,92	0,56	0,28	0,50	4,45	**0,000**	1
	GLOB	3,50	2,24	0,89	1,17	6,25	**0,000**	1
B	1-DI	0,97	0,95	0,16	0,23	0,57	0,571	2
IAP-ILG	2-RE	0,92	0,47	0,27	0,51	5,47	**0,000**	2
	3-CO	0,71	0,26	0,46	0,45	4,97	**0,000**	2
	4-CR	0,89	0,55	0,31	0,50	3,95	**0,000**	2
	GLOB	3,36	2,00	0,83	1,19	6,22	**0,000**	2

Tabla 2. Comparación de resultados y progresos dentro de cada grupo, por variables, ítems y globales de prueba

Grupo Variable	Ítem	M_1	M_2	S_1	S_2	*t*	*P*	*H*
C-B	1-DI	0,97	1,00	0,16	0,00	—	—	3
IPF-IAP	2-RE	0,92	0,83	0,27	0,38	1,14	0,259	3
	3-CO	0,71	0,61	0,46	0,49	0,89	0,374	3
	4-CR	0,89	0,92	0,31	0,28	–0,32	0,751	3
	GLOB	3,50	3,36	0,89	0,83	0,69	0,491	3
C-A	1-DI	–0,08	–0,04	0,27	0,36	–0,44	0,665	4
PROG-	2-RE	0,16	0,04	0,44	0,46	0,98	0,331	4
(ILG)	3-CO	0,08	–0,04	0,49	0,36	1,12	0,267	4
	4-CR	0,08	0,08	0,49	0,50	–0,03	0,973	4
	GLOB	0,24	0,04	1,05	1,20	0,66	0,516	4
B-A	1-DI	0,03	–0,04	0,17	0,36	0,89	0,382	5
PROG-	2-RE	–0,03	0,04	0,38	0,46	–0,61	0,545	5
(ILG)	3-CO	0,08	–0,04	0,28	0,36	1,44	0,158	5
	4-CR	0,11	0,08	0,46	0,50	0,22	0,830	5
	GLOB	0,19	0,04	0,52	1,20	0,59	0,561	5
C-B	1-DI	–0,08	–0,04	0,27	0,36	–0,44	0,665	6
PROG-	2-RE	0,16	0,04	0,44	0,46	0,98	0,331	6
(ILG)	3-CO	0,08	–0,04	0,49	0,36	1,12	0,267	6
	4-CR	0,08	0,08	0,49	0,50	–0,03	0,973	6
	GLOB	0,23	0,04	1,05	1,20	0,66	0,516	6

Tabla 3. Comparación de resultados y progresos entre grupos, por variables, ítems y globales de prueba

Como podemos observar en la tabla 2, las diferencias de resultados en el pretest lógico matemático y en los respectivos tratamientos alcanzan una significación muy satisfactoria (*P* = 0,000, negrita en la tabla) en los tres ítems distintos del enunciado directo; también alcanza una significación de 0,000 en la comparación global entre el pretest (variable ILG) y las variables IAP e IPF. El enunciado directo, que en la práctica se reduce a una repetición del enunciado principal, alcanza el nivel de significación del 0,05 prefijado en el caso del grupo C, de tratamiento «práctico familiar» (IPF) mientras que roza dicho nivel en el grupo B, de tratamiento «abstracto preciso» (IAP). Los resultados mostrados en la tabla 2 respaldan, por lo tanto, las hipótesis 1 y 2 de este trabajo.

El resto de las hipótesis, H3, H4, H5, e H6, sin embargo no reciben respaldo estadístico, como se comprueba en la tabla 3.

La comparación entre las dos variables, «implicación práctica familiar» (IPF) e «implicación abstracta precisa» (IAP), seguidas por los grupos C y B respectivamente no ofrece resultados significativos, señalando una pequeña ventaja para la variable IPF en dos de los ítems considerados y en la globalidad de la variable, indicando la posibilidad de la hipótesis contraria a la hipótesis 3 (H3) formulada.

...las diferencias de resultados en el pretest lógico matemático y en los respectivos tratamientos alcanzan una significación muy satisfactoria en los tres ítems distintos del enunciado directo...

Las hipótesis 4 y 5, en una perspectiva experimental (al igual que la hipótesis 6), donde las variables IPF, IAP e ILG se contemplan como tratamiento capaz de mejorar los resultados de la variable ILG, tampoco se ven respaldadas estadísticamente, aunque las pequeñas diferencias obtenidas apuntan, mayoritariamente, en la dirección de estas hipótesis. Recordemos que la misma variable ILG aparece como placebo en el grupo de control para evitar algunos efectos de circunstancias experimentales diferenciadas que pudieran ser de difícil evaluación.

La hipótesis 6 presenta una situación similar a la 3, con dos ítems, y la variable indicadora del «progreso» realizado, globalmente considerada, con resultados favorables a la hipótesis contraria a la que hemos formulado (valores negativos de *t*), aunque las diferencias encontradas están lejos de ser significativas.

Conclusiones y perspectivas

1.ª) De los resultados anteriores se desprende un claro apoyo a la primera hipótesis de este trabajo, referente a la obtención de mejores resultados, en la resolución de tareas de implicación lógica, cuando las tareas propuestas tienen una connotación práctica que en tareas de tipo abstracto general, representado por la estructura de un teorema de matemáticas. Este resultado se produce en coincidencia con los resultados obtenidos en múltiples investigaciones anteriores, a algunas de las cuales ya nos hemos referido.

De los resultados anteriores se desprende un claro apoyo a la primera hipótesis de este trabajo, referente a la obtención de mejores resultados, en la resolución de tareas de implicación lógica, cuando las tareas propuestas tienen una connotación práctica que en tareas de tipo abstracto general, representado por la estructura de un teorema de matemáticas.

2.ª) La segunda hipótesis de este estudio recibe también un claro apoyo empírico, similar al recibido por la hipótesis primera, como podemos comprobar en la tabla 2.

Esta hipótesis, que compara dos tareas de carácter abstracto, previendo resultados significativamente superiores en la realización de tareas de implicación en situaciones «abstractas precisas» que en situaciones «abstractas generales», puede parecer contradictoria con la hipótesis primera, como ya hemos indicado, aunque la previsión sería justificable en una perspectiva de realismo *no caricaturesco*, especialmente siguiendo el planteamiento de «hipótesis múltiples» de Lawson, ya mencionado, o un enfoque, más amplio, centrado en el análisis semántico del enunciado del ejercicio propuesto para resolución.

El que se cuestione la independencia de las estructuras lógico-formales respecto a la base experiencial, no conlleva necesariamente un menosprecio hacia el razonamiento abstracto. No se trata de defender, haciendo un absoluto de los resultados que respaldan la hipótesis primera, un empirismo estrecho donde se descarte la posibilidad de razonamiento que no tenga una base directa en la experiencia del sujeto. En esta dirección puede ser de gran interés la distinción hecha por Vygotsky, dentro de las funciones psicológicas superiores, entre «rudimentarias» y «avanzadas», en función de la abstracción y la «descontextualización» y «de los medios semióticos que mediatizan la comunicación y el pensamiento» (Wertsch, 1993).

3.ª) La comparación entre los resultados en implicaciones que presentan connotaciones prácticas, familiares para el sujeto, y en las de tipo abstracto «preciso», que como ya hemos señalado no ofrece diferencias significativas, puede prometer un campo de interés para nuevos trabajos, con vistas a analizar la importancia real de las connotaciones prácticas, sobre todo si éstas actúan fundamentalmente para aclarar al sujeto la unidireccionalidad o la bidireccionalidad de la implicación o, si por otra parte, juegan fundamentalmente un papel de razonamiento más próximo al «pensamiento con las manos» que al «pensamiento con la cabeza» (Vygotsky, 1993: 146), o más propio de la «inteli-gencia práctica» que de la «teórica». Para avanzar en esta línea parece importante el estudio de instrumentos empíricos con la suficiente capacidad para detectar los aspectos anteriores que pueden recogerse en diferentes prototipos de implicación.

4.ª) La misma ausencia de resultados significativos que hemos señalado para la hipótesis tercera se produce respecto a las tres últimas hipótesis, experimentales, de esta indagación. Esta falta de significación en la comparación de la repercusión de los ejercicios considerados como tratamientos puede venir determinada, en primera aproximación, por una independencia de los resultados respecto a los tratamientos, o por una escasa entidad de los tratamientos proporcionados en esta experimentación concreta, insuficientes para conseguir modificar sustancial y significativamente los resultados del postest en los grupos experimentales.

5.ª) El estudio realizado se muestra concluyente en aspectos relativamente asentados por la investigación anterior (importancia del contexto práctico en ejercicios de implicación) y suscita la necesidad de una mayor profundiza-ción teórica sobre el pensamiento lógico y, simultáneamente y en conexión con esta reflexión teórica, de la realización de nuevos estudios empíricos y experimentales que perfilen el papel de las connotaciones prácticas, en lo que parece doble vertiente, por un lado, como desplazamiento desde la resolución teórica a la resolución práctica (en el caso del combustible, respondiendo más que por la relación lógica, por rememoración de situaciones prácticas) y, por otra parte, de forma alternativa y complementariamente, como referencia que sirve para aclarar, o acaso en determinados casos embrollar, la relación entre antecedente único, o plural, y el consecuente de la implicación. La posibilidad de un efecto perturbador de la relación lógica, producido por la evocación de situaciones prácticas en las que la decisión sobre la existencia de un solo antecedente o de varios resulte problemática, como apunta la hipótesis tercera parece de interés dentro de la compleja relación entre teoría y práctica o entre el pensamiento y la realidad. Se plantea de esta forma un doble carácter, contradictorio, de la referencia o alusión a situaciones prácticas, entre un aspecto simplificador e iluminador de la relación de implicación y, por otra parte, cierta prevención y obstaculización de la simplificación motivada por posibles oscuridades de la relación práctica aludida. Dentro de esta perspectiva parece sugerente el diseño de trabajos empíricos y experimentales que abarquen un abanico amplio de edad que permita detectar distintas posiciones en el doble proceso conjeturado de simplificación y complejización.

6.ª) La experimentación realizada suscita algunas cuestiones de interés para la enseñanza y para la investigación sobre ella, entre las que destacamos:

a) Importancia del establecimiento de esquemas de razonamiento independientes de los contextos rememorados por el antecedente, por el consecuente, y por la misma relación que pueda establecerse entre ellos. Este razonamiento abstracto, al que se le puede conectar algún modelo práctico concreto, reviste gran importancia en la demostración de teoremas matemáticos, y en la resolución de problemas. De forma particular la utilización del teorema contrarrecíproco puede asociarse, con beneficio mutuo al razonamiento por reducción al absurdo, un método que presenta dificultades de comprensión y de aplicación entre los alumnos del COU o que finalizan el Bachillerato-LOGSE.

b) Al margen de la capacidad para la deducción puramente sígnica es importante, con vistas al aprendizaje y a la investigación, fomentar, tanto en Matemáticas como en otras ciencias, la preocupación por la precisión en la hipótesis de un teorema (antecedente), en la tesis (consecuente) y en la relación de implicación existente entre las mismas. En el caso de otras ciencias no tan formalizadas como las Matemáticas, la consideración de antecedente, consecuente y relación entre ellos adquiere rasgos más concretos y experienciales.

c) El debate en torno al origen empírico e inductivo del conocimiento, reclamado por las corrientes epistemo-pedagógicas empiristas, o a partir de los propios esquemas cognitivos y de acción del sujeto, como sostiene el constructivismo radical, puede ceñirse al tema del papel de la experiencia y de los propios esquemas en los razonamientos de implicación. No es de esperar, de todas formas, una pronta conclusión de este debate, ni siquiera centrado en un aspecto tan concreto como el señalado. La ambigüedad de la idea de experiencia, aceptada por los dos modelos, aunque con distintos énfasis en su estructuración por elementos objetivos exteriores o por tendencias internas del individuo, dificulta que, incluso unos mismos resultados, puedan llevar a unas conclusiones aceptables para representantes de ambos paradigmas epistemológicos.

...parece sugerente el diseño de trabajos empíricos y experimentales que abarquen un abanico amplio de edad que permita detectar distintas posiciones en el doble proceso conjeturado de simplificación y complejización.

Alberto Martínez
IES Tartesos
Camas (Sevilla)

Referencias bibliográficas

ARNAU GRASS, J. (1986): *Diseños experimentales en psicología y educación*, Trillas, México.

CAMPBELL, D. T. y J. C. STANLEY (1973): *Diseños Experimentales y cuasiexperimentales en la investigación social*, Amorrortu, Buenos Aires.

DUSCHL, R. A. (1995): «Más allá del conocimiento: Los desafíos epistemológicos y sociales de la enseñanza mediante el cambio conceptual», *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 13, n.° 1, 3-14.

GRUPO CERO (1987): *De 12 a 16. Un proyecto de curriculum de Matemáticas*, Mestral, Valencia.

INHELDER, B. y J. PIAGET (1972, edición francesa de 1955): *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*, Paidós, Buenos Aires.

KEPPEL, G. (1982): *Design and Analysis. A Researcher's Handbook*, Prentice-Hall, New Jersey.

LAWSON, A. E. (1992): «What Do Tests of "Formal" Reasoning Actually Measure?», *Journal of Research in Science Teaching*, vol. 29, n.° 9, 965-983.

LENIN (1975): *Obras Escogidas* (3 tomos), Progreso, Moscú.

MAO TSE-TUNG (1974): *Cuatro tesis filosóficas*, Anagrama, Barcelona.

NEWMAN, D., P. GRIFFIN y M. COLE (1989): *The construction zone: working for cognitive change in school*, Cambridge University Press, Nueva York.

PIAGET, J. (1977): *Biología y conocimiento*, Siglo Veintiuno, Madrid.

PIAGET, J. (1978): *Adaptación vital y psicología de la inteligencia*, Siglo Veintiuno, Madrid.

PREECE, P. F. W. (1993). «Comment: Reasoning with Conditional», *Journal of Research in Science Teaching*, vol. 30, n.° 9, 1209-1210.

VYGOTSKY, L. S. (1993): *The Collected Work of L. S. Vygotsky*, (t. 2). Plenum Press. New York, London.

WASON, P. C. y P. N. JOHNSON-LAIRD (1972): *Psychology of reasoning: Structure and content*, Harvard University Press, Cambridge.

WERTSCH, J. V. (1993): *Voces de la mente: un enfoque sociocultural para el estudio de la Acción Mediada*, Visor, Madrid.

SUMA 32
noviembre 1999, pp. 35-46

Los contenidos de Matemáticas en la enseñanza obligatoria de Inglaterra y España. Análisis comparado

William B. Rawson
José M.ª Chamoso Sánchez
M.ª José Rodríguez Conde

ARTÍCULOS

El objetivo es analizar, de forma comparada, dos currículos de la disciplina de Matemáticas de la etapa obligatoria de escolarización de dos sistemas educativos del contexto europeo actual (curso 1998-99): el inglés y el español, diferenciando entre aquellos aspectos de tipo conceptual y los de tipo procedimental y actitudinal, siguiendo la terminología española en vigor. El estudio se realiza basándose en los documentos oficiales del *Currículum Nacional* de Inglaterra y Gales y sus revisiones publicadas por las autoridades eductivas inglesas (*Departament of Education and Science,* 1989, 1991, *and Departament for Education,* 1995) y los documentos oficiales publicados por el Ministerio de Educación español (Currículum oficial, «cajas rojas»). La preocupación por los contenidos de Matemáticas y su adaptación a las necesidades de nuestra sociedad es un tema de permanente actualidad.

EL PRESENTE trabajo se centra en los contenidos oficiales de los planes de estudios de Matemáticas inglés y español de la etapa obligatoria de escolarización en ambos países. La preocupación por los contenidos de Matemáticas y su adaptación a las necesidades de nuestra sociedad es un tema de permanente actualidad: recordemos algunos proyectos internacionales como el TIMSS (Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias, 1997), los trabajos de evaluación del sistema educativo español realizados por el MEC (INCE, 1997, 1996) o los esfuerzos de compañeros por elaborar un currículum de esta materia en diversas comunidades, como el de la propia Castilla y León. Desde el punto de vista inglés su *Currículum Nacional*, en el que las Matemáticas son contenido central y básico, se revisa de forma continua.

Realizaremos una breve presentación de la estructura y organización de los currículos de ambos países para situarnos en cada contexto concreto, tras lo cual pasaremos a desarrollar el estudio comparativo de los contenidos de los mismos, diferenciando entre aquellos de tipo conceptual y los de tipo procedimental y actitudinal, siguiendo la terminología española en vigor. El estudio se realiza basándose en los documentos oficiales del *Currículum Nacional* de Inglaterra y Gales y sus revisiones publicadas por las autoridades educativas inglesas (*Departament of Education and Science, 1989, 1991, and Departament for Education, 1995*) y los documentos oficiales publicados por el Ministerio de Educación español (Currículum oficial, «cajas rojas»).

Breve reseña sobre la estructura del sistema educativo inglés y español

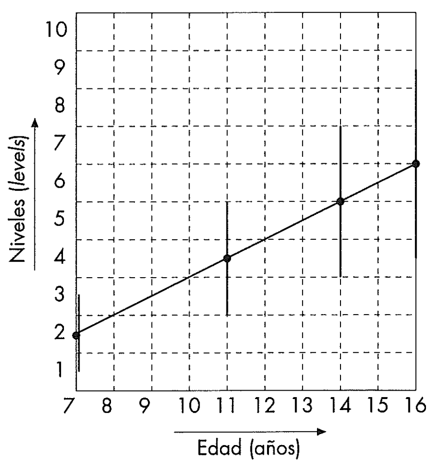
El sistema educativo inglés

A partir de las indicaciones señaladas en el Informe Cockcroft (1982), las autoridades educativas inglesas se proponen elaborar lo que, posteriormente, se denominará *Currículum Nacional* que, tras un largo debate y revisiones sucesivas por grupos de expertos, sale por primera vez a la luz en 1989. Más tarde, ha sido sometido a permanentes revisiones y evaluaciones (1991, 1995). La estructura del *Currículum Nacional* inglés en vigor se organiza en cuatro etapas llave (*Key Stages*). Estas etapas suponen momentos concretos de evaluación de los alumnos a nivel nacional y, a la vez, evaluaciones del sistema educativo general inglés. Estos periodos de evaluación se detallan en la tabla 1.

Key Stages	*Edades de los alumnos*	*Grupos del colegio (de la misma edad)*
1	5-7	1-2
2	7-11	3-6
3	11-14	7-9
4	14-16	10-11

Tabla 1

¿Qué suponen estas *Key Stages* para los alumnos y profesores? Un alumno inglés, que ingresa en las aulas a los 5 años, permanece en el colegio en el mismo grupo que el resto de sus compañeros hasta que a los 7, después de aplicar un conjunto de pruebas especialmente de Matemáticas y Lenguaje (*Standard Assessment Tasks*), se le clasifica en un nivel de aprendizaje (*Level*) con respecto a un baremo nacional. Al fin de la Key Stage 1, la gran mayoría de los alumnos deben estar entre los niveles 1 y 3 (en el nivel 2 quedaron situados el 82% de los alumnos en el año 1996, y el 84% en el año 1998). En las aulas siguen juntos todos los estudiantes diferenciando su currículo por medio de diferentes actividades, según los distintos niveles (*Levels*) de aprendizaje. El progreso por edades de los distintos *Levels*, anticipado en el año 1988 durante la preparación del Currículum Nacional, aparece representado en la gráfica 1.



Gráfica 1. Gráfica de evolución de *Levels* por edad (DES, 1988)

Estos controles nacionales ejercidos por varios grupos designados por el gobierno inglés, unidos a las presiones de los padres, suponen para el profesorado revisión continua y constante de su actuación como docentes.

Las cuatro líneas verticales más gruesas representan los niveles del 80% de la población para cada *Key Stage*. Así, por ejemplo, en la *Key Stage* 1, 4 de cada 5 niños estarán en el level 1, 2 o 3. La preocupación actual de las autoridades educativas inglesas es que, en el año 2002, el 75% de la población estudiantil supere el nivel 4 a los 11 años (actualmente sólo lo supera el 59% en el año 1998). Para ello se va a introducir, en septiembre de 1999, el *National Numeracy Strategy*, para ayudar a los maestros de los colegios a trabajar con esa meta.

Estos controles nacionales ejercidos por varios grupos designados por el gobierno inglés, unidos a las presiones de los padres, suponen para el profesorado revisión continua y constante de su actuación como docentes.

El sistema educativo español

En España, tras el impulso que recibe el sistema educativo con la Ley General de Educación (1970) y después de sucesivos informes de evaluación del sistema, el gobierno socialista (después de la aprobación de la Constitución de 1978) elabora, en la década de los 80, una norma fundamental de ordenación y organización de los centros conocida como la LODE (Ley Orgánica del Derecho a la Educación, 1985). Esta Ley se desarrolla en otra normativa, la LOGSE (Ley de Ordenación General del Sistema Educativo, 1990), cuyo objetivo fundamental es la mejora de la calidad del sistema educativo español.

La LOGSE ha establecido una nueva reestructuración de la enseñanza obligatoria, agrupándose ésta en dos grandes etapas: Educación Primaria (de 6 a 12 años) y Educación Secundaria Obligatoria (de 12 a 16 años), a través de una serie de ciclos de dos años cada uno (tabla 2).

Estas dos etapas comprenden el nivel de enseñanza obligatoria de todos los ciudadanos hasta los dieciséis años y, por tanto, en su currículo se especifican las capacidades que se quieren desarrollar para posibilitar la inserción

Etapas	Ciclos (cursos)	Edades
Educación Primaria	Primer Ciclo (1.° y 2.°)	6-8
	Segundo Ciclo (3.° y 4.°)	8-10
	Tercer Ciclo (5.° y 6.°)	10-12
Educación Secundaria Obligatoria	Primer Ciclo (1.° y 2.°)	12-14
	Segundo Ciclo (3.° y 4.°)	14-16

Tabla 2

social y profesional del estudiante, así como su desarrollo personal integral. Una de las novedades de la «reforma» es que cada bloque presenta tres tipos de contenidos (conceptuales, procedimentales y actitudinales). Desde este nuevo punto de vista se incluyen, tanto los científicos tradicionales, como los objetivos de aprendizaje que relacionan dichos contenidos con capacidades asociadas.

La promoción de los alumnos a través de los ciclos se realiza basándose en unos criterios establecidos por el propio centro, aunque sólo está permitida la permanencia en un mismo curso una sola vez a lo largo de toda la Primaria, así como una sola vez en Secundaria.

A esto se añade una etapa Infantil, de 3 a 6 años, que se ha extendido a todo el territorio de forma gratuita en los centros públicos (en los concertados depende de cada comunidad autónoma).

Análisis comparado de *contenidos* en matemáticas

Con el fin de realizar un análisis comparativo entre los contenidos de Matemáticas entre Inglaterra y Gales y España, hemos elaborado un conjunto de tablas con categorías de contenidos (filas) distribuidos por niveles o ciclos (columnas), extraídos de los currículos oficiales de Matemáticas en las etapas obligatorias de enseñanza de ambos países. Hemos hecho corresponder la «columna» con un nivel educativo de edad aproximado en cada uno de ellos. Recordemos aquí que el currículo inglés no sitúa a toda la población en el mismo nivel en una edad determinada, sino que tras una evaluación nacional cada alumno queda clasificado en el suyo correspondiente, según la capacidad demostrada. Sin embargo, como ya apuntamos anteriormente, la mayoría de la población queda en un nivel concreto a la misma edad, como se puede ver en la tabla 3.

Con el fin de realizar un análisis comparativo entre los contenidos de Matemáticas entre Inglaterra y Gales y España, hemos elaborado un conjunto de tablas con categorías de contenidos (filas) distribuidos por niveles o ciclos (columnas), extraídos de los currículos oficiales de Matemáticas en las etapas obligatorias de enseñanza de ambos países.

Edad (años)	Nivel de la mayoría de la población
5	1
7	2
9	3
11	4
13	5
15	6

Tabla 3

La tarea de análisis de contenido no ha sido sencilla debido a varias razones que exponemos a continuación:

La estructura u organización en la presentación de los currículos

Por una parte, Inglaterra presenta su *Currículum Nacional* diferenciando entre: Programas de estudios (*Programmes of Study*) –donde no se diferencian niveles– y Objetivos de conocimiento (*Attainment Targets*) –donde sí se secuencian los contenidos por niveles de ejecución o competencia–. Además, ambos elementos recogen tres grandes bloques de contenidos para la *Key Stage* 1: Utilizando y Aplicando las Matemáticas (*Using and Applying Mathematics*), Números (*Numbers*), Figuras, Espacio y Medidas (*Shape, Space and Measures*) y cuatro bloques de contenidos para la *Key Stage* 2: además de los tres anteriores, Manejando la Información (*Handling data*). Para los *Key Stage* 3 y Key *Stage* 4 hay cinco grandes bloques: Utilizando y Aplicando las Matemáticas (*Using and Applying Mathematics*), Números (*Numbers*), Álgebra (*Algebra*), Figuras, Espacio y Medidas (*Shape, Space and Measures*) y Manejando la información (*Handling data*).

Por otra parte en España, dentro de sus grandes bloques de contenidos (Números y Operaciones, Instrumentos y Unidades de Medida, Formas Geométricas y Situación en el Espacio, Organización de la Información –todos estos en la etapa de Primaria–, y Números, Medida, Organización y Representación en el Espacio, Tratamiento de la Información y Tratamiento del Azar –en la etapa de Secundaria), se diferencian tres tipos: Conceptos, Procedimientos y Actitudes.

La dificultad que hemos encontrado al querer examinar ambos currículos la solucionamos con la construcción de cinco tablas para la comparación de los bloques de contenidos, confeccionadas según su contenido conceptual de la siguiente forma:

- Bloque 1: Números (Tabla 4).
- Bloque 2: Medida (Tabla 5).
- Bloque 3: Formas Geométricas y Situación en el Espacio (Tabla 6).
- Bloque 4: Organización de la Información (Tabla 7).
- Bloque 5: Azar y Probabilidad (Tabla 8).

Posteriormente, hemos preparado otra tabla con el Bloque de contenidos inglés *Using and Applying Mathematics* (Utilizando y Aplicando las Matemáticas), de gran importancia, donde se observa el desarrollo progresivo de destrezas cognitivas que el alumno tiene que ir alcanzando a lo largo de su etapa obligatoria de escolarización en este país (pero sin hacer alusión a ningún contenido explícito de las cinco tablas anteriores).

Y, por último, hemos confeccionado otras dos tablas, donde hemos extraído del currículo oficial español los términos relativos a los contenidos *Procedimentales* y *Actitudinales* (sin diferenciarlos dentro de ninguno de los cinco bloques primeros), a lo largo de las etapas Primaria y Secundaria. En estas dos tablas aparecen los términos principales que definen cada procedimiento o actitud respectivo intentando no repetir palabras con el mismo significado. Debido a la dificultad de pormenorizar por ciclos concretos se ha considerado, en estos casos, únicamente la clasificación en Primaria y Secundaria.

Pensamos que los dos puntos anteriores pueden reflejar aquellos contenidos de Matemáticas de ambos países relativos a los aspectos formativos, funcionales e instrumentales del aprendizaje de esta materia. Es decir, al establecimiento de las destrezas intelectuales (desde las primeras etapas evolutivas de operaciones concretas a las operaciones abstractas) que contribuirán a la potenciación de las capacidades cognitivas de los alumnos; a su aplicación funcional, favoreciendo que los alumnos valoren y apliquen sus conocimientos matemáticos fuera del aula, en la vida cotidiana y, por último, a su valor instrumental, a medida que las Matemáticas proporcionan formalización del conocimiento científico.

Algunas diferencias de matices en cuanto al lenguaje utilizado en ambos currículos

Es evidente que, al intentar unificar, se han descubierto diferencias en los términos empleados para expresar conceptos similares. En ocasiones, con una palabra se quieren expresar muchas cosas. Lo que hemos intentado al querer ser fieles a las directrices oficiales, en la medida de lo posible, es no realizar interpretaciones. Por ejemplo, en el currículum de España se dice «elaboración de gráficas sencillas», «elaboración de gráficas más complejas»; en cambio, en Inglaterra, se utiliza la expresión «elaboración de gráficas de barras» y «elaboración de pictogramas y polígonos de frecuencias». Debido a ello, y no queriendo perder estos matices en la comparación de ambos currículos, hemos tenido que adaptarnos para poder presentar ambas expresiones. Asimismo, en algunos momentos se precisan formas distintas de introducir los conceptos. Así, en U.K. se inicia el trabajo mental con las tablas de multiplicar del 2, del 5 y del 10 (*level* 3). Más adelante se ven las multiplicaciones por 10 y por 100, y el trabajo mental de todas las tablas de multiplicar hasta el 10 (*level* 4). En el *level* 5 se ven, además de éstas, las multiplicaciones por 1000. En España se introduce de forma muy diferente, así como se presenta en el ciclo 1 la resta sin llevadas, para aparecer posteriormente con llevadas y el algoritmo de la multiplicación y división en general.

...al intentar unificar, se han descubierto diferencias en los términos empleados para expresar conceptos similares. En ocasiones, con una palabra se quieren expresar muchas cosas. Lo que hemos intentado al querer ser fieles a las directrices oficiales, en la medida de lo posible, es no realizar interpretaciones.

Somos conscientes de que la categorización que hemos elaborado no es excluyente, aunque sí se pretende que sea lo más exhaustiva posible con el fin de que aparezcan todos los contenidos explícitos de ambos documentos. Nuestro propósito ha sido no realizar ninguna inferencia sobre lo escrito en ambos currículos. Insistimos en que estamos trabajando sobre currículo explícito en la documentación oficial. Las edades señaladas son aproximadas según los diferentes niveles españoles y *levels* (extraídas entre los objetivos de conocimientos de las *Key Stage* del Currículum Nacional de Inglaterra y Gales). Entendemos que contenidos que no aparecen señalados, sí se trabajan en las aulas.

Análisis comparado de los contenidos conceptuales

Hemos utilizado las siguientes claves en las tablas:

I = figura en el currículo de U.K., considerando Inglaterra y Gales

E = figura en el currículo de España

Vamos a realizar el análisis comparado de los cinco bloques de contenido de tipo conceptual anteriormente señalados.

(edades en años)	5, 6	7	8,9	10,11	12,13	14,15
Inglaterra y Gales: Etapas con examen oficial y niveles medios en la población	Key Stage1		Key Stage2		Key Stage3&4	
	L.1	L.2	L.3	L.4	L.5	L.6
España: Etapas de Primaria y Secundaria		Ciclo1	Ciclo2	Ciclo3	ESO1	ESO2
BLOQUE 1: NÚMEROS						
1. Naturales:						
1.1 Conteo, ordenación hasta 10.	I E					
1.2 Valor posicional hasta 100.		I				
1.3 Valor posicional hasta 1000.		E	I			
1.4 Valor posicional hasta 5 cifras.			E			
1.5 Números naturales.				E		
2. Operaciones con naturales:						
2.1 Sumas y restas sencillas.	I	I E				
2.2 Sumas y restas.			I E			
2.3 Iniciación a la multiplicación y división.		I E	I	I	I	
2.4 Multiplicaciones y divisiones.			I E	I	I E	
2.5 Estimación de resultados. Cálculo aproximado.		E	I E	I E	I	E
2.6 Ordenación y divisibilidad.					E	
3. Uso de la calculadora:						
3.1 Iniciación.			I E	I		
3.2 Dominio de la calculadora.				E	I E	
4. Enteros:						
4.1 Iniciación a los números enteros.			I		E	
4.2 Operaciones con números enteros.					I E	
5. Series y patrones:						
5.1 Series de objetos y números sencillos.	I E					
5.2 Patrones de números.		I	I	I		I
5.3 Descubrimiento del término general en sucesiones lineales.						I
6. Cálculo mental:						
6.1 Hasta 10.		I				
6.2 Hasta 20.			I			
6.3 Sumas y restas sencillas.		I E	I E			
6.4 Sumas y restas.				I E	E	E
6.5 Multiplicación y división sencillas.			I E	I		
6.6 Multiplicación y división.				I E	I E	E
6.7 Elección de la operación apropiada.		I				
6.8 Estrategias personales mentales.		I E	I E	I E	I	E
6.9 Composición y descomposición.			E			
6.10 Utilización de propiedades numéricas.				I E		
6.11 Estimación de resultados.		E	I E	I E	I	I E
7. Racionales:						
7.1 Inician fracciones.		I				
7.2 Notación decimal.			I E			
7.3 Valor posicional de decimales.			E			
7.4 Iniciación al cálculo con decimales.				I		
7.5 Números decimales y fraccionarios. Operaciones.				E	I E	I E
7.7 Reconocimiento de relaciones de proporcionalidad.					E	E
7.8 Entienden 100% como un todo.						I
7.9 Calculan proporciones, fracciones y %.				I E	I E	I E
7.10 Representaciones gráficas de fracciones y decimales.			E			I
7.11 Fracciones equivalentes.				E		
7.12 Equivalencia de decimales, fracciones y proporciones.				E		I
7.13 Valoración de la utilidad de la proporcionalidad.						E
7.14 Aproximación y redondeo.					I E	I E
7.15 Interpretación.					I E	I E
8. Actitud positiva hacia la utilización de los números.					E	E
9. Lenguaje simbólico matemático.						
9.1 Expresan fórmulas sencillas con palabras.				I	E	
9.2 Reconocimiento de formas simbólicas y formas simples. Interpretación.				I	I E	
9.3 Aproximación de decimales en ecuaciones.						I
9.4 Resolución de ecuaciones lineales por métodos intuitivos.						E
9.5 Resolución de ecuaciones lineales.						I E
9.6 Resolución de ecuaciones.						E
9.7 Valoración del lenguaje simbólico. Actitud positiva.					E	E

Tabla 4. Bloque 1: Números

Inicialmente querríamos reflejar, de forma especial, el distinto tratamiento de algunos conceptos como se refleja explícitamente en ambos currículos. Por ejemplo, respecto a la enseñanza de las *operaciones* y del *cálculo mental*, en U.K. se va graduando en función de cantidades de números. Así, se inicia el cálculo mental con operaciones *sencillas hasta el 10*, después *hasta el 20*, o cuando se inician los *Naturales*, se enseña el valor posicional *hasta el 10, el 100 y el 1000*. En España no se especifican estos límites numéricos. Las operaciones sencillas de *sumar y restar y seriar objetos* aparecen, en ambos países, desde los 5 años de forma explícita.

La estimación de resultados se repite de forma paralela en ambos países, así como la introducción de la *calculadora* a los 8 años. En cambio, la enseñanza de los *números racionales* se inicia a los 7 años en Inglaterra, mientras que en España no se explicita hasta los 8. Los *enteros* aparecen en Inglaterra en el *level* 3 (ciclo 2) y continúan en el *level* 5, mientras que en España figuran por primera vez en edades correspondientes a este último nivel (ESO 1).

En Inglaterra se inicia la *introducción al lenguaje simbólico* en el *level* 4 (ciclo 3), para continuar en el *level* 5 (ESO 1) y llegar al *level* 6 (ESO 2) con *resolución de ecuaciones lineales*. En cambio, en España se introduce únicamente en la ESO 1 *(level* 5) y se continúa en la ESO 2 *(level* 6) aunque, eso sí, parece que con mayor profundidad que en U.K., ya que por ejemplo se habla de *resolución de ecuaciones lineales*, inicialmente *por métodos intuitivos* y posteriormente se acaba con *resolución de ecuaciones*.

En Inglaterra se da mucha importancia a lo largo de todos los ciclos a los *patrones de números*, incluso se explicita en el *level* 6 (ESO 2) el *descubrimiento del término general en sucesiones lineales*, a diferencia de

España. En ésta se hace alusión explícita a la *actitud positiva hacia la utilización de números* (en Secundaria), a diferencia de U.K.

Los contenidos referentes a *Medida* en ambos países son similares (*necesidad de medida, medidas no convencionales y medidas convencionales, etc.*). Sin embargo, hemos apreciado que la secuenciación de los temas por niveles o ciclos tiene ciertos matices diferenciadores. Así, en Inglaterra, se introduce en el *level* 1 (Infantil) la *necesidad de medida*, para pasar posteriormente, en el *level* 2 (ciclo 1), a la *longitud* y la *masa* y, en el *level* 3 (ciclo 2), todos los demás tipos de medida, tanto las convencionales como las no convencionales. En España aparecen antes todas las medidas a la vez.

Otro matiz diferenciador lo encontramos en la reiteración que se hace en España en todos los ciclos de *utilización de unidad e instrumentos de medida adecuados*, de forma diferente que en Inglaterra y Gales, donde se hace con posterioridad a haber visto todas las unidades de medida.

De igual forma, cuando se refiere a *fórmulas de perímetros, áreas y volúmenes*, en Inglaterra hay una iniciación previa *(level* 4, ciclo 3) y un estudio posterior *(level* 6, ESO 2), a diferencia de España donde solamente aparece en el segundo ciclo de ESO.

(edades en años)	5, 6	7	8,9	10,11	12,13	14,15
Inglaterra y Gales: Etapas con examen oficial y niveles medios en la población	Key Stage1	Key Stage2			Key Stage3&4	
	L.1	L.2	L.3	L.4	L.5	L.6
España: Etapas de Primaria y Secundaria	Ciclo1	Ciclo2	Ciclo3	ESO1	ESO2	
BLOQUE 2: MEDIDA						
1. Necesidad de medida:						
1.1 Comparación de magnitudes.	I E					
1.2 Medidas no convencionales (palmo, paso, pie, vaso...). Precisando:						
1.2.1 Longitud.	E	I E	I E			
1.2.2 Masa.		I E	I E			
1.2.3 Capacidad.		E	I E			
1.2.4 Tiempo.	E	E	I E			
1.2.5 Superficie.			E			
2. Utilización de unidades convencionales sencillas (europeas):						
2.1. Longitud.		I E	I E			
2.2. Masa.		I E	I E			
2.3. Capacidad.		E	I E			
2.4. Tiempo.		E	I E			
3. Transformación de unidades de medida de U. K. a unidades de medida europeas.					I	
4. Utilización de unidades e instrumentos de medida apropiados.		E	E	I E	E	
5. Medidas convencionales:						
5.1. Longitud.				E	E	
5.2. Masa.				E	E	
5.3. Capacidad.				E	E	
5.4. Tiempo.				E	E	
5.5. Superficie.				E		
6. Transformación de unas unidades a otras.				E	I E	
7. Estimación de resultados.		E	E	I E	I E	E
8. Mediciones indirectas.					E	E
9. Estrategias personales de medición.				E	E	E
10. Iniciación a las fórmulas: cálculo del perímetro de figuras planas, de áreas contando cuadrados y de volúmenes contando cubos.				I		
11. Fórmulas para el cálculo de:						
11.1. Longitud de la circunferencia.						I
11.2. Áreas de figuras planas.						I
11.3. Volúmenes de cubos.						I
11.4. Volúmenes.						E
12. Actitud positiva hacia la precisión en la medida.					E	
13. Aumento de la precisión en la medida.						E
14. Aplicaciones a la vida diaria.					I	
15. Ángulos:						
15.1. Introducción del concepto.		I	E			
15.2. Reconocimiento de ángulos rectos en movimiento.		I				
15.3. Medición y dibujo de ángulos.					I E	

Tabla 5. Bloque 2: Medida

Por otra parte, hay contenidos que aparecen explícitos inicialmente en uno de los dos currículos, como los siguientes: en España, *medidas indirectas, estrategias personales de medición, actitud positiva hacia la precisión en la medida* (aparece de nuevo explícitamente como contenido, además de como actitud) y *aumento de la precisión en la medida*; en Inglaterra, *aplicaciones a la vida diaria.*

En un primer análisis de la tabla 6 parece que, en España, el contenido de este bloque se trabaja con mayor profundidad en Secundaria, mientras que Inglaterra se introduce especialmente en edades correspondientes a Primaria. En este último país, parece que se empieza con *propiedades y descripción de formas planas y esféricas* (*level* 1, Infantil).

También se explicita con mayor detalle el *reconocimiento de formas planas y esféricas, vértices, ángulos, lados y caras, terminología, propiedades y descripción* (*level* 2, ciclo 1) y la *clasificación* en el *level* 3 (ciclo 2) (en España se pospone a un ciclo posterior, ciclo 3).

Como hemos dicho, todo ello se estudia en España con profundidad en Secundaria. Además, España trata de avanzar más en la ESO 2 (*level* 6) en la percepción espacial, y en la introducción de nuevos conceptos, como las *cónicas*. Por otra parte, también se ha

(edades en años)	5, 6	7	8,9	10,11	12,13	14,15
Inglaterra y Gales: Etapas con examen oficial y niveles medios en la población	Key Stage1		Key Stage2		Key Stage3&4	
	L.1	L.2	L.3	L.4	L.5	L.6
España: Etapas de Primaria y Secundaria	Ciclo1	Ciclo2	Ciclo3	ESO1	ESO2	
BLOQUE 3: FORMAS GEOMÉTRICAS Y SITUACIÓN EN EL ESPACIO						
1. Formas planas (2 dimensiones) y esféricas (3 dimensiones):						
1.1. Utilización de lenguaje ordinario para describir propiedades y proporciones de 3 y 2 dimensiones.	I E					
1.2. Reconocimiento.		I E				I
1.3. Vértices, ángulos, lados y caras.		I	E	I		
1.4. Terminología.		I			E	
1.5. Relaciones.					E	
1.6. Propiedades.	I	I	I		E	I
1.7. Identificación.		E			E	I E
1.8. Descripción.	I	I	E		E	
1.9. Análisis.			E		E	E
1.10. Interpretación.					E	E
1.11. Clasificación de:						
1.11.1 Cuadriláteros (figuras planas).			I	E		I E
1.11.2 Formas geométricas.			I	E	E	E
1.12. Construcción:						
1.12.1 En 2 dimensiones (con distinta orientación).				I	I E	E
1.12.2 En 3 dimensiones.				I	I E	I E
1.13. Representación.	E				I E	I E
1.14. Composición y descomposición de:						
1.14.1 Polígonos.			E	I		
1.14.2 Formas geométricas.					E	
1.15. Identificación de figuras congruentes.				I		
1.16. Reconocimiento de representaciones sencillas de 3 dimensiones en objetos.						I
1.17. Manejo de formas con ciertas regularidades.					E	
1.18. Capacidad de imaginar las formas sin apoyo de lo concreto.						E
1.19. Estudio detallado e introducción de nuevas formas como las cónicas.						E
2. Concepto de ángulo.		I	E			
3. Orientación espacial:						
3.1. Nociones básicas de orientación en el espacio y en el tiempo.	E					
3.2. Respecto a un punto de referencia propio (izq./dcha., giro, distancia, desplazamientos...).		I E				
3.3. Respecto a un punto de referencia distinto del propio.			E			
3.4. Paralelismo e intersección de rectas.				E		I
4. Simetrías:						
4.1. Reflectiva.			I E	I		
4.2. Rotacional.			E	I		
4.3. Para clasificación de formas geométricas.			I			
4.4. Identificación de todas las simetrías en figuras de dos dimensiones.			E		I	E
4.5. Resolver problemas por simetrías.						I E
5. Homotecias.						I E
6. Trabajo con ordenador (formas y caminos).						I
7. Utilización de métodos de razonamiento inductivos y deductivos para obtener propiedades geométricas.					E	E
8. Sensibilidad hacia las formas geométricas en la naturaleza, el arte y la técnica.					E	
8. Actitud positiva hacia la belleza de las formas geométricas.						E
9. Representación en coordenadas cartesianas:						
9.1. En el primer cuadrante.				I		
9.2. En los cuatro cuadrantes (croquis, planos, maquetas e interpretación de mapas).				E		I

Tabla 6. Bloque 3: Formas geométricas y situación en el espacio

seguido una secuencia de contenidos de la *organización espacial* desde la etapa Infantil, profundizando a lo largo de la Primaria, hasta *paralelismo y la intersección*. En Inglaterra prácticamente se explicita únicamente en el *level* 6 (ESO 2).

En España parece que únicamente aparece *reconocimiento e identificación* en el ciclo 1 (level 2), y *vértices, ángulos, lados y caras, descripción y análisis* en el ciclo 2 (level 3).

Para terminar, observar aquellos aspectos que se explicitan únicamente en cada uno de los países: En Inglaterra, *trabajo con ordenador (formas y caminos)*, en el *level* 6 (ESO 2); mientras que en España se trabaja con *métodos inductivos y deductivos, sensibilidad hacia las formas geométricas en la naturaleza, el arte y la técnica, y actitud positiva hacia la belleza de las formas geométricas* (todo ello en la ESO), que no viene reflejado en el currículo inglés.

Inglaterra introduce explícitamente estos contenidos desde el *level* 1 (Infantil, 5 años) con *clasificación de datos discretos, según un criterio*, mientras que en España aparecen en el ciclo 1 (*level* 2, 6 años). En España se explicita una gradación en el estudio de la clasificación de datos discretos, desde el Ciclo 1 (*level* 2) hasta el 3 (*level* 4), para posteriormente realizar en ESO 1 (*level* 5) y ESO 2 (*level* 6) el *manejo de datos en variables discretas.* En Inglaterra se trabaja con datos continuos en forma de intervalos en *level* 4 (ciclo 3), para seguir con ellos en *level* 6 (ESO 2); en España sólo se citan en ESO 2.

En lo referente a *representaciones gráficas*, parece que en ambos países se sigue una secuencia similar, aunque con pequeños matices. En Inglaterra se introduce ya en el *level* 2 (Ciclo 1) y se tratan los demás tipos en el *level* 3 (Ciclo 2), continuando en los posteriores con otros tipos de representaciones. En España se introduce un ciclo después (Ciclo 2). Ambos países recalcan como importante, a lo largo de los diversos ciclos, *la interpretación de información dada en tablas y gráficas.*

(edades en años)	5, 6	7	8,9	10,11	12,13	14,15
Inglaterra y Gales: Etapas con examen oficial y niveles medios en la población	Key Stage1		Key Stage2		Key Stage3&4	
	L.1	L.2	L.3	L.4	L.5	L.6
España: Etapas de Primaria y Secundaria		Ciclo1	Ciclo2	Ciclo3	ESO1	ESO2
BLOQUE 4: ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN						
1. Registro de datos:						
1.1 Clasificación de datos discretos sencillos:						
1.1.1 Según un criterio.	I					
1.1.2 Según más de un criterio.		I E	E	E		
1.2 Construcción de tablas sencillas.		I E				
1.3 Manejo de datos en variables discretas.					E	E
1.4 Datos continuos: Tablas de intervalos.				I		I
1.5 Manejo de datos en variables continuas.						I E
2. Representaciones gráficas:						
2.1 Datos discretos:						
2.1.1 Clasificación en tablas.		I	I E	I E	E	
2.1.2 Diagramas de barras.		I	I E	E	I E	
2.1.3 Pictogramas.			I		E	
2.1.4 Polígonos de frecuencias.				I	E	I
2.1.5 Diagrama de sectores.			I		I	I
2.1.6 Interpretación de información en tablas y gráficas.		E	I E	I	I E	I E
2.1.7 Dibujo de conclusiones.					I	
2.1.8 Actitud positiva y análisis crítico hacia la información dada mediante gráficas.				E	E	E
2.1.9 Utilización del lenguaje de las funciones.					E	
2.1.10 Estudio completo de las represent. gráficas.						E
3. Estadística de una variable:						
3.1 Medidas de tendencia central:						
3.1.1 Moda.			E	I E		
3.1.2 Mediana.				I		
3.1.3 Media.			E	E	I	
3.1.4 Interpretación de estas medidas.				I E	I	
3.2 Medidas de dispersión:						
3.2.1 Rango.					I	
3.2.2 Significado de la dispersión.						E
3.3 Comparación de distribuciones.					I E	
3.4 Tratamiento de datos:						
3.4.1 Con medidas de centralización.					E	E
3.4.2 Con medidas de dispersión.						E
4. Estadística en dos variables:						
4.1. Tablas con dos criterios.			E			I E
4.2. Diagramas.						I E
4.3. Idea de correlación.						I

Tabla 7. Bloque 4: Organización de la información

Sobre las *medidas de tendencia central*, en España se inician globalmente con anterioridad (no se explicita la *mediana*); en Inglaterra inicialmente se trata *moda* y *mediana* (ciclo 3, *level* 4) y, posteriormente, la *media* (ESO 1, *level* 5).

Por otra parte, en España se considera de forma explícita *actitud positiva y análisis crítico hacia la información dada mediante gráficas*, así como *utilización del lenguaje de las funciones*, y tratamiento de datos, tanto con *medidas de centralización* como *de dispersión*, a diferencia de U.K., mientras que éste se refiere a *dibujo de conclusiones*, aspecto que no aparece en el currículum español.

Si nos referimos a estadística en dos variables, en España se inician las *tablas con dos criterios* en el ciclo 2 (*level* 3), para continuar en ESO 2 (*level* 6), a diferencia de U.K. donde todo se estudia en *level* 6 (ESO 2). En este país, se introduce también en estas mismas edades la idea de *correlación*, aspecto que no aparece en España.

Los contenidos aparecen de forma muy similar en ambos currículos. Como datos más reseñables, en España parece que se profundiza más, pues se hace mención concreta de algunos aspectos en ESO 1 (*level* 5) y ESO 2 (*level* 6) que no se hace en Inglaterra, como: *actitud positiva hacia lo probable, cálculo de probabilidades teóricas (Regla de Laplace), Probabilidad condicionada* y *aumento de precisión para cuantificar lo probable.*

Análisis comparado de los contenidos procedimentales y actitudinales

Tradicionalmente, los contenidos educativos que se imparten en los colegios se han entendido basados en los conocimientos científicos. Pero el nuevo sistema educativo español los ha redefinido en términos de capacidades. Es decir, se trata de incorporar al currículo contenidos que permitan generar en los alumnos ciertas habilidades y destrezas

(edades en años)	5, 6	7	8,9	10,11	12,13	14,15
Inglaterra y Gales: Etapas con examen oficial y niveles medios en la población	Key Stage1		Key Stage2		Key Stage3&4	
	L.1	L.2	L.3	L.4	L.5	L.6
España: Etapas de Primaria y Secundaria		Ciclo1	Ciclo2	Ciclo3	ESO1	ESO2
BLOQUE 5: AZAR Y PROBABILIDAD						
1. Iniciación al lenguaje probabilístico: suceso posible, impreciso, imposible y seguro.				I E		
2. Escala de probabilidad de 0 a 1.					I E	I
3. Actitud positiva hacia lo probable.					E	E
4. Introducción a los sucesos aleatorios.					I E	
5. Asignación de probabilidades realizada por métodos empíricos y de recuento.					I E	I E
6. Calculo de probabilidades teóricas (regla de Laplace).						E
7. Combinaciones de dos experimentos.						I E
8. Probabilidad condicionada.						E
9. Aumento de precisión para cuantificar lo probable.						E

Tabla 8. Bloque 5: Azar y probabilidad

(edades en años)	5, 6	7	8,9	10,11	12,13	14,15
Inglaterra y Gales: Etapas con examen oficial y niveles medios en la población	Key Stage1		Key Stage2		Key Stage3&4	
	L.1	L.2	L.3	L.4	L.5	L.6
España: Etapas de Primaria y Secundaria		Ciclo1	Ciclo2	Ciclo3	ESO1	ESO2
USING AND APPLYING MATHEMATICS (USANDO Y APLICANDO LAS MATEMÁTICAS)						
1. Matemáticas como parte integral de las actividades de la clase.	I					
2. Representación con objetos, dibujos, símbolos o diagramas.	I	I			I	
3. Discusión.	I	I	I			I
4. Matemáticas basadas en el experiencia.	I					
5. Patrones y relaciones.	I			I		
6. Seleccionan.		I				
7. Método de preguntas y respuestas de los alumnos.		I				
8. Resolución de problemas:						
8.1. Por diferentes aproximaciones.			I			
8.2. Desarrollan sus propias estrategias.				I		
8.3. Identifican la información necesaria.					I	
8.4. División en partes más sencillas.						I
8.5. Comprobación para casos particulares.			I			I
9. Comprueban resultados.			I		I	
10. Estiman resultados.					I	
11. Organizan.			I	I		
12. Explicación de lo que piensan.			I	I		
13. Interpretan símbolos y diagramas.			I			I
14. Encuentran ejemplos similares.			I			
15. Aplicación a situaciones prácticas.				I		
16. Razonamiento.				I	I	
17. Buscan un patrón experimentando ideas propias.				I		
18. Generalizan.					I	
19. Justifican matemáticamente su generalización.						I
20. Cumplen tareas importantes y resuelven problemas complejos.						I
21. Explican el uso de los diagramas.						I
22. Sintetizan información.						I
23. Escriben sus explicaciones.						I

Tabla 9

que les ayuden para realizar determinadas acciones y faciliten su desarrollo personal. Los contenidos con la «reforma» han ampliado su abanico incorporando a los mismos dos nuevos tipos: procedimentales y actitudinales. Se trata de conseguir que el alumno «aprenda a aprender».

Según el Diseño Currícular Base (DCB), por «procedimiento» se entiende «un conjunto de acciones ordenadas, orientadas a la consecución de una meta». Es decir, el saber tiene también una dimensión práctica de aplicación y uso que debe proponerse como objetivo de aprendizaje. No sólo se limita a conocer la información sobre algo, sino también se extiende a realizarlo.

Las «actitudes» son, junto con los procedimientos, la aportación más novedosa y sugestiva de la propuesta currícular del nuevo sistema educativo español. Se plantean como objetivo de aprendizaje asociadas a los contenidos científicos. Es decir, no constituyen una disciplina aislada, sino que son parte integrante de todas las materias. Se cree necesario fomentar el desarrollo y potenciación de valores, y el cumplimiento de unas normas deseables para vivir en una sociedad democrática, tanto en una dimensión individual como de grupo.

De distinta forma, pero con intención parecida, aparece en el *Currículum Nacional* de U.K. un bloque de contenidos, *Using and Applying Mathematics* (Utilizando y Aplicando las Matemáticas), de gran importancia, que confiere un carácter propio al mencionado *Currículum* y con el que se pretende diseñar aquellas destrezas del conocimiento que el estudiante tiene que alcanzar en las diversas etapas de sus estudios.

A continuación vamos a analizar estos nuevos contenidos, en el área de las Matemáticas, en ambos planes de estudio (inglés y español) (Tablas 9 10 y 11).

Como se ha indicado, la construcción de estas tablas supuso cierta complicación dado que, como tales, estos contenidos procedimentales y actitudinales no aparecen definidos de esa forma en el currículum inglés, a pesar de existir en éste «Usando y Aplicando las Matemáticas». En particular, analizando los contenidos ingleses observamos algunas singularidades que no se encuentran en el currículo español. Aparecen, a los 5 años (*level* 1), lo que denominan *Matemáticas en la clase* y *Matemáticas basadas en la experiencia.* O contenidos nuevos, como *método de preguntas y respuestas de los alumnos.* El contenido de *resolución de problemas* lo presentan secuenciado, según edades, en niveles de dificultad o en función del tipo de estrategia que se va a utilizar.

Siguiendo un encadenamiento por niveles en el currículo inglés, a los 8 y 9 años (*level* 3) se les pide a los estudiantes que *organicen, expliquen lo que piensan, comprueben resultados, discutan*, pasando al siguiente nivel (*level* 4, 10 años) donde ya se busca el *razonamiento, búsqueda de patrones con ideas propias* y *aplicación a situaciones prácticas.* A los 12 años (*level* 5), además de lo anterior, se requiere que *generalicen* y a los 14-15 (*level* 6), se les piden capacidades de mayor rango inte-

ACTITUDES EN ESPAÑA	PRIMARIA	SECUNDARIA
Referentes a la apreciación de las Matemáticas:		
1. Curiosidad por indagar y explorar.	X	X
2. Sensibilidad e interés.	X	X
3. Rigor.	X	
4. Interés por conocer estrategias.	X	X
5. Confianza en las propias capacidades.	X	X
6. Gusto por la elaboración y uso de estrategias personales.	X	X
7. Valoración.	X	X
8. Interés por utilizar instrumentos adecuados.	X	X
9. Valoración y gusto por la representación.	X	X
10. Disposición favorable a la interpretación.	X	X
11. Valoración de la precisión.	X	X
12. Evitar interpretaciones parciales y precipitadas.	X	
13. Valoración de la simplicidad.		X
14. Incorporación a la forma de proceder habitual y al lenguaje cotidiano.	X	X
15. Valoración, cautela, interés y sentido crítico.		X
16. Investigación de regularidades y relaciones.		X
17. Reconocimiento y valoración de la relación:		
17.1 Con el entorno y la vida cotidiana.	X	X
17.2 Con otros conceptos matemáticos.		X
17.3 Con la interpretación, descripción y predicción de situaciones inciertas.		X
18. Disposición favorable.		X
19. Interés y gusto por la descripción verbal.		X
20. Valoración de nuevos medios tecnológicos.		X
21. Sensibilidad y gusto ante las situaciones estéticas.	X	X
Referentes a la organización de hábitos de trabajo:		
22. Perseverancia en la búsqueda de soluciones.	X	X
23. Gusto por la limpieza, orden y claridad.	X	X
24. Disposición favorable a la revisión sistemática y mejora.	X	X
25. Flexibilidad.		X
26. Interés y respeto a otras estrategias distintas de las propias.		X
27. Gusto por la precisión.	X	X
28. Sensibilidad y gusto por la sistematización y observación.	X	X
29. Valoración del trabajo en equipo.	X	X

Tabla 10

lectual como, por ejemplo, *justificar matemáticamente su generalización, resolver problemas complejos, explicar el uso de diagramas, sintetizar información y escribir sus explicaciones*.

En el currículo español, lo que ha sido objeto de aprendizaje en un ciclo se retoma en los posteriores aumentando su complejidad y completando su aprendizaje. Por tanto, al formularlos no quedaban perfectamente delimitados en su ciclo. Por ello, a diferencia del inglés, no aparece una gradación de contenidos por edades. De ahí que se haya optado por una presentación global de contenidos en dos etapas, Primaria y Secundaria.

En lo referente a los *procedimientos* se observan algunos aspectos diferenciados en el programa de estudios español respecto al inglés, como pueden ser:

- Utilización de expresiones algebraicas.
- Algoritmos y destrezas en general: utilización y automatización de los algoritmos tradicionales, distintas formas de resolver ecuaciones, utilización de fórmulas y teoremas, uso de la calculadora o utilización de fuentes documentales e informaciones diversas.

En lo referente a los procedimientos se observan algunos aspectos diferenciados en el programa de estudios español respecto al inglés...

- Identificación de problemas en la vida cotidiana.

Hay que remarcar de nuevo la importancia que se da, a lo largo de todos los ciclos del currículo español y como se ha visto en los diferentes bloques de contenidos, a la enseñanza y aprendizaje de los contenidos actitudinales.

Conclusiones

El estudio del TIMSS (Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias), realizado en el curso 1994-95 y cuyos informes empezaron a aparecer en noviembre de 1996, muestra que los rendimientos en Matemáticas obtenidos por los estudiantes de 13 años de Inglaterra y España son inferiores a la media internacional en ambos casos, aunque los de los primeros son superiores significativamente a los de los segundos.

Los resultados de los alumnos ingleses de 9 años están por encima de la media internacional en geometría, organización, análisis y probabilidad, mientras que están por debajo en los aspectos relacionados con números, fracciones, proporcionalidad, medidas y estimación. Una respuesta a los resultados de TIMSS aparece en las opiniones que realiza un grupo de consulta inglés (DfEE, 1988), expresando la importancia de la *numeración* dentro de las Matemáticas, pero el *Currículum Nacional* se refiere a las Matemáticas en su totalidad. Por eso, concentrarse en la *numeración* no quiere decir que ésta se deba separar de los otros temas. Poner el énfasis en ella supone mejorar el progreso de todo lo que componen las Matemáticas del *Currículum Nacional*. Esto se ve en las observaciones de ese grupo de trabajo (DfEE, pág. 6):

> La numeración significa conocer los números y las operaciones de los números. Además de esto, se requiere una habilidad e inclinación para resolver problemas, incluyendo los de la moneda y las medidas. También demanda una familiaridad con las formas en que la información numérica es presentada y su

PROCEDIMIENTOS EN ESPAÑA	PRIMARIA	SECUNDARIA
Utilización de distintos lenguajes:		
1. Formulación verbal apropiada de situaciones o problemas y del proceso seguido en su resolución.	X	X
2. Elección de vocabulario y notación adecuada.	X	X
3. Representación sobre una recta o formulación mediante tablas, códigos, diagramas, situaciones y figuras.	X	X
4. Descripción con precisión.	X	X
5. Interpretación.	X	X
6. Confrontación de diversas formas de plantear un problema.		X
7. Utilización de expresiones algebraicas.		X
Algoritmos y destrezas:		
8. Clasificación.	X	X
9. Comparación.	X	X
10. Identificación.		X
11. Construcción de series según una regla dada.	X	X
12. Elaboración y utilización de estrategias personales.	X	X
13. Utilización y automatización de los algoritmos tradicionales.	X	X
14. Utilización de procedimientos para simplificar problemas.		X
15. Descomposición en partes más simples.	X	X
16. Medida indirecta.		X
17. Análisis de representatividad.		X
18. Distintas formas de resolver ecuaciones.		X
19. Utilización de fórmulas.		X
20. Utilización de teoremas.		X
21. Utilización y construcción de instrumentos.	X	X
22. Uso de la calculadora.	X	X
23. Utilización de sistemas de referencia.	X	X
24. Representación y construcción de gráficas.	X	X
25. Técnicas de recuento, diagramas de árbol y tablas.	X	X
26. Detección de falacias y errores.		X
27. Acotación de errores cometidos.		X
28. Utilización de fuentes documentales (revistas, anuarios...) e informaciones diversas.	X	X
Estrategias generales:		
29. Estimación de resultados.	X	X
30. Tener en cuenta la precisión requerida.	X	X
31. Búsqueda de propiedades, relaciones y regularidades.	X	X
32. Identificación de los datos conocidos de los que se pretende conocer, y de los relevantes y los irrelevantes.		X
33. Toma de decisiones adecuadas.	X	X
34. Composición y descomposición.	X	X
35. Formulación y comprobación de conjeturas:		
35.1 Con ejemplos y contraejemplos.	X	X
35.2 Con ensayo y error.	X	X
35.3 Según una muestra.		X
35.4 Según una gráfica.		X
36. Resolución de problemas por:		
36.1 Método de análisis-síntesis.		X
36.2 Método «suponer el problema resuelto».		X
36.3 Particularizar y generalizar.		X
36.4 Reducción a otros más sencillos.	X	X
36.5 Métodos inductivos y deductivos.		X
37. Identificación de problemas en la vida cotidiana.	X	X
38. Planificación individual y colectiva de tareas.		X

Tabla 11

medida, la presentación en diagramas, gráficas y tablas.»

Con estos objetivos, el gobierno británico pone énfasis a una dimensión de su *Currículum Nacional* impulsando la numeración. Un *Currículum Nacional* refleja las ideas de quienes lo elaboran, como se puede comprobar en la historia de la formación del de Inglaterra y Gales; por ejemplo, la retirada del Presidente del primer grupo de trabajo indicaba un desacuerdo del pensamiento de lo que significaban las Matemáticas en el grupo.

La implementación de un *Currículum Nacional* también es difícil de controlar entre los miles de profesores que los presentan a los alumnos en las aulas de cada país. Por ejemplo, un problema es la reacción de los docentes ante el tremendo crecimiento de la tecnología y la manera en que ésta afecta a la enseñanza de las Matemáticas. ¿Dónde está el papel del ordenador o la calculadora? Cada profesor, seguramente, guarda su propia opinión y por eso decide cuándo y dónde serían útiles aplicarlos en el desarrollo del programa de enseñanza. Hay conflicto de opiniones en asuntos como éstos pero, al menos, un análisis comparado de los currículos parece confirmar que otros países tienen problemas similares.

El gran valor de un análisis comparado para los autores de este artículo es la oportunidad de examinar en profundidad su propio currículo. Es la oportunidad de reflexionar sobre su propia práctica de la enseñanza de las Matemáticas. Observando cada una de las diversas tablas confeccionadas se ha tratado de precisar aquellos aspectos que, según los currículos oficiales de ambos países, se imparten de forma diferente, a distintas edades o con otra secuenciación, y además aquello que se explicita específicamente en un país o en otro. Cada contenido tiene su razón de ser en el contexto de cada país. Por otro lado, se ha presentado un estudio del contenido de ambos currículos centrado en contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales, sin recoger un análisis de los principios socioculturales, psicopedagógicos y epistemológicos que condicionan cualquier decisión curricular. Percibimos, sin embargo, una visión de la Matemática más allá de un mero producto cultural, como un proceso en el que los sujetos deben ir construyendo el significado de sus propios aprendizajes, a la vez que adquieren estrategias de pensamiento cuyo alcance es mayor que el de los conceptos o procedimientos asimilados.

Por ejemplo, ¿por qué es necesario, en los niveles iniciales, marcar los límites numéricos en los *números* del sistema educativo inglés? La teoría de Gattegno (1988) demuestra que, en el lenguaje inglés, es efectivo trabajar con una secuencia de números *hasta 1000* para forzar un conocimiento de la estructura del sistema numérico. Sin embargo, en España se piensa que los *números* no aparecen en la vida ordinaria en un cierto orden, según la edad de los estudiantes, sino que lo hacen de forma desordenada en el ambiente diario que les rodea.

¿Por qué, en el *Currículum* Nacional de Inglaterra y Gales, se aconseja estudiar primero la *longitud* y luego *todas las medidas*? ¿Es que la medida de la *longitud* demuestra la necesidad de dividir una escala en subdivisiones? Muchas de las escalas de las demás medidas se basan en ello. ¿Qué significa la falta de una frase en el *Currículum Nacional* de Inglaterra como la que se encuentra en el Currículum Oficial de España:

> ...actitud positiva hacia la belleza de las formas en el espacio...?

Otra pregunta para ambos países: ¿Es verdad que es importante que los alumnos «...interpreten la información...»? Seguro que sí para los que viven en democracia.

Bibliografía

DEPARTMENT FOR EDUCATION, DfE (1995): *Mathematics in the National Curriculum*, HMSO, London.

DEPARTMENT FOR EDUCATION AND EMPLOYMENT, DfEE (1998): *Numeracy Matters The Preliminary Report of the Numeracy Task Force*, HMSO, London.

DEPARTMENT OF EDUCATION AND SCIENCE, DES (1982): *Mathematics Counts. Report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools under the Chairmanship of Dr. W.H.Cockcroft*, HMSO, London.

DEPARTMENT OF EDUCATION AND SCIENCE, DES (1988): *Mathematics for Ages 5 to 16. Proposals of the Secretary of State for Education and Science and the Secretary of State for Wales*, HMSO, London.

DEPARTMENT OF EDUCATION AND SCIENCE, DES (1989): *Mathematics in the National Curriculum*, HMSO, London.

DEPARTMENT OF EDUCATION AND SCIENCE, DES (1991): *Mathematics in the National Curriculum*, HMSO, London.

William B. Rawson
Universidad de Exeter
(Reino Unido)
Jose M.ª Chamoso
Facultad de Educación de la
Universidad de Salamanca
Sociedad Castellano-Leonesa
de Profesorado de
Matemáticas
M.ª José Rodríguez
Facultad de Educación de la
Universidad de Salamanca

ESPINOSA, A. y J. VIDANES (1991): *La nueva ordenación de la Educación Infantil*, Escuela Española, Madrid.

GATTEGNO, C. (1988): *The Science of Education. Part 2B The Awareness of Mathematization*, Education Solutions, New York.

I.N.C.E. (1997): *Diagnóstico del Sistema Educativo. La Educación Secundaria Obligatoria*, MEC, Madrid.

I.N.C.E. (1995): *Evaluación de la Educación Primaria.* , MEC, Madrid.

L.G.E. (1970): *Ley General de Educación*, BOE.

L.O.D.E. (1985): *Ley Orgánica del derecho a la Educación*, BOE.

L.O.G.S.E. (1990): *Ley de Ordenación General del Sistema Educativo*, BOE.

M.E.C. (1992): *Primaria. Área de Matemáticas*, Secretaría de Estado de Educación, Madrid.

M.E.C. (1992): *Secundaria Obligatoria. Área de Matemáticas*, Secretaría de Estado de Educación, Madrid.

TIMSS (1997): *Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias.*

TIMSS (1997): *Third International Mathematics and Science Study*

En recuerdo

A LA DIVINA PROPORCIÓN

A tí, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura,
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.

A tí, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de mesura
que el Universo armónico origina.

A tí, mar de los sueños angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.

Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A tí, divina proporción de oro.

Rafael Alberti

SUMA 32
noviembre 1999, pp. 47-52

En el entorno de π a través de la sección áurea

José María Bosch Puchades

ARTÍCULOS

Mencionadas unas relaciones fortuitas o accidentales entre π y la sección áurea en textos de autores como Ghyka y Gieidon, se supone de gran interés una nueva conexión entre ambas constantes que permitirá una aproximación a π con un desfase de cienmilésimas, en una primera relación, y una segunda aproximación con un desfase de milmillonésimas.

EL NÚMERO π (3,14159265...) es, a finales del siglo XX, una constante matemática que ya ha desvelado sus misterios. Por fin, después de mantener en vilo el ingenio de los pensadores a lo largo de la Historia, las ciencias actuales han sido capaces de hacerlo encajar dentro de los esquemas matemáticos rigurosos. Ahora disponemos de los datos que podamos requerir sobre esta constante pero, obviamente, no siempre fue así.

Aún después de que Lindemann demostrara en 1882 que π era un número trascendente quedaba el reto de aproximarse, lo más posible, a su valor numérico. Los avances en el análisis matemático y en las series infinitas cercaron definitivamente al transgresor. Ya sólo faltaba dictar sentencia; pero de este trámite se ha encargado, sobradamente, la informática que, radicalmente, le ha dado nombre y apellidos con mil millones de dígitos.

Esto es así de rotundo pero no, por ello, quedan agotadas toda una serie de indagaciones que, en torno a esta constante, se pueden plantear y estudiar. Uno de estos recorridos de investigación es el de las aproximaciones a π desde expresiones finitas.

En la historia de las matemáticas se han escrito muchas páginas donde la razón de la circunferencia al diámetro era una sencilla fracción; bien, porque no se conocía dicha razón con más exactitud o, bien, por principios prácticos de aplicación. Así, por ejemplo, los pueblos de la civilización babilónica consideraban el diámetro como un tercio de la circunferencia y calculaban el área del círculo triplicando el cuadrado del radio. Arquímedes utilizó y legó la expresión 22/7 (= 3,1428...), pero demostró que π se encuentra en el intervalo [3,1408..., 3,1428...].

Las sucesivas generaciones satisfacían sus necesidades de cálculo en base a la aplicación de su fórmula particular; a veces con estimación del coeficiente de error, según su capacidad de precisión, y otras con menosprecio, o total indiferencia, del mismo.

El proceso de acercamiento al valor numérico de π constituyó una larga andadura. Probablemente, nuestros antepasados, a lo largo de muchos siglos, no necesitaron un conocimiento preciso de la relación entre el diámetro y la circunferencia y, tal vez, muchos pueblos, ni siquiera se lo plantearon.

Antecedentes: la fracción 355/113

El primer gran estratega que la Historia localiza es Arquímedes (287-212 a. C.). Barajó un error de diezmilésimas y empleó la fracción práctica que se menciona más arriba (22/7).

Una expresión admirable, y de gran precisión, es la que estableció el astrónomo chino Tsu Ch'ung-Chih (430-501). Sus cálculos le permitieron acotar la longitud de la circunferencia entre los valores 3,1415926 y 3,1415927.

En la obra *Experiencia matemática* (1982) de Davis y Hersh se incluye en el Apéndice A una *Breve cronología de la matemática china*. En dicha síntesis, que se extiende desde el año 300 a. C. hasta el siglo XVII, se recogen una docena de hitos históricos de aquella disciplina. Uno de éstos hace referencia a Tsu Ch'ung-chih (430-501), y a su obra, *Chiu-Shu* (*Arte de enmendar*), y a continuación, simplemente, anota una expresión que transcribimos:

$$\pi = \pm 355/113$$

En otros textos hemos averiguado más datos de este científico, pero ahora nos interesa el valor numérico de su fracción:

$$355/113 = 3{,}1415929203\ldots$$

Realmente el resultado es sorprendente al compararlo con π (= 3,1415926535...). Coinciden los 6 primeros decimales y el error unitario, por exceso, es de 8,49... cienmillonésimas.

Ciertamente Tsu Ch'ung-Chih marcó un hito en la matemática china. Pero también lo hizo en la cultura universal puesto que antes que él nadie se aproximó tanto a π y, posteriormente, tuvieron que pasar muchos siglos para llegar a resultados más precisos.

> Ninguna fracción cuyo numerador y denominador sean ambos números enteros puede ser exactamente igual a π, pero existen muchas fracciones sencillas que se aproximan sorprendentemente a él. La más importante fue descubierta por Tsu Ch'ung-Chih, famoso astrónomo chino, en el siglo V de nuestra era, adelantándose de ese modo más de mil años a los matemáticos del hemisferio occidental.

Este texto, del norteamericano Martin Gardner, pertenece a un artículo aparecido en *Scientific American* aproximadamente en 1960 y está incluido en una edición de 1972 de dicho autor.

Tsu Ch'ung-Chih marcó un hito en la matemática china. Pero también lo hizo en la cultura universal puesto que antes que él nadie se aproximó tanto a π y, posteriormente, tuvieron que pasar muchos siglos para llegar a resultados más precisos.

Hace unos seis años que descubrí, en el libro de Davis y Hersh, la fracción 355/113. Sobre ella he encontrado referencias como las que transcribo más arriba y otras que envuelven a dicha razón de un cierto halo místico: se configura con las parejas 11, 33 y 55, los primeros impares, etc.

Realmente, hace muy poco que he sido consciente de un significativo detalle: en un círculo de área equivalente a la unidad de superficie, las longitudes de la circunferencia y del diámetro son respectivamente 3,544907... y 1,128379... (unidades de longitud).

Si dichas cantidades las redondeamos, por arriba, a 3,55 y a 1,13, obtenemos los términos de la fracción de Tsu Ch'ung-chih automáticamente. Lo tremendamente casual es la semejanza de los errores relativos entre los valores redondeados y los reales: 0,00143651... para la circunferencia y 0,00143642... para el diámetro.

Por lo tanto, los términos de aquella fracción son la circunferencia y el diámetro aumentados, prácticamente, en la misma proporción, con lo que el resultado es, necesariamente, π con un desfase del mismo orden que el existente entre los errores relativos mencionados más arriba.

La sección áurea

Lo que han tenido siempre en común los matemáticos y los valores de aproximación a π que nos han legado es que nunca se ha hecho intervenir en los mismos a otra constante matemática conocida en ese momento histórico.

La novedad que justifica el presente trabajo es, precisamente, la incorporación de una constante mítica, tan especial como π, en las expresiones de aproximación y el grado de precisión de dicho acercamiento a su entorno.

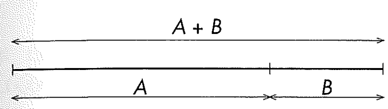
Se trata del número áureo (Φ):

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398\ldots$$

Es una expresión matemática que igual deja ver su sello en el hermetismo de las pirámides que aflora desde las regiones de la biología o la botánica.

El análisis de diversas proporciones del campo geométrico de las pirámides no deja lugar a dudas sobre la aplicación consciente de la sección áurea, por parte de los constructores egipcios, hace 4.500 años.

Dados dos segmentos desiguales, *A* y *B*, siendo el primero de ellos de mayor longitud, están en proporción áurea cuando la razón de *A* respecto de *B* es la misma que la de la suma de ambos segmentos, *A* + *B*, respecto al mayor, *A* (figura 1).



$$\frac{A+B}{A}=\frac{A}{B}$$

Figura 1. Segmentos en proporción aurea

Vamos a verlo en forma algebraica:

$$A/B = (A + B)/A$$

Si dividimos por *B*, el numerador y el denominador del segundo miembro, tendremos:

$$A/B = ((A/B) + (B/B)/(A/B)$$

Y puesto que A/B es la incógnita que queremos despejar, sustituiremos este término por x.

Así pues la ecuación quedará del siguiente modo:

$$x = (x + 1)/x$$

$$x^2 = x + 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

La solución positiva para esta ecuación de segundo grado es la siguiente:

$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Respecto a dicho valor vamos a ver lo que dice Ghyka (1927):

Por su propia naturaleza, la sección áurea presenta automáticamente una continuidad de proporciones y una serie infinita de reflejos armónicos.

...tomamos como valor de la razón buscada

$$\frac{A}{B}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}61803398875...$$

que es un número algebraico inconmensurable, trivial a primera vista; pero que como vamos a ver en seguida, posee características casi únicas entre todos los números de esta clase.

Para manejarlo con más comodidad, lo designaré por la letra griega Φ, siguiendo el ejemplo de Mark Barr y Schooling, quienes (en los anexos matemáticos de *The Curves of Life* (Las Curvas de la Vida) de Sir Theodore Cook) fueron los primeros que lo afectaron de un signo propio.

Se tiene:

$$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}618033...$$

$$\frac{1}{\Phi}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=0{,}618033...$$

$$\Phi^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}=2{,}618033..$$

Esta notable identidad de las cifras decimales de la fracciones indefinidas $1/\Phi$, Φ, Φ^2, resulta de la ecuación inicial

$$\Phi^2=\Phi+1$$

y de su variante (obtenida al dividir todos los términos por Φ):

$$\Phi-1=\frac{1}{\Phi}$$

La sección áurea y π: afinidades

Vamos a exponer, en este apartado, una proximidad entre ambas constantes que mencionan en sus obras Ghyka y Giedion.

El primero de ellos dice:

> Por lo que respecta al otro número, π, no hay entre él y Φ conexión íntima real (...) sino una afinidad que se podría llamar «accidental», que procede del hecho de ser
>
> $4/\pi = 1{,}273...$ $\qquad \sqrt{\Phi}=1{,}272...$
>
> $(\pi/4)^2 = 0{,}617...$ $\qquad 1-\Phi=0{,}618...$
>
> Esta coincidencia, puramente fortuita, hará que las construcciones arquitectónicas basadas en la sección áurea, puedan —en algunas de sus proporciones— evocar la razón de la circunferencia al diámetro (el número π) de un modo tan claro que inspire la tentación de interpretar en su trazado como un sutil ensayo de cuadratura del círculo.

Se refiere Ghyka a las «construcciones arquitectónicas» más características del antiguo Egipto, las pirámides, como veremos ahora.

Siegfried Giedion (1963) escribe:

> Por su propia naturaleza, la sección áurea presenta automáticamente una continuidad de proporciones y una serie infinita de reflejos armónicos. M. Ghyka (1927) *ha estudiado las propiedades de la sección áurea más escrupulosamente que ningún otro*

investigador de hoy. Esa continuidad infinita de proporciones relacionadas puede ser la razón por la cual las líneas y planos de la gran pirámide no dejan de revelar nuevos aspectos de la sección áurea.

(...)

Aquí sólo podemos aludir someramente a las relaciones de π con la sección áurea. Se ha discutido mucho acerca de hasta qué punto conocían los egipcios el valor de π, la relación entre la circunferencia y el diámetro de un círculo. Es evidente que, con su método de pensamiento, los egipcios lo expresarían solamente con una proporción, en forma de fracción. Puede afirmarse que «la relación del perímetro de la base de la gran pirámide con el doble de la altura es igual a π», y también que «la relación del área de la base con el área de la sección mediana es igual a π» (J. P. Lauer, 1948, Le *problème des pyramides d'Egypte*, París). *Al confirmar esto, Lauer añade la observación de un matemático, Paul Montel, quien dirigió su atención hacia una relación poco notada entre π y Φ*:

$$0{,}618 = 1/\Phi = (\pi/4)^2 = (3{,}1416/4) = 0{,}617$$

cerrando así, puede decirse, la cadena de relaciones.

Se ha discutido mucho acerca de hasta qué punto conocían los egipcios el valor de π, la relación entre la circunferencia y el diámetro de un círculo.

Aproximaciones a π/Φ^2

No conocemos ninguna publicación que haga referencia a una fracción, o relación, del tipo

$$\pi/\Phi^2$$

Lo más parecido a esta propuesta figura en las citas reseñadas más arriba y, realmente, distan mucho de esta opción.

Veamos su valor numérico:

$$\pi/\Phi^2 = 1{,}1999816148...$$

La proximidad de esta razón al valor 6/5 (= 1,2) nos permite hacer otro planteamiento:

$$\pi/\Phi^2 = \pm\ 1{,}2$$

Nada nos impide que despejemos π en forma aproximada:

$$\pi = \pm\ 1{,}2\ \Phi^2$$

Y resulta:

$$\pm\ \pi = 3.141640786...$$

que constituye nuestra primera aproximación a π y que llamaremos «$\pi[1]$».

$$\pi[1] = 1{,}2\ \Phi^2$$

$$\pi[1] = 3{,}141640786...$$

Al error unitario entre π y $\pi[1]$ lo llamaremos E[1]:

$$E[1] = 0{,}00001532...$$

En función del valor aproximado de π que acabamos de definir, $\pi[1]$, es obvio que, partiendo de un *círculo de área unidad*, podremos determinar un cuadrado de área próxima a la unidad de superficie y un segmento cuya longitud se aproximará, también, a su unidad.

Veamos la construcción geométrica de la figura 2.

Hacemos corresponder el *área unidad* con la superficie del círculo.

La superficie del cuadrado circunscrito, *Scc*, por definición, es la siguiente :

$$Scc = 4/\pi \text{ (unidades de superficie)}$$

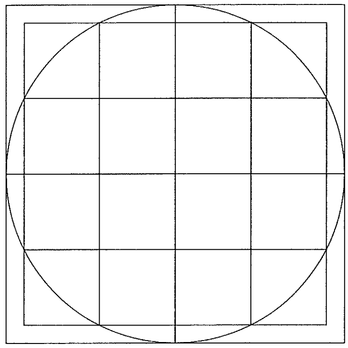


Figura 2

Si sustituimos π por su valor aproximado $\pi[1]$

$$\pi[1] = 1{,}2\Phi^2$$

tendremos :

$$Scc = \pm 4/1{,}2\Phi^2 \text{ (unidades de superficie)}$$

Conclusión: si multiplicamos el cuadrado circunscrito al círculo de área unidad por el valor $1{,}2\Phi^2$ obtendremos un cuadrado cuya superficie se aproximará a cuatro veces la unidad de superficie. El error relativo, por exceso, será E[1] = 0,00001532...

Vamos a construir de una forma más simple dicho cuadrado de área próxima a la unidad.

Volvemos a la figura 2 para analizar el entramado o cuadrícula de 16 pequeños cuadrados insertados en el círculo.

La superficie de uno de estos cuadrados es $0{,}2/\pi$.

La circunferencia coincide en 8 puntos con 8 vértices de dichos cuadrados. La construcción es inequívoca y la razón del lado del cuadrado circunscrito a la suma de cuatro lados de estos cuadrados es la siguiente :

$$Razón = \Phi - 0{,}5$$

$$Razón = 1{,}118033988...$$

En la figura 3 se ha remarcado un cuadrado en el que se establece que su área es 0,6666768... (unidades de superficie). Es decir, 2/3 de la unidad aproximadamente.

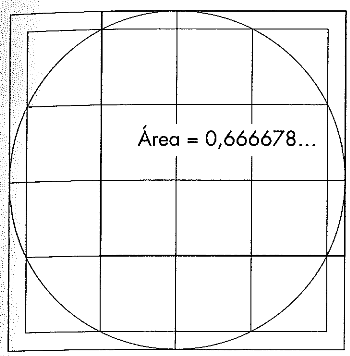


Figura 3

La razón de este cuadrado de área 0,6666768... (unidades de superficie) y el cuadrado circunscrito al círculo de área unidad es $\Phi^2/5$ (= 0,523606797...).

No se incluye la demostración de este hecho puesto que es una simple comprobación geométrica.

La construcción del cuadrado de área próxima a la unidad es inmediata y la vemos en la figura 4.

El cuadrado *CDEF* tiene un área próxima a la unidad de superficie, con un error relativo E[1] = 0,00001532...

A esta superficie (del cuadrado) la denominaremos A[1] y su valor es:

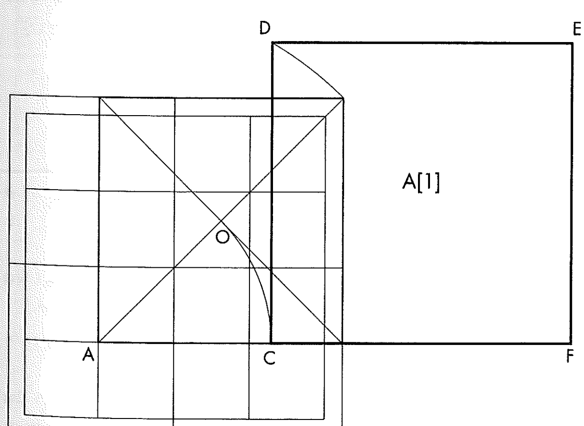


Figura 4

Es lógico que este entramado no dejara de darnos sorpresas en cuanto a la configuración de segmentos interesantes.

$$A[1] = 1{,}2\Phi^2/\pi$$

A[1] = 1,00001532...(unidades de superficie)

Es lógico que este entramado no dejara de darnos sorpresas en cuanto a la configuración de segmentos interesantes.

En la figura 5 la razón de la recta *OF* respecto a la unidad de longitud, se aproxima a la inversa de la sección áurea.

OF = 0,618038723... (unidades de longitud)

$1/\Phi$ = 0,618033989...

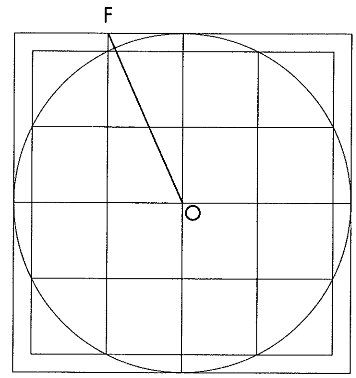


Figura 5

Vemos que este segmento es la hipotenusa del triángulo formado por el radio del círculo unidad y el lado del cuadrado de área «0,2π».

El desfase, por exceso, de esta longitud respecto a la inversa de la sección áurea, presenta un error relativo equivalente a la raíz cuadrada de E[1]; obviamente hemos pasado de magnitudes de dos dimensiones (áreas) a una magnitud de una dimensión (longitud):

$$\sqrt{E[1]} = 0{,}00000766\ldots$$

La determinación de la longitud próxima a la unidad es una construcción geométrica simple a la que llamaremos L[1]. Basta con multiplicar el segmento *OF* por la sección áurea.

L[1] = 1,00000766... (unidades de longitud)

Segunda aproximación a π

Hay una segunda aproximación a π, que llamaremos $\pi[2]$, de mucha más precisión, y que resulta de matizar aquella primera expresión.

$$\pi[2] = \left(\frac{1{,}2\Phi^2\sqrt{4{,}5}}{3{,}76}\right)^2$$

$$\pi[2] = 3{,}141592684\ldots$$

La razón entre este valor y π es:

$$\pi[2]/\pi = 1{,}00000000995\ldots$$

Se trata de un desfase del orden de las milmillonésimas o de, prácticamente, una cienmillonésima.

Esta circunstancia se deriva de una curiosa propiedad. La *diagonal* del cuadrado circunscrito al círculo de área unidad, cuando es afectada por determinados factores, que sean función del cuadrado de la sección áurea, Φ^2, presenta unos valores con varias cifras periódicas.

En la figura 6 el segmento *B'F* tiene el valor

$$B'F = 0{,}8355555597\ldots \text{ (unidades de longitud)}$$

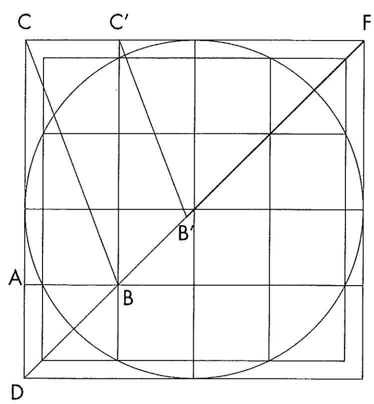


Figura 6

B'F es el resultado de multiplicar la diagonal DF por el factor $\Phi^2/5$.

$$B'F = DF \cdot \Phi^2/5$$

$$DF = \sqrt{\frac{2 \cdot 4}{\pi}} = 1{,}595769121\ldots \text{ (unidades de longitud)}$$

$$B'F = \frac{1{,}595769121\ldots \Phi^2}{5} = 0{,}8355555597\ldots \text{ (unidades de longitud)}$$

La determinación de *B'F* es muy sencilla sobre la construcción geométrica que venimos utilizando. En la figura 6 vemos que el segmento *C'B'* es paralelo al *CB*.

Si asimilamos el segmento *B'F* a la fracción

$$3{,}76/4{,}5 = 0{,}835555555555\ldots$$

podremos calcular gráficamente la longitud próxima a la unidad de longitud a la que llamaremos L[2]:

$$L[2] = B'F \cdot 4{,}5/3{,}76$$

$$L[2] = 1{,}00000000497\ldots \text{ (unidades de longitud)}$$

Los valores 4,5 y 3,76 vemos que ya aparecían en la expresión de $\pi[2]$.

También hay que hacer notar que

$$\left(\frac{3{,}76}{\sqrt{4{,}5}}\right)^2 = 3{,}1416888888\ldots$$

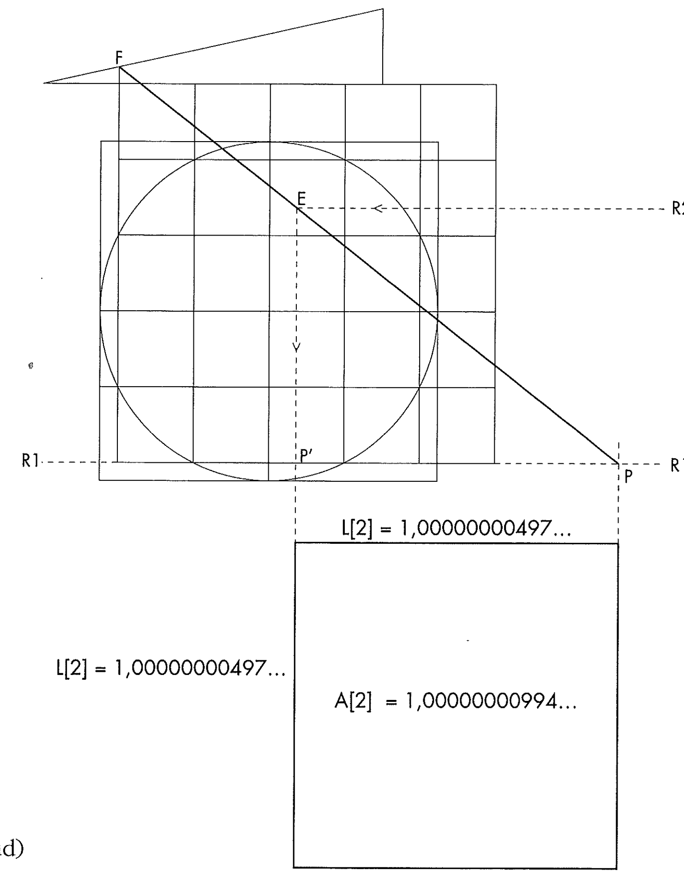
y además

$$0{,}8355555555\ldots \cdot 3{,}76 = 3{,}1416888888\ldots$$

José María Bosch
Arquitecto Técnico
Ayuntamiento de Moncada
Valencia

En la figura 7 podemos ver el resultado final, a falta de algunos pasos intermedios debido a la brevedad de este escrito, de la construcción de L[2] y de su cuadrado A[2].

$$A[2] = 1{,}00000000995\ldots \text{ (unidades de superficie)}$$



A[2] = Unidad de superfice aproximada

Figura 7

En la figura anterior la separaci n entre las horizontales R1 y R2 es la distancia 0,8355555597 (unidades de longitud).

Bibliografía

DAVIS, P. J. y R. HERSH (1988): *Experiencia matemática*, Labor y Ministerio de Educación y Ciencia, Barcelona.

GARDNER, M. (1972): *Nuevos pasatiempos matemáticos*, Alianza Editorial, Madrid.

GHYKA, M. G. (1.983): *Estética de las proporciones*, Poseidón, Barcelona.

GIEDION, S. (1981): *El presente eterno: los comienzos de la arquitectura*, Alianza Editorial, Madrid.

SUMA 32
noviembre 1999, pp. 53-60

Reflexiones para una propuesta de geometría en el parvulario

Mequè Edo i Basté

ARTÍCULOS

En éste artículo se reflexiona sobre como se introducen los conceptos geométricos en el Parvulario y se ofrecen alternativas didácticas que cambien el actual enfoque.

LA EXPERIENCIA que se mostrará se ha llevado a cabo en distintos centros públicos del entorno de Barcelona.

Hasta ahora han participado en este proyecto maestros y alumnos de primero, segundo y tercer curso de parvulario de siete centros distintos.

Las escuelas donde se ha realizado esta experimentación han sido siempre centros públicos de educación infantil y primaria en las que se había detectado un interés, por parte de los maestros, por reflexionar y cambiar el enfoque que se daba a la matemática en el Parvulario y más concretamente a la Geometría.

Así pues, la experiencia que se presenta es siempre el fruto de una reflexión conjunta de algún equipo de maestros de parvulario con las orientaciones y guías que aportaba yo misma como asesora en didáctica de la matemática.

Aunque, como he dicho, hasta ahora esta experiencia se concreta en el parvulario, creo que las reflexiones teóricas que caracterizan la propuesta son igualmente válidas para la enseñanza Primaria, ya que en definitiva es un intento de aplicación en el aula de una Geometría más cercana a las concepciones psicopedagógicas del actual currículo.

Reflexiones que fundamentan la propuesta

Seguidamente se presentan las principales ideas que guían la reflexión y la actuación tanto de la asesora como de los maestros que participan en esta experiencia.

Al escoger una línea de actuación y diseñar actividades de geometría para niños y niñas de Educación Infantil intentamos guiarnos a partir de una serie de ideas básicas que se pasa a detallar.

Iniciar la aproximación a la geometría a través de objetos reales y tridimensionales

Las personas somos seres de tres dimensiones, rodeados de objetos tridimensionales, por lo tanto creo conveniente empezar la aproximación a la geometría con un tratamiento intuitivo y exploratorio del espacio y de los objetos que nos rodean.

No tiene sentido empezar el aprendizaje geométrico partiendo de conceptos abstractos como línea, punto, cuadrado o rectángulo y todavía menos si los conceptos que manejamos no tienen una conexión explícita con experiencias previas de nuestros alumnos o conectadas con su realidad.

Así pues, considero adecuado escoger entre los objetos del entorno los primeros modelos de figuras geométricas que, evidentemente, serán tridimensionales; y es también a partir de estos objetos reales que se conducirá a los niños y niñas hacia la observación y reconocimiento de las figuras planas.

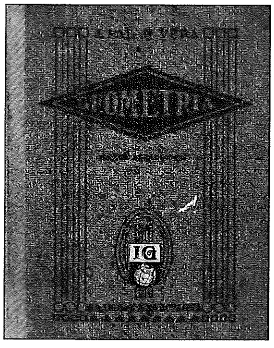
Actualmente, existen varios colectivos en distintos países que comparten esta visión; entre otros podríamos destacar H. Freudenthal (1983), en Holanda; Instituto Irisae Piemont (1993) en Italia; el grupo de matemáticas de Infantil de *Cambridge University* (1988) cuyos materiales han sido traducidos en España por la Editorial Akal (1991); Grupo Cero de Valencia (1985); R. Codina y otros (1992); C. Alsina, C. Burgués y J. M. Fortuny (1987-88). Pero este enfoque no es en absoluto nuevo, veamos sino lo que propone Juan Palau (1934) en la introducción de su libro *Geometría (estudio de las formas)*:

> No hay libro de Pedagogía, por vulgar que sea, en que no aparezca el principio muy conforme con la ciencia y con el sentido común, de que en la enseñanza elemental de todas las materias hemos de empezar por lo concreto, por cuerpos, por objetos; pero es lo cierto que, hasta ahora, los libros de texto destinados a los niños, hacen caso omiso de él y en todos ellos se empieza por lo más abstracto, por lo que debiera aparecer al final como síntesis [...].
>
> Nosotros en la distribución de la materia de la presente obra [...] hemos procurado ofrecer a la consideración del niño objetos de formas geométricas típicas, siguiendo no el orden lógico que se acostumbra en las obras que tienen más en cuenta la materia en sí que el niño que ha de estudiarla, sino un orden dictado por la Pedagogía.
>
> El estudio de las formas, según el criterio moderno, no puede, pues, empezar por puntos y líneas, que son puras abstracciones, sino por cuerpos y, mejor todavía, por objetos todos ellos más o menos familiares al niño. Las superficies, las líneas, los puntos, los irá conociendo el alumno al hacer el análisis de los sólidos geométricos en que se hallan comprendidos.

Estructurar la geometría a partir de los procedimientos

Una de las características más relevantes de la actual Reforma Educativa es el hecho de reclamar la importancia del aprendizaje de los procedimientos. Si esta idea, en general, es válida para cualquier contenido en la Educación Infantil, en el caso de la Geometría se convierte en imprescindible.

La Geometría se ha estructurado durante muchos años a partir de los conceptos y esta visión está todavía muy enraizada. Sin embargo, ahora tenemos que «construir» entre todos una nueva didáctica para la Geometría y esto no es fácil.



A menudo, al preguntar a los maestros de Parvulario «qué hacen de geometría» responden «el cuadrado, el triángulo, la redonda, etc.» Difícilmente dicen «comparamos objetos según la forma, agrupamos, clasificamos, construimos, reproducimos o explicamos...»

La Geometría se ha estructurado durante muchos años a partir de los conceptos y esta visión está todavía muy enraizada. Sin embargo, ahora tenemos que «construir» entre todos una nueva didáctica para la Geometría y esto no es fácil.

Todos, maestros, formadores, pedagogos, autores de libros de texto, etc., debemos hacer un esfuerzo para traducir esta frase: *es necesario priorizar los procedimientos para llegar a través de ellos a los conceptos*, en acciones reales.

En definitiva pues se debería intentar que el contenido principal de la geometría en el parvulario fuera:

> Exploración sistemática de algunas figuras y cuerpos geométricos para descubrir sus propiedades y establecer relaciones con ellas. (*Currículo de la Etapa Infantil*, MEC, 1992:48.)

Y a través de este procedimiento conseguir que los alumnos se inicien en la construcción de los conceptos:

> Cuerpos geométricos: esfera, cubo, cilindro, etc.
>
> Figuras planas: círculo, cuadrado, triángulo, rectángulo. (*Currículo de la Etapa Infantil*, MEC 1992:47.)

Elaborar programaciones cíclicas

Coincido con algunos expertos como Codina y otros (1992), Canals (1997), Piemont (1993) que defienden que la organización de los contenidos geométricos deben presentarse de forma cíclica o en espiral, es decir, no hay unos contenidos concretos específicos para cada edad, ni tan sólo hay unos contenidos *exclusivos* de Parvulario, en el sentido de que al terminar esta etapa deban estar totalmente consolidados. Al contrario, la idea de programación cíclica o de recorrido en espiral nos propone que los mismos contenidos se puedan «ver» o «tratar» sucesivamente añadiendo nuevos grados de dificultad.

A menudo los maestros se cuestionan: ¿cuál es la secuencia de contenidos adecuada en Educación Infantil? o en el programa, ¿qué debe ir antes «el cubo» o «el triángulo»?

Creo que no hay una única secuencia válida de contenidos geométricos, es más, secuencias de contenidos muy distintas pueden ser igualmente correctas cada una en su contexto; esta es una cuestión que debería decidir cada equipo docente en función de su realidad.

Pero, en relación a la programación de Parvulario, y retomando la explicación del punto anterior debemos desterrar la idea de que *hasta que un contenido no esté «aprendido» no se pueda pasar a otro.*

Si nuestro objetivo principal no es que asimilen totalmente un concepto y, por el contrario, sí es que es que analicen, comparen, deduzcan en relación a la forma y posición de los objetos, es evidente que no se pueden presentar los conceptos por separado, sino relacionados y es evidente, también, que no se puede hacer geometría durante una semana y «cerrar el tema», sino que es un contenido al que se debe hacer referencia en muchos momentos a lo largo de todos los cursos del Parvulario.

Por ello, creo que deberíamos elaborar programaciones cíclicas, es decir, programaciones en las que aparezcan y reaparezcan los mismos conceptos pero con algunos cambios, ya sea combinándolos de distinta forma, ya sea incorporando nuevas nociones o añadiendo procedimientos más avanzados.

Alternar actividades de «reconocimiento visual» con otras de «inicio de análisis de cualidades y propiedades»

Cuando en alguna sesión de trabajo con maestros analizamos las propuestas de geometría que suelen aparecer en los cuadernos de Parvulario nos encontramos con que el objetivo de aprendizaje de la mayoría de propuestas es *que los niños y niñas sean capaces de reconocer y nombrar alguna figura geométrica*, ya sea plana o tridimensional. Estas son las actividades típicas de reconocimiento visual, que consisten, básicamente, en asociar una figura a una palabra.

Actividad

Pinta los triángulos

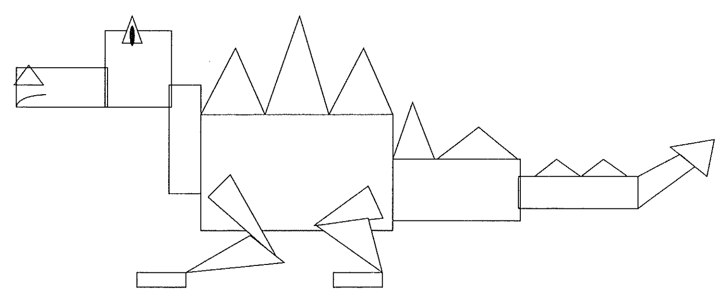


Figura 1. Actividad de reconocimiento visual un tanto especial, ya que presenta distintos modelos del concepto triángulo. ¿Por qué la mayoría de niños y niñas de parvulario sólo reconocen el «triángulo» como tal cuanto éste es equilátrero?, ¿un único modelo facilita o dificulta el aprendizaje del concepto?

Volviendo a la explicación anterior, reconozco que se deben realizar actividades de reconocimiento visual, pero creo que éstas deben alternarse con otras propuestas que impliquen hacer un análisis de cualidades y propiedades derivadas de la forma de los objetos, como por ejemplo:

1. Si esto es un triángulo, y esto y esto también; sin embargo esto no...

   ¿Por qué éstos son triángulos?, ¿cómo lo sabes?, ¿qué tienen igual? Construye algunos triángulos más. ¿Por qué éste no es un triángulo?, ¿qué tiene distinto?

Desde la matemática es más interesante que un niño o niña de parvulario llegue a descubrir que *todas estas figuras son triángulos* porque tiene *tienen tres lados*, pero que hay triángulos de *distinta forma, tamaño, color*, etc. que no que sepa reconocer y nombrar sólo visualmente un gran número de figuras planas.

Otro ejemplo:

2. Vamos a estampar con estos objetos y pintura, (formas próximas a cilindros, cubos y algunos prismas).

   ¿Qué objeto marcará alguna figura conocida?, ¿todas las marcas de este objeto serán iguales (cubo) y de éste (prisma triangular)?, ¿qué objeto marcará un círculo?, etc.

En este ejemplo es más interesante que lleguen a reconocer y asociar algunas figuras planas como superficies de los cuerpos de tres dimensiones (relacionando así contenidos matemáticos con la interpretación del entorno real), que no que reconozcan muchas más figuras, pero solamente en fichas y cuadernos.

Cuando en las sesiones de Geometría se potencia el hecho de analizar, realizar hipótesis, comprobar y verbalizar se está «enseñando» algo fundamental que es lo siguiente: la intuición y el reconocimiento visual es el recurso básico inicial, pero encontrar argumentos basados en razonamientos nos ayuda a conocer y comprender mucho mejor lo que se está aprendiendo. De hecho, actuando así desde el inicio, estamos ayudando a construir una pauta de actuación básica para el aprendizaje de la Geometría, y de la Matemática en general, que debería ser válida para el resto de la escolaridad.

En definitiva reconozco la importancia inicial del reconocimiento visual, pero en mi opinión no deberíamos quedarnos aquí argumentando que en el Parvulario los niños y niñas «son pequeños». Sean cuales sean las nociones o conceptos implicados en una actividad es importante que el maestro plantee cuestiones que ayuden a analizar, comparar, deducir, en definitiva a razonar.

Sean cuales sean las nociones o conceptos implicados en una actividad es importante que el maestro plantee cuestiones que ayuden a analizar, comparar, deducir, en definitiva a razonar.

Tener una «actitud geométrica» delante de situaciones habituales

Muchas veces no es necesario que los maestros «inventen» nuevas actividades para trabajar aspectos geométricos en el Parvulario. Simplemente se requiere tener claros los objetivos que se pretenden y aprovechar alguna situación habitual en el aula para, con «una actitud geométrica», convertirla en una actividad de aprendizaje matemático.

Por ejemplo, supongamos que tenemos un rincón donde los críos suelen hacer construcciones con materiales variados.

Imaginemos que un día ofrecemos piezas de construcción con forma de cubo, de cilindro y añadimos algunos objetos esféricos. Pedimos a los niños y niñas que realicen torres y construcciones pero antes conversamos con ellos acerca de:

> ¿Todas las piezas sirven igual para apilar?
>
> ¿Podréis hacer una torre con las bolas?
>
> ¿Hay piezas que se aguantarán bien aunque las coloquéis en cualquier posición?

Seguidamente los niños experimentan, haciendo distintas construcciones y una vez terminada la actividad se retoma la conversación llegando conjuntamente a conclusiones del tipo:

> Las piezas con todas las caras planas son las que se apilan bien en cualquier posición.
>
> Las piezas cilíndricas solo se apilan bien si se apoyan en sus caras planas.
>
> Las bolas no van bien para apilar porque no tienen caras planas.

En este ejemplo, y de forma muy resumida, he intentado ejemplificar lo que entiendo por tener una «actitud geométrica», que en síntesis vendría a ser: que el maestro se valga de una situación habitual (como por ejemplo juegos de construcción, estampado, modelado, dibujo, juegos verbales de adivinar, juegos de encaje, juegos motrices, danzas, laberintos y recorridos en el gimnasio, etc.), para provocar un diálogo previo a la actuación de los niños, diálogo que los estimule a hacer predicciones, que les despierte el deseo de realizar comprobaciones y, sobre todo, que, al final, se destine el tiempo necesario para obtener alguna conclusión.

Utilizar la terminología geométrica correcta, coexistiendo con el vocabulario natural propio de la edad

Casi la totalidad de los términos de nuestro vocabulario los aprendemos oyéndolos usar en situaciones reales, funcionales y con una intención de comunicación. Luego, ¿por qué los términos geométricos se aprenden en una ficha?

Maestro: Esto es un cuadrado, pinta los cuadrados.
Niño: ¿Y?

¿No sería mejor que los maestros usáramos habitualmente el vocabulario geométrico correcto acompañado de pequeñas explicaciones, si es necesario, que faciliten su comprensión?

Maestro: -¿Puedes acercarme el bote que está en la primera estantería, el que tiene forma de cilindro?
Niño: -¿Dónde guardamos las tijeras?
Maestro: - Sí

En varias escuelas con las que he colaborado los maestros han elaborado un vocabulario de uso interno que sirvió al mismo tiempo para clarificar nociones a ellos mismos y para introducirlo en el aula. En todos estos vocabularios aparecían palabras como: *círculo* (desterrando la terrible «redonda» para siempre), *cuadrado, triángulo, rectángulo, lados, vértices, superficie, esfera, cilindro, cubo, prisma, caras, planas, curvada, línea, recta,* etc.

Puede que alguien se asuste al ver tanta terminología geométrica en el Parvulario pero debe quedar claro que la intención del maestro al usar estos términos no es nunca que los niños y niñas de estas edades lleguen a «asimilar» totalmente todas estas nociones, ni siquiera que las usen siempre sustituyendo el vocabulario natural propio de su edad, nuestra intención es que lo vayan oyendo en situaciones donde tienen significado, para que de esta forma empiecen a elaborar sus primeras intuiciones en relación a estas nociones y, en definitiva, que conozcan una pauta de actuación a través de sus maestros y esta forma de actuar es la que les dice: la matemática nos ayuda a observar, analizar, comprender y *comunicar* acerca de la forma, la posición, la belleza y la estética de los objetos que nos rodean.

...la contemplación y creación de formas artísticas a partir de líneas, figuras y cuerpos, estáticos o en movimiento, ayuda tanto a intuir y construir nociones geométricas como a desarrollar sentimientos y emociones estéticas.

Transmitir una forma de «mirar» el entorno que ayude a construir conceptos geométricos a la vez que desarrolle sentimientos estéticos

Volviendo una vez más a las sugerencias didácticas del actual Currículo de Educación Infantil encontramos lo siguiente:

> Las actividades matemáticas deben inscribirse en el conjunto de situaciones, hechos y proyectos que se producen dentro del aula o en ámbitos más amplios (escolares y extraescolares) y, desde el punto de vista didáctico, es necesario plantearlas como un aprendizaje que lleve al conocimiento de la realidad y que consiga una adecuada aplicación de lo que se ha aprendido. (*Orientacions Didàctiques per a l'Educació Infantil,* MEC, 1992:76.)

Creo que la idea de partir del entorno queda reflejada a lo largo de todo este texto, pero cuando hablamos de entorno, ¿a qué nos referimos?

¿Sólo al entorno natural?, ¿a los objetos cotidianos producidos por el ser humano?, ¿o también a las producciones artísticas?

En la Escuela Infantil diversificar las situaciones de aprendizaje y los referentes de un mismo contenido es muy necesario, de esta forma ayudamos a generalizar y a aplicar los aprendizajes en distintos contextos, por ello es conveniente referirnos a los tres, pero me atrevería a decir que quizás deberíamos prestar una atención especial a aquellas cuestiones relacionadas con el mundo del Arte.

Creo que la contemplación y creación de formas artísticas a partir de líneas, figuras y cuerpos, estáticos o en movimiento, ayuda tanto a intuir y construir nociones geométricas como a desarrollar sentimientos y emociones estéticas.

El hecho de relacionar, desde la didáctica de la matemática, la Geometría con el Arte no es nueva, ni siquiera el hecho de reclamarla como situación de aprendizaje para Educación Infantil. Uno de los objetivos que se planteaban el grupo Cero de Valencia (1985:191) en relación a la geometría para el Parvulario y el Ciclo Inicial de Primaria era: «Desarrollar los sentimientos estéticos».

Pero quizás llama más la atención cuando la relación se produce desde el artista. «Pablo Palazuelo, uno de los artistas españoles más representativos de este fin de siglo» (entrevista en el *País semanal,* febrero 1998) comenta que en una ocasión calificaron su obra de «pintura geométrica, pintura fría», él estuvo de acuerdo en que su pintura era geométrica, pero rechazó que fuera fría, argumentando: «Cuando descubrí que la geometría es lo que está en el fondo de la vida, que es lo que la construye, ¿cómo iba a pensar que la geometría es fría? ¿Es fría una flor, una semilla, un caracol maravilloso de la playa? ¿Es fría una estrella de mar? La geometría no es fría; lo será la geometría escolar, esa donde nos hemos quedado».

Pero, ¿es realmente necesario que la geometría escolar sea fría?

Estoy convencida que no. Sin embargo en la práctica escolar esto implica un cambio importante por parte de los adultos en la forma de «mirar», sentir y transmitir la realidad geométrica que nos rodea. En fin, un apasionante reto que algunos maestros ya han asumido con éxito; quizás porqué se dejaron seducir por frases como esta:

> Una de las características más notables de los modelos geométricos es su atrayente oferta visual al observador. Es precisamente a partir de la percepción visual que acumulamos buena parte del conocimiento geométrico elemental, aunque como dijo un poeta: «Hay que mirar mucho, para llegar a ver». (Alsina, Burguès y Fortuny, 1988:35.)

Desarrollo de la experiencia

En la práctica, existen tantas secuencias de actividades distintas como maestros han participado; porque compartir un mismo marco teórico no implica realizar las mismas actividades. Sin embargo en todos los casos se han alternado dos tipos de situaciones: por un lado, las que consisten en diseñar una situación didáctica para trabajar unos contenidos escogidos con anterioridad, Y, por el otro, las que consisten en transformar una actividad habitual en el aula que, sin perder el sentido que ya tenía, se le añade una reflexión matemática gracias a la «actitud geométrica» del maestro.

Seguidamente se comentará, de forma breve, algunas de las situaciones didácticas diseñadas o transformadas para el aprendizaje de contenidos geométricos, que varias escuelas han experimentado.

1. Buscar en el entorno: aula, patio, gimnasio, etc. grandes superficies planas y curvadas y reconocerlas con todo el cuerpo (planas: paredes, suelo, etc.; curvas: pelota gigante, túnel del patio, etc.).
2. Jugar a buscar por la clase objetos parecidos a un cuerpo geométrico presentado: esfera, cubo, cilindro, etc. (que previamente ha colocado la maestra).
3. Construir el rincón de la geometría en clase, donde se coleccionan objetos (que traen los niños y el maestro de sus casas) que tengan formas parecidas a algún cuerpo geométrico presentado. También se recogen en este espacio fotografías de catálogos y revistas con imágenes de objetos cuya forma se parece a los trabajados.

Pero, ¿es realmente necesario que la geometría escolar sea fría?

...compartir un mismo marco teórico no implica realizar las mismas actividades.

4. Transformar una actividad de psicomotricidad en el gimnasio en una situación de análisis de determinadas formas. Poner el cuerpo lo más parecido a una esfera, o a un cilindro. Desplazarse como lo harían estos cuerpos. Colocar un antifaz a algunos niños y pedirles que con el contacto corporal reconozcan la forma de algunas piezas de espuma gigantes con formas conocidas, así como que verbalicen cómo son las superficies que tocan: ¿planas? ¿curvadas?
5. Jugar con la «caja oscura». En este juego se debe reconocer, sólo con el tacto, objetos no más grandes que el puño, con formas parecidas o idénticas a otro objeto que se ve. (Este juego tiene muchas variantes ver Edo i Gorgorió (1998).)
6. Transformar una actividad de construcción con piezas de madera en una situación para analizar el comportamiento de los objetos en función de sus superficies. (Realizamos torres: ¿qué objetos se apilan?, ¿cuáles ruedan?, ¿por qué?)
7. Realizar una «excursión geométrica» por las calles, o plazas del entorno en la que se deberá encontrar y comentar objetos con formas parecidas a las estudiadas: farolas, papeleras, depósitos, cabinas, etc. (El recorrido ha sido preparado de antemano por el maestro.)
8. Vivenciar algunos conceptos geométricos con el propio cuerpo jugando con cajas de embalaje más pequeñas (zapatos), y más grandes (neveras, TV, etc.) por los propios niños. Los conceptos geométricos implicados pueden ser de situación espacial como: *dentro* y *fuera, abierto* y *cerrado;* abierto

por *encima*, por *un lado*, por *debajo*, etc. O conceptos relacionados con las características derivadas de la forma como: *caras, aristas, vértices*, etc.

9. Reproducir la forma de un objeto concreto con barro o pasta de moldear, a partir de un modelo que se ve, o con un modelo escondido que se puede ir tocando y analizando.

10. Realizar una excursión a un «Chiqui parc» (espacio con laberintos, cuerpos geométricos gigantes de espuma, piscinas de pelotas, etc.).

    En este espacio la maestra fotografía a los niños y niñas jugando. Días después, en clase, se visionan las diapositivas y se comentan tanto las posiciones relativas de los niños con los objetos, como las formas de los mismos objetos.

11. Reconocer y analizar las distintas superficies de algunos objetos tridimensionales a partir de una actividad plástica de estampación.

12. Construir maquetas y pueblos con materiales variados (cajas, botes, etc.) a partir de las plantas de los edificios marcadas en una cartulina. En esta actividad se debe reconocer alguna de las superficies planas de cada objeto –forma y tamaño– y encajarla en otra superficie plana.

13. Partiendo de una actividad habitual de construcciones con materiales comerciales (como Duplo, Lego, Polidron, Multilink, etc.) proporcionar modelos tridimensionales construidos por algún compañero, o dar modelos planos (fotografías) en los que para reproducir el modelo se deberá deducir o inventar cómo es la parte del objeto que la fotografía no muestra.

14. Después de visitar una exposición y conocer un poco algún artista concreto como: Miró, Calder, Max Bill, etc., cada alumno, inspirado por la obra del autor, realiza un dibujo que es el proyecto de una escultura, que más tarde realizará. Seguidamente se buscan los objetos necesarios para cada proyecto y finalmente se construye la escultura. De esta forma cada superficie plana dibujada se transforma en un objeto tridimensional, situación que se presta a comentar y analizar la relación entre cuerpo tridimensional y su proyección en el plano. Así como se analizan aspectos de equilibrio, de proporciones entre figuras y entre objetos, cuestiones relacionadas con las posiciones relativas, etc. Pero además se está relacionando la matemática y la geometría con el Arte. Es decir con la contemplación y creación de objetos estéticos y bellos capaces de transmitir y crear emociones y sentimientos.

...muchos maestros están descontentos con el enfoque que se da a la geometría habitualmente, muchos de ellos están deseosos de encontrar una forma más atractiva, más funcional, más aplicada, y más relacionada con otras áreas.

Evaluación

La valoración de esta experiencia es altamente positiva.

Por mi parte como asesora he visto que muchos maestros están descontentos con el enfoque que se da a la geometría habitualmente, muchos de ellos están deseosos de encontrar una forma más atractiva, más funcional, más aplicada, y más relacionada con otras áreas. También he comprobado que cuando se inicia una colaboración de este tipo partiendo de una necesidad de cambio vivida por los propios maestros, mis sugerencias provocan inmediatamente modificaciones sustanciales en la dinámica escolar y, en muchas ocasiones, las propuestas de los propios maestros superan mis expectativas iniciales.

Por otra parte, los comentarios y valoraciones de los maestros que han vivido la experiencia son invariablemente muy satisfactorios. Las escuelas con las que colaboré duarnte el curso 1997-98, en su informe lo han valorado así:

> La participación en este proyecto nos ha cambiado mucho el enfoque y la forma de trabajar la geometría. Nos ha descubierto un nuevo vocabulario, nuevas técnicas y nuevas actividades para realizar con nuestros alumnos. Así como nos ha ayudado a relacionar la geometría con las demás áreas de aprendizaje.
>
> De hecho este apartado de la matemática se había convertido en rutinario y con pocos recursos.
>
> Pero además esta reflexión iniciada en el Parvulario ha motivado que los otros ciclos de Primaria empiecen a replantearse los procedimientos que se utilizan para trabajar la geometría.
>
> Los aspectos concretos en los que hemos cambiado son: Nuestros conocimientos de geometría (los de los maestros), el vocabulario que usamos en clase, la metodología utilizada para «enseñar» geometría y sobre todo la actitud tanto de los maestros como de los alumnos en relación a este bloque de materia. (CEIP Narcisa Freixes i CEIP Riu Sec de Sabadell.)

Por último, queda comentar lo que opina otro colectivo, el de los padres y madres. En algunas ocasiones se les ha explicado el proyecto de forma pormenorizada, pero otras veces no se le ha dado una relevancia distinta a las demás actividades escolares. De todas formas, en general, las familias han participado de forma activa recolectando objetos, buscando fotografías, etc. Pero lo que es sorprendente es que siempre, en todos los grupos, ha habido algunos padres que han comentado gratamente sorprendidos anécdotas de sus hijos referentes a este contenido. Como, por ejemplo, una madre de una niña de primero de Parvulario le comentó a la maestra que estaba paseando con su hija y esta dijo; «Oh, mira mamá nos han puesto farolas nuevas en la calle. Qué bonitas. Mira son una esfera y un cilindro, igual, igual que un chupa-chup». La madre quedó impresionada por la utilización de estos términos por una niña tan pequeña y, de hecho, éste suele ser el factor que motiva a los padres a realizar comentarios parecidos con los maestros.

Pero lo que debe hacernos reflexionar es el hecho de comprobar que existen maestros de Parvulario que son capaces de ofrecer a sus alumnos herramientas matemáticas que los niños utilizan luego para el análisis, comprensión, y comunicación de sus experiencias, incluso fuera de la escuela.

Así pues podría concluir de la misma forma que he empezado este apartado; la valoración de estas experiencias es realmente positiva y, desde luego, sería muy deseable su generalización.

...lo que debe hacernos reflexionar es el hecho de comprobar que existen maestros de Parvulario que son capaces de ofrecer a sus alumnos herramientas matemáticas que los niños utilizan luego para el análisis, comprensión, y comunicación de sus experiencias, incluso fuera de la escuela.

Agradecimientos

Deseo agradecer de una forma especial a los colectivos de Parvulario, Educación Especial, Jefes de estudio y Claustros en general de las siguientes escuelas:

CEIP Escola Bellaterra de Cerdanyola

CEIP Narcisa Freixes de Sabadell

CEIP Riu Sec de Sabadell

CEIP Nostra Llar de Sabadell

CEIP Catalunya de Sabadell

CEIP Arraona de Sabadell

CEIP Joanot Elisanda de Sabadell

Porque creo que estos maestros y maestras, emprendedores, que no se conforman con el día a día, que desean y facilitan la innovación son el elemento clave que da sentido a nuestro trabajo. Sin ellos no habría renovación.

Mequè Edo
Facultad de Ciencias de la Educación.
Universidad Autónoma de Barcelona

Bibliografía

ALAMEDA, S. (1998): «Pablo Palazuelo, tejedor del cosmos», *El País semanal*, 15 de febrero 1998, 41-60.

ALSINA, C., C. BURGUÉS y J. M. FORTUNY (1987): *Invitación a la didáctica de la Geometría*, Síntesis, Madrid.

ALSINA, C., C. BURGUÉS y J. M. FORTUNY (1988): *Materiales para construir la Geometría*, Síntesis, Madrid.

CANALS, M. A. (1997): «La geometría en las primeras edades escolares», *Suma*, n.° 25, 31-44.

CODINA, R., J. ENFEDAQUE, P. MUMBRÚ y L. SEGARRA (1992): «Geometria, en R. CODINA y otros: *Fer matemàtiques*, Eumo, Vic.

EDO, M. y N. GORGORIÓ (1997): «Per un nou plantejament de la geometria a Parvulari», *Actes 3rs Jornades de Didàctica de les Matemàtiques a les Comarques Meridionals, Reus, novembre 1997*.

EDO, M. y N. GORGORIÓ (1998): «Possibilitats geomètriques de la caixa fosca», *Biaix*, n.° 12, 15-20.

EDO, M. (1988): «Exploració i Intuïció Geomètrica al Parvulari», *Actes III Jornades de didàctica de la Matemàtica a les comarques Gironines, Girona maig 1998*.

FREUDENTHAL, H. (1983): *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, D. Reidel Pub. Co., Dordrecht.

GRUPO CERO (1985): *Matemàtiques al Cicle Inicial. Comptar, mesurar i construir*, Gregal, València.

MATEMÁTICAS INFANTIL AKAL/CAMBRIDGE (1988): *Figuras, nivel 1, Libro del profesor*, Akal, Madrid.

MATEMÁTICAS INFANTIL AKAL/CAMBRIDGE (1988): *Figuras, nivel 1, Libro del alumno*, Akal, Madrid.

MATEMÁTICAS INFANTIL AKAL/CAMBRIDGE (1988): *Figuras, nivel 2, Libro del profesor*, Akal, Madrid.

MATEMÁTICAS INFANTIL AKAL/CAMBRIDGE (1988): *Figuras, nivel 2, Libro del alumno*, Akal, Madrid.

MINISTERI DE EDUCACIÓ i CIÈNCIA (1992): *Currículum de l'Etapa. Educació Infantil*, MEC, Madrid.

MINISTERI DE EDUCACIÓ i CIÈNCIA (1992): *Orientacions Didàcticas Educació Infantil*, MEC, Madrid.

PALAU, J. (1934): *Geometría (estudio de las formas)*, Seix y Barral, Barcelona.

PIEMONT, I. (1993): *Matemàtiques, propostes didàctiques*, Eumo, Vic.

SUMA 32
noviembre 1999, pp. 61-68

Procedimientos utilizados en la resolución de problemas de teoría de números: una experiencia con alumnos de escuela media

Cristina Ferraris
Virginia Montoro

En este trabajo se analizan los procedimientos utilizados por los alumnos en la resolución de algunos problemas propuestos en el marco de un taller sobre teoría de números, planificado por las autoras para introducir el método matemático con adolescentes de 13 a 18 años. La experiencia se realizó en San Carlos de Bariloche, provincia de Río Negro (Argentina).

ARTÍCULOS

EN LA ÚLTIMA década se ha producido un consenso generalizado entre investigadores y educadores en cuanto a que la educación matemática debe tender a que se desarrollen capacidades que permitan resolver situaciones problemáticas, realizar conjeturas, probar hipótesis y plantear nuevos problemas. Así, son objetivos deseables que los estudiantes valoren su propia capacidad de hacer matemática, lleguen a resolver problemas, puedan comunicar sus resultados en lenguaje adecuado y aprendan a razonar matemáticamente.

Teniendo en cuenta estos objetivos, realizamos una experiencia en modalidad de taller con alumnos de escuela media, sobre la base de un tema tan rico en posibilidades como lo es la teoría de números, que permite tratar la temática elegida utilizando el método matemático, mediante la resolución de problemas. Como expresa el Dr. Enzo Gentile (1985) «la teoría, los ejemplos y la resolución de problemas forman el triángulo de equilibrio de toda enseñanza eficaz», y la aritmética representa una excelente opción para tener en cuenta en la enseñanza de la matemática ya que permite plantear problemas de todo tipo de complejidad y el resolverlos implica un ejercicio específico del aprendizaje.

La propuesta consistió en acercar al estudiante a la metodología matemática, utilizando los contenidos conceptuales como materia de base; rescatando estrategias heurísticas más que reglas particulares, intentando generar en los estudiantes una actitud positiva respecto de la construcción del saber matemático, dando a éste un sentido dinámico en el uso de procedimientos. Las actividades del taller se planificaron desde un punto de vista constructivista, teniendo en cuenta que el alumno es activo en su aprendizaje, construyéndolo en un todo organizado, de acuerdo a sus conocimientos previos y con los instrumentos adecuados. Particularmente, *en el proceso de construir el conocimiento matemático*, dichas actividades fueron pensadas para que el estudiante buscara soluciones, explorara modelos, formulara conjeturas, utilizando la memoria y la mecanización de destrezas sólo como instrumentos necesarios para «dejar más tiempo» a la creatividad, tendiendo a la exploración de alternativas.

Con cierta frecuencia, popularmenter, se ve a la Matemática como una ciencia acabada y su conocimiento reservado a unos pocos. Esto último es muchas veces compartido por los alumnos y, nos atreveríamos a decir, por algunos profesionales. Por el contrario, nuestra intención fue presentar el trabajo matemático como un proceso dinámico de descubrimiento permanente, que bien describe Schoenfeld (1985) cuando expresa:

> Primero dominamos una parte; según avanzamos, la intuición se desarrolla, comenzamos a creer que vamos por buen camino. Lo verificamos con ejemplos, buscamos contraejemplos, intentamos enjuiciar el por qué vamos por buen camino. Cuando creemos saber que funciona, intentamos demostrarlo. Este ensayo puede tener o no tener éxito. Podemos comenzar por un camino equivocado; sufrir algún revés, tener que batirnos en retiradas, hacer modificaciones. Con perseverancia y suerte el resultado termina por poner cada cosa en su sitio. Pocas experiencias son tan gratificantes o emocionantes; hemos explorado terrenos desconocidos y nos hemos enriquecido al hacerlo.

En la hipótesis de que es posible el tratamiento de los contenidos procedimentales utilizados en Matemática con alumnos de entre 13 y 18 años, realizamos esta experiencia que pasó por tres instancias:

i) elaboración y edición de las guías de trabajos para los alumnos (Ferraris y Montoro, 1997);

ii) implementación del taller con dos grupos distintos de alumnos;

iii) análisis de los procedimientos.

Comentaremos brevemente las dos primeras, siendo la última el motivo del presente trabajo.

Los temas desarrollados corresponden a la teoría de números, utilizando guías dispuestas en ocho unidades: Introducción histórica; Números enteros; Divisibilidad de enteros; Números primos; Números de Fermat; Conjetura de Golbach; Algoritmo de la división; Propiedad fundamental de la Aritmética.

Las tareas propuestas contemplaron que los alumnos trabajen en: organización de un conteo; comprensión de una definición; utilización del resultado anterior para obtener el actual (recurrencia); utilización de letras como símbolos algebraicos; comprensión de consignas (para esto se agregaron también textos con fines a que se leyeran y se comentaran en el grupo); realización de algunas demostraciones; valoración del ejemplo para demostrar que una propiedad no se cumple; enunciado de conjeturas en base al estudio de varios resultados particulares; distinción entre $A \Rightarrow B$ y $A \Leftrightarrow B$; utilización de un algoritmo (con o sin calculadora); optimización del uso de la calculadora; adecuación de conceptos a la resolución de problemas.

En las consignas se tuvo en cuenta no sólo que deben ser claras para su rápida comprensión, sino que puedan ser motivadoras de una investigación mayor acerca del tema o disparadoras hacia la obtención de distintos procedimientos.

Al implementar el taller y facilitada su actividad por esta modalidad, las coordinadoras pusieron particular atención en mostrar la diferencia entre una demostración y la validez de un resultado a través de la observación de varios ejemplos; verdad *a priori* (axioma), de propiedades demostrables (aun cuando el contexto del taller no permitiera su demostración); así como guiar hacia una notación adecuada. El papel del docente fue el de un coordinador de la tarea, presentando las guías de actividades y acompañando durante las clases el trabajo del alumno a fin de responder preguntas, ayudar a encontrar y usar las herramientas adecuadas y completar cada unidad organizando el intercambio de las producciones individuales o grupales, la formulación oral o escrita de los distintos procedimientos utilizados, la validación de las producciones y la institucionalización de los saberes.

En este trabajo realizamos la descripción de los procedimientos utilizados por los estudiantes en la resolución de cuatro de los problemas presentados en las guías, en el marco de la experiencia realizada con dos grupos de alumnos de la escuela media en S. C. de Bariloche.

...nuestra intención fue presentar el trabajo matemático como un proceso dinámico de descubrimiento permanente...

...las coordinadoras pusieron particular atención en mostrar la diferencia entre una demostración y la validez de un resultado a través de la observación de varios ejemplos...

Encuadre y método

El taller fue implementado con dos grupos de alumnos, coordinados por las autoras sin ser nuestra intención compararlos.

Grupo 1: Participaron doce alumnos de 13 a 18 años de edad, de distintas escuelas tanto de gestión privada como estatal, interesados en participar en las Olimpíadas Matemáticas. Se acordó con los participantes que el trabajo consistiría en un tema propuesto por las cordinadoras (teoría de números) mediante la modalidad de resolución de problemas según la guía presentada. Se realizaron encuentros semanales de noventa minutos en horario extraescolar.

Grupo 2: Participaron 22 alumnos de 15 años de un colegio de gestión privada. Se implementó el taller, como materia extracurricular y como parte de la escolaridad obligatoria. Se realizaron encuentros semanales de 80 minutos, dentro del horario escolar, en el aula correspondiente al curso que realizó el taller.

Registros y análisis

Se realizaron dos tipos de registros: por una parte las docentes anotaron, después de cada clase, los procedimientos más notables, principalmente después de la puesta en común al finalizar cada unidad y, por otra, se solicitó a los alumnos la entrega de las notas que realizaron al resolver las distintas actividades.

En el análisis de los registros se hizo una primera lectura de todos ellos, tomando nota de los aspectos más relevantes, para luego describir los distintos procedimientos encontrados.

Nos hemos centrado en cuatro problemas que, por sus características, fueron fructíferos en cuanto al uso de distintos procedimientos y en los que se pusieron de manifiesto distintas estrategias utilizadas frente a la tarea propuesta.

Problema 1 *(Actividad 1)*

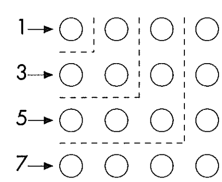
La actividad propuesta (figura 1) atiende a los siguientes ítems previstos en la planificación: organización de un conteo, utilización del resultado anterior para obtener el actual (recurrencia), realización de algunas demostraciones, realización de conjeturas de acuerdo con el estudio de varios resultados particulares.

Resolución 1

Se agregan puntos al cuadrado inicial, completando un nuevo cuadrado y verificando que los puntos agregados corresponden a un número impar. Algunos alumnos concluyen con este resultado (procedimiento geométrico) y los que continúan, lo hacen según los siguientes procedimientos:

Actividad 1

Se disponen los número impares 1, 3, 5 y 7 de la siguiente manera:



Observamos que los puntos llenan siempre un cuadrado, de tal manera que con la primera línea punteada encerramos 1 punto, entre ésta y la segunda agregamos 3 puntos, entre la segunda y la tercera agregamos 5 y así sucesivamente. Además, el primer cuadrado es de lado uno, el segundo de lado dos, el tercero de lado tres y el cuarto de lado cuatro.

Se puede afirmar que:

$$1 = 1 \cdot 1 = 1^2 = 1$$

$$1 + 3 = 2 \cdot 2 = 2^2 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 3 \cdot 3 = 3^2 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4 \cdot 4 = 4^2 = 16$$

Seguid agregando un número impar de puntos de esta forma y verificad que:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5 \cdot 5 = 5^2 = 25$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 6 \cdot 6 = 6^2 = 36$$

¿Cuanto suma 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15?

Figura 1

1.1 verificando que la suma es un número cuadrado, contando la totalidad de los puntos dibujados;

1.2 sumando al número cuadrado anterior, el número (impar) de puntos agregados y verificar que el resultado es un cuadrado.

Resolución 2

Se aprovecha la organización propuesta para realizar una prueba para un caso particular ($n = 15$). En este caso la suma da 8 x 8=64. Teniendo en cuenta que los últimos puntos agregados son 15, de los cuales corresponden 8 a cada lado del cuadrado compartiendo 1, se anota lo siguiente:

$$15 + 1 = 2 \textit{ lados}$$

$$\frac{15+1}{2} = \textit{lado}$$

$$\frac{16}{2} = \textit{lado}$$

$$8 = \textit{lado}$$

$$\textit{Sup}\square = \textit{lado}^2$$

$$\textit{Sup}\square = 8^2$$

$$\textit{Sup}\square = 64$$

Se realiza el dibujo de la figura 2:

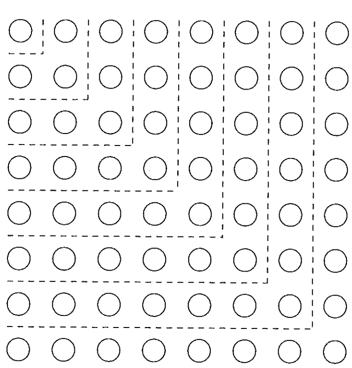


Figura 2

Escribiendo:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 8{\cdot}8 = 8^2 = 64$$

Resolución 3

Desentendiéndose de la organización propuesta, se considera la parábola ($f(x) = x^2$) explicando: «corriendo de a uno en sentido horizontal, primero se sube uno, llegando en la parábola a 1 (1 al cuadrado); después se suben tres más, llegando a 4 (2 al cuadrado); después se suben cinco más, llegando a 9 (3 al cuadrado); y así siguiendo...» (mientras se señala en un gráfico dibujado en la pizarra como se indica en la figura 3).

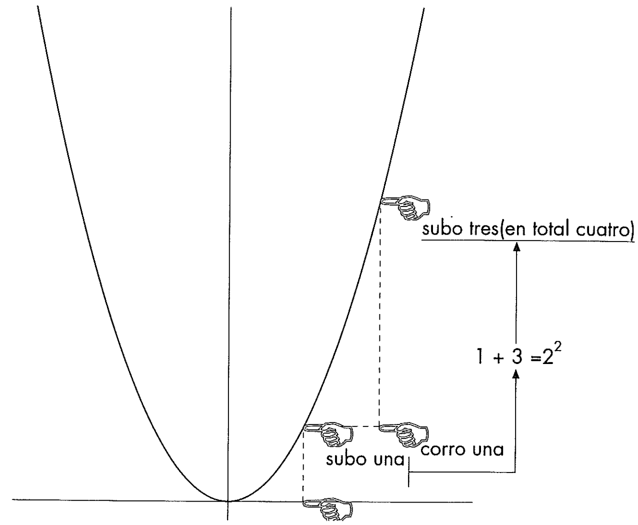


Figura 3

Se observaron dos maneras distintas de afrontar la tarea: adecuarse a la manera propuesta de tratar el problema o, una vez visualizado el mismo, abordarlo sin tener en cuenta la sugerencia de la consigna.

Conclusiones del Problema 1

El procedimiento seguido por los alumnos que tomaron la organización propuesta en la consigna, fue en un comienzo de *orden geométrico* (llenar un cuadrado), lo cual es considerado por algunos estudiantes como definitivo; otros continúan y realizan un procedimiento de *orden aritmético* (la suma de impares consecutivos es un número al cuadrado). De estos últimos algunos sólo cuentan los puntos (*procedimiento aritmético de conteo*) y otros utilizan cada cuadrado obtenido, para sumar el número impar siguiente y observar que es otro cuadrado (*procedimiento aritmético inductivo*).

Se observaron dos maneras distintas de afrontar la tarea: adecuarse a la manera propuesta de tratar el problema o, una vez visualizado el mismo, abordarlo sin tener en cuenta la sugerencia de la consigna.

En algunos casos, el hecho de que los puntos «llenen» un cuadrado, es tomado como una prueba y en otro caso, la misma se realiza para una situación particular.

En las Resoluciones 2 y 3 observamos que se utilizan algunos aspectos del método matemático, como la realización de una prueba (aunque se trate de un número particular pero mayor a los pedidos) y la generalización del resultado por medio de una conjetura.

Problema 2 *(Actividad 2)*

La actividad propuesta (figura 4, actividad 2) atiende a los siguientes ítems previstos en la planificación: comprensión de una definición, utilización del resultado anterior para obtener el actual (recurrencia), utilización de un algoritmo (con o sin calculadora) y optimización del uso de la calculadora.

Actividad 2

Se define *m!* (*m* factorial), como el producto de los *m* primeros números naturales, esto es:

$$m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (m-1) \cdot m$$

Calcular el factorial de 5, de 6, de 7, y así hasta 20
Nota: por supuesto, puedes usar la calculadora, pero cuidado después de 13! (se pide el resultado exacto).

Actividad 3

¿Qué día viniste al mundo?
Nota: en general los años tiene 365 días, pero la Tierra tarda 365 días y algo más de un cuarto de día en dar una vuelta en su órbita alrededor del Sol, para que el clima siga coincidiendo con el calendario, cada cuatro años se agrega un día, el 29 de febrero (a los años a los que se les agrega un día se les denomina bisiestos). Pero con esta corrección no es suficiente y se van acumulando algunos minutos de más, por ello los años seculares (principio de siglo) son bisiestos sólo si son divisibles por 400 (1700 no lo es y 2000 sí); y un año no secular es bisiesto si es divisible por 4 (por ejemplo 1992).

Actividad 4

¿Qué día de la semana fue el 25 de mayo de 1810?

Figura 4

Resolución 1

Se realiza lo pedido (con calculadora) de la siguiente manera: en una distribución en columna, se anota el factorial de 5 como resultado de hacer el producto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$, anotando luego el factorial de 6 como el producto del resultado anterior por 6 y así sucesivamente, guardando el resultado anterior para el cálculo siguiente (procedimiento inductivo).

Resolución 2

Se realiza el cálculo directamente con la tecla correspondiente de la calculadora.

Resolución 3

Se calculan los factoriales pedidos, repitiendo en cada caso todas las multiplicaciones (procedimiento no inductivo). Este tipo de resolución fue realizada en algunos casos con calculadora y en otros haciendo las cuentas con lápiz y papel.

En el momento de la puesta en común la coordinadora anota, en la pizarra, los resultados correspondientes a cada factorial, según van dictando los alumnos. A partir de cierto número los resultados dejan de coincidir, frente a lo que se concluye que la dificultad comienza cuando el resultado aparece en la calculadora en notación científica (a partir del factorial de 12, 13, 14 o 15, según la calculadora).

Al tratar esta dificultad observamos distintas maneras de afrontar la tarea: algunos alumnos se quedan con los resultados de la calculadora como definitivos, mientras que otros buscan una estrategia que les permita obtener los resultados exactos. Entre éstos se diferencian los que abandonan el uso de la calculadora para realizar las multiplicaciones sin ella y los que aceptan la «dificultad» buscando un modo de resolverla con calculadora.

Describimos el procedimiento que da continuidad a las resoluciones realizadas por los alumnos que deciden continuar con el cálculo exacto:

Resolución 4

Por ejemplo, para el caso 13!, se divide el factorial de 12 (cuyas dos últimas cifras son 0) por 100, se multiplica por 13 y luego por 100. En 15! aparece una segunda dificultad (donde un nuevo redondeo no puede ser salvado con el método anterior); aquí se divide el factorial anterior (calculado exactamente) por una potencia de 10 adecuada (en este caso 100000), multiplicando luego por 15 la parte entera por un lado y la decimal por otro; ambas se multiplican por la misma potencia de 10 utilizada anteriormente y se suman. Es decir:

$$14! = 87178291200$$

dividiendo por 100000 y separando parte entera y decimal:

$$871782 \text{ y } 0{,}91200$$

multiplicando cada número por 15 obtenemos:

$$13076730 \text{ y } 13{,}68$$

multiplicando cada uno por 100000:

$$1307673000000 \text{ y } 1368000$$

sumando estos últimos:

$$15! = 1307674368000$$

Conclusiones del Problema 2

En un comienzo aparecen dos tipos de procedimientos: inductivo y de reiteración de operaciones desde el comienzo (no inductivo). En algunos casos fueron realizados con calculadora y en otros haciendo las cuentas con lápiz y papel.

En la puesta en común se genera una instancia grupal que genera la necesidad de completar los cálculos de manera exacta.

En varios alumnos observamos un fuerte rechazo a realizar cálculos que impliquen grandes cifras, dejando en muchos casos los resultados como aparecían en la calculadora (a pesar de saber que no son exactos).

Entre los estudiantes que optaron por realizar los cálculos con lápiz y papel se valoró la economía de esfuerzo que representa utilizar el resultado anterior para calcular el nuevo factorial (recurrencia).

Por último un grupo de alumnos se centró en la búsqueda de una estrategia que permitiera utilizar la calculadora con fines a realizar el cálculo exacto cuando el problema lo requirió.

En todos los casos la definición fue comprendida y aceptada como tal.

Problema 3 *(Actividad 3)*

La actividad (figura 4, actividad 3)atiende principalmente a los ítems: organización de un conteo y adecuación de conceptos a la resolución de problemas (división y congruencias).

Resolución 1

Se calculan los días transcurridos desde el nacimiento de la siguiente manera: a la edad multiplicada por 365

En varios alumnos observamos un fuerte rechazo a realizar cálculos que impliquen grandes cifras, dejando en muchos casos los resultados como aparecían en la calculadora (a pesar de saber que no son exactos).

se suma el número de bisiestos (que se cuentan mencionándolos uno por uno, desde el último cumpleaños hacia atrás), para luego contar los días desde el último cumpleaños hasta el presente. El número obtenido se divide por 7, poniendo a consideración el resto. En los casos en que éste resultó distinto de cero, se generó la incertidumbre de qué debía hacerse: avanzar o retroceder en los días de la semana a partir del día en que se realizó el cálculo. Para resolverla, se decide realizar el cálculo con una fecha cercana, observando entonces que se debe retroceder.

Resolución 2

Se averigua qué día de la semana fue el primero de enero del año en cuestión, realizándose el conteo de días de manera similar a la descripta en la Resolución 1 (teniendo en cuenta que el primero de enero del año en curso fue lunes), con la diferencia de que el número de bisiestos se obtiene dividiendo por cuatro el total de años transcurridos y quedándose con la parte entera. Al dividir el total de días por 7, se descarta la parte entera y se multiplica por 7 la parte decimal obteniendo el número de días de la semana que debe ¿retroceder?, ¿avanzar? (se pone de manifiesto esta duda) para llegar al resultado, la que se resuelve en forma similar que en la Resolución 1.

Vale aclarar que en uno de los casos el resto fue cero (!), con lo que el estudiante concluyó facilmente que nació un día de la semana coincidente con el día en que se realizó el cálculo.

Resolución 3

Se cuentan los bisiestos mencionándolos uno por uno. Luego, dividiendo 365 por 7, se observa que el resto es uno y entonces cada año corre el cumpleaños un día de la semana, salvo en el caso de los bisiestos en que el corrimiento es de dos días de la semana. Entonces se suma el número de bisiestos a la edad y se divide por 7. Teniendo en cuenta el día de la semana del último cumpleaños, se retrocede tantos días de la semana como el resto obtenido.

Resolución 4

Se usa, sin ningún tipo de cuestionamiento, el hecho conocido de que generalmente las fechas se corren (avanzan) 1 día por año. A partir de esto se concluye que los años bisiestos corren las fechas posteriores al mes de febrero, 2 días de la semana por año.

4.1 A partir del día del cumpleaños del año en curso, se retrocede uno por año normal y cuando se encuentra un bisiesto se retrocede dos, de esta manera hasta llegar al año de nacimiento. Este procedimiento es realizado por algunos estudiantes en forma mental y por otros apoyándose en un gráfico en el que se anotan los años ordenados sobre una recta, marcando con color los bisiestos, y comenzando por el que se corresponde con el año en curso, se menciona sobre cada año el día de la semana correspondiente (jueves, miércoles, martes,...).

4.2 Se tiene conocimiento del día de la semana en que nació y se avanza uno por año común y dos por año bisiesto hasta llegar al actual, comprobando que coincide con el calendario. Esto es tomado como una confirmación del dato que ya se poseía.

4.3 Se suma a los años que se cumplen en el año en curso el número de bisiestos transcurridos desde el nacimiento. A dicha suma se le restan los días correspondientes al total de semanas enteras que «entran» en ella (catorce o veintiún días). Por último se retrocede mencionando «jueves, miércoles, martes,...», tantos días de la semana como lo indica la diferencia obtenida.

Frente a este problema observamos dos modos de encuadrarlo: uno en un contexto aritmético (la congruencia módulo siete y la congruencia módulo cuatro) y el otro, utilizando directamente conocimientos de experiencia cotidiana (los años «corren» un día o dos a la semana).

Conclusiones del Problema 3

En general la actividad provocó mucho interés.

Los procedimientos utilizados descritos en forma global, se dividieron en dos:

- Utilizar el hecho de que los días de la semana se cuentan según una congruencia módulo siete, algunos lo aplican al total de días transcurridos y otros primero a los 365 días que tiene el año ($365 \equiv_7 1$) y luego a la cantidad total de días «excedentes» (uno por año de vida = edad, más uno por cada bisiesto).
- Sabiendo que los días de la semana se corren dos días o un día según que el año sea o no bisiesto, se consideran los años para realizar una mención regresiva de los días de la semana recorriendo los años correspondientes. De los que eligieron este procedimiento, algunos realizaron la cuenta regresiva con el total de días y otros quitaron un múltiplo de siete adecuado para realizarla luego con un número de días menor que siete.

Frente a este problema observamos dos modos de encuadrarlo: uno en un contexto aritmético (la congruencia módulo siete y la congruencia módulo cuatro) y el otro, utilizando directamente conocimientos de experiencia cotidiana (los años «corren» un día o dos a la semana).

En este problema (probablemente por tratarse de algo muy personalizado), se evidenció la influencia de la experiencia individual en la elaboración de estrategias para resolverlo.

Problema 4 *(Actividad 4)*

Como en el problema 3, éste que ahora nos ocupa (figura 4, actividad 4), atiende a los ítems organización de un conteo y adecuación de conceptos a la resolución de problemas, pero con el fin de generar la necesidad de elaborar una estrategia más general, se agrega una nueva dificultad con respecto al anterior: realizar el cálculo para una fecha mas lejana.

Resolución 1

Como en la Resolución 4 del problema descrito anteriormente se usa, sin ningún tipo de cuestionamiento, el hecho de que las fechas se corren (avanzan) dos días o un día por año según éste sea o no bisiesto. En este punto se continúa de la siguiente manera:

1.1 Se escriben los años en forma de columna, desde el actual hasta 1810, luego se coloca al costado de cada uno el día de la semana en que «cayó» la fecha patria ese año, comenzando por el presente y retocediendo uno si el año no es bisiesto y dos si lo es, teniendo en cuenta que 1900 no fue bisiesto, se llega a que el 25 de mayo de 1810 fue viernes. En algunos casos, hay un intento de buscar alguna regularidad cada 10 años pero es abandonada.

1.2 Se cuentan, uno por uno, los años bisiestos; a este número se suman los años trascurridos desde 1810 hasta el actual, se resta 1 por 1900 y luego, a partir del día de la semana en que cayó el 25 de mayo del año en curso, se retrocede la cantidad de días encontrada.

Resolución 2

Dividiendo 365 por 7, se observa que el resto es uno y entonces cada año corre las fechas un día de la semana, salvo en el caso de los bisiestos en que el corrimiento es de dos días de la semana. Se busca el bisiesto más cercano al 1810 (1812), se calcula cuántos años han trascurrido desde 1812 al presente (restando), se lo divide por cuatro (aclarando que así se está contando uno menos, pero que se compensa con 1900 que fue contado pero no es bisiesto). Luego al número de años transcurridos desde 1810 se le suma el número de bisiestos, se divide por 7 y se retrocede un número de días de la semana igual al resto obtenido.

Conclusiones del Problema 4

Como en el caso anterior y a pesar de la dificultad introducida, volvemos a encontrar esencialmente dos procedimientos análogos a los realizados en el mismo, salvo en un caso que comienza a contar del primer bisiesto (1812) y tienen en cuenta (para restarlo) que 1900 no lo es.

Sólo algunos alumnos que en la búsqueda del día de su nacimiento realizaron un conteo exhaustivo, modificaron su estrategia usando esta vez el concepto de congruencia.

Conclusiones

Del análisis de todos los registros (de los que sólo hemos dado 4 ejemplos) surge que, si bien los alumnos la mayoría de las veces resolvieron las actividades aprovechando los recursos propuestos, en otras, sirvieron de disparadores para la utilización y discusión de estrategias distintas a las propuestas, incluyendo algunas de índole netamente geométrica.

La modalidad de taller dio lugar a que los estudiantes consensuaran distintos procedimientos, apareciendo algunos muy creativos y permitiendo el intercambio y adecuación no sólo de conocimientos sino también de la propia experiencia.

La modalidad de taller dio lugar a que los estudiantes consensuaran distintos procedimientos, apareciendo algunos muy creativos y permitiendo el intercambio y adecuación no sólo de conocimientos sino también de la propia experiencia. Asimismo este intercambio mostró la necesidad de manejar un lenguaje adecuado o códigos própios de la Matemática, dándole significado a procedimientos del método matemático.

Durante la realización de los talleres se puso en evidencia que la teoría de números es realmente un tema muy rico en posibilidades para introducir a los estudiantes en la metodología de trabajo matemático.

Cristina Ferraris
Virginia Montoro
Departamento de Matemática
Centro Regional Universitario
Bariloche
Universidad Nacional
del Comahue
Argentina

Bibliografía

ASIMOV, I (1973): *Cien preguntas básicas sobre la ciencia*, Ediciones Tiempo, Madrid.

FERRARIS, C. y V. MONTORO, (1997): *Los Primos de Fermat y otros parientes Aritméticos. (Taller)*, Cuaderno Universitario, n.° 26. Editor responsable: Secretaría de Investigación y Extensión del Centro Regional Universitario Bariloche, (Universidad Nacional del Comahue, Argentina).

GARDNER, M. (1973): *Carnaval Matemático*, Alianza Editorial, Madrid

GENTILE, E. (1985): *Aritmética Elemental*, Monografía, n.° 25, OEA, Washington.

GENTILE, E. (1984): *Notas de álgebra I*, Eudeba, Buenos Aires.

GENTILE, E. (1985): *Inducción y Combinatoria,* Universidad Nacional de Entre Ríos.

GENTILE, E. (1991): *Aritmética Elemental, en la Formación Matemática*, Olimpiada Matemática Argentina, Buenos Aires.

PISA, L. de (Fibonacci) (1973): *El Libro de los Números cuadrados*, Eudeba, Buenos Aires.

SCHOENFELD, A. H. (1985): *La Enseñanza de la Matemática a debate*, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid

TAHAN M. (1978): *El Hombre que Calculaba*, Club de Lectores de Puerto Rico.

SUMA 32

noviembre 1999, pp. 69-78

La transparencia de los hechos didácticos en la enseñanza de las matemáticas

Luisa Ruiz Higueras

José Luis Rodríguez Fernández

ARTÍCULOS

No hay verdades primeras. Sólo hay errores primeros... Una verdad sobre fondo de error. Esa es la forma del pensamiento científico.

GASTON BACHELARD

La construcción de la Didáctica de las Matemáticas como área de conocimiento científico trata de romper con la ilusión de transparencia que emerge del dominio de realidad configurado por los hechos didácticos. En este trabajo analizaremos la transparencia de los hechos didácticos a partir de diferentes investigaciones llevadas a cabo en esta área de conocimiento. En ellas se muestra cómo el análisis epistemológico de los objetos matemáticos de enseñanza es una condición necesaria para poder interpretar racionalmente los hechos y fenómenos didácticos.

TODAS LAS CIENCIAS del hombre, tales como la Sociología, la Economía, o la Didáctica de las Matemáticas sufren un efecto que el sociólogo Bourdieu (1973) denominó «ilusión de transparencia». Consiste en la creencia, en la mayoría de los casos ilusoria (de ahí su nombre), de que la génesis de los hechos y fenómenos, cuyo estudio tienen a su cargo, podría ser explicada mediante la «simple consideración personal» del investigador, apoyada en su intuición y en las experiencias perceptivas del propio entorno.

> La representación ilusoria de la génesis de los hechos sociales según la cual el científico podría comprender y explicar estos hechos «mediante el solo esfuerzo de su reflexión personal» descansa, en última estancia, sobre el presupuesto de la ciencia infusa que, arraigado en el sentimiento de familiaridad, funda también la filosofía espontánea del conocimiento del mundo social... (Bourdieu, 1973: 30)

Para Bourdieu (1973) el complejo entramado de la vida social debe explicarse, no por la concepción superficial que tienen los que en ella participan, sino por las causas profundas que escapan a la conciencia espontánea, sólo así, afirma, «se habrá roto con la ilusión de transparencia» (Bourdieu, 1973: 30).

Para acercarnos mejor a esta primera *ilusión de transparencia* que todos, en mayor o menor grado, hemos padecido, y no estamos libres de seguir padeciendo, nada mejor que observar uno de los ejemplos que propone el epistemólogo Bachelard (1983: 284-285):

> Desplazar un objeto situado sobre una mesa 20 cm es tarea simple, desplazarlo 1 cm, aún sigue siéndolo, desplazarlo 1 mm exige una intervención mucho más compleja y precisa una fatiga mayor... Mas este desplazamiento de 1 mm del objeto sobre la mesa no es todavía una operación científica. La operación científica comienza en el decimal siguiente. Para desplazar un objeto una décima de mm, hace falta un aparato y por añadidura un conjunto de oficios. Si finalmente se accede a las décimas siguientes, una centésima de mm, no sólo hace falta un aparato y una serie de oficios, sino además una teoría y, en consecuen-

cia, toda una Academia de Ciencias. El instrumento de medida siempre termina por proceder de una teoría, y ha de comprenderse que el microscopio es una prolongación del espíritu más que del ojo. De esta manera la precisión discursiva y social hace estallar las insuficiencias intuitivas y personales.

De este modo tan sencillo Bachelard nos hace reflexionar sobre la complejidad de los hechos que en apariencia podemos considerar como triviales.

Veamos otro ejemplo. A todos nos es conocida la ruptura científica que supuso en su tiempo la «revolución copernicuiana[1]», ya que desplazó la concepción geocéntrica del universo hacia la heliocéntrica. Representó la evolución de la ciencia; desde entonces, ya estaría marcada por la acción reflexionada y racional. Fue necesario que la rotación de la Tierra se convirtiera en un *hecho racional* para que fueran destruidas todas las pruebas de su inmovilidad suministradas por la experiencia común. El girar de la Tierra, en la concepción científica, fue antes una idea que un hecho.

El poeta Luc Decaunes lo ha sabido captar con la audacia de sus imágenes:

> Sólo cuando Cristobal Colón descubrió América,
> la Tierra convencida de que era redonda,
> se puso por fin a dar vueltas. (Decaunes, 1958: 246)

Así pues, podemos considerar que una experiencia científica es una experiencia que contradice, en principio, la experiencia común.

En estos dos ejemplos se ha manifestado lo que Bachelard (1938) denomina el obstáculo epistemológico de la «experiencia básica». La realidad se manifiesta concreta, natural, fácil. No hay más que describirla. Se cree entonces que se la conoce. En todas las ciencias ha supuesto una gran dificultad abandonar la observación básica, explicar los fenómenos y despojar a la experiencia de sus caracteres «parásitos» y aspectos no significativos. En definitiva, borrar la ilusión de transparencia.

La ilusión de transparencia en los hechos didácticos

Todos conocemos la gran familiaridad que la sociedad, en general, tiene con los hechos didácticos: todo el mundo ha enseñado a alguien y, a su vez, ha aprendido de alguien. Se enseña a caminar, a subir las escaleras, a cocinar, a patinar, a cortar el césped, a montar en bicicleta, etc. Esta relación cultural con la enseñanza es eminentemente práctica: se basa en la receta, el truco, la astucia, la habilidad,... Supongamos que tuviésemos que arreglar una máquina averiada y llamásemos a un técnico. Si le pedimos que nos muestre aquello que ha debido reparar esperamos que nos ofrezca una breve información acompañada de unas indicaciones escuetas y precisas, nunca un largo y profundo discurso sobre la avería. Podemos, así, afirmar que, socialmente, existe una primera transparencia epistemológica sobre lo que podríamos llamar la enseñanza de los «saberes de lo cotidiano» que nos lleva a considerarla como un conjunto de episodios didácticos breves y desnudados de todo espesor significativo.

Esta transparencia, procedente de nuestro entorno socio-cultural se manifiesta cuando, con suma facilidad, damos una interpretación ingenua de todo el complejo entramado de los hechos didácticos, sobre todo cuando estos hechos se circunscriben a una institución de enseñanza, tan cercana a la sociedad, como es la escuela...

Esta transparencia, procedente de nuestro entorno socio-cultural, se manifiesta cuando, con suma facilidad, damos una interpretación ingenua de todo el complejo entramado de los hechos didácticos, sobre todo cuando estos hechos se circunscriben a una institución de enseñanza, tan cercana a la sociedad, como es la escuela y esto nos conduce, en numerosas ocasiones, a emitir juicios que corren el peligro de considerar diferente lo idéntico y de identificar lo diferente, de comparar lo incomparable y de omitir comparar lo comparable.

En este sentido Chevallard destaca, como una de las exigencias de todo trabajo científico, la ruptura de la *ilusión de transparencia:*

> Para establecer y construir la ciencia en un dominio de realidad (en una realidad dada), es necesario romper con la *ilusión de transparencia* que nos hace ver la realidad como algo que es así, sin más ni más, como si aquello que tenemos ante nosotros se cayese por su propio peso. Es necesario, todo lo contrario, observarla como extraña. Conviene hacerla siempre problemática, verla siempre como un verdadero problema (o más bien como una matriz de problemas). Es necesario problematizarla. (Chevallard, 1991: 34)

Cabe señalar también que estamos bastante influenciados por la concepción tradicional positivista[2] de la ciencia que considera los hechos como datos y se limita a reinterpretaciones, a veces, inconsecuentes de la realidad. Esta concepción no asigna a la teoría otra función que la de representar la realidad, tan completa, sencilla y exactamente como sea posible, a través de un conjunto de leyes experimentales y, por tanto, despoja a la teoría de su función primordial, que es la de asegurar una ruptura epistemológica entre los hechos reales y la construcción puramente racional: anticipar resultados o bien concluir principios que expliquen las

1 Copérnico: físico-astrónomo polaco (1473-1543).

2 Sistema filosófico que admite únicamente el método experimental y rechaza toda noción *a priori* y todo concepto universal y absoluto.

contradicciones, incoherencias o lagunas que emergen de la realidad.

Así pues, debemos considerar que «todo proyecto de ciencia es una tentativa continuada de problematizar lo real; de hacerlo aparecer como problemático, es decir, causando problema. Toda ciencia, por ello, contradice la ilusión de transparencia que impregna nuestra relación cultural con el mundo» (Chevallard, 1994: 137).

Ilusión de transparencia y Didáctica de las Matemáticas

La Didáctica de las Matemáticas, según Bousseau (1986), debe huir de las tentaciones del empirismo. No puede ser una suma de pequeñas constataciones o de relaciones demostradas de modo esporádico, debe ser considerada como una ciencia que estudia la comunicación de los *saberes matemáticos* y cuyo fin es teorizar los objetos con los que trabaja. Para llevar a cabo esta tarea, considerada por Brousseau como un verdadero desafío, es necesario:

- Dotarla de unos conceptos teóricos originales, propios de la Didáctica de las Matemáticas, que permitan poner en evidencia y explicar los fenómenos específicos que aparecen en la comunicación de los saberes matemáticos.
- Precisar los métodos de prueba específicos que utiliza para ello.

> Estas dos condiciones son indispensables para que la Didáctica de las Matemáticas pueda conocer de manera científica su objeto de estudio y pueda llevar a cabo acciones controladas sobre la enseñanza. (Brousseau, 1986: 6)

La construcción de la Didáctica de la Matemática como dominio científico trata, pues, de romper con la ilusión de transparencia del dominio de realidad configurado por los hechos didácticos. En esta construcción científica existen diferentes paradigmas, distintos modos de situarse ante esta ciencia. Los autores de este trabajo se encuentran más próximos a la denominada Didáctica Fundamental de la Matemática, tal como se entiende en la llamada «Escuela Francesa». Bajo este paradigma se está abordando una problemática global muy extensa desde el punto de vista racional y científico, cuyo objetivo es el estudio de las condiciones de producción y transmisión de los conocimientos matemáticos. Para ello se ha construido y se continua elaborando un corpus teórico riguroso y pertinente para estudiar los problemas didácticos.

La Didáctica de las Matemáticas, según Bousseau (1986), debe huir de las tentaciones del empirismo. No puede ser una suma de pequeñas constataciones o de relaciones demostradas de modo esporádico, debe ser considerada como una ciencia que estudia la comunicación de los saberes matemáticos y cuyo fin es teorizar los objetos con los que trabaja.

Presentaremos una breve reseña de recientes trabajos de investigación en Didáctica de las Matemáticas que muestran, en diferentes niveles escolares, cómo se presentan situaciones que evidencian el fenómeno de *ilusión de transparencia* de los hechos didácticos.

¿Una noción que no necesita enseñanza? La enumeración de colecciones en la escuela infantil

Si bien las Matemáticas de la Educación Infantil y Primaria son matemáticas que se suelen calificar como «elementales», quisiéramos enfatizar que son ciertamente elementales, pero no en el sentido de *obvias y evidentes* sino en el de *primordiales y fundacionales*, ya que constituyen los fundamentos de lo que se ha de construir después. No es nada trivial, en efecto, el intentar definir el número natural, y mucho menos la actividad de contar o de medir, así como las relaciones entre ellas, por no decir las condiciones necesarias en las que se puedan realizar dichas actividades. Los fundamentos de las Matemáticas son altamente complejos, dejando de parecer triviales a partir del momento en que uno se para a analizarlos, a problematizarlos y reconstruirlos –condición necesaria para enseñarlos–. Sirva de apoyo el siguiente pasaje de Russell (1919):

> Lo mas fácil y claro de la Matemática no es aquello que aparece lógicamente en sus comienzos; es más bien lo que, desde el punto de vista de la deducción lógica, se presenta poco más o menos hacia la mitad. Así como los cuerpos que se ven con más facilidad no son los que están ni muy lejos ni muy cerca, ni los muy grandes ni los muy pequeños, así también los conceptos más fáciles de captar no son ni los demasiado complejos ni los excesivamente simples.

Una de las grandes preocupaciones de los didactas de la matemática, durante los últimos tiempos, ha sido el estudio de los conocimientos que los niños han de poner en funcionamiento en las actividades de construcción del número y de las operaciones aritméticas elementales. Se ha puesto de manifiesto en distintas investigaciones que, en determinadas ocasiones, el alumno, para llevar a cabo ciertas prácticas (sociales o culturales) tiene necesidad de movilizar conocimientos que no pueden ser objeto de enseñanza porque no se presentan bajo una forma cultural conocida. Muchas de las dificultades que aparecen en la construcción de los conocimientos numéricos son debidas a que se solicitan conocimientos al alumno que no están normalmente determinados, ni explicitados en los programas, ni designados por los profesores, tal es el caso de los conocimientos necesarios para llevar a cabo *la enumeración*[3] de colecciones.

Si nos detenemos en el algoritmo de contar, cuya enseñanza y aprendizaje se desarrolla en la educación infantil, sabemos que cualquier alumno para proceder al conteo de los elementos de una colección debe necesariamente:

1. Ser capaz de distinguir dos elementos diferentes en dicha colección, ya sea por un carácter distintivo o por su posición.
2. Elegir un primer elemento de la colección. Aplicarle una función de reconocimiento (identificación, denominación, comparación, confrontación,...).
3. Enunciar la primera palabra de la secuencia numérica («uno»).
4. Determinar el sucesor en el conjunto de elementos no elegidos anteriormente, controlando que es diferente del o de los precedentes.
5. Atribuir una palabra-número (sucesora de la precedente en la secuencia numérica).
6. Conservar la memoria de las elecciones precedentes.
7. Recomenzar los pasos 3 y 4 sincronizándolos.
8. Saber que hemos elegido el último elemento.
9. Enunciar la última palabra-número.

De entre los nueve puntos anteriores extraemos los siguientes:

1. Ser capaz de distinguir dos elementos diferentes de un conjunto dado.
2. Elegir un primer elemento de la colección.
4. Determinar el sucesor en el conjunto de elementos no elegidos anteriormente.
6. Conservar la memoria de las elecciones precedentes.
7. Recomenzar el paso 4.
8. Saber que hemos elegido el último elemento.

La actividad ejecutada por la puesta en práctica de estos seis puntos de modo sucesivo se denomina «enumeración», está definida perfectamente, podemos afirmar que no depende del número y, sin embargo, es necesaria para el procedimiento de contar los elementos de una colección.

Veamos los tres significados del término «enumeración» que distingue Brïand (1993: 37).

Supongamos el conjunto $E = \{a, c, d, e, f, g\}$ y una enumeración $E1= \{d, g, a, c, e, f\}$ de dicho conjunto (figura 1).

- Desde el punto de vista matemático podemos distinguir:

  El resultado: Todo orden total sobre un conjunto finito determina una permutación.

En el medio escolar la actividad de enumeración está enteramente bajo la responsabilidad del alumno. La enumeración no está incluida en los contenidos de los programas escolares ni es señalada como necesaria por los profesores, de tal manera que podemos afirmar que constituye un «punto ciego» en el panorama escolar, ya que no existe como objeto de enseñanza.

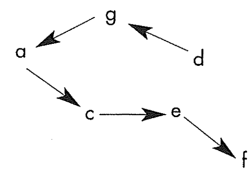


Figura 1

  El algoritmo: Decimos que una enumeración de un conjunto finito es un algoritmo productor de una permutación en este conjunto.

- Desde el punto de vista didáctico podemos señalar:

  La actividad: La enumeración es la descripción de una actividad del alumno (lo que hace cuando enumera).

- Desde el punto de vista de los conocimientos puestos en juego:

  El conocimiento: La enumeración es un conocimiento productor de enumeraciones efectivas. Es un modelo implícito de acción, un conjunto de procedimientos locales puestos en juego por el alumno para realizar concretamente una enumeración.

En el curso de la escolaridad obligatoria, los alumnos deben pasar brutalmente de un control perceptivo de la enumeración de pequeñas colecciones de objetos mostrados, a un control mental y verbal de conjuntos cualesquiera.

En el medio escolar la actividad de enumeración está enteramente bajo la responsabilidad del alumno. La enumeración no está incluida en los contenidos de los programas escolares ni es señalada como necesaria por los profesores, de tal manera que podemos afirmar que constituye un «punto ciego» en el panorama escolar, ya que no existe como objeto de enseñanza. Sin embargo la actividad de enumerar aparece en muchas prácticas sociales y en diversas actividades matemáticas:

- en la construcción de los primeros números;
- en la construcción de las operaciones aritméticas;
- en la cardinación de conjuntos;

3 Enumeración: Expresión sucesiva de las partes de que consta un todo.

Enumerar una colección finita consiste en pasar revista a todos los objetos de esta colección una y sólo una vez. (*Diccionario de la Real Academia Española*)

- en todo el desarrollo de la combinatoria y la probabilidad.

Pero en todas ellas el objeto matemático que se pretende enseñar es otro bien distinto al de la enumeración. La comunidad matemática la ha hecho aparecer como una noción que no necesita enseñanza. Esto muestra una transparencia epistemológica.

Como han puesto de manifiesto investigadores en Didáctica de las Matemáticas, tales como, Berthelot (1993), Briand (1993), Salin (1993), las actividades de enumeración deben ser objeto de enseñanza en los primeros niveles de la escolaridad, antecediendo a las actividades de tipo numérico.

Actualmente estamos desarrollando, en el seno de varios grupos de trabajo de profesoras y profesores de educación infantil (CEP de Jaén, Linares y Úbeda), toda una ingeniería didáctica para abordar el aprendizaje de los conocimientos ligados a la enumeración de colecciones en la escuela infantil.

Semioticidad e instrumentalidad de las prácticas matemáticas escritas

En el desarrollo de las prácticas matemáticas escritas empleamos un sistema de grafías instrumentales que nos permiten operar *–aspecto instrumental–* y, al mismo tiempo, estos instrumentos, nos muestran las operaciones efectuadas y los efectos de estas operaciones *–aspecto semiótico.*

En un trabajo llevado a cabo por Mercier (1995) en el que se estudia la semioticidad y la instrumentalidad de las prácticas matemáticas escritas, este investigador analiza un debate entre dos profesores de educación primaria ante un hecho didáctico cotidiano: una tarea de simplificación de fracciones propuesta a los alumnos.

Simplificar la siguiente fracción

$$\frac{65}{91}$$

...las actividades de enumeración deben ser objeto de enseñanza en los primeros niveles de la escolaridad, antecediendo a las actividades de tipo numérico.

La tarea, según manifestaban los profesores, se podía abordar de dos modos distintos:

- descomponiendo los números que figuran en el numerador y en el denominador en producto de factores primos;
- encontrando un número *a* tal que satisfaga

$$\frac{65}{91} = \frac{65/a}{91/a}$$

La segunda modalidad la pueden ir acometiendo los alumnos usando la calculadora, por ensayo y error y, a los ojos de los profesores, este trabajo parece didácticamente mucho más provechoso, toda vez que «matemáticamente era igual una cosa que otra». Vemos en esta afirmación la existencia de una fuerte transparencia epistemológica por parte de los profesores, ya que la búsqueda de la visibilidad y eficacia de los gestos matemáticos de los alumnos les lleva a ocultar la verdadera estructura matemática de la tarea de simplificación de fracciones. Analicemos los dos casos:

El maestro que propone encontrar un número *a*, tal que satisfaga

$$\frac{65/a}{91/a}$$

manifiesta un gran interés en asegurar la *visibilidad de la acción del alumno*. Y, recíprocamente, el alumno que emplea la división por *a*, está *indicando la acción que ha llevado a cabo.*

La *visibilidad de la acción* ejecutada, junto con la *eficacidad didáctica* asignada por los profesores a este método hace que se utilice en clase, no para que los alumnos aprendan algo conceptualmente nuevo –la noción de fracciones equivalentes– sino para que, un conocimiento ya aprendido, la división, sea ahora técnicamente pertinente para el tratamiento de un problema nuevo: la simplificación de fracciones.

En el caso de la tarea llevada a cabo por medio de la descomposición en factores:

$$\frac{65}{91} = \frac{5 \cdot 13}{7 \cdot 13} = \frac{5}{7}$$

la visibilidad de la estructura matemática es superior, ya que en ella se muestra:

- La descomposición de un número en factores primos.
- Una técnica para simplificar una fracción: dividiendo sus dos términos por cualquier factor común.
- La equivalencia de fracciones: toda fracción es igual a todas las del mismo signo que tienen sus términos equimúltiplos[4] de los suyos; aunque no queda patente la descripción de la acción que ha de llevar a cabo el alumno para simplificar, como ocurría en el primer caso.

4 Si una fracción tiene sus términos primos entre sí, cualquier fracción igual a ella tiene sus términos equimúltiplos de los de ésta. (Rey Pastor, 1966: 174-175)

Vemos en este ejemplo cómo puede existir una transparencia epistemológica en los profesores, ya que el objetivo matemático no está sólo en producir alumnos que sean capaces de simplificar, sino en mostrar a los alumnos cómo la propiedad aritmética «anciana y sabia» de la descomposición de un número en sus factores primos (Grecia, s. v a. C) tiene una función mucho más noble (de rango superior dentro del trabajo matemático): la simplificación de fracciones. Por el contrario, si el acento se pone en la «eficacidad» didáctica: buscar la acción que produce una técnica eficaz, nos encontraremos sólo con una técnica de cálculo. Estas prácticas se pagan con una pérdida de la «matematicidad» de los gestos matemáticos. Se produce una auténtica «desmatematización» de las prácticas.

> Los «saber-hacer» enseñados a los alumnos se constituyen en emblemas de la socialización matemática del alumno, pero no serán para él saberes matemáticos de pleno ejercicio. Sólo se pueden considerar como objetos utilitarios. (Mercier, 1995: 150)

Esto nos muestra que existe en los profesores un proceso de transparencia que oculta la dialéctica que hay entre la *semioticidad* y la *instrumentalidad* de las prácticas matemáticas escritas. La escuela, normalmente, prima la instrumentalidad y trivializa la semioticidad.

...muestra que existe en los profesores un proceso de transparencia que oculta la dialéctica que hay entre la semioticidad y la instrumentalidad de las prácticas matemáticas escritas. La escuela, normalmente, prima la instrumentalidad y trivializa la semioticidad.

Los aprendizajes invisibles: Conservación de la información ostensiva

En el trabajo de Pascal (1980), y en el más reciente de Mercier (1992), se pone de manifiesto cómo los alumnos realizan «aprendizajes invisibles» en relación a la conservación de la información ostensiva de las escrituras matemáticas.

La institución escolar, ante las tareas de resolución de ecuaciones, presenta una serie de ecuaciones «normalizadas» y va indicando técnicas de resolución para cada una de ellas. Normalmente se presentan los casos siguientes:

$$ax + b = c,$$

$$ax - b = c,$$

$$ax = b$$

Existe un número muy elevado de alumnos que ante la tarea de resolución de la ecuación $8x(3x + 4) = 0$, proceden adecuadamente igualando a cero los dos factores $8x = 0$, $3x + 4 = 0$, pero mientras que la ecuación $3x + 4 = 0$ la suelen resolver correctamente:

$$3x = -4,\ x = -4/3$$

para la segunda ecuación ($8x = 0$) dan como resultado $x = -1/8$, o bien $x = -8$.

En la realización de tareas algebraicas la expresión $8x = 0$, no es más que un caso particular de la expresión $8x = a$. En ambas, el número 8 es un elemento ostensivo, es decir, un elemento que muestra al alumno una información precisa. Sin embargo la solución $x = 0$, que aparece para el caso en el que $a = 0$, niega toda información que procede del 8, puesto que $x = 0$ podría ser también solución de cualquier ecuación, tal como $5x = 0$, o bien

$$\sqrt{7}x = 0;$$

la solución correcta pierde toda la información ostensiva procedente de la ecuación inicial, entonces el alumno tiende a rechazarla en beneficio de una de las soluciones falsas $x = -8$ o bien $x = -1/8$ que conservan la información que proviene del 8.

Este ejemplo nos muestra cómo los alumnos realizan aprendizajes que son invisibles a la institución escolar y que escapan a la comunicación didáctica del profesor.

Este ejemplo también pone de manifiesto que las prácticas matemáticas escritas suponen la manipulación constante de «ostensivos».

> El trabajo matemático es un trabajo con ostensivos, son instrumentos de pensamiento: no hay pensamiento sin manipulación de ostensivos. (Bosch, 1994: 466)

Sin embargo, desde las instituciones escolares se tienden a primar los elementos no-ostensivos de la matemática (los conceptos) en detrimento de los ostensivos (gestos, grafismos, escrituras,...).

En este sentido Artigue (1989: 14) afirma que «el análisis didáctico debe ayudar al didacta a luchar contra la ilusión de transparencia de la comunicación didáctica inducida por la epistemología escolar y los conocimientos efectivamente construidos por el alumno».

Ilusión de continuum entre el conocimiento cotidiano y el conocimiento científico: la presentación ostensiva de los objetos matemáticos

Uno de los medios posibles que un profesor tiene para introducir un objeto matemático nuevo en el «universo del alumno» es la definición. Haciendo una simplificación epistemológica podemos decir que, en la práctica, estas definiciones se dan por «comprensión»[5] o por «extensión»[6]. No obstante, diferentes investigaciones en Didáctica de las Mate-

5 Comprensión: Conjunto de caracteres que son propios de un concepto.

6 Extensión: Conjunto de objetos concretos o abstractos a los que se aplica un concepto.

máticas han mostrado que existe una práctica de enseñanza muy extendida entre los profesores para introducir objetos matemáticos denominada «presentación ostensiva». No se trata de un dispositivo para la introducción teórica, sino de una serie de «prácticas didácticas».

Ratsimba-Rajohn (1977) fue el primero en identificar bajo el nombre de «introducción ostensiva» todo un conjunto de procedimientos didácticos que no pueden reducirse ni considerarse como una introducción por medio de definiciones.

En la escolaridad elemental, las figuras geométricas, tales como el triángulo, el cuadrado, el círculo, el rectángulo, etc. se suelen presentar a los alumnos de forma ostensiva. El profesor presenta su imagen, sin más. Suministra con sólo «un golpe de imagen» todos los elementos y las relaciones constitutivas de estos objetos geométricos. Estas figuras forman parte de la cultura cotidiana de los niños y rápidamente las reconocen y designan por su nombre. Ahora bien, cuando sea necesario utilizar triángulos o rectángulos cualesquiera, la ostensión fracasará, tan sólo se habrá alcanzado un éxito ilusorio, ya que este modo de presentación impide la generalización y abstracción. El alumno sólo podrá reconocer modelos muy particulares, estrechamente ligados a las figuras que le mostraron «por ostensión».

> La presentación por ostensión consiste en la utilización, en una situación de enseñanza, de la capacidad supuesta del alumno para percibir ciertos objetos y de la ilusión (que tiene el profesor) de que el hecho de que los haya percibido es portador de un conocimiento intelectual eventualmente general y preciso. (Bautier, 1988: 220)

Véase el ejemplo de la figura 2, extraído de un manual escolar.

Según muestran Berthelot y Salin (1992: 79) la geometría es el dominio de las matemáticas en el que más abundan las presentaciones ostensivas:

> El profesor presenta los conocimientos apoyándose sobre la observación dirigida de una realidad sensible o de una de sus representaciones y supone a los alumnos capaces de extender su empleo a otras situaciones.

...aunque la ostensión es uno de los útiles familiares, fáciles y persistentes de introducción de una nueva noción, se constituye en obstáculo didáctico para una fase de generalización.

Fíjate

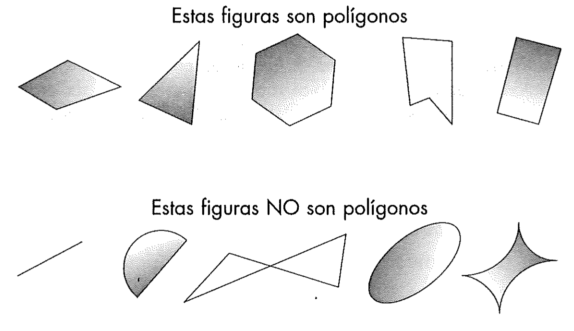


Figura 2. Tomada de Rico y otros (1990: 118)

De esta forma, la figura material se constituye en el mejor mensaje que se podría dar para presentar un objeto de enseñanza. Esta figura tiene el *status* de una aserción, reemplaza los enunciados, define los objetos matemáticos sin ambigüedad, porque se «supone» que todo el mundo los «verá» de la misma manera.

Fregona (1995) indica que la práctica didáctica de la ostensión tiene su causa en la ideología que se va configurando en los profesores a partir de una epistemología empirista, y constituye una respuesta adaptativa a las restricciones de la relación didáctica. Existe una «ilusión de evidencia», puesta de relieve por los profesores y por los autores de los manuales: se «muestra» y se espera que el alumno «vea». Ahora bien, «esto manifiesta una ilusión de *continuum* entre el conocimiento cotidiano y el saber científico» (Fregona, 1995: 101).

Suele ser una práctica económica y eficaz en la gestión de la enseñanza. Su bajo coste es lo que podría justificar el hecho de que su empleo sea tan reiterado en la enseñanza. Ahora bien, aunque la ostensión es uno de los útiles familiares, fáciles y persistentes de introducción de una nueva noción, se constituye en obstáculo didáctico para una fase de generalización.

La reducción progresiva de la densidad y la condensación de las formas del saber: economía del sistema didáctico

Cuando se procede a la organización de los objetos del saber matemático para introducirlos en el sistema de enseñanza, la tendencia que generalmente se sigue es la de minimizar el conjunto de objetos del saber presentes en la vecindad de un determinado objeto de enseñanza. Es el principio de economía de la estructuración didáctica. Existe una transparencia en la consideración de las condiciones y las perturbaciones que engendra todo saber en el ecosistema en el que se desea introducir. La materia enseñada en numerosas ocasiones es naturalizada[7], se llegan a

7 Naturalizar: Hacer que una especie animal o vegetal adquiera las condiciones necesarias para vivir y perpetuarse en un país distinto de aquél donde procede. (Diccionario María Moliner)

crear lenguajes matemáticos nuevos, creaciones léxicas endógenas al sistema didáctico.

> El trabajo transpositivo toma así, casi siempre, la forma consciente, deliberada, de una operación de «elementarización». Ahora bien, hablar de elementarización, considerando ésta como una operación esencialmente anodina es negar los fenómenos de la transposición didáctica y los cambios radicales que se realizan desde el punto de vista de la ecología del saber. (Chevallard, 1994: 160).

Para mostrar un caso de «elementarización» de un objeto matemático, en el que existe una reducción progresiva de la *densidad y la condensación de las formas didácticas del saber*[8], analicemos la denominada «resolución gráfica de ecuaciones».

Es cierto, como afirma Spivak (1978: 69), que si a un matemático se le mencionan los números reales es probable que, sin él quererlo, se forme en su mente la imagen de una recta. La «intuición geométrica» le permitirá interpretar proposiciones acerca de los números en términos de esta imagen y posiblemente incluso le sugerirá métodos para demostrarlas. Debido a esta imagen geométrica, al hablar de los números reales utilizamos frecuentemente la terminología geométrica: al referirnos a un número le damos el nombre de punto, al conjunto R lo denominamos recta real, etc. Sin embargo, este método de «dibujar» números es únicamente un método de representar ciertas ideas abstractas; las demostraciones del análisis matemático no se construirán sobre estas imágenes. La Matemática necesitó siglos para desprenderse del pesado lastre de la intuición geométrica y poder, así, construir lo que Weierstrass denominó la aritmetización del análisis.

> La edad del rigor había llegado ya, sustituyendo los viejos recursos heurísticos y las ideas intuitivas por una perfecta precisión lógica. En 1872 Weierstrass y Heine habían conseguido aritmetizar el análisis. (Boyer, 1986: 697)

Tanto los profesores como los manuales escolares, ante la tarea de resolución de ecuaciones, tratan de darle una mayor significación mediante la representación gráfica. Se trata de un recurso ostensivo que pretende mostrar de forma inmediata la significación del trabajo algebraico. En los libros de texto este trabajo recibe el nombre de *resolución gráfica de ecuaciones.*

Una vez presentado en los manuales el método de resolución algebraico que es complejo y abstracto, se presenta un nuevo método de resolución –el gráfico– que, por el contrario, es sumamente evidente, intuitivo, elemental. Podemos observar cualquier manual escolar para detectar estas características. En los ejemplos que proponen, normalmente, la función cuadrática presenta como puntos de corte con la recta real aquellos que tienen como abscisas exclusivamente números enteros. Se proponen al alumno como los únicos casos posibles, como si todas las ecuaciones se pudiesen resolver de ese modo. La materia enseñada se *naturaliza.* El trabajo transpositivo toma una forma consciente y deliberada de elementarización[9].

La «resolución gráfica de ecuaciones» permite a los profesores poner en práctica un contrato didáctico ostensivo en cuanto a la representación gráfica de funciones:

[...]

Esta utilización transparente y naturalizada del gráfico de funciones se constituye en un obstáculo didáctico.

Esta presentación intenta reducir al mínimo la «densidad y la condensación de las formas didácticas del saber» (Aussude, 1994: 140). Esto implica una ilusión de transparencia en cuanto a la consideración del saber puesto en juego.

La pretendida «resolución gráfica de ecuaciones» surge así en el sistema didáctico como producto de una necesidad didáctica para dar significación a las prácticas algebraicas, pero se conduce a través de un proceso de economía didáctica que se refleja a través de una gran reducción de la densidad de los objetos del saber presentes:

- Los números racionales, irracionales, reales, no aparecen, su lugar es *económicamente ocupado* por los naturales.
- La representación de funciones se lleva a cabo a través de una muy particular tabla de valores formada solo por números enteros.
- Los puntos de corte de la parábola (o la recta) con el eje de abscisas nos ofrecen la solución de modo *inmediato y maravilloso.*

La elementarización y naturalización de un saber científico, como es en este caso el Teorema de Bolzano

> Si f(x) es continua en el intervalo cerrado a, b, y en los extremos toma valores f(a) y f(b) de signos opuestos, se anula por lo menos en un punto interior. (Rey Pastor, 1969: 396)

conduce a una presentación escolar ingenua y transparente.

La «resolución gráfica de ecuaciones» permite a los profesores poner en práctica un contrato didáctico ostensivo en cuanto a la representación gráfica de funciones:

> El lugar atribuido por el profesor al gráfico cartesiano está basado en una «falsa transparencia» de la representación gráfica, pero a su vez el gráfico sirve justamente para llevar a cabo la transposición didáctica de la noción de función. (Lacasta, 1995: 271)

Esta utilización transparente y naturalizada del gráfico de funciones se constituye en un obstáculo didáctico. Así se muestra en un trabajo de investigación llevado a cabo por Ruiz Higueras (1994,

8 Los objetos matemáticos viven en el sistema didáctico en una continua y constante interrelación de unos con otros formando conjuntos estructurados que pueden ser más o menos amplios. A estos conjuntos Aussude (1994: 140) los denomina «formas didácticas».

9 Transformar en obvio, evidente.

1998) en el que más del 70% de los alumnos de bachillerato y COU a los que se propuso la siguiente tarea:

> Si tuvieses que explicar a un alumno de 1.° de BUP lo que es una función matemática, ¿qué le dirías?
>
> ¿Le indicarías algunos ejemplos?, ¿cuáles?
>
> ¿Le propondrías algún ejercicio, o algún problema, para que él lo resolviese? Indica alguno.

Propusieron como ejercicios la representación gráfica de funciones tales como

$$y = x^5 - 2x\sqrt{x-2}$$

cuya representación gráfica encierra una gran complejidad.

> Esto es debido a la transparencia epistemológica con que le son presentadas las representaciones gráficas de funciones, tanto por los manuales como por los profesores en el aula. Se reduce a una algoritmización: damos valores (naturales o enteros) a la variable independiente, obtenemos pares, los situamos en los ejes cartesianos e inmediatamente los unimos, obteniendo la gráfica de la función. Esto conduce a los alumnos a construir conocimientos excesivamente locales, que pueden ser correctos en ciertos límites, pero generalmente los alumnos ignoran la existencia de dichos límites. (Ruiz-Higueras y Rodríguez, 1996: 247)

Fuera de dichos límites, la naturalización de la representación de gráficos conducirá a los alumnos a cometer errores. Se constituirá en un obstáculo didáctico fruto de la reducción de la *densidad* y la *condensación* de las formas didácticas del saber. Esto hará que los alumnos, cuando estudien matemáticas superiores, corran el peligro de considerar las demostraciones matemáticas formales como inútiles, como algo gratuitamente añadido, ya que todo «se ve» y «se muestra» perfectamente en el gráfico.

Desde la institución escolar se vive la ficción de considerar los objetos de enseñanza como copias, si bien simplificadas pero *fieles*, de los objetos de la ciencia; ilusión de transparencia que ignora y que impide tomar consciencia de la distancia que separa la economía de los dos sistemas: el sistema científico-matemático y el sistema de enseñanza de las matemáticas.

...es preciso que estas investigaciones se realicen con una vigilancia epistemológica que ponga al descubierto los fenómenos de transparencia y, de esa manera, desechar los proyectos irreflexivos sobre la enseñanza que se inspiran en la creencia de que es posible cambiar a voluntad, cualquier relación didáctica...

Para ser conscientes de esta distancia, Artigue (1989) propone llevar a cabo un serio análisis epistemológico de los objetos matemáticos de enseñanza:

> El análisis epistemológico debe ayudar al didacta a desprenderse de la *ilusión de transparencia* de los objetos del saber que manipula y debe asimismo, ayudarle a liberarse de las representaciones epistemológicas erróneas que tiende a introducir en su práctica de enseñanza. (Artigue, 1989: 2)

Reflexión final

Dada la limitación de este trabajo, creemos que los casos que hemos presentado nos han permitido llevar a cabo una reflexión, desde la Didáctica fundamental de las Matemáticas, sobre la presencia del fenómeno de transparencia en diferentes hechos didácticos. Este tipo de análisis está muy distante de todo psicologismo y constituye un núcleo muy significativo en el ámbito de las investigaciones llevadas a cabo en nuestra área de conocimiento.

Quisiéramos, para terminar, recordar lo que Durkhein (1858-1917) consideraba a propósito de los hechos sociales y que bien puede iluminar nuestro camino en el análisis didáctico del saber matemático. Según Durkhein, la Sociología no pudo surgir hasta que no se aceptó que las sociedades están sometidas a leyes que se derivan necesariamente de su naturaleza y que, además, la expresan. Durante siglos los hombres han creído que en la sociedad todo podía ser arbitrario, contingente; que los legisladores o los reyes podían, como los antiguos alquimistas, cambiar el aspecto de las sociedades, hacerlas pasar de un modelo a otro; ilusión del tecnócrata que cree que puede cambiar las instituciones por decreto. En realidad, estos supuestos milagros eran ilusorios, y esta ilusión dio lugar a graves equívocos.

Han existido muchas resistencias para admitir que existen leyes y principios que analizan, estudian y modelizan el funcionamiento de la sociedad[10], pero lo mismo ocurrió con la economía e incluso con campos como la biología o la medicina donde su cumplimiento nos parece hoy incuestionable.

Podemos estar seguros que en nuestra ciencia –la Didáctica de las Matemáticas– van a existir los mismos prejuicios para su aplicación. Vamos a sostener durante bastante tiempo resistencias que sólo la investigación sobre los hechos didácticos podrá vencer.

Pero es preciso que estas investigaciones se realicen con una vigilancia epistemológica que ponga al descubierto los fenómenos de transparencia y, de esa manera, desechar los proyectos irreflexivos sobre la enseñanza que se inspiran en la creencia de que es posible cambiar, a voluntad, cualquier relación didáctica, sin tener en cuenta el conjunto de condiciones y restricciones que pesan sobre el sistema didáctico y, principalmente, aquellas que están íntimamente relacionadas con el saber puesto en juego: *con la matemática.*

10 A finales del siglo XVIII se comenzó a vislumbrar la idea de que el reino social tiene sus propias leyes, como los demás reinos de la naturaleza. Fue a comienzos del siglo XIX cuando Auguste Comte (1798-1857) en su *Cours de Philosophie positive* inició el estudio científico de la sociología. Fue el creador del positivismo y tuvo el mérito de ser el padre de la sociologia o «física social».

De este fenómeno de transparencia participan frecuentemente las instituciones periféricas del sistema de enseñanza (la «noosfera»[11]). Estas instituciones tienen normalmente un apetito insaciable de innovación con el que quieren cambiar la obsolescencia de viejas fórmulas que no tuvieron el éxito pretendido en la enseñanza. Dan normas generales que borran la especificidad de los saberes puestos en juego. Evidencian una ilusión de transparencia que contradice el espíritu científico.

El pensamiento racional científico, según Bachelard, sólo podrá avanzar con criterios que permitan rectificar y mejorar el pasado:

> El racionalismo es conciencia de una ciencia rectificada. (Bachelard, 1978: 117)

Ese es el objeto de nuestra ciencia y en ese camino estamos, desde diferentes paradigmas, desde diferentes escuelas de pensamiento, con diferentes metodologías, tratando de buscar la verdad, tratando de borrar la ilusión primera de transparencia que ofrecen los hechos didácticos.

El pensamiento racional científico, según Bachelard, sólo podrá avanzar con criterios que permitan rectificar y mejorar el pasado...

Referencias bibliográficas

ARTIGUE, M. (1989): «Epistemologie et didactique», *Cahier de DIDIREM*, 3, IREM, Université de Paris VII.

AUSSUDE, T. (1994): *Densité et condensation de les formes didactiques du savoir*, Centre National de Recherche Educative, Université de Paris VII.

BACHELLARD, G. (1978): *El racionalismo aplicado*, Paidós, Buenos Aires.

BACHELARD, G. (1983): *La formación del espíritu científico*, Siglo XXI, Buenos Aires (Edición original, 1948).

BAUTIER, T. (1988): *Recherches sur la perspective*, D.E.A., Bordeaux.

BERTHELOT, R. y M. H. SALIN (1993): *L'Enseignement de l'espace et de la geometrie dans l'escolarité obligatoire*, Thése, Bordeaux.

BORDIEU, P. (1973): *El oficio de sociólogo. Presupuestos epistemológicos*, Siglo XXI, México.

BOSCH, M. (1994): *La dimensión ostensiva de la actividad matemática*, Tesis doctoral, Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Barcelona.

BOYER, (1986): *Historia de las Matemáticas*, Alianza Universidad, Madrid (Edición original, 1968).

BRIAND, N. (1993): *L'Énumeration dans le mesurage des collections. Un dysfonctionnement de la transposition didactique*, Thèse de doctorat, Université de Bordeaux.

BROUSSEAU, G. (1986): *Théorisation des phénomenes d'enseignement des Mathématiques*, These de Doctorat d'Etat, Université de Bordeaux.

CHEVALLARD, Y. (1991*a*): *Aspects d'un travail de theorisation de la Didactique des Mathematiques. Etude du cas de l'algebre élémentaire*, Departament de Mathématiques, Université d'Aix Marseille.

CHEVALLARD, Y. (1991*b*): *La transposition didactique: Du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD, Y. (1994): «Les processus de transposition didactique et leur theorisation», en G. ARSAC, Y. CHEVALLARD, J. L. MARTINAND y A. TIBERGHIEN (eds.): *La transposition didactique à l'épreuve*, La Pensée Sauvage, Grenoble:

DECAUNES, L. (1958): *Les idées noires*, Seuil, París.

FREGONA, D. (1995): *Les figures plenes comme «mileu» dans l'enseignement de la geometrie: interactions, contrats et transpositions didactiques*, Thése de Doctorat, Université de Bordeaux

LACASTA, E. (1995): *Los gráficos cartesianos en la enseñanza secundaria: ilusiones y controles*, Tesis doctoral, Université de Bordeaux.

MERCIER, A. (1992): *L'éleve et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique*, Thése de doctorat, Université de Bordeaux.

MERCIER, A. (1995): «Le traitement public d'éléments privés du rapport des èléves aux objets de savoir mathématiques», en G. ARSAC, D. GRENIER y A. TIBERGHIEN (eds): *Les différents types de savoir et leus articulation*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

PASCAL, D. (1980): *Le probleme du zero, l'economie de l'echec dans la classe et la production de l'erreur*, DEA, Université de Bordeaux et d'Aix Marseille II.

RATSIMBA-RAJOHM, H. (1977): *Etude didactique de l'introduction ostensive des objets mathématiques*, Memoire de D.E.A., IREM de Bordeaux.

REY PASTOR, (1969): *Análisis matemático, vol. 1,* Kapelusz, Buenos Aires.

REY PASTOR, J. (1966): *Elementos de Análisis Algebraico,* Biblioteca Matemática, Madrid:

RICO, L. y otros (1990): *Matemáticas, 5.° de EGB*, Algaida, Sevilla.

RUIZ HIGUERAS, L. (1994): *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: Análisis epistemológico y didáctico,* Tesis doctoral, Universidad de Granada.

RUIZ HIGUERAS, L. y J. L. RODRÍGUEZ FERNÁNDEZ (1996): «The transformation of mathematical objets in the didactic system: The case of the notion of function», en L. PUIG y A. GUTIÉRREZ (eds.): *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, n.° 4, 243-251.

RUIZ HIGUERAS, L. (1998): *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico,* Servicio de Publicaciones e Intercambio Científico, Universidad de Jaén.

RUSSEL, B. (1919): *Introduction of mathematic philosophy,* George Allen & Unwin, Londres.

SPIVAK (1978): *Calculus*. Reverté, Barcelona.

11 En el sistema de enseñanza influye, lo que Chevallard (1991) denomina «noosfera» que comprende a personas tales como profesores, representantes de las asociaciones de padres, investigadores, autores de textos y materiales curriculares, políticos, administradores, etc.

Luisa Ruiz
Área de Didáctica
de las Matemáticas
Universidad de Jaén
José Luis Rodríguez
Instituto de Bachillerato
a Distancia
Jaén

SUMA 32
noviembre 1999, pp. 79-89

Algunas ideas para la resolución de ecuaciones

Javier Peralta

IDEAS Y RECURSOS

A pesar de la importancia que tienen las ecuaciones en el currículo de la Enseñanza Secundaria, por diversas razones –acaso la principal sea el efecto nocivo de rigidez mental ocasionado por el excesivo automatismo en la utilización de reglas–, el alumno no suele contar con muchos recursos para resolverlas. En este artículo se analizan las distintas causas, y se presentan otros procedimientos algebraicos y geométricos tomados de la historia de la matemática, junto a ciertas ideas que los complementan o generalizan.

EL PRESENTE TRABAJO, pensado en los últimos cursos de la Educación Secundaria, se ocupa de la resolución de ecuaciones. Por ello debemos de comenzar preguntándonos: ¿qué ecuaciones sabe resolver el alumno de este nivel educativo?

Evidentemente conoce, en primer lugar, los métodos de resolución de las ecuaciones de grados uno y dos (y de las reducibles a estas últimas, como las bicuadradas y ciertas irracionales). Seguramente haya oído hablar también del enunciado del teorema fundamental del álgebra, y acaso sepa, asimismo, que las posibles raíces enteras de una ecuación algebraica deben de ser divisores de su término independiente. Con la excepción hecha de las bicuadradas, sus recursos para resolver ecuaciones de grado superior a dos se reducen, pues, a la aplicación del último aserto para el cálculo de las raíces enteras y, a lo sumo, a la utilización del teorema de Bolzano para la aproximación de las restantes raíces reales.

La situación más frustrante sucede seguramente con las ecuaciones de tercer grado. Es probable que el alumno sepa que el número de raíces imaginarias –si existen– de una ecuación polinómica con coeficientes reales debe de ser un número par, de lo que se deduce que todo polinomio de grado impar con coeficientes reales tiene al menos una raíz real. Sin embargo, para hallar una raíz real de ecuaciones tan sencillas como la $x^3 + x + 1 = 0$, sólo dispone de las herramientas ya mencionadas: probar con 1 y –1 (que no son raíces) o tratar de obtener aproximaciones suyas «a ciegas», mediante la aplicación del teorema de Bolzano.

Estos son los motivos que nos han llevado a escribir este artículo, que empieza mostrando la fórmula de Cardano para resolver ecuaciones de tercer grado. Dicha fórmula, como es sabido, resulta poco operativa en el llamado *caso* *irreducible*, por lo que exponemos un procedimiento complementario, basado en la obra de Bombelli.

Tras hacer unas reflexiones didácticas sobre la resolución de ecuaciones y de apuntar algunas ideas en relación con ello, se indican algunos métodos gráficos para resolverlas. El más importante, sin duda, es el debido a Descartes, que reduce el cálculo de las soluciones de una ecuación de tercer o cuarto grado a hallar la intersección de una circunferencia con la parábola $y = x^2$; los restantes procedimientos que se presentan están inspirados en el mismo.

La ecuación de grado tres

Como ya se ha dicho, el alumno tiene muy pocos recursos para la resolución de las ecuaciones algebraicas, a pesar de haber sido de algún modo estudiadas, en muchos casos, a lo largo de cinco cursos en el plan nuevo (de 2.°de ESO a 2.° de Bachillerato) o en seis en el plan antiguo (de 7.° de EGB a COU). No sería sin embargo muy costoso informarle, en primer lugar, de los resultados existentes sobre las posibilidades de resolución y, en segundo, suministrarle la fórmula para la obtención de las raíces de la ecuación de grado tres. La demostración de esta última no es difícil, y puede recomendarse, por ejemplo (Dunham, 1992) a los alumnos interesados en conocerla.

Respecto a la primera de las cuestiones planteadas, convendría decir que existen procedimientos para resolver las ecuaciones de grados tres y cuatro por radicales, debidos principalmente a los algebristas del siglo XVI (Luca Pacioli, Tartaglia, Cardano, Bombelli, Vieta,...); y que no hay sin embargo ninguna expresión radical de los coeficientes de una ecuación de grado mayor que cuatro que proporcione las raíces de la misma (resultado obtenido por el noruego Abel en 1824). Esto es, que a pesar de haber fórmulas para la resolución de las ecuaciones de grados 1, 2, 3 y 4, no existen para las de grado mayor o igual que 5.

En cuanto a la resolución de las ecuaciones de grado tres, seguramente procede comenzar diciendo que su interés puede surgir de manera natural en el alumno con ciertas inquietudes matemáticas o, en todo caso, cabe ser fomentado fácilmente por el profesor. En efecto, parece obvio señalar que si el objetivo fundamental del álgebra en estos niveles es el estudio de las ecuaciones –especialmente las polinómicas–, y a lo largo de varios cursos únicamente se han conseguido resolver las de grados uno y dos o las reducibles a éstas, es lógico, para completar esta teoría, plantearse la posibilidad de hallar asimismo las soluciones de las ecuaciones de grado tres y, más tarde, las de grado superior.

Pero existen también otras razones de tipo histórico que animan a abordar la ecuación cúbica, alguna de las cuales se mencionan a continuación. En primer lugar hay que considerar que, entre la resolución de las ecuaciones de primer y segundo grado por Al-Khuwarizmi (siglo IX) y las de tercero por los algebristas del cinquecento, hubo de transcurrir un largo período de tiempo, debido a las dificultades –Luca Pacioli, por ejemplo, afirma que «es tan imposible su resolución en el estado actual de las cosas como la cuadratura del círculo»– y a los numerosos avatares que acompañaron su descubrimiento, lo que atestigua la trascendencia del hallazgo. En segundo, que fue precisamente del intento de hallar las soluciones de las ecuaciones de grado tres de donde surgieron los números complejos, como se verá más adelante. En tercero, la importancia histórica que ha significado la resolución de determinadas ecuaciones cúbicas, como la ecuación de Leonardo de Pisa (1225): $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ (Scheid, 1986), o, aún más, aquellas a las que quedaron reducidas algunos problemas clásicos de la geometría griega, como la trisección del ángulo ($4x^3 - 3x - \cos\alpha = 0$, siendo α en ángulo en cuestión) o la construcción del heptágono regular (Courant y Robbins, 1970), etc.

...fue precisamente del intento de hallar las solucione de las ecuaciones de grado tres de donde surgieron los números complejos

A la vista de tales argumentos parece que podría ser interesante, si hubiera tiempo para ello, tratar de ampliar de algún modo los conocimientos sobre este tema con la resolución de la ecuación de grado tres.

Sea:

$$X^3 + AX^2 + BX + C = 0 \quad (1)$$

(siempre podemos suponer que el coeficiente de X^3 es la unidad).

Evidentemente puede escribirse de la forma:

$$x^3 + ax + b = 0 \quad (2)$$

sin más que hacer $X = x - A/3$, por lo que es suficiente saber resolver esta última. Y la expresión que proporciona las raíces de (2) es la conocida *fórmula de Cardano*:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} \quad (3)$$

Ejemplo 1. Resolver la ecuación:

$$x^3 + x + 1 = 0$$

Resulta:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{27}}} = -0,68\ldots$$

Puede probarse que las otras dos raíces son imaginarias.

El «caso irreducible»

Queda sin embargo una laguna en la resolución de la ecuación cúbica: el llamado *caso irreducible*, que tiene lugar cuando aparecen radicandos negativos en las raíces cuadradas de la fórmula de Cardano; esto es, si:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3 < 0$$

o lo que es lo mismo, si

$$4a^3 + 27b^2 < 0.$$

Ejemplo 2. La ecuación

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

tiene tres raíces reales:

$$4, \quad -2+\sqrt{3}, \quad -2-\sqrt{3}$$

sin embargo, al aplicar la fórmula de Cardano se obtiene:

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

expresión en la que quedan ocultas las tres raíces anteriores.

A partir de situaciones como la creada en este ejemplo, Bombelli inicia el cálculo con raíces cuadradas de números negativos, de manera muy similar a como se opera actualmente con números complejos, por lo que puede considerarse el precursor de los mismos. Como se señala en Etayo (1986), es curioso que su introducción surja al resolver ecuaciones de tercer grado, y no de segundo, que es la manera habitual de presentarlos. La causa estriba en que el caso irreducible de estas últimas es el correspondiente a la existencia de dos raíces no reales, que es interpretado entonces como que la ecuación no tiene soluciones; en la ecuación cúbica, sin embargo, el caso irreducible podría corresponder a tres raíces reales, aunque para su determinación mediante la fórmula de Cardano fuera necesario utilizar como intermediarios a los números complejos.

Bombelli inicia el cálculo con raíces cuadradas de números negativos, de manera muy similar a como se opera actualmente con números complejos, por lo que puede considerarse el precursor de los mismos.

Aunque el problema quedó definitivamente resuelto con el desarrollo de los números complejos y la posibilidad de manejarlos indistintamente en forma binómica o en forma polar, es indiscutible que para hallar las soluciones de la ecuación se precisan calcular raíces cúbicas de números complejos, lo que conlleva alguna dificultad; motivo que resta utilidad a la fórmula de Cardano.

No obstante, incluso el caso irreducible puede resolverse fácilmente en muchas ocasiones, como vamos a ver a continuación. Nos apoyaremos en buena parte en las mismas ideas que aparecen en el primero de los cinco libros de los que consta el *Algebra* de Bombelli.

Hagamos en primer lugar una observación. Es sencillo probar que:

$$\text{si } \sqrt[3]{m+ni} = p+qi \text{ entonces } \sqrt[3]{m-ni} = p-qi$$

(basta para ello con elevar al cubo), por lo que para hallar x en la fórmula de Cardano:

$$x = \sqrt[3]{m+ni}+\sqrt[3]{m-ni}$$

sólo se precisa calcular la primera raíz cúbica.

Si $\sqrt[3]{m+ni} = p+qi$, entonces $m + ni = (p + qi)^3$, e identificando el cuadrado de sus módulos: $m^2 + n^2 = (p^2 + q^2)^3$, por lo que $\sqrt[3]{m^2+n^2} = p^2$. De ello se deduce, evidentemente, que:

$$p^2 < \sqrt[3]{m^2+n^2} \qquad (4)$$

Por otro lado, si $m + ni$ tiene por módulo r y por argumento α, el módulo de sus tres raíces cúbicas es $\sqrt[3]{r}$ y el argumento, $(\alpha + 360°k)/3$, $0 \leq k \leq 2$. Si suponemos que $n > 0$, entonces $0 \leq \alpha \leq 180°$, por lo que el argumento de la raíz cúbica correspondiente a $k = 0$ cumplirá: $0 \leq a/3 \leq 60°$, y por lo tanto al menos una de sus raíces cúbicas se encuentra en el primer cuadrante.

Ahora bien, como:

$$m + ni = (p + qi)^3 = (p^3 - 3pq^2) + (3p^2q - q^3)i,$$

será

$$m = p^3 - 3pq^2 \qquad (5)$$

y según lo anterior: p > 0, por lo que:

$$p^3 > m \qquad (6)$$

Las relaciones (4), (5) y (6) permiten en muchas ocasiones hallar una de las raíces cúbicas de un número complejo: (4) y (6) para la determinación de p y, posteriormente, (5) para obtener q. Veámoslo en el caso que nos ocupa:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

correspondiente al Ejemplo 2.

Se debe cumplir que:

$$p^2 < \sqrt[3]{2^2+11^2} = 5, \text{ y que } p^3 > 2$$

Si hallamos las soluciones en las que p es un número natural distinto de cero, de la primera desigualdad se deduce que $p = 1$ o $p = 2$, y de la segunda, que $p = 2$. Como además $m = p^3 - 3pq^2$, será: $2 = 8 - 6q^2$, luego $q = 1$ (como $2 + 11i$ está en el primer cuadrante, una raíz cúbica suya también lo estará).

Una solución de la ecuación $x^3 - 15x - 4 = 0$, es por tanto:

$$x = \sqrt[3]{2+11i}+\sqrt[3]{2-11i} = (2+i)+(2-i) = 4$$

Dividiendo el polinomio por $x - 4$ se llega a una ecuación de segundo grado cuyas raíces son $-2 \pm \sqrt{3}$

El procedimiento descrito para el cálculo de la raíz cúbica de un número complejo puede incluso simplificarse si dicha raíz cúbica procede de la resolución de una ecuación de tercer grado mediante la fórmula de Cardano, como es el caso que nos ocupa.

El procedimiento descrito para el cálculo de la raíz cúbica de un número complejo puede incluso simplificarse si dicha raíz cúbica procede de la resolución de una ecuación de tercer grado mediante la fórmula de Cardano

En efecto, sea la ecuación (2), cuyas soluciones vienen dadas por (3), y se trata de hallar:

$$\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{m+ni} = p+qi$$

siendo:

$$m = -b/2 \quad y \quad ni = \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}$$

esto es:

$$n^2 = -\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3$$

La desigualdad (4) se convierte entonces en:

$$p^2 < \sqrt{m^2+n^2} = \sqrt[3]{-\left(\frac{a}{3}\right)^3} = -\frac{a}{3} \text{ y la (6) en } p^3 > -b/2$$

Se concluye por tanto que en el caso de resolución de la ecuación (2), la determinación de p puede hacerse a partir de las desigualdades: $p^2 < -a/3$ (4'), $p^3 > b/2$ (6'). El cálculo de q, una vez hallado p, se obtiene, como antes, de (5).

Ejemplo 3. Resolver la ecuación:

$$x^3 - 87x - 130 = 0.$$

Para resolver esta ecuación los alumnos deberían probar antes con los divisores del término independiente: ±1, ±2, ±5, ±10, ±13, ±26, ±65, ±130, para tratar de hallar las raíces enteras. Sin embargo, si se conoce la fórmula de Cardano, se tiene:

$$x = \sqrt[3]{65+\sqrt{-20164}}+\sqrt[3]{65-\sqrt{-20164}} = \sqrt[3]{65+142i}+\sqrt[3]{65-142i}$$

Para el cálculo de $\sqrt[3]{65+142i} = p+qi$ se busca en primer lugar un número natural p que verifique: $p^2 < 29$, $p^3 > 65$. De la primera desigualdad se obtiene que: $p = 1, 2, 3, 4, 5$, cuyos cubos son: 1, 8, 27, 64, 125; de la segunda se llega a que $p = 5$. Como $65 = p^3 - 3pq^2$, se tiene: $q = 2$.

En consecuencia:

$$x = (5 + 2i) + (5 - 2i) = 10.$$

Dividiendo $x^3 - 87x - 130$ por $x - 10$ se llega a una ecuación de segundo grado, cuyas raíces son $5 \pm 2\sqrt{3}$ Las raíces de la ecuación propuesta son, por lo tanto, 10, $5+2\sqrt{3}$, $5-2\sqrt{3}$.

Unas reflexiones didácticas

En ocasiones, el estudio de un determinado tema aparece disgregado en distintos lugares en los que se abordan diferentes aspectos del mismo; por ello es conveniente realizar una síntesis posterior para adquirir una visión más completa del problema y de sus resultados. Se trata, pues, de un mismo capítulo de la matemática pero que, por diversas razones, se aborda de manera fraccionada y que requiere por tanto volver a contemplar conjuntamente.

Un ejemplo de lo anterior sucede con las ecuaciones: aparece por un lado la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado; por otro, la factorización de polinomios; y en un lugar distinto los números complejos, que suelen introducirse con la resolución de ciertas ecuaciones, y donde frecuentemente se menciona el enunciado del teorema fundamental del álgebra y algunas propiedades en relación con las raíces imaginarias.

Otras veces se presenta, sin embargo, una situación en cierto modo inversa de la anterior, que tiene lugar cuando unidades temáticas independientes, pertenecientes incluso a distintas ramas de la matemática, se utilizan para intentar resolver un mismo problema desde diferentes ópticas y con técnicas diversas. Y esto ocurre, de nuevo, con la resolución de ecuaciones.

Por su propia naturaleza es lógico que las ecuaciones se aborden con procedimientos algebraicos, como así sucede, aunque también es normal que se usen otros medios, como por ejemplo, el teorema de Bolzano –perteneciente al análisis matemático– para la aproximación de raíces. Y este hecho no es excepcional, pues también la geometría, y de nuevo el análisis, son útiles para ello.

Como es sabido, efectivamente la geometría ha estado presente en la resolución de ecuaciones frecuentemente. Baste con citar al matemático árabe Al-Khuwarizmi, quien resuelve geométricamente ecuaciones de segundo grado, como aparece en su obra *Sobre el cálculo mediante la reducción y la restauración* (Boyer, 1986); o tener en cuenta que las identidades algebraicas que utiliza Cardano para la resolución de la ecuación cúbica (Dunham, 1992) están basadas en razonamientos geométricos, como así mismo ha sucedido durante muchos siglos con otras identidades.

En la línea de lo anterior hay que destacar también la importante contribución de Descartes, quien en su *Geometría* –último apéndice de su *Discurso del Método*– se ocupa de «cómo el cálculo de la aritmética se relaciona con las operaciones de la geometría»; es decir, se unifica el álgebra con la geometría, dando lugar al nacimiento de la geometría analítica. De esta manera, y mediante el empleo de coordenadas, se pueden trasladar determinados problemas geométricos al terreno algebraico, y recíprocamente, identificándose así curvas con ecuaciones.

no nos oponemos a que se traten de sistematizar ese tipo de problemas, pero sí a que se haga de forma inflexible, sin sugerir una reflexión previa anterior al inicio del camino

De esa identificación y de la evolución de las ideas del análisis matemático surge la teoría de funciones, que con la ayuda del cálculo diferencial completa el estudio de gráficas –que anteriormente se realizaba con el único soporte de la geometría analítica–, lo que permite investigar sus propiedades locales con el auxilio de los métodos infinitesimales. En las páginas siguientes, precisamente, abordaremos nuestro problema –la resolución de ecuaciones– ayudándonos de la geometría analítica y, en menor medida, del cálculo diferencial.

En otro orden de ideas, no podemos pasar por alto un hecho importante desde el punto de vista didáctico y que guarda cierta relación con el asunto que nos ocupa. Nos referimos a los trastornos que ocasiona en los alumnos el automatismo en la resolución de problemas; en nuestro caso, en lo que afecta al dibujo de gráficas de funciones, que será tratado a continuación.

No es infrecuente que los profesores, en el transcurso de la Educación Secundaria y con anterioridad al estudio de las aplicaciones del cálculo diferencial al dibujo de curvas, se limiten a representar solamente gráficas de rectas y parábolas -posiblemente debido al eterno problema de escasez de tiempo-, y excepcionalmente alguna otra cónica, cuando en realidad podrían haberse dibujado muchas otras. Tampoco es inusual, ni mucho menos, el que se aconseje seguir de forma automática una serie de pasos (hallar el dominio de existencia, los puntos de corte con los ejes, las asíntotas, los extremos locales, etc.) para el dibujo de la curva correspondiente, sin plantearse tan siquiera si en ciertas ocasiones no podría simplificarse este proceso.

Parece obvio señalar que no nos oponemos a que se traten de sistematizar ese tipo de problemas, pero sí a que se haga de forma inflexible, sin sugerir una reflexión previa anterior al inicio del camino. Es más, si tal reflexión se hiciera con carácter general, y no sólo en relación con cada problema concreto, se llegaría a la conclusión de que es posible dibujar –prácticamente sin tener que acudir al cálculo diferencial–, bastantes más funciones que las anteriormente citadas (Peralta, 1995).

Esta consideración debería de estar presente a lo largo de toda la enseñanza secundaria, para que el alumno, guiado por el profesor, fuera construyendo un catálogo de funciones de uso habitual en matemáticas y en otras ciencias. Nos referimos, además de las funciones elementales, como algunas polinómicas y de proporcionalidad inversa –a las cónicas en general–, a las funciones exponencial, logarítmica y circulares, junto a otras cuyas gráficas pueden ser deducidas fácilmente por procedimientos sencillos. Por ejemplo:

$$y = x^3,\ y = x^4, \text{ o más generalmente } y = ax^n + b$$

$$y = \frac{a}{x^n} + b, \quad y = \sqrt{x}, \text{ o mejor } y = \sqrt[n]{x} + K, \ldots$$

que pueden dibujarse con razonamientos muy simples, y que no creemos necesario reproducir.

Con la ayuda del dibujo de las gráficas de las funciones que hemos mencionado, de la geometría analítica y, en ocasiones, del cálculo diferencial, volvemos a dedicarnos al problema que nos ocupa: la resolución de ecuaciones, que trataremos de abordar con métodos gráficos.

Procedimiento gráfico para la resolución de ecuaciones de segundo grado

Aunque las ecuaciones de segundo grado son muy sencillas de resolver algebraicamente, también es fácil hacerlo por el método que se indica a continuación, y que servirá de pauta para su extensión a otras de grado superior en la sección siguiente.

Es evidente que para determinar las raíces de la ecuación de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (7),$$

se puede proceder hallando la intersección de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ con el eje X. Sin embargo, como para dibujar la parábola es necesario calcular los puntos de corte con los ejes, habría que haber resuelto previamente para ello la ecuación anterior.

Puede idearse no obstante un procedimiento muy sencillo para la resolución gráfica: si escribimos la ecuación de la forma $x^2 + px + q = 0$, con $p = b/a$, $q = c/a$, el problema queda reducido a dibujar la parábola $y = x^2$ y la recta $y = -px - q$, y hallar sus intersecciones.

Ejemplo 4. Resolver la ecuación:

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Se dibujan las funciones $y = x^2$, $y = x + 2$ (figura 1), y de su intersección resulta que las raíces son $x = -1$, $x = 2$.

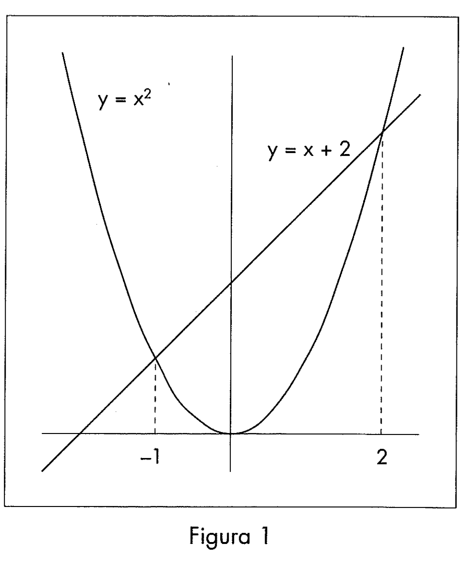


Figura 1

Ejemplo 5. Resolver la ecuación:

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Las gráficas de las funciones $y = x^2$ e $y = -x - 1$ no se cortan (figura 2), lo que significa que la ecuación propuesta no tiene raíces reales.

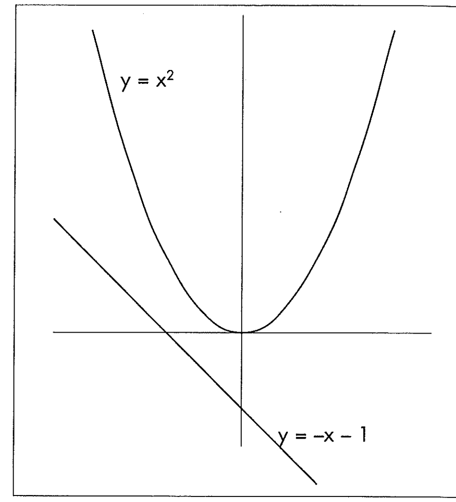


Figura 2

Evidentemente hay otras posibilidades de resolución gráfica de la ecuación (7). Por ejemplo, considerando que sus raíces son los puntos de intersección de la hipérbola $y = -c/x$ con la recta $y = ax + b$.

Ejemplo 6. Resolver la ecuación:

$$x^2 - x - 6 = 0.$$

Se consideran la hipérbola $y = 6/x$ y la recta $y = x - 1$ (figura 3), y se comprueba que se cortan en los puntos de abscisa –2 y 3, que serán las raíces de la ecuación propuesta.

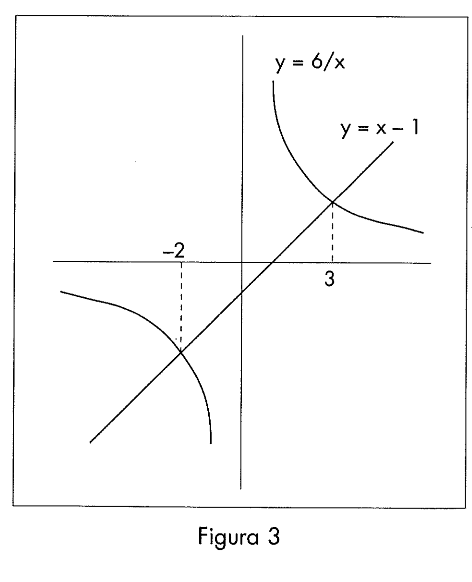


Figura 3

Extensión a otras ecuaciones de grado superior

Toda ecuación de tercer grado,

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (8)$$

puede escribirse de la forma

$$ax^2 + bx + c = -d/x,$$

lo que sugiere encontrar sus soluciones como intersección de las gráficas de las funciones: $y = ax^2 + bx + c$, e $y = -d/x$ (figura 4), perfectamente asequibles a alumnos de estos niveles.

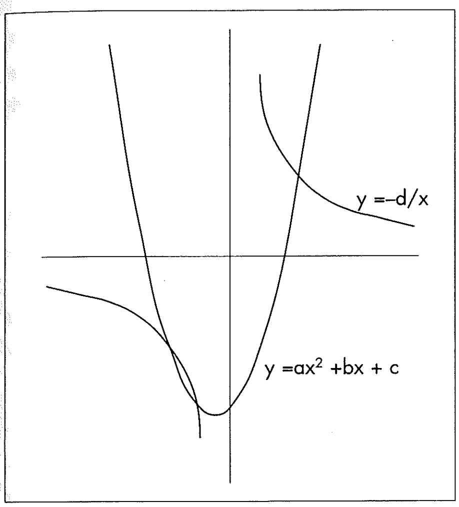


Figura 4

Esta idea es asimismo generalizable a ecuaciones del tipo

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + d = 0$$

cuyas raíces pueden hallarse como intersección de las gráficas de las funciones: $y = ax^2 + bx + c$, e $y = -d/x^{n-2}$.

Ejemplo 7. Resolver la ecuación:

$$x^6 + 2x^5 - 3x^4 + 3 = 0$$

Una vez comprobado que los divisores del término independiente no son raíces, se trata de utilizar el procedimiento anterior. Para ello se consideran la parábola $y = x^2 + 2x - 3$ y la curva de ecuación $y = -3/x^4$ (figura 5).

Como se cortan en los puntos de abscisas $x_1 \in (-3, -2)$, $x_2 \in (-1, 0)$, ésas son sus únicas raíces. Una vez que se ha detectado dónde se encuentran las raíces y que no son enteras, habrá que utilizar algún procedimiento de aproximación para hallar el número de cifras decimales deseables; por ejemplo, el teorema de Bolzano, el método de Newton, el de la *regula falsi* o el de iteración. Pensando en los alumnos a los que va dirigido este trabajo, emplearemos el primero de ellos.

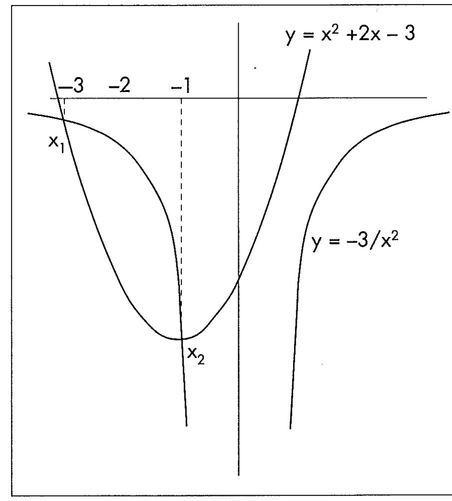


Figura 5

Como la función $f(x) = x^6 + 2x^5 - 3x^4 + 3$ es continua en cualquier intervalo cerrado, y $f(-3) > 0$ y $f(-2,9) < 0$, mientras que $f(-1) < 0$ y $f(-0,9) > 0$, las raíces son: $x_1 = -2,9\ldots$, $x_2 = -0,9\ldots$

También podemos escribir la ecuación de tercer grado (8) como:

$$x^3 = -\frac{1}{a}(bx^2 + cx + d)$$

lo que induce a considerar sus raíces como los puntos de intersección de las funciones:

$$y = x^3 \quad \text{e} \quad y = -\frac{1}{a}(bx^2 + cx + d)$$

cuyas gráficas deben de ser conocidas por los alumnos (figura 6):

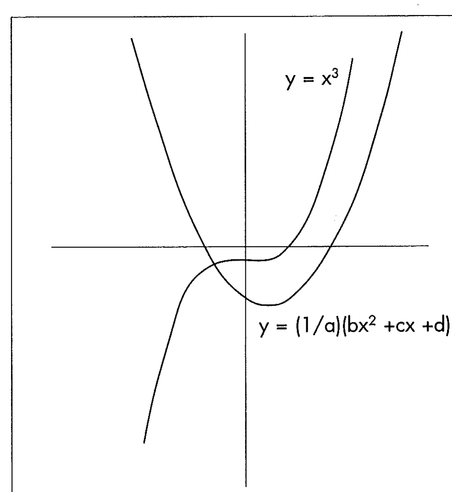


Figura 6

Asimismo este método puede generalizarse a las ecuaciones del tipo:

$$ax^n + bx^2 + cx + d = 0$$

cuyas raíces pueden encontrarse como los puntos de intersección de las gráficas de las funciones :

$$y = x^n \quad \text{e} \quad y = -\frac{1}{a}(bx^2 + cx + d)$$

Ejemplo 8. Resolver la ecuación:

$$4x^5 + x^2 + 4 = 0$$

Sus raíces son los puntos de intersección de las curvas cuyas ecuaciones son (figura 7):

$$y = x^5 \quad \text{e} \quad y = -\frac{1}{4}(x^2 + 4) = -\frac{x^2}{4} - 1$$

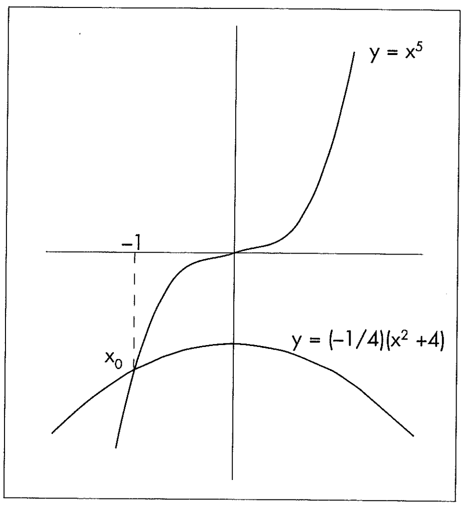


Figura 7

Se observa que únicamente tiene una raíz real x_0, y que $-2 < x_0 < -1$. Como $f(-1) > 0$ y $f(-1{,}1) < 0$, se deduce que $x_0 = -1{,}0\ldots$

Si quisiéramos otra cifra decimal, seguiríamos el mismo procedimiento: como $f(-1{,}04) > 0$, $f(-1{,}05) < 0$, entonces $x_0 = -1{,}04\ldots$; etc.

Método de Descartes para la resolución aproximada de ecuaciones de tercer y cuarto grado

Vamos a exponer a continuación el procedimiento utilizado por Descartes en su *Geometría* para calcular gráficamente las raíces reales de las ecuaciones de tercer y cuarto grado, y que consiste en hallar la intersección de la parábola $y = x^2$ con una circunferencia. Comenzaremos haciendo unas consideraciones sencillas relativas a las ecuaciones de grado n.

...el procedimiento utilizado por Descartes en su Geometría *para calcular gráficamente las raíces reales de las ecuaciones de tercer y cuarto grado, [...] consiste en hallar la intersección de la parábola $y = x^2$ con una circunferencia.*

Evidentemente siempre podemos suponer que el coeficiente de la máxima potencia de x es la unidad. Sea entonces la ecuación:

$$x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (9)$$

Mediante el cambio de variable $x = y + k$, se tiene otra de la forma:

$$y^n + b_{n-1}\, y^{n-1} + \ldots + b_1 y + b_0 = 0 \quad (10)$$

con $b_{n-1} = nk + a_{n-1}$, por lo que si elegimos $k = -a_{n-1}/n$ en el cambio indicado, se llega a una ecuación del tipo:

$$y^n + b_{n-2}\, y^{n-2} + \ldots + b_1 y + b_0 = 0 \quad (11)$$

sin término en y^{n-1}.

Así pues, para tratar todas las ecuaciones de tercer y cuarto grado, es suficiente con estudiar las del tipo:

$$x^3 + ax + b = 0 \ (2)$$

y

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0 \ (12)$$

(a la primera parte de este resultado ya se había llegado en el apartado dedicado a la ecuación de grado tres).

Además, si multiplicamos los dos miembros de la ecuación (2) por x, se tiene una ecuación del tipo (12) con $c = 0$, y cuyas raíces, exceptuando a $x = 0$, son las de (12). Por tanto, para estudiar conjuntamente las ecuaciones de tercer y cuarto grado, es suficiente con considerar solamente las del tipo (12).

Sea ahora la circunferencia de centro el punto de coordenadas (p, q) y radio r:

$$(x - q)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

o bien desarrollando:

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 - r^2 = 0 \ (13)$$

Para hallar los puntos de intersección de dicha circunferencia con la parábola $y = x^2$, habrá que resolver el sistema formado por esta ecuación y la (13), que conduce a:

$$x^4 + (1-2q)x^2 - 2px + p^2 + q^2 - r^2 = 0$$

que es del tipo (12) con

$$a = 1 - 2q,$$

$$b = -2p$$

$$c = p^2 + q^2 - r^2$$

En consecuencia, para resolver la ecuación (12), dibujaremos la parábola $y = x^2$ y la circunferencia cuyo centro tiene por coordenadas $p = -b/2$, y $q = (1-a)/2$ y radio $r = \sqrt{p^2 + q^2 - c}$. Las abscisas de los puntos de intersección de ambas serán las soluciones de la ecuación propuesta.

Si $r^2 = p^2 + q^2 - c < 0$, significa que la ecuación no tiene raíces reales, lo que asimismo sucede si, una vez dibujadas la circunferencia y la parábola, no existen puntos de intersección.

En Peralta (1988) pueden verse algunos ejemplos de aplicación de este método, así como de los correspondientes al apartado siguiente.

Generalización del método de Descartes

Es evidente que las raíces reales de (2) pueden asimismo obtenerse como intersección de la recta $y + ax + b = 0$ y de la cúbica $y = x^3$, lo que nos sugiere utilizar ahora esta última curva en vez de la parábola $y = x^2$.

Asimismo, si en la ecuación de cuarto grado (12) hacemos $y = x^3$, queda:

$$ax^2 + xy + bx + c = 0$$

por lo que las raíces reales de (12) pueden hallarse gráficamente mediante la intersección de las dos curvas anteriores. La segunda de ellas, $y = -(ax^2 + bx + c)/x$ es una hipérbola, cuyo dibujo es asequible a los alumnos de los últimos cursos de Educación Secundaria (basta para ello con poco más que dibujar sus asíntotas: $x = 0$, $y = -ax - b$).

Este mismo procedimiento puede utilizarse para la resolución de ecuaciones de grados 5 y 6.

Sea la ecuación:

$$x^6 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \quad (14)$$

y hagamos $y = x^3$ en la misma. Se deduce que sus raíces pueden determinarse gráficamente como intersección de $y = x^3$ y de la cónica:

$$cx^2 + y^2 + axy + dx + by + e = 0 \quad (15)$$

Para la aplicación de este método, y teniendo en cuenta el nivel de los alumnos a los que podría dirigirse este trabajo, habrá que elegir cuidadosamente la ecuación para que la cónica resultante sea sencilla.

Si se tratara de una ecuación de quinto grado:

$$x^5 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (16)$$

multiplicaríamos por x, con lo que se convertiría en una del tipo (14) con $e = 0$. Una vez resuelta ésta tendríamos que excluir la raíz $x = 0$.

Para la aplicación de este método, y teniendo en cuenta el nivel de los alumnos a los que podría dirigirse este trabajo, habrá que elegir cuidadosamente la ecuación para que la cónica resultante sea sencilla. A diferencia de lo que sucedía con las ecuaciones de grado tres (que la curva en cuestión era una recta) y de grado cuatro (que era una hipérbola), ahora se desconoce qué cónica resultará, por lo que creemos que debe de limitarse a alguno de los siguientes tipos:

(i) elipse o circunferencia: $\dfrac{(x-p)^2}{m^2} + \dfrac{(y-q)^2}{n^2} = 1$

(ii) hipérbola: $\dfrac{(x-p)^2}{m^2} - \dfrac{(y-q)^2}{n^2} = \pm 1$

(iii) parábola: $(y-q)^2 = m(x-p)$ (El caso $(x-p)^2 = m(y-q)$ procede de la resolución de la ecuación de tercer grado $(x-p)^2 = m(x^3 - q)$, que ya ha sido estudiado).

(iv) Cónicas que una vez despejada la y den lugar a una curva sencilla que se pueda dibujar hallando sus elementos más significativos: máximos, mínimos, asíntotas, etc.

(v) Par de rectas reales, que pueden obtenerse identificando coeficientes.

El método empleado para la resolución gráfica de ecuaciones de grados 5 y 6 puede asimismo ser generalizado a otras de grado superior.

Si la ecuación es de grado par, el procedimiento es válido para ecuaciones del tipo:

$$x^{2n} + ax^{n+1} + bx^n + cx^2 + dx + e = 0 \quad (17)$$

ya que haciendo $y = x^n$ se obtiene la cónica:

$$y^2 + axy + by + cx^2 + dx + e = 0$$

Por tanto, bastará con dibujar ambas curvas y las abscisas de sus puntos de intersección serán las soluciones de (17).

Si la ecuación es de grado impar, el método se puede aplicar para resolver ecuaciones de la forma:

$$x^{2n-1} + ax^n + bx^{n-1} + cx + d = 0 \quad (18)$$

ya que multiplicando por x, resulta otra del tipo (17) con $e = 0$, de cuyas raíces habrá que excluir la $x = 0$.

Como ya se ha indicado, en Peralta (1988) pueden verse numerosos ejemplos correspondientes a este apartado y al anterior.

Resolución de otras ecuaciones no algebraicas

Las mismas ideas en las que descansa la resolución gráfica de ecuaciones polinómicas pueden ser utilizadas para intentar resolver otras ecuaciones trascendentes.

Si la ecuación $f(x) = 0$ puede ser expresada en la forma $g(x) - h(x) = 0$, su resolución se reduce a hallar los puntos de intersección de las gráficas de las funciones $y = g(x)$, $y = h(x)$. Ello es lo que trataremos de hacer en los siguientes ejemplos, en los que dichas funciones son fácilmente representables.

Ejemplo 8. Resolver la ecuación:

$$x - \cos x = 0.$$

Dibujamos las funciones $y = \cos x$, $y = x$ (figura 8), cuya intersección es el punto de abscisa x_0, que cumple que $0 < x_0 < p/2 < 1{,}57$.

Para hallar alguna cifra decimal de la raíz, aplicamos el teorema de Bolzano a la función $f(x) = x - \cos x$, que es continua en todo R , y en particular en cualquier intervalo cerrado contenido en $[0, p/2]$. Con la ayuda de la calculadora se obtiene: $f(0{,}7) < 0$ y $f(0{,}8) > 0$, luego $x_0 = 0{,}7\ldots$; $f(0{,}73) < 0$ y $f(0{,}74) > 0$, luego $x_0 = 0{,}73\ldots$; etc.

Ejemplo 9. Resolver la ecuación:

$$xe^x - 2 = 0$$

La ecuación puede escribirse de la forma $e^x - 2/x = 0$, lo que induce a considerar las funciones: $y = e^x$, $y = 2/x$, y hallar sus puntos de intersección (figura 9).

Se observa que existe una sola raíz x_0 en el intervalo (0, 1). Al considerar la función $f(x) = xe^x - 2$ y aplicar el teorema de Bolzano, se deduce que $x_0 = 0{,}85\ldots$

Pueden existir otras formas de resolución gráfica, en el caso de haber distintas opciones en la elección de las funciones. Por ejemplo, si la ecuación se escribe $x - 2\cdot e^{-x} = 0$, la raíz viene dada por la intersección de las curvas $y = x$ e $y = 2\cdot e^{-x}$ (figura 10).

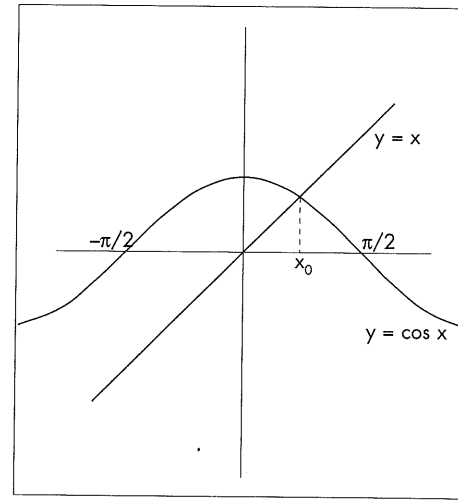


Figura 8

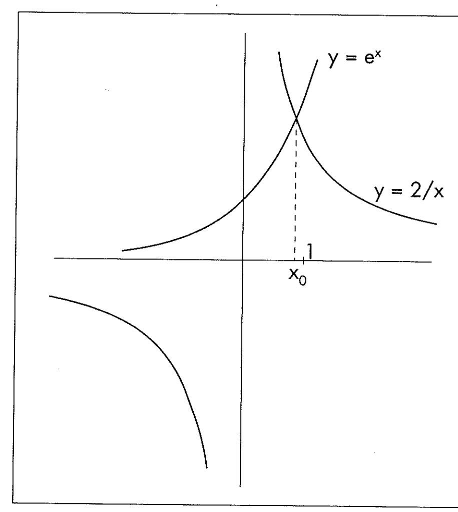


Figura 9

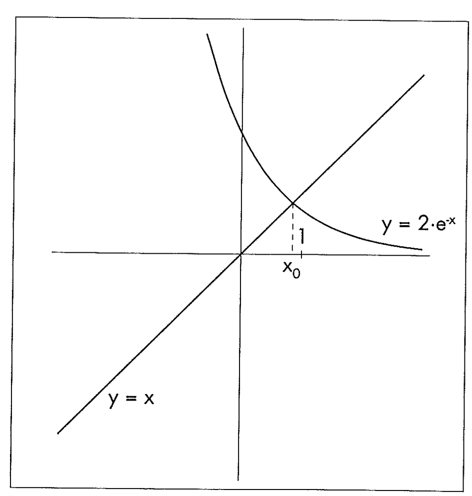


Figura 10

Ejemplo 10. Resolver la ecuación:

$$x+\frac{\log_{1/2} x}{x}=0$$

Escrita así: $x^2 + \log_{1/2}x = 0$, el problema se reduce a hallar la intersección de las gráficas $y = -x^2$ e $y = \log_{1/2}x$.

En la figura 11 se observa que dichas gráficas no se cortan, por lo que la ecuación no tiene soluciones.

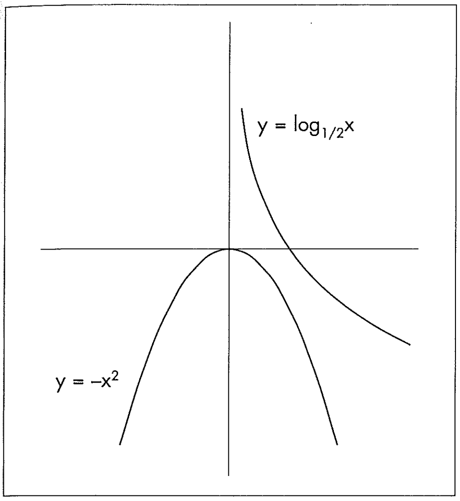


Figura 11

Observación final

Los métodos gráficos descritos a partir de la sección 5 de este trabajo no pueden ser considerados, desde luego, como la panacea universal para la resolución de ecuaciones. En efecto, es evidente que pueden presentar algunas dificultades en su ejecución, debido a los errores que acaso se produzcan en la representación de las curvas correspondientes y a los valores inexactos que pudieran aparecer en la determinación de algunos elementos de las mismas (por ejemplo, en el cálculo del centro o del radio de la circunferencia auxiliar que se menciona en la sección 7).

Dichos inconvenientes han sido, sin embargo, obviados en los ejemplos expuestos en el artículo, en los que se han elegido ecuaciones que no plantearan ese tipo de problemas. No obstante, el procedimiento es razonablemente preciso para determinar el número de raíces reales de la ecuación y separar las mismas con un aceptable grado de aproximación en aquellos ejercicios en los que sólo se necesiten utilizar gráficas de rectas, de circunferencias (cuyo radio y cuyas coordenadas del centro tengan valores sencillos), de las funciones $y = x^2$ o $y = x^3$, o de algunas otras que asimismo puedan dibujarse con bastante exactitud.

Además de resaltar la importancia histórica del método de Descartes (en el que de alguna forma se inspiran los restantes), nuestra intención –ya mencionada en cierto modo anteriormente– al presentar estos procedimientos de resolución gráfica ha sido la de tratar de animar al lector a buscar nuevos caminos para la resolución de ecuaciones; lo que por otro lado ha permitido también relacionar distintas ramas de la matemática. Hemos procurado en esta última parte del trabajo presentar, por tanto, un modelo más bien teórico –aunque de indudable utilidad en algunos casos– nacido de las ideas de Descartes, pero cuya fragilidad frente a los recursos que para ello ofrecen las calculadoras y los ordenadores es evidente.

Con todo, nos ha parecido saludable olvidar por un momento la existencia de los medios técnicos actuales para intentar, explorando viejos pasajes de la matemática, encontrar otras vías de solución.

Javier Peralta
E.U. de Formación
del Profesorado
Universidad Autónoma
de Madrid.
Sociedad «Puig Adam»
de Profesores de Matemáticas

Bibliografía

BOYER, C. B. (1986): *Historia de la Matemática*, Alianza, Madrid.

COURANT, R. y H. ROBBINS (1970): *¿Qué es la Matemática?*, Aguilar, Madrid.

DUNHAM, W. (1992): *Viaje a través de los genios*, Pirámide, Madrid.

ETAYO, J. J. (1986): «El álgebra del cinquecento», en *Historia de la Matemática hasta el siglo XVII*, Real Academia de Ciencias, Madrid.

PERALTA, J. (1988): «Resolución gráfica de ecuaciones algebraicas», *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, n.° 18, 31-48.

PERALTA, J. (1995): *Principios didácticos e históricos para la enseñanza de la Matemática*, Huerga y Fierro, Madrid.

SCHEID, F. (1986): *Análisis numérico*, McGraw-Hill, México.

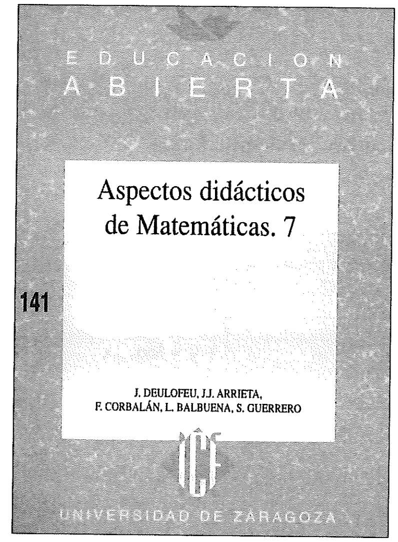
Rectificación

Los autores del artículo «Aprovechamiento diáctico de la actividad "Fotografía y Matemáticas"», publicada en el n.° 31 de SUMA (pp. 97-104) han solicitado la inclusión en la Bibliografía de la referencia siguiente:

ALSINA, C., C. BURGUÉS, J.M. FORTUNY, J. GIMÉNEZ y M. TORRA (1996): *Enseñar matemáticas*, Graó, Barcelona.

INSTITUTO DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA



Aspectos didácticos de matemáticas. 7

CONTENIDOS

- *Números, operaciones y cálculo: problemas y recursos para la ESO.* Jordi DEULOFEU
- *Educación matemática y temas transversales: la educación para la paz y la igualdad entre sexos.* José Joaquín ARRIETA
- *Juegos y estrategias de pensamiento.* Fernando CORBALÁN
- *Taller para re-crear Matemáticas.* Luis BALBUENA
- *Los alumnos deben aprender ¡Matemáticas!* Salvador GUERRERO

BOLETÍN DE PEDIDO

Deseo me envíen contra reembolso de 1.200 pesetas más gastos de envío, el libro *Aspectos didácticos de Matemáticas. 7.*

Nombre: ....

Dirección: ....

Población: .... C.P.: .... Provincia: ....

CIF o NIF (a efectos de emitir la obligatoria factura): ....

Remitir a:

Instituto de Ciencias de la Educación. C/ Pedro Cerbuna, 12. 50009 ZARAGOZA. Tno.: (976) 761991. Fax: (976) 761345

SUMA 32
noviembre 1999, pp. 91-97

Algunos contenidos matemáticos con Logo

Guido Angelo Ramellini

IDEAS Y RECURSOS

El artículo presenta un modo de desarrollar con alumnos de 1.° o 2.° de ESO contenidos aritméticos (Máximo Común Divisor y Mínimo Común Múltiplo) y geométricos (Teorema de Pitágoras) a través del ordenador y del lenguaje LOGO.
Además de querer reforzar y profundizar el aprendizaje de los contenidos matemáticos, así como los de informática, nos importa subrayar cómo estos trabajos evidencian las diferencias que existen en la forma de trabajar del ordenador y la del ser humano. Esto comporta la necesidad de modificar el propio modo de pensar cuando queremos que la maquina ejecute nuestras órdenes.
De hecho, nos parece que un importante, sino el principal, aspecto formativo que puede desarrollar el trabajo con ordenador en esta etapa escolar es el tener que buscar estrategias y contenidos alternativos.

POR QUÉ Logo

Cuando en el año 1994 el Liceo Italiano de Madrid adoptó unos programas experimentales para profundizar la enseñanza de las matemáticas y de la física, introdujo también unas horas de laboratorio de informática donde, de acuerdo con el Plan Nacional (italiano), se trabajaba mayoritariamente en Pascal.

Evidentemente, la mayor parte de los alumnos era analfabeta en las tareas de programación.

El mismo año, las direcciones de las Escuelas Italianas de Madrid habían decidido poner en marcha un laboratorio de informática abierto a los alumnos del último bienio de primaria (de 9 a 11 años) y a los de todos los niveles de secundaria. Entre los profesores de la escuela obligatoria (todavía hasta los 14 años), faltando un Plan Nacional de Informática específico, se discutió sobre qué hacer en las horas de laboratorio, o sea, si enseñar a los chicos a ser usuarios del ordenador, trabajando con el material ya elaborado, o si enseñarles también a construir sus propios programas, y, en este caso, ¿en qué lenguaje?

Optamos por el Logo por diferentes razones:

- es un lenguaje menos artificial que el BASIC;
- crece con las habilidades del alumno;
- se adapta bien a la última etapa de la escuela primaria;
- nos parecía, y la práctica nos ha confirmado, que este lenguaje se adaptaba bien a trabajar contenidos geométricos de forma constructiva, como hacemos en clase siguiendo el método de Emma Castelnuovo;
- pudimos encontrar materiales e ideas, desde el clásico *Mindstorms* de Papert, una verdadera biblia

para todo «Logoista», hasta los más recientes trabajos del Forum de Logo en Internet. Siempre en Internet encontramos el *Turtle's Discovery* Book de J. Muller[1], que hemos traducido al italiano y que estamos utilizando como libro de texto para los trabajos en MSW Logo.

Los chicos que empezaron en primaria a trabajar con Logo no han ingresado todavía en el Liceo, así que es difícil comprobar si este trabajo ha servido de preparación previa al Pascal.

Lo que hemos podido comprobar es que, prácticamente, todos los alumnos han aprendido a construir procedimientos simples y algunos incluso más complicados, que implican un uso bastante complejo de las conexiones lógicas.

El laboratorio de informática ha sido utilizado por profesores de las diferentes asignaturas para desarrollar actividades con relación a los diversos programas didácticos.

El trabajo que vamos a presentar está desarrollado con relación a los contenidos del programa de matemáticas, durante dos meses, una hora a la semana, con un grupo de veintitrés alumnos de segundo de ESO que habían trabajado con Logo durante dos años.

En este artículo presentaremos dos ejemplos (el teorema de Pitágoras y máximo común divisor y mínimo común múltiplo) que nos parecen significativos de cómo usar el ordenador para tratar contenidos geométricos o aritméticos.

La actividad informática ha sido constantemente comparada con otro tipo de actividad de laboratorio matemático desarrollada con los alumnos en los años de ESO, o sea la que propone Emma Castelnuovo en toda su obra y, concretamente, en sus libros de texto que son utilizados en nuestra escuela.[2]

Objetivos

Además de querer reforzar y profundizar en el aprendizaje de los contenidos matemáticos, así como en los de informática, que resultarán evidentes en la explicación de la experiencia, nos importa subrayar cómo estos trabajos evidencian las diferencias que existen en la forma de trabajar del ordenador y la del ser humano. Esto comporta tener que modificar el propio modo de pensar cuando queremos que la maquina ejecute nuestras órdenes.

De hecho, nos parece que un importante, sino el principal, aspecto formativo que puede desarrollar el trabajo con ordenador en esta etapa escolar es el tener que buscar estrategias y contenidos alternativos.

...importa subrayar cómo estos trabajos evidencian las diferencias que existen en la forma de trabajar del ordenador y la del ser humano. Ésto comporta tener que modificar el propio modo de pensar cuando queremos que la maquina ejecute nuestras órdenes.

1 MULLER J. *Turtle's Discovery Book*, 76703.3005@compuserve.com

2 CASTELNUOVO E. (1989), *Numeri e Figure*, La Nuova Italia, 1.ª Edizone. CASTELNUOVO E. (1989), *Figure e Lettere*, La Nuova Italia, 1.ª Edizone.

Cómo comprobar la aplicación del Teorema de Pitágoras con MSWLogo

Prerrequisitos

Conocimiento de algunos contenidos del programa de geometría: clasificación de triángulos, teorema de Pitágoras, ángulos internos y externos, etc.

En el libro de Emma Castelnuovo ya mencionado, se proponen dos actividades con relación a los triángulos:

i) *Construir triángulos a partir de los lados*, sea dibujándolos con regla y compás, sea construyéndolos con tiras de cartón (figura 1).

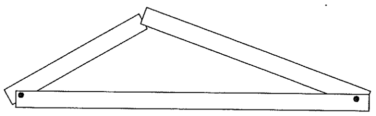


Figura 1

Se evidenciarán así dos importantes propiedades:

a) que para poder construir un triángulo de lados a, b y c, en que: $a > b > c$, se necesita que: $a < b + c$;

b) que, cumplida la condición a), existirá uno y sólo un triángulo con las medidas dadas, o sea que el triángulo es una figura indeformable: no se pueden cambiar los ángulos sin cambiar también los lados.

El modelo físico permite además que los alumnos manipulen la figura, apoyándola sobre diversos lados, trazando las alturas relativas, medianas, etc.

ii) *Construir triángulos isósceles de igual base.* A partir de una determinada base a, podemos aumentar los lados b y c para obtener triángulos obtusángulos, después rectángulos y finalmente acutángulos. (Será interesante hacer que los alumnos vean que existen infinitos triángulos obtusángulos y acutángulos, pero sólo un triángulo rectángulo isósceles de base *a*.) (Figura 2)

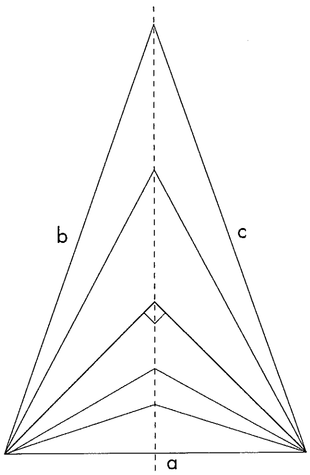


Figura 2

Si medimos *b* y *c*, podremos intentar comprobar el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Evidentemente, la fórmula resultará exacta sólo si se aplica al triángulo rectángulo, mientras que para los obtusángulos veremos que:

$$a^2 > b^2 + c^2$$

y que para los acutángulos:

$$a^2 < b^2 + c^2$$

Conocimiento de algunos elementos de geometría en el plano cartesiano

- Coordenadas de puntos.
- Medida de un segmento a partir de las coordenadas de sus extremos.

Actividad con el ordenador

El objetivo de la actividad con el ordenador será el intentar hacer las mismas cosas utilizando Logo.

Intentaremos construir un procedimiento en el que, introducidas las medidas de los lados, diga si existe un triángulo con esos lados, que lo dibuje y que lo clasifique.

Intentaremos construir un procedimiento en el que, introducidas las medidas de los lados, diga si existe un triángulo con esos lados, que lo dibuje y que lo clasifique.

Existencia del triángulo

Es la operación más fácil, y sólo es preciso introducir antes la medida de la hipotenusa y después las de los catetos. Veamos el código en Logo:

```
TO PITAGORAS :A :B :C
IF :A<:B+:C [PRINT [ESTE TRIANGULO ES IMPOSIBLE] STOP]
IF :A=:B+:C [PRINT [ESTE TRIANGULO ES IMPOSIBLE] STOP]
END
```

Dibujo del triángulo

Aquí empiezan los problemas. Para dibujar el triángulo sobre el papel, o sea sobre algo que se parece al plano euclídeo, utilizamos el compás. Desde los extremos de la base *a*, con radio *b* y luego *c*, se trazan dos arcos que determinan el tercer vértice del triángulo (figura3).

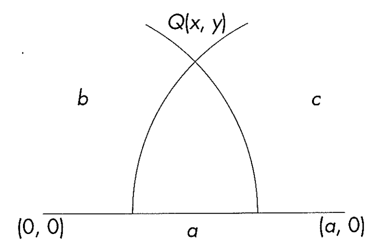


Figura 3

¿Cómo se pueden traducir estas instrucciones para el ordenador? Es fácil hacer que la tortuga de Logo vaya a los extremos de la base y que trace los dos arcos de radios *b* y *c* que se cortarán en el tercer vértice, pero ¿cómo hacer para que la tortuga reconozca este punto? Veamos, pues, cómo hacerlo:

```
TO CIRCULO :XC :RADIO
LOCAL "AMT
MAKE "AMT :RADIO*3.14159/180
PU SETX :XC
SETX XCOR-:RADIO SETH 0 PD
REPEAT 181 [FD :AMT RT 1]
PU SETX :XC PD
END
```

```
TO CONSTR :A :B :C
    CS HOME RT 90 FD :A
MAKE "XC 0 MAKE "RADIO :B
    CIRCULO :XC :RADIO
MAKE "XC :A MAKE "RADIO :C
    CIRCULO :XC :RADIO
    HT
    END
```

En nuestro trabajo sobre el papel, una vez encontrado el tercer vértice, podíamos trazar los lados del triángulo sin más. Pero, para que el ordenador cumpla la misma operación necesita saber dónde cae el punto.

En la figura ya hemos introducido el elemento que nos puede ayudar a definir la posición de todos los puntos del plano, o sea, las coordenadas.

De este modo, haciendo coincidir un extremo de la base con el origen de los ejes (0, 0), las coordenadas del otro extremo serán (*a*, 0).

Más difícil será que los alumnos puedan encontrar las coordenadas del tercer vértice, sin poseer unos cuantos elementos de álgebra y geometría analítica: ecuaciones de segundo grado, sistemas, ecuaciones de la circunferencia, etc., que nos permitirían trabajar de la siguiente manera. Partimos de la fórmula general:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

con x_0 e y_0 coordenadas del centro, y r radio de la circunferencia, tendríamos:

$$(x_Q - 0)^2 + (y_Q - 0)^2 = b^2$$

$$(x_Q - a)^2 + (y_Q - 0)^2 = c^2$$

de donde se obtiene:

$$x_Q^2 + y_Q^2 = b^2$$

$$x_Q^2 - 2ax + a^2 + y_Q^2 = c^2$$

Si de la segunda ecuación restamos la primer, nos queda:

$$-2ax_Q + a^2 = c^2 - b^2$$

con: $x_Q = (a^2 + b^2 - c^2) / 2a$.

Es evidente que muy pocos alumnos de 13-14 años comprenden este desarrollo matemático, así que no nos quedaría más opción que sugerirles qué fórmula tienen que utilizar en el procedimiento, sin explicarles cómo se obtiene algebricamente.

```
TO TRI[3]
MAKE "X (:A*:A+:B*:B-:C*:C)/(2*:A)
MAKE "Y SQRT (:B*:B-:X*:X)
SETXY :X :Y HOME
PRINT :X PRINT :Y
END
```

Si queremos que los alumnos entiendan todo el desarrollo del procedimiento, podemos intentar encontrar un modo más fácil para solucionar el problema.

Imaginemos que hacemos rodar el triángulo y lo colocamos con el lado menor como base, haciendo que un extremo coincida con el origen de los ejes (figura 4). Su otro extremo, P, tendría como coordenadas (b, 0). Si el triángulo es rectángulo, ¿cómo será el lado c respecto a la base b? O sea, ¿donde estará situado el tercer vértice, Q? ¿Qué pasará en el caso de que el triángulo sea acutángulo? ¿Y obtusángulo?

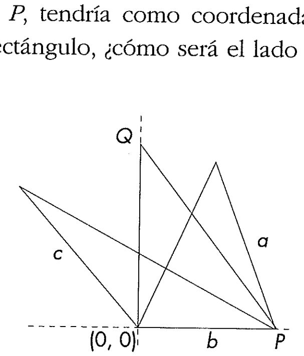


Figura 4

Más difícil será que los alumnos puedan encontrar las coordenadas del tercer vértice, sin poseer unos cuantos elementos de álgebra y geometría analítica...

Será fácil descubrir que si el triángulo es rectángulo, el punto Q pertenece al eje OY, y por tanto su abscisa será: $x_Q = 0$.

Sin embargo, si el triángulo fuera acutángulo, el tercer vértice pertenecería al primer cuadrante, con $x_Q > 0$; y si por el contrario fuera obtusángulo, resultaría $x_Q < 0$.

Todavía queda el problema de encontrar el valor de x_Q.

Aplicando las fórmulas para determinar la longitud de los segmentos en el plano cartesiano, obtendremos:

$$c^2 = x_Q^2 + y_Q^2$$

$$a^2 = (x_Q - b)^2 + y_Q^2$$

de donde se obtiene:

$$c^2 - a^2 = x_Q^2 - 2x_Q b + b^2 + y_Q^2 - x_Q^2 - y_Q^2$$

o sea:

$$c^2 - a^2 = -2x_Q b + b^2$$

y por lo tanto:

$$x_Q = (b^2 + c^2 - a^2) / 2b$$

Nos parece interesante detenernos a reflexionar sobre algunas cuestiones que aparecen en el trabajo hecho:

i) Es evidente que la fórmula que al final hemos utilizado para encontrar x_Q es la misma en los dos casos, pero resulta muy diferente la manera de llegar a esta fórmula y los requisitos lógicos y matemáticos necesarios.

ii) El valor de y_Q no sirve para clasificar el triángulo, que sólo depende de si x_Q es mayor, igual o menor de 0. Calcularemos y_Q sólo para que el ordenador pueda dibujar el triángulo.

iii) Por lo dicho con relación al Teorema de Pitágoras, si el triángulo es rectángulo, entonces:

$$b^2 + c^2 - a^2 = 0$$

3 El procedimiento TRI se debe colocar en el procedimiento COSTRI antes de END.

y, por consiguiente $x_Q = 0$.

Si el triángulo es acutángulo, entonces:

$$b^2 + c^2 - a^2 > 0$$

y, por consiguiente $x_Q > 0$.

Si el triángulo es obtusángulo, entonces:

$$b^2 + c^2 - a^2 < 0$$

y, por consiguiente $x_Q < 0$,

que es exactamente lo que teníamos que demostrar.

Traducir estas consideraciones en Logo no es difícil, y sólo se necesita algún cuidado en escoger los valores de a, b y c para que la figura resulte visible en la pantalla. Dado que los «pasos de la tortuga» son muy pequeños y la pantalla ocupa un espacio finito, para que el triángulo se pueda ver bien necesitamos que las medidas de los lados estén entre 50 y 300 pasos de tortuga.

En todo caso, presentamos aquí dos procedimientos: uno, más simple, requiere que el usuario utilice para las variables valores comprendidos entre dichos límites. El otro, un poco más complejo, transforma en escala las medidas introducidas y así funciona siempre.

TO TRI :A :B :C	para dibujar un triángulo de lados a, b y c
IF :A=:C+:B [PRINT [TRIANGULO IMPOSIBLE] STOP]	a tiene que ser $< b + c$, sino el triángulo
IF :A>:C+:B [PRINT [TRIANGULO IMPOSIBLE] STOP]	no existe
MAKE "X (:B*:B+:C*:C–:A*:A)/(2*:B)	$x_Q = (b^2 + c^2 - a^2) / 2b$
MAKE "Y SQRT (:C*:C-:X*:X)	$y_Q = c^2 - x_Q^2$
if :X=O [PRINT [EL TRIANGULO ES RECTANGULO]]	
IF :X<0 [PRINT [EL TRIANGULO ES OBTUSANGULO]]	
IF :X>0 [PRINT [EL TRIANGULO ES ACUTANGULO]]	
PU SETXY -100 0 PD RT 90 REPEAT 50 [FD 10 PU FD 10 PD]	instrucciones para dibujar el eje de las abscisas
PU HOME PD REPEAT 25 [FD 10 PU FD 10 PD]	instrucciones para dibujar la rama positiva del
HOME PD	eje de las ordenadas
SETXY :X :Y	traza el lado c
SETXY :B 0	traza el lado a
HOME HT	traza la base y esconde la tortuga
END	

TO TRI :A :B :C	
IF :A=:B+:C [PRINT [TRIANGULO IMPOSIBLE] STOP]	
IF :A>:B+:C [PRINT [TRIANGULO IMPOSIBLE] STOP]	
MAKE "X (:B*:B+:C*:C-:A*:A)/(2*:B)	
MAKE "Y SQRT (:C*:C-:X*:X)	
IF :X=0 [PRINT [EL TRIANGULO ES RECTANGULO]]	
IF :X<0 [PRINT [EL TRIANGULO ES OBTUSANGULO]]	
if :x>0 [print [EL TRIANGULO ES RECTANGULO]]	
MAKE "INCR INT (10000/:B)	se calcula un valor para incrementar la medida de los lados
MAKE "INCR :INCR/100	hasta que ronde los 100
PU SETXY -100 0 PD RT 90	
REPEAT 50 [FD 10 PU FD 10 PD]	
PU HOME PD REPEAT 25 [FD 10 PU FD 10 PD]	
PU SETXY -100 -20 LABEL [ESCALA 1:]	debajo del triángulo se escribe la escala usada para dibujar la figura
SETXY -30 -20 LABEL :INCR HOME PD	
MAKE "GRAN :X*:INCR MAKE «GRAY :Y*:INCR	*grax* y *gray* son los valores de x_Q e y_Q que se utilizan en el dibujo
SETXY :GRAX :GRAY	
SETXY :B*:INCR 0 SETXY 0 0 HT	

Cómo calcular el Máximo Común Divisor y el Mínimo Común Múltiplo

Prerrequisitos

Empezamos recordando los conceptos de Máximo Común Divisor (MCD) y Mínimo Común Múltiplo (MCM) entre dos números (por ejemplo: $A = 90$ y $B = 84$), ilustrándolos con un diagrama de Venn (figura 5)

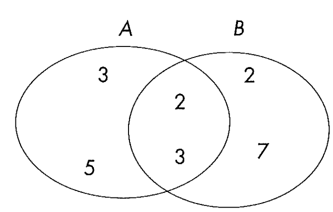


Figura 5

Aún sin haber hecho un trabajo particularmente minucioso sobre la teoría de los conjuntos, todos los alumnos podían entender que el MCD entre A y B era representado por la intersección de los conjuntos:

$$\text{MCD}\ (A, B) = A \cap B$$

Hemos recordado también cómo se hacía para encontrar el MCD y el MCM entre dos números y los conocimientos que se necesitan:

i) descomposición de los números en factores primos;

ii) criterios de divisibilidad;

iii) reglas del MCD (factores comunes con exponente mínimo) y del MCM (factores comunes y no comunes con exponente máximo).

Actividad con el ordenador

Nos preguntamos: ¿cómo se hace para que el ordenador aprenda estas cosas?

Algunas parecen fáciles, como los criterios de divisibilidad por 2 o por 5; otras pesadas, como poner en memoria los números primos hasta el 1000 (¿bastarán?); pero hay también cosas más complejas, como los criterios de divisibilidad por 3 o por 11.

Como muchas otras veces, nos encontramos con que los métodos que nos parecen fáciles resultan complejos para el ordenador, que, por el contrario, se encuentra a gusto con forma de operar que a nosotros nos parecen difíciles o largas y pesadas.

En nuestro ejemplo tenemos buena prueba de esto utilizando, para calcular el MCD, el método de las divisiones sucesivas.

Así que:

90 : 84 = 1, con resto 6

Si el resto no es igual a 0, se continúa:

84 : 6 = 14 con resto 0.

Esta vez el resto es igual a 0, y entonces el último divisor (o sea, 6) es el MCD entre 90 y 84.

Naturalmente los alumnos no habían visto nunca el algoritmo de Euclides, aunque algún texto lo explica, y se quedaron sorprendidos, como delante de algo mágico.

Comprobamos su utilidad en casos diversos, con $B \supseteq A$ o con $A \cap B = 1$, y después de haber explicado un poco de teoría.

No parece difícil construir un procedimiento para que el ordenador trabaje con este sistema, sólo necesitamos una instrucción para que se preste atención, no al cociente, sino al resto de la división.

Esto también les parece bastante raro a los chicos, a pesar de haber hablado de modularidad en diferentes ocasiones.

En todo caso, el hecho de que el ordenador tuviera una primitiva (REMAINDER) para esta operación, nos tranquilizó. Además, las instrucciones eran fáciles:

TO MCD :A :B	Para encontrar el MCD entre A y B
MAKE "R REMAINDER :A :B	se llama R el resto de A/B
IF R=0 [PRINT [MCD =] PRINT :B STOP]	si $R = 0$, imprime MCD = B y termina
MAKE "A :B MAKE «B :R	si $R > 0$, B se convierte en A y R en B
MCD :A :B	se repite hasta encontrar $R = 0$.
END	

El procedimiento es totalmente diferente al que utilizamos normalmente con papel y lápiz y evidencia los caracteres típicos del trabajar con ordenadores...

El procedimiento es totalmente diferente al que utilizamos normalmente con papel y lápiz y evidencia los caracteres típicos del trabajar con ordenadores:

a) la mecanicidad del método que hace desaparecer muchos conceptos como el de números primos, divisores, descomposición, factorización, etc.;

b) la recursividad que permite intentar y cambiar todas las veces que sean necesarias hasta que se compruebe la condición pactada;

c) la capacidad de autocorregirse: no importa si introducimos antes el número más pequeño. Por ejemplo:

   por $A = 84$ y $B = 90$, A / B = 0 con resto 84; entonces $A = 90$, $B = 84$ y todo empieza otra vez, pero correctamente.

Todavía tenemos que encontrar el MCM.

Esta vez a los chicos no le pareció tan fácil leer la solución en el diagrama de Venn (figura 6), aun después de haber calculado por el sistema tradicional el MCM = 1260.

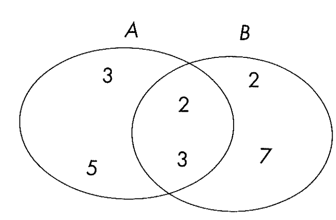


Figura 6

Intentamos entonces probar con otros números, más pequeños y con diferente relación entre ellos.

Números primos entre sí

Por ejemplo, si consideramos 12 y 25 (figura 7) el MCD es 1 y el MCM es

$$A \times B = 12 \times 25 = 300.$$

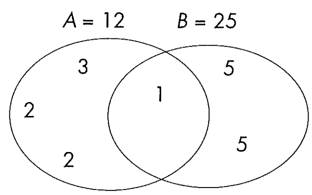


Figura 7

A *es submúltiplo de* B

En este caso, es claro que el MCD es A y el MCM es B. Por ejemplo, podemos tomar $A = 12$ y $B = 24$ (figura 8).

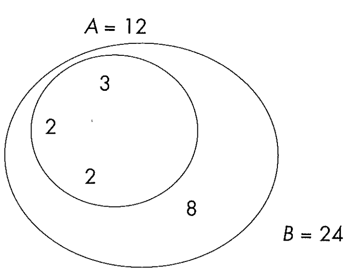


Figura 8

Hemos considerado dos casos extremos puesto que en el primero, el Máximo Común Divisor es el más pequeño posible y el Mínimo Común Múltiplo el máximo, mientras que en el segundo ocurre exactamente lo contrario, es decir, el MCD es el más grande y el MCM el mínimo.

A pesar de estos casos extremos, los alumnos tardaron bastante tiempo en encontrar una solución que relacionara ambos conceptos, y así poder aprovechar lo realizado para el MCD en el cálculo del MCM. Necesitaron de trasparencias de colores y muchos otros ejemplos, hasta que una chica tuvo la intuición correcta:

$$MCM = A \times B \; / \; MCD.$$

Traducirla en Logo fue entonces de lo más fácil, y pudimos además aprovecharnos de la que, probablemete, sea la característica más interesante de Logo: la modularidad, la cual nos permite utilizar varios procedimientos pequeños para construir un super-procedimiento. Así, pudimos escribir los dos siguientes conjuntos de instrucciones:

```
TO MCD :A :B
MAKE "R REMAINDER :A :B
IF R=0 [MAKE "MCD :B PRINT [MCD =] PRINT :B STOP]
MAKE "A :B MAKE «B :R     MCD :A :B
END

TO MCM :A :B
MCD :A :B
MAKE "MCM :A* :B/MCD
PRINT :MCM
END
```

Conclusiones

El trabajo presentado parece satisfacer los objetivos que nos habíamos fijado:

i) permite la profundización de los contenidos matemáticos;

ii) mantiene una metodología constructiva, no sólo para los contenidos geométricos, sino también cuando pasamos al álgebra o trabajamos con el ordenador;

iii) profundiza el aprendizaje del lenguaje informático y de unas habilidades lógicas;

iv) evidencia las diferentes formas en que trabaja la mente cuando debe comunicar con humanos y cuando debe dibujar procedimientos para el ordenador.

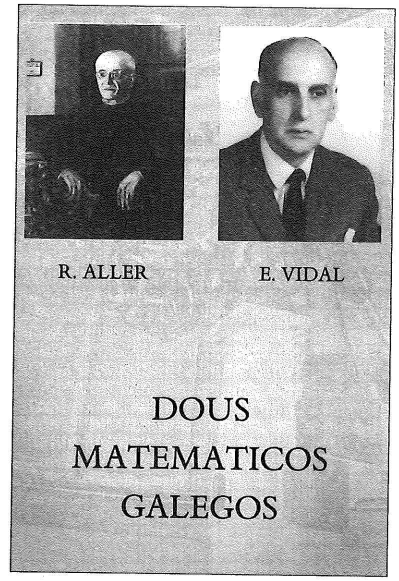
Es difícil comprobar la eficacia formativa de este tipo de actividad, puesto que una verificación directa, a través de un test que se limitara a comprobar habilidades aplicativas o imitativas, nos parece limitada y poco interesante.

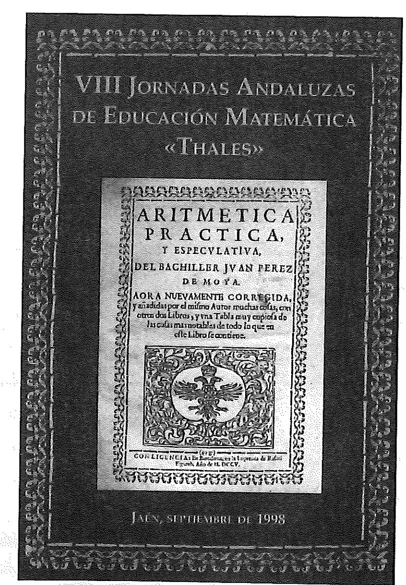
Es difícil comprobar la eficacia formativa de este tipo de actividad, puesto que una verificación directa, a través de un test que se limitara a comprobar habilidades aplicativas o imitativas, nos parece limitada y poco interesante.

En qué medida ha sido eficaz un trabajo de este tipo, si es que lo ha sido, se podrá saber sólo cuando esos alumnos, en los próximos años, intenten resolver una situación problemática en este modo.

Guido Angelo Ramellini
Scuola Media Statale Italiana de Madrid
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»

PUBLICACIONES DE LAS SOCIEDADES





SUMA 32
noviembre 1999, pp. 99-103

Medios informáticos en la resolución de problemas de divisibilidad

Antonio Sarmiento Escalona

IDEAS Y RECURSOS

La resolución de problemas puede ser complementada con la utilización de una amplia gama de recursos informáticos. En este trabajo se comenta una experiencia de utilización de ese tipo de recursos complementado el desarrollo de diversas líneas de actuación de los alumnos frente a un determinado problema. Además la experiencia integra actividades sin ordenador de una manera bastante natural contribuyendo a una reflexión quizá más equilibrada sobre el impacto de las nuevas tecnologías en la educación.

DÍA A DÍA se está comprobando que el amplio dominio de recursos informáticos es una facilidad añadida a las situaciones de resolución de problemas. Con el término recursos informáticos queremos expresar los diferentes entornos de aprendizaje basados en el ordenador para la enseñanza de las matemáticas existentes en el mercado (Balacheff y Kaput, 1996). Evidentemente nos encontramos con las dificultades de aprendizaje que en sí mismo tienen los propios entornos: micromundos, computación simbólica, hojas de cálculo, bases de datos, programación, etc. Estas dificultades llevan en muchos casos a abandonar procesos que utilicen el ordenador. Se podría decir que la alfabetización informática enmascara y ralentiza el aprendizaje matemático. Sin embargo, no podemos ignorar la existencia de esos recursos informáticos, de fácil acceso, cuyo conocimiento, a nivel elemental, es sencillo y que pueden enriquecer notablemente la clase de resolución de problemas. Usando la terminología habitual podríamos decir que cada recurso informático dota al alumno de un heurístico más en su bagaje para resolver problemas. Además, recursos informáticos diferentes generan situaciones de aprendizaje diferentes que pueden surgir en el aula y que merece la pena analizar en su contexto. Esto se corresponde, en el fondo, con los diversos entornos de aprendizaje que genera el medio informático.

En el transcurso de una clase de resolución de problemas para alumnos de últimos años de secundaria con conocimientos de recursos informáticos variados se planteó en grupos de 2 o 3 alumnos el siguiente problema:

> Hallar el menor múltiplo de 7 tal que dividido por 2, 3, 4, 5 y 6 tiene como resto 1.

Uno de los inconvenientes que se suele indicar de la clase de resolución de problemas es la llegada de muchos alumnos a un «callejón sin salida» después de unos primeros intentos de búsqueda fallidos, lo que les lleva a abandonar prematuramente todo esfuerzo personal y esperar que por algún sitio surja un rayo de luz que permita encontrar una vía hacia la solución. Contradiciendo esos hechos se pretendía mostrar que ningún esfuerzo es inútil y que casi todas las líneas de trabajo que se abren al enfrentarse con un problema nuevo pueden llevar a soluciones imaginativas de las que se pueden aprender conocimientos y procesos. En suma, cada línea de trabajo puede alcanzar una autonomía y desarrollo propios si perseveramos en ella. Además, inmersos en un marco de disponibilidad de distintos recursos informáticos se pretendía mostrar justamente las posibilidades de éstos para ser utilizados en determinadas situaciones.

Un sistema de ecuaciones

Muchos alumnos del nivel señalado, que han estudiado álgebra, inevitablemente después de ensayos variados llegan a plantear un sistema de ecuaciones parecido al siguiente:

$$\left.\begin{aligned} 7x &= 2y+1 \\ 7x &= 3z+1 \\ 7x &= 4u+1 \\ 7x &= 5v+1 \\ 7x &= 6w+1 \end{aligned}\right\}$$

Pronto descubren que el número de incógnitas es mayor que el de ecuaciones lo que les produce un conflicto que les lleva, en general, a abandonar esta forma de resolución del problema. En este momento, el profesor debe insistir en esta línea e intentar resolver el sistema de ecuaciones. Los alumnos van adquiriendo más confianza en sí mismos y descubren bastante rápidamente que la solución debe ser un conjunto de números enteros.

Un salto cualitativo se produce cuando en uno de los grupos un alumno con conocimientos de hojas de cálculo sugiere la posibilidad de utilizar este software para resolver el sistema de ecuaciones. Entonces, el profesor señala la posibilidad de organizar las ecuaciones de manera isomorfa a las planteadas.

En una hoja de calculo, las celdas están numeradas siguiendo una tabla de doble entrada A1, C3, E2, etc., con lo cual parece bastante simple traducir el sistema anterior a la forma:

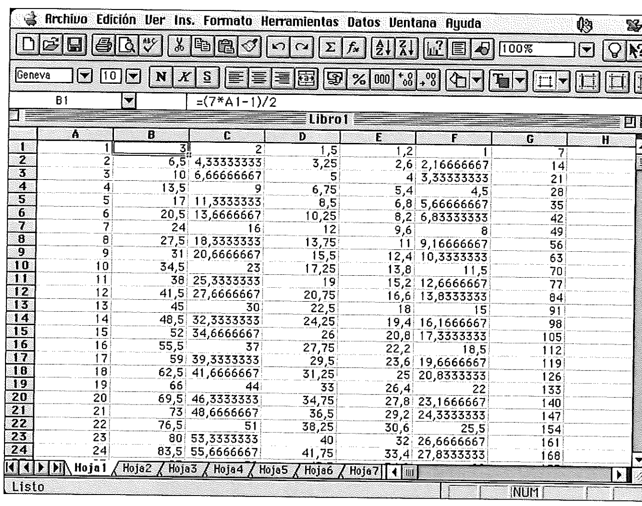
7A1 = 2B1 + 1;
7A1 = 3C1 + 1;
7A1 = 4D1 + 1;
7A1 = 5E1 + 1;
7A1 = 6F1 + 1.

A continuación, se despejan los valores de B1, C1, D1, E1 y F1 y se introducen en las celdas correspondientes:

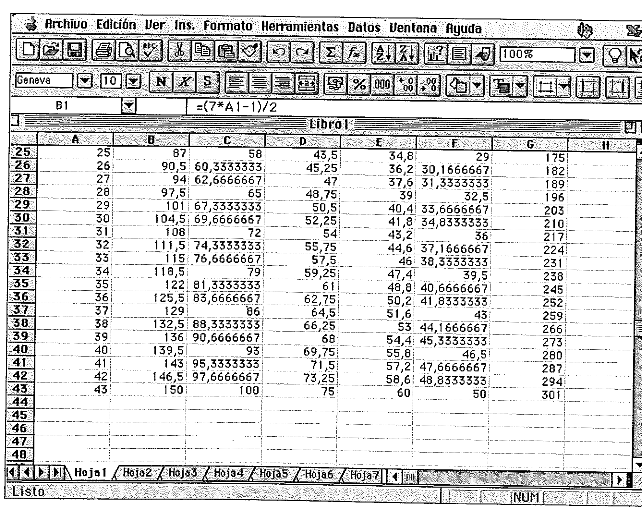
B1 = (7*A1 – 1)/2;
C1 = (7*A1 – 1)/3;
D1 = (7*A1 – 1)/4;
E1 = (7*A1 – 1)/5;
F1 = (7*A1 – 1)/6.

La solución del problema se puede obtener de manera sistemática dando valores a la celda A1 y deteniendo la búsqueda cuando todas las celdas incógnitas tengan valores enteros. Hay seguridad de obtener el número más pequeño ya que hemos hecho una búsqueda completa variando A1 desde 1 a 43.

Como complemento se puede añadir en otra columna, la G1 el valor «=7*A1» para hallar el valor real del múltiplo de 7 que obtenemos en cada ensayo.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1	3	2	1,5	1,2	1	7	
2	2	6,5	4,33333333	3,25	2,6	2,16666667	14	
3	3	10	6,66666667	5	4	3,33333333	21	
4	4	13,5	9	6,75	5,4	4,5	28	
5	5	17	11,3333333	8,5	6,8	5,66666667	35	
6	6	20,5	13,6666667	10,25	8,2	6,83333333	42	
7	7	24	16	12	9,6	8	49	
8	8	27,5	18,3333333	13,75	11	9,16666667	56	
9	9	31	20,6666667	15,5	12,4	10,3333333	63	
10	10	34,5	23	17,25	13,8	11,5	70	
11	11	38	25,3333333	19	15,2	12,6666667	77	
12	12	41,5	27,6666667	20,75	16,6	13,8333333	84	
13	13	45	30	22,5	18	15	91	
14	14	48,5	32,3333333	24,25	19,4	16,1666667	98	
15	15	52	34,6666667	26	20,8	17,3333333	105	
16	16	55,5	37	27,75	22,2	18,5	112	
17	17	59	39,3333333	29,5	23,6	19,6666667	119	
18	18	62,5	41,6666667	31,25	25	20,8333333	126	
19	19	66	44	33	26,4	22	133	
20	20	69,5	46,3333333	34,75	27,8	23,1666667	140	
21	21	73	48,6666667	36,5	29,2	24,3333333	147	
22	22	76,5	51	38,25	30,6	25,5	154	
23	23	80	53,3333333	40	32	26,6666667	161	
24	24	83,5	55,6666667	41,75	33,4	27,8333333	168	



	A	B	C	D	E	F	G	H
25	25	87	58	43,5	34,8	29	175	
26	26	90,5	60,3333333	45,25	36,2	30,1666667	182	
27	27	94	62,6666667	47	37,6	31,3333333	189	
28	28	97,5	65	48,75	39	32,5	196	
29	29	101	67,3333333	50,5	40,4	33,6666667	203	
30	30	104,5	69,6666667	52,25	41,8	34,8333333	210	
31	31	108	72	54	43,2	36	217	
32	32	111,5	74,3333333	55,75	44,6	37,1666667	224	
33	33	115	76,6666667	57,5	46	38,3333333	231	
34	34	118,5	79	59,25	47,4	39,5	238	
35	35	122	81,3333333	61	48,8	40,6666667	245	
36	36	125,5	83,6666667	62,75	50,2	41,8333333	252	
37	37	129	86	64,5	51,6	43	259	
38	38	132,5	88,3333333	66,25	53	44,1666667	266	
39	39	136	90,6666667	68	54,4	45,3333333	273	
40	40	139,5	93	69,75	55,8	46,5	280	
41	41	143	95,3333333	71,5	57,2	47,6666667	287	
42	42	146,5	97,6666667	73,25	58,6	48,8333333	294	
43	43	150	100	75	60	50	301	
44								
45								
46								
47								
48								

Buscando el mínimo común múltiplo

En una experiencia como la que estamos estudiando pueden aparecer soluciones inesperadas. Por ejemplo, un grupo multiplicó los números citados en el enunciado 2, 3, 4, 5 y 6 y al resultado le sumó 1, obteniendo 721 que es efectivamente múltiplo de 7 pero no el más pequeño. Al preguntar el razonamiento que habían seguido para llegar a él daba la sensación de que se habían comportado como aquellos alumnos que para hallar la solución de un problema combinan datos que aparecen en el mismo con una o varias operaciones elementales (suma, producto,...) recientemente estudiadas. Por supuesto no fueron capaces de probar si era o no el múltiplo de 7 más pequeño.

Pero pensando en el problema de encontrar el menor múltiplo de 7 se llegó a una solución más satisfactoria. La idea de menor llevó a hallar el mínimo común múltiplo de 2, 3, 4, 5 y 6, es decir 60, y a continuación a darse cuenta que el número 61 tiene de resto 1 al dividir por 2, 3, 4, 5 y 6. Entonces la progresión aritmética:

61, 121, 181, ...

está formada por números que cumplen la condición de dar resto 1 al dividir por 2, 3, 4, 5 y 6. Lo único que falta es encontrar en ella el primer múltiplo de 7. Por supuesto, se puede seguir buscando otros múltiplos de 7 (por ejemplo 721). La dificultad de encontrar más múltiplos de 7 con comodidad llevó a plantearse utilizar el programa DERIVE.

Entonces, se escribió la expresión:

VECTOR(60**N* + 1, *N*, 1, 20)

La función *Vector* de DERIVE genera un vector cuyas componentes son el resultado de sustituir diferentes datos en una misma expresión (García, Martínez y Miñano, 1995). En este caso, genera los 20 primeros términos de la progresión aritmética citada. Al pedirle a DERIVE mediante la orden *Expand* que desarrollase el vector anterior se obtuvo:

En una experiencia como la que estamos estudiando pueden aparecer soluciones inesperadas

[61, 121, 181, 241, 301, 361, 421, 481, 541, 601, 661, 721, 781, 841, 901, 961, 1021, 1081, 1141, 1201]

Como había que encontrar los múltiplos de 7 se vio la necesidad de emitir un mandato paralelo: hacer un vector que mostrase el resto (o el módulo) de dividir cada elemento del vector anterior por 7:

VECTOR(*MOD*(60**N*+1, 7), *N*, 1, 20)

y se obtuvo entonces el nuevo vector:

[5, 2, 6, 3, 0, 4, 1, 5, 2, 6, 3, 0, 4, 1, 5, 2, 6, 3, 0, 4]

Una simple correspondencia biunívoca nos permite hallar los valores requeridos y comprobar que el 5.°, el 12.°, el 19.°,... términos de la sucesión son múltiplos de 7.

Por otra parte, después de analizar el método anterior se llegó a la conclusión que el sistema de ecuaciones del apartado anterior se hubiese resuelto de manera más directa utilizando la orden *Solve* del programa DERIVE:

SOLVE([7**x*=2**y*+1, 7**x*=3**z*+1, 7**x* = 4**u* +1, 7**x* = 5**v*+1, 7**x* = 6**w*+1, *x*= 1],[*x*, *y*, *z*, *u*, *v*, *w*])

La orden *Solve* admite una lista de ecuaciones y una lista de incógnitas respecto a las cuales se quiere resolver el sistema. Cuando se da la orden *Expand* para el programa devuelve en pantalla:

[*x*=1, *y*=3, *z*=2, *u*=1.5, *v*=1.2, *w*=1]

variando los valores de *x*, como en la hoja de calculo, buscamos hasta encontrar una solución en la que todas las incógnitas sean números enteros. Esto ocurre como en la hoja de calculo para el valor de $x = 43$.

Programación

Otros grupos de alumnos habían organizado, por su parte, una búsqueda sistemática del primer múltiplo de 7 que cumpliese las condiciones del problema. Para ello, dividieron 7 sucesivamente por 2, 3, 4,... y luego hicieron lo mismo para 14, 21,... y demás múltiplos de 7. Cuando llegaron a 63, desistieron en su empeño. Sin embargo, la idea no es en absoluto desdeñable. El método empleado es justamente lo que haría un ordenador debidamente programado. El problema es la dificultad que conlleva programar un ordenador en un lenguaje conocido tal como LOGO, BASIC, PASCAL,...

En cualquiera de estos lenguajes de programación imperativa las herramientas necesarias para resolver un problema como el planteado se pueden reducir a cuatro:

- *asignación*, que indicamos con el signo «:=», por ejemplo cuando a la variable n le damos el valor 7, ($n := 7$), o cuando aumentamos 7 al valor que tiene ya la variable n, ($n := n + 7$).

- *composición secuencial de instrucciones*, que indicamos con el signo «;», y que señala el orden secuencial en que deben realizarse las instrucciones del programa.
- *composición alternativa de instrucciones*, que escribimos si <condición> entonces <acción>, que tienen incluso la posibilidad de encadenarse unas a otras como en «si <el módulo de *n* entre 2 es igual a 1> entonces si <el módulo de *n* entre 3 es igual a 1> entonces <escribe *n*>».
- *composición iterativa de instrucciones*, que escribimos mientras <condición> hacer <acciones>, como en «mientras <el número *n* sea menor que 1000> hacer <buscar el modulo de *n* entre 2, entre 3, etc.>».

Provisto de estas posibilidades el ordenador reduce el problema a una búsqueda bruta como la planteada por este grupo de alumnos: examinar sucesivamente todos los múltiplos de 7 y cuando haya uno que pase el filtro de la divisibilidad escribirlo.

```
n := 7;
mientras n < 2000 hacer
        si n mod 2 = 1 entonces
                si n mod 3 = 1 entonces
                        si n mod 4 = 1 entonces
                                si n mod 5 = 1 entonces
                                        si n mod 6 = 1 entonces
                                                escribe n
        n := n + 7;
```

Escribiendo este pseudocódigo en un ordenador provisto de un lenguaje adecuado como los anteriormente citados nos devuelve los múltiplos de 7 hasta el número 2000.

Algunas conclusiones y sugerencias

La primera pregunta que surge en una reflexión sobre el tema es cuál es el papel que cumple el ordenador en cada uno de los casos. En los dos primeros casos se concluye que el alumno asume una parte de la resolución de un problema haciendo que el ordenador ejecute una parte del trabajo. El ordenador funcionaría en este caso de manera similar a la que podría ser la actuación de otra persona que ayuda o guía al alumno asumiendo una parte de su trabajo, liberándolo por ejemplo de una carga mental excesiva, facilitándole la memoria o asumiendo una parte de los procedimientos que él no es capaz de dominar. El ordenador asume una parte del trabajo cognitivo que requiere la resolución del problema y se convierte en un regulador externo de la actividad del alumno (Martí, 1992). El tercer caso es diferente, aquí el ordenador asume un protagonismo mayor. De la resolución de un problemas de matemáticas hemos pasado a la resolución del mismo problema en informática. El método usado es el mismo pero un humano abandona un proceso tan largo si sabe que se puede automatizar. Sin embargo de todos los procesos de resolución que hemos examinado. y en que ha intervenido el ordenador, es justamente aquí en la programación donde notamos una diferencia cualitativa importante. Se podría decir que hay un pensamiento de ordenador, en realidad una forma de pensar del programador del mismo, que influye en la resolución de un problema.

La primera pregunta que surge en una reflexión sobre el tema es cuál es el papel que cumple el ordenador en cada uno de los casos

La segunda pregunta lleva a analizar las relaciones entre el trabajo previo hecho por cada grupo antes de utilizar el ordenador, el trabajo que éste hizo y cómo se complementaron ambos. Todos los alumnos sintieron que había una correlación entre el trabajo previo realizado por cada grupo en la clase y el apoyo posterior prestado por el ordenador. En el primer caso, se realizó una cierta elaboración que llevó a plantear un sistema de ecuaciones con las dificultades de abstracción consiguientes. Ante un bloqueo, la imposibilidad de resolver la ecuación, la hoja de cálculo –ya experimentada en contextos algebraicos (Filloy y Sutherland, 1996)– ayudó a salir del punto muerto. Aunque se les hizo ver a los alumnos que se podía resolver manualmente el sistema de ecuaciones, éstos concluyeron que sin la hoja de cálculo no hubieran terminado el problema. De alguna manera el ordenador fue un *insight* para ese grupo de alumnos.

La segunda pregunta lleva a analizar las relaciones entre el trabajo previo hecho por cada grupo antes de utilizar el ordenador, el trabajo que éste hizo y cómo se complementaron ambos

En cambio, el segundo caso es más simple. El grupo hizo un trabajo previo muy completo al que sólo le faltaban unos pequeños cálculos. El ordenador se utilizó como una simple calculadora, que libera de cálculos más o menos largos pero el problema estaba prácticamente resuelto. También en esta experiencia puede surgir una reflexión sobre la contaminación informática: puesto que existen los ordenadores hay que utilizarlos (Smith 1994). Esta crítica puede argumentarse siempre desde el momento que analizamos y volvemos a resolver problemas que tienen historia y se han planteado cuando no existían herramientas de cálculo potentes. La crítica se debilita cuando analizamos problemas nuevos o antiguos, aparcados por falta de solución, en nuestra era informática.

El tercer caso es el más complejo de todos. Sin embargo, el trabajo de los alumnos parece el más elemental: organizar una búsqueda sistemática. Sin embargo, han avanzado un paso importante: han descubierto cómo se piensa para programar un ordenador. Aquí el ordenador no es un auxiliar de trabajo sino que adquiere todo su protagonismo. En realidad, hemos trasladado nuestras dificultades de resolución de un problema de un contexto matemático a un contexto informático. Con este tipo de resolución es probable que mejoremos la enseñanza de la programación de ordenadores pero es más dudoso que mejoremos el aprendizaje de la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, volviendo la reflexión a la inversa ¿podemos aprender de los métodos que se emplean para resolver problemas en informática para resolver problemas en matemáticas? En ese sentido la programación vuelve a adquirir al menos parte de la importancia que tuvo cuando los interfaces de comunicación hombre/ordenador estaban mucho menos desarrollados.

Se podría argumentar que el problema es demasiado elemental como para permitir apreciar suficientemente las ayudas informáticas incorporadas. Volvería asurgir el tema de la contaminación informática que nos obliga a utilizar el ordenador aún sin necesidad. Sin embargo, al intentar resolver problemas más complejos, como el siguiente, los alumnos apreciaron las ventajas de poder disponer de recursos informáticos:

¿podemos aprender de los métodos que se emplean para resolver problemas en informática para resolver problemas en matemáticas?

COCONUTS

Cinco hombres y un mono naufragan y se refugian en una isla desierta. Los náufragos pasan todo el primer día recogiendo cocos. Por la noche, uno de ellos se despierta y desconfiado decide separar su parte. Dividió los cocos en cinco montones, y como sobraba un coco se lo dio al mono. Después ocultó su parte y volvió a acostarse. Poco más tarde un segundo náufrago se despierta y hace lo mismo. Al dividir los cocos en cinco montones volvió a sobrar un coco; también se lo dio al mono. Después ocultó su parte y se durmió. Uno tras otro, el tercero, cuarto y quinto náufragos hacen lo mismo. Por la mañana del día siguiente agruparon los cocos que aún quedaban en cinco montones iguales y esta vez no sobró ningún coco. ¿Cuántos se habían recolectado inicialmente?

Este problema desborda las posibilidades de controlar la situación por parte de los alumnos y difícilmente llegan a una solución sin un previo entrenamiento en recursos informáticos. Con éstos, en cambio, se puede convertir en un ejercicio para ver si han aprendido bien la lección anterior.

Antonio Sarmiento
Facultad de Educación
Universidad da Coruña.
ENCIGA

Referencias

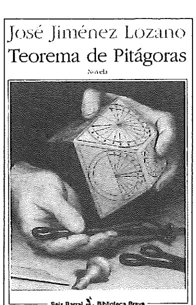
BALACHEFF, N. y J. J. KAPUT (1996): «Computer-Based Learning Environments in Mathematics», en A. J. BISHOP y otros (eds.): *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, 469-501.

FILLOY, E. y R. SUTHERLAND (1996): «Designing Curricula for Teaching and Learning Algebra», en A. J. BISHOP y otros (eds.): *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, 139-160.

GARCÍA A., A. MARTÍNEZ y R. MIÑANO (1995): *Nuevas Tecnologías y Enseñanza de las Matemáticas*, Síntesis, Madrid.

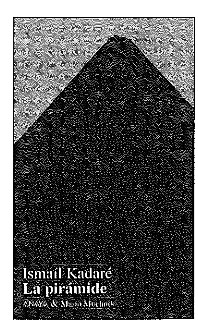
MARTÍ, E. (1992): *Aprender con Ordenadores en la Escuela*, ICE-Horsori, Barcelona.

SMITH, E. (1994): «Mathematics, Computers and People: Individual and Social Perspectives», en P. ERNEST (ed.): *Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and Mathematical Education*, The Falmer Press, 73-91.

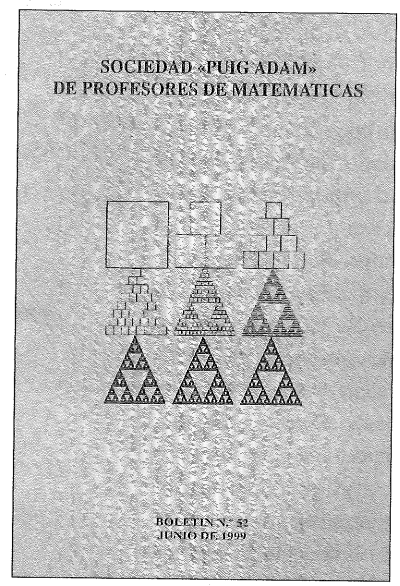


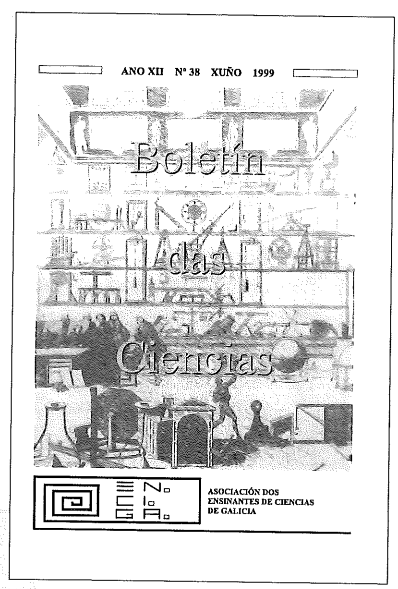
Teorema de Pitágoras
José Jiménez Lozano

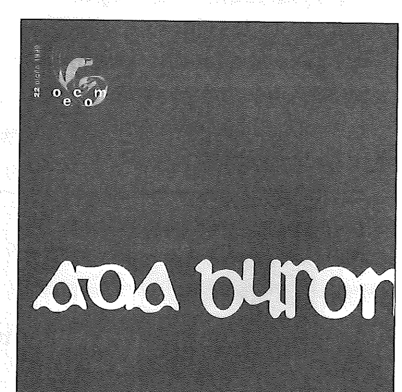
La pirámide
Ismaíl Kadaré



PUBLICACIONES DE LAS SOCIEDADES







SUMA 32
noviembre 1999, pp. 105-107

Resolución de la ecuación de segundo grado con una calculadora de bolsillo

Juan Ricardo Escribano Rivero

Es posible resolver la ecuación de segundo grado con una calculadora científica de bolsillo sencilla. No es necesario efectuar ninguna anotación intermedia, no existe ningún tipo de truncamiento ajeno al propio proceso de presentación de los datos, y las raíces tienen la exactitud de los dígitos que permita la pantalla. Todo ello se puede conseguir a partir de una pequeña modificación de la ecuación de segundo grado y del uso de un algoritmo ingenioso.

IDEAS Y RECURSOS

RESOLVER las ecuaciones de segundo grado (en adelante E2G) siempre ha sido relativamente laborioso para todos nuestros estudiantes. No sólo implica usar la «receta» exactamente, sino tener cuidado en las operaciones y los signos. Aunque esto es una precaución que deben tener todos los que usen cualquier tipo de algoritmo, no es menos cierto que cuando un estudiante se enfrenta por primera vez a la E2G posee tan escaso bagaje que la fórmula que se debe aplicar le resulta muy difícil. En efecto, se combinan en una misma expresión casi todas las operaciones que conocen hasta entonces: suma, resta, potenciación, extraer raíz cuadrada y división; y debe calcularse numéricamente. Ni siquiera cualquier fórmula geométrica tiene todo ello junto.

Una forma sencilla de ir entrenándose en la aplicación de la «receta» consiste en emplear ecuaciones de soluciones enteras; de esta forma los cálculos son menos gravosos y se va tomando progresiva confianza.

El siguiente paso sería plantear situaciones en las que haya que dejar indicada las dos raíces en términos de radicales debido a que el discriminante no sea un cuadrado exacto.

Una tercera situación consistiría en calcular la raíz cuadrada con la calculadora y efectuar las oportunas operaciones, eso sí, a partir de una ecuación con coeficientes enteros. El último, correspondería al de resolver una E2G con coeficientes en forma decimal, encontrando las raíces con la máxima aproximación que proporcione la calculadora.

En cualquier caso, el uso de la calculadora en la resolución de E2G suele ser mínimo. Existen calculadoras preprogramadas que, introducidos los valores de los coeficientes de la E2G, proporcionan las raíces x_1 y x_2. Esto es cómodo, pero no formativo, por lo menos en un nivel de enseñanza elemental. En cualquier caso, sí es de agradecer que algunas calculadoras incluyan esta facilidad, en especial cuando los coeficientes tiene algunos decimales. Esta situación se produce a menudo en Química, en la resolución de equilibrios químicos, así como en Física y en Ingeniería. En Matemáticas podría presentarse, por ejemplo, en el cálculo de los puntos de intersección de una recta y una parábola. En estos ejemplos cabe esperar situaciones en las que las soluciones x_1 y x_2 no van a ser exactas, ni tampoco es deseable dejarlas expresadas en términos de radicales.

A menos que se disponga de una calculadora científica avanzada, y por tanto cara, se frena la resolución del problema y a menudo se producen errores por truncamiento. Lo ideal es que a partir de una calculadora científica común se encuentren las raíces de la E2G:

a) sin errores por truncamiento del operador al anotar resultados parciales de cálculo;

b) con un algoritmo sencillo y fácil de recordar;

c) introduciendo sólo una vez los datos de los coeficientes de la E2G.

Un algoritmo de estas características es el que vamos a dar a conocer. El tiempo que se dedica a su enseñanza es pequeño en comparación con las ventajas que comporta. Por otro lado, pone de manifiesto la capacidad de manipulación de la E2G, y de un uso ingenioso de la capacidad de almacenamiento de datos en las calculadoras de bolsillo.

El tiempo que se dedica a su enseñanza es pequeño en comparación con las ventajas que comporta. Por otro lado pone de manifiesto la capacidad de manipulación de la E2G, y de un uso ingenioso de la capacidad de almacenamiento de datos en las calculadoras de bolsillo.

Las ecuaciones

La E2G del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad [1]$$

tiene por soluciones:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad [2]$$

pero para nuestros propósitos es más conveniente escribirlas en la forma:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \qquad [3]$$

Si la ecuación [1] se divide por a (evidentemente $a \neq 0$) y redefinimos los coeficientes como $B = b/a$ y $C = c/a$, tendríamos

$$x^2 + Bx + C = 0 \qquad [4]$$

y sus soluciones son:

$$x = -\frac{B}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{B}{2}\right)^2 - C} \qquad [5]$$

Las soluciones de la E2G del tipo [4] son las mismas que la del tipo [1], pero las soluciones de [5] son más sencillas que las de [3], al menos por lo que se refiere a la aplicación de la calculadora. Es evidente que si $a = 1$ la E2G está directamente en su forma [4]. Solamente consideraremos las situaciones en las que B y C sean reales, y que el discriminante no sea negativo.

Sean x_1 y x_2 las dos raíces asociadas con los signos más y menos de la raíz cuadrada de [5]. Todo es cuestión ahora de usar una calculadora adecuada para encontrar las dos soluciones a partir de [5].

Requisitos de la calculadora

La calculadora debe poder:

1. Almacenar datos: teclas Min o STO (depende del modelo).
2. Recuperar el dato almacenado: teclas MR o RCL (también depende del modelo; están relacionadas las teclas Min con MR, y STO con la RCL).

   No es válida la memoria aditiva, M+, o la memoria sustractiva, M–.
3. Extraer raíces cuadradas: tecla $\sqrt{\ }$
4. Cambiar el signo del número de la pantalla: tecla +/–.
5. Elevar al cuadrado: tecla x^2 (ésta operación se sustituye en algunas calculadoras por la secuencia de teclas xx=).

Todos estos son requerimientos sencillos que están incluidos en cualquier calculadora científica. No se necesita más, sólo el algoritmo.

El algoritmo

Los pasos a seguir para encontrar las dos raíces reales a partir de la solución [5] son:

1. Primero calcular $-B/2$, y guardarlo en la memoria (STO). Notar que al mismo tiempo ese número permanece en la pantalla.
2. Elevar al cuadrado el número de la pantalla, esto es, calcular $(-B/2)^2$.
3. Restar C del número de la pantalla. Lo que hacemos es calcular el discriminante: $(-B/2)^2 - C$.
4. Tomar la raíz cuadrada del número de la pantalla. Así hemos hecho

   $$\sqrt{\left(-B/2\right)^2 - C}$$

   Notar que la operación nos da sólo la raíz positiva.
5. Cálculo de la raíz x_1: sumar el número almacenado en la memoria,

$(-B/2)$, a la pantalla. Se obtiene así x_1 (éste resultado conviene anotarlo).

6. Cálculo de la raíz x_2: restar el número almacenado en memoria, $(-B/2)$, de la pantalla; en este momento se recupera el valor de la raíz cuadrada; después se cambia de signo ese número, con la tecla +/–, y entonces se suma el número almacenado en memoria, $(-B/2)$, para obtener la segunda raíz, x_2. Este resultado también se anotará.

Una vez que se han obtenido las dos soluciones de la E2G se deben interpretar en el contexto del problema.

Una vez escrita la E2G en la forma [4], la siguiente anotación que hay que realizar es únicamente la de las soluciones x_1 y x_2, sin necesidad alguna de sustituir los valores numéricos de B y C en [5].

A partir de aquí lo mejor es poner en práctica el algoritmo.

Un ejercicio

Deseamos conocer los puntos de intersección de la parábola $3y^2 - 2x = 0$ y la recta $x - y = 1$. (Este ejercicio sería previo al cálculo del área comprendida entre ambos.)

Habría que resolver la ecuación $3x^2 - 8x + 3 = 0$, que es de la forma [1]. Poniéndola en la forma [3] quedaría:

$$x^2 - \frac{8}{3}x + 1 = 0$$

Ahora $B = -8/3$ y $C = 1$

En lo que sigue consideraremos que STO es la tecla de almacenamiento de la memoria; y, RCL la tecla de recuperación de memoria.

Los pasos son los siguientes:

a) Introducir $-B$, entonces calcular $-B/2$.

Pantalla (a) —> 1,33333333333

b) Almacenar $-B/2$, (STO).

Pantalla (b) —> 1,33333333333

c) Calcular $(-B/2)^2$

Pantalla (c) —> 1,77777777778

d) Calcular $(-B/2)^2 - C$

Pantalla (d) —> 0,77777777778

Una vez que este método de resolución de ecuaciones de segundo grado se ha dominado, es rápido y sencillo. [...] La gran ventaja de él es que no hay que efectuar ninguna anotación intermedia, salvo, por supuesto, los valores de las raíces.

e) Calcular

$$\sqrt{(-B/2)^2 - C}$$

Pantalla (e) —> 0,88191710368

f) Añadir el número almacenado en la memoria, con (RCL), a la pantalla (e). Esta es la raíz x_1.

Pantalla (f) —> 2,21525043702 (= x_1)

g) Restar la memoria (RCL) de la pantalla (f).

Pantalla (g) —> 0,88191710368... = Pantalla (e)

h) Cambiar el signo, +/–, de la pantalla (e).

Pantalla (h) —> –0,88191710368

i) Añadir el número almacenado en la memoria (RCL) a la pantalla (h). Esta es la raíz x_2.

Pantalla (f) —> 0,45141622964 (= x_2)

Una vez conocidos x_1 y x_2 se sustituyen sus valores en la ecuación de la recta y se encuentran los correspondientes de y_1 e y_2. Los puntos pedidos son

$P_1(2{,}21525043702,\ 1{,}21525043702)$, y
$P_2(0{,}45141622964,\ -0{,}5485877035)$

Posiblemente podríamos pensar que aplicando las propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado:

$$x_1 + x_2 = -B, \ y \ x_1 \cdot x_2 = C \qquad [6]$$

obtendríamos rápidamente una solución una vez conocida la otra. Esto, aunque cierto, no es muy aconsejable especialmente en el caso en que B y C sean números que consten de muchos dígitos (incluso una vez escritos en notación científica, lo cual sucede en la resolución de problemas de equilibrios químicos) pues es engorroso teclearlos otra vez y siempre queda la posibilidad de cometer algún fallo. En general, se aconseja el algoritmo aquí dado. Por supuesto que las ecuaciones [6] pueden usarse para comprobar las raíces x_1 y x_2.

Conclusión

Una vez que este método de resolución de ecuaciones de segundo grado se ha dominado, es rápido y sencillo. El único requerimiento es transformar la ecuación general de segundo grado de la forma [1] a la forma [4], y aplicar el algoritmo aquí dado para calcular la solución [5]. La gran ventaja de él es que no hay que efectuar ninguna anotación intermedia, salvo, por supuesto, los valores de las raíces.

Una vez que nos hemos liberado de la carga computacional de la resolución de estas ecuaciones podemos, por ejemplo, dedicarnos a realizar cálculos con ecuaciones de segundo grado en los que los coeficientes sean de muchos dígitos, a estudiar cómo pequeñas variaciones en los coeficientes puede afectar a las soluciones, a buscar problemas de la Física y de la Química en que sea necesario resolver estas ecuaciones pero en los que resulta engorroso su cálculo por el método tradicional, etc.

Juan Ricardo Escribano
IES Huerta del Rosario
Chiclana (Cádiz)

CONVOCATORIA DEL CARGO DE SECRETARIO/A DE PUBLICACIONES DE LA FESPM

Los actuales Estatutos de la FESPM establecen, en su artículo 11, los cargos unipersonales, entre los cuales se contemplan hasta cinco secretarías de área. En el artículo 7 del Reglamento de Régimen Interno de nuestra Federación se especifican las áreas de trabajo para las que se elegirán Secretarios, que son las de Publicaciones, Revista, Prensa, Relaciones Internacionales y Actividades. Algunas de estas Secretarías están ocupadas por los anteriores vocales de área, que han sido ratificados en sus cargos en la Junta de Gobierno celebrada en Lugo el pasado día 11 de septiembre. En la misma reunión, la Junta de Gobierno de la FESPM, ha acordado delegar en la Secretaría General la convocatoria de las secretarías vacantes.

En virtud de lo expuesto anteriormente, SE CONVOCA la SECRETARÍA DE PUBLICACIONES de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, en los siguientes términos, fijados por los Estatutos y el Reglamento de la FESPM:

Podrá presentar su candidatura a la Secretaría de Publicaciones cualquier socio de una Sociedad Federada, con un año de antigüedad al menos. La solicitud, dirigida a la Presidenta de la FESPM deberá ir acompañada de la siguiente documentación:

- Certificado en el que conste que es socio activo de una Sociedad Federada, y su antigüedad.
- Un Proyecto en el que se exponga su línea de trabajo.

Las candidaturas podrán presentarse de cualquiera de las formas siguientes, teniendo en cuenta los plazos que en cada caso se señalan:

A) Por correo postal, hasta el 12 de enero de 2000, dirigido a:
PRESIDENCIA DE LA FESPM
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas Emma Castelnuovo. C/Francos Rodríguez, 106, 28039-MADRID

B) Por correo electrónico hasta el 15 de enero de 2000. En tal caso el mensaje se dirigirá a: mluelmo@arrakis.es

C) Por fax hasta el 15 de enero de 2000, que se enviará al número 91 459 11 19

La Junta de Gobierno de la FESPM elegirá al Secretario/a de Publicaciones entre los candidatos/as presentados/as, oído previamente el Secretario General, en su reunión del día 22 de enero de 2000.

Avilés, a 19 de octubre de 1999
José Luis Álvarez García
Secretario General

CONVOCATORIA DEL CARGO DE SECRETARIO/A DE ACTIVIDADES DE LA FESPM

Los actuales Estatutos de la FESPM establecen, en su artículo 11, los cargos unipersonales, entre los cuales se contemplan hasta cinco secretarías de área. En el artículo 7 del Reglamento de Régimen Interno de nuestra Federación se especifican las áreas de trabajo para las que se elegirán Secretarios, que son las de Publicaciones, Revista, Prensa, Relaciones Internacionales y Actividades. Algunas de estas Secretarías están ocupadas por los anteriores vocales de área, que han sido ratificados en sus cargos en la Junta de Gobierno celebrada en Lugo el pasado día 11 de septiembre. En la misma reunión, la Junta de Gobierno de la FESPM, ha acordado delegar en la Secretaría General la convocatoria de las secretarías vacantes.

En virtud de lo expuesto anteriormente, SE CONVOCA la SECRETARÍA DE ACTIVIDADES de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, en los siguientes términos, fijados por los Estatutos y el Reglamento de la FESPM:

Podrá presentar su candidatura a la Secretaría de Publicaciones cualquier socio de una Sociedad Federada, con un año de antigüedad al menos. La solicitud, dirigida a la Presidenta de la FESPM deberá ir acompañada de la siguiente documentación:

- Certificado en el que conste que es socio activo de una Sociedad Federada, y su antigüedad.
- Un Proyecto en el que se exponga su línea de trabajo.

Las candidaturas podrán presentarse de cualquiera de las formas siguientes, teniendo en cuenta los plazos que en cada caso se señalan:

A) Por correo postal, hasta el 12 de enero de 2000, dirigido a:
PRESIDENCIA DE LA FESPM
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas Emma Castelnuovo. C/Francos Rodríguez, 106, 28039-MADRID

B) Por correo electrónico hasta el 15 de enero de 2000. En tal caso el mensaje se dirigirá a: mluelmo@arrakis.es

C) Por fax hasta el 15 de enero de 2000, que se enviará al número 91 459 11 19

La Junta de Gobierno de la FESPM elegirá al Secretario/a de Actividades entre los candidatos/as presentados/as, oído previamente el Secretario General, en su reunión del día 22 de enero de 2000.

Avilés, a 19 de octubre de 1999
José Luis Álvarez García
Secretario General

SUMA 32
noviembre 1999, pp. 109-112

Travesía del Gangah

Miquel Albertí Palmer

Después de relatar la experiencia vivida al cruzar el Ganges en un bote me planteo: ¿Qué curva describe una barca al cruzar un río? En principio tiene la intención de ser una línea recta, pero la fuerza de la corriente lo impide por débil que sea. La búsqueda de una función cuya gráfica coincida con esa trayectoria constituye un excelente ejemplo de modelización matemática simple y de aplicación de conceptos fundamentales del cálculo diferencial.

MISCELÁNEA

ERA la tercera vez que íbamos. Pero no volvíamos a los ghats, ahora nos disponíamos a atravesar el río para visitar el fuerte de Ram Nagar, en la orilla sur.

El pequeño muelle de donde zarpaban los botes era un arenal a las afueras de Varanasi. De hecho, no había muelle. Uno intuía que de allí partían las embarcaciones por el barullo de gente y de mercancías que se daban cita en aquel lugar. Habíamos llegado en un rickshaw, después de zigzaguear como una centella entre el caótico tráfico de la ciudad. Enseguida que el precio del viaje fue acordado nos hicieron subir a bordo. Y allí permanecimos sentados espera que te espera. No partimos, no. Claro, nosotros dos éramos los únicos pasajeros y sin duda cabía alguno más. Tal vez alguno para un occidental, pero sin duda muchos para un indio; no nos apartamos de la orilla hasta que fuimos ocho: nosotros, dos remeros y cuatro pasajeros nuevos, uno de ellos insólitamente encorbatado en un traje impecable.

El Gangah crece mucho cuando el monzón alcanza el norte del subcontinente. Las aguas suben varios metros inundando cultivos, caminos y las chozas que se han construido a su vera. A efectos de la crecida los márgenes se alejan y la distancia que separa Ram Nagar de la orilla norte (unos trescientos metros durante la estación seca) se triplica. La fuerza de la corriente también aumenta y hacen falta dos hombres para gobernar el bote y conducirlo a su destino.

Bajo un sol de mil demonios la fachada firme e imponente del fuerte se agitaba líquida sobre el agua. El sudor nublaba nuestras miradas y más que de una visión real se trataba de un espejismo.

Los remos de bambú fueron utilizados como perchas para zarpar del embarcadero, pero no nos dirigimos hacia el otro lado del río, sino río arriba rozando la orilla. Poco después la barca nos subía contracorriente impulsada por los remos. Éstos habían sido alojados cuidadosamente en el fondo cóncavo del bote y eran ahora las manos de los jóvenes las que nos propulsaban asiendo los travesaños de madera que se sucedían por encima de nuestras cabezas: sombra, sol, sombra, sol,... De su paseo por aquella escalera horizontal conseguíamos el impulso para deslizarnos sobre el agua. Avanzábamos lentamente encajonados entre unos cilindros negros gigantescos que sostenían las vigas. Éstas nos hacían ahora de techo pero se convertían en el suelo del puente cuando, una vez acabadas las lluvias, todo el ingenio se extendía de lado a lado del río.

Eso lo supimos más tarde. En aquellos momentos la situación parecía algo delicada: pasar entre las sombras de aquellos objetos extraños, en un lugar ignoto, sin saber bien adónde nos conducirían, compartir el viaje con seis desconocidos, seis hombres (ella los contó varias veces) que no decían ni se decían ni pío (¿era que en su silencio se decía todo?, ¿quizás ya habían acordado antes de embarcar cuándo nos asaltarían?), no era cosa de broma. ¿Qué podía hacer yo contra ellos seis? Ella debió pensar en esto cuando la vi mirar el agua con temor: no le daba ningún asco la suciedad que flotaba en ella, sino el hecho de tener que zambullirse para escapar del ataque. Es Leo y ya se sabe que a los felinos no les hace ni pizca de gracia mojarse.

De pronto, el viento cambió. O me lo pareció porque de una sacudida los dos jóvenes sacaron el bote de debajo del puente móvil y retomaron los remos. El Sol volvía a lucir quemándonos la piel. La proa apuntó por fin hacia la orilla sur, perpendicularmente al río. Y entonces, empujados por la fuerza de los remeros y de la corriente, trazamos una diagonal sobre el agua que ni dejó rastro alguno ni fue rectilínea, a pesar de su intención.

...debido a que la corriente es tan fuerte hace falta llevar la embarcación hasta un punto de la orilla río arriba y desde allí trazar la perpendicular para aproximarse al puerto contrario. Las matemáticas y la física harán el resto.

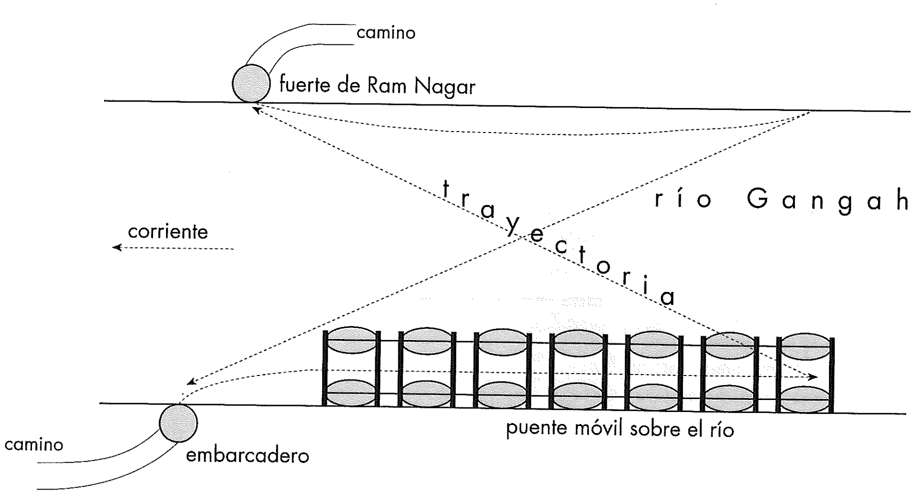


Figura 1

En un principio me sorprendió el itinerario seguido, pero después caí en la cuenta: debido a que la corriente es tan fuerte hace falta llevar la embarcación hasta un punto de la orilla río arriba y desde allí trazar la perpendicular para aproximarse al puerto contrario. Las matemáticas y la física harán el resto. Ahora bien, si era así, ¿por qué no habíamos embarcado desde el comienzo en ese lugar?

Al regresar las maniobras fueron parecidas. Desde Ram Nagar salimos bordeando la orilla, contracorriente, hasta que encaramos el otro margen con otra diagonal que cruzó la anterior enmedio de la corriente. Completamos así un 8, si lo miramos desde una orilla, o un ∞ si lo miramos desde la corriente. Tal vez este último símbolo resulte más adecuado dada la cantidad de viajes que día tras día se hacen –y deben haberse realizado durante siglos–, para atravesar el río sagrado (figura 1).

Las diagonales anteriores no fueron rectas, como ya se ha dicho. Eso tiene que ver con la fuerza de la corriente, que no es la misma en medio del río que cerca de sus orillas. De entrada, podemos suponer que hay tres tipos básicos de flujo. Probablemente éste depende del ancho del río: cuanto más estrecho, más parecido al tipo A; cuanto más amplio más parecido al tipo C (cuadrático).

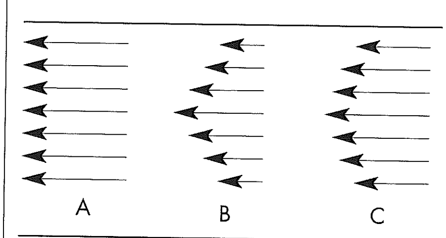


Figura 2

Ahora planteemos el problema con más precisión y menos ambigüedad. Es decir, huimos de la situación real para ir al laboratorio donde se hacen las suposiciones ideales que permiten encarar la cuestión con más facilidad. Comenzaremos por el caso hipotético más sencillo:

Supongamos que queremos cruzar un río de orillas paralelas cuya corriente fluye a velocidad constante v en todos sus puntos: el caso A, el más simple. La barca de que disponemos para efectuar la travesía puede desplazarse a una velocidad w, también constante. Queremos ir desde un punto P de una orilla hasta un punto Q de la otra. Q está situado de tal manera que el segmento PQ es perpendicular al río y por tanto a su corriente. Veámoslo:

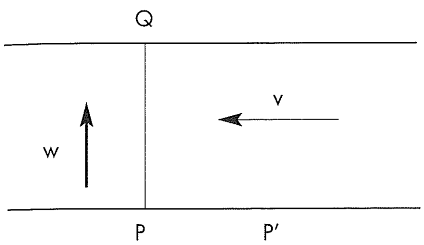


Figura 3

Cuestión: *¿Cuál será el mejor punto P', situado en el margen de salida, desde donde apuntar la proa perpendicularmente a la corriente y, con el efecto de ésta, llegar hasta Q?*

En un punto cualquiera del río la velocidad resultante con la que se desplazará la embarcación será:

$$w = \sqrt{v^2 + w^2}$$

y la dirección que seguirá:

$$\text{tg } a = \frac{w}{v}$$

Ahora bien, como ya se ha mencionado la corriente es constante e igual en todos los puntos. Luego tg a también se podrá obtener a partir de los catetos del triángulo rectángulo, es decir que podemos escribir:

$$\text{tg } a = \frac{w}{v} = \frac{PQ}{PP'}$$

y ya sabemos cómo hallar P':

$$PP' = \frac{PQ \cdot v}{w} = \frac{v}{w} \cdot PQ$$

w deberá ser mayor que v para que los remeros puedan vencer la corriente. Escribiendo $w = k{\cdot}v$, con $k > 1$, tendremos:

$$PP' = \frac{PQ}{k}$$

Supongamos que queremos cruzar un río de orillas paralelas cuya corriente fluye a velocidad constante v en todos sus puntos... La barca de que disponemos para efectuar la travesía puede desplazarse a una velocidad w, también constante.

Como era de esperar la ubicación de P' depende de la fuerza de los remeros. Cuanto mayor es k, menos habrá que alejarse de P. En el caso en que $k = 1$ ($v = w$), el ángulo a será de 45° y $PP' = PQ$.

Situémonos ahora en un ámbito más cercano a la realidad: aquel en el cual el flujo obedece al modelo C. La velocidad con la que se mueve un punto sobre el agua depende de la distancia que le separa de las orillas: cuando está en medio vale v, pero se anula cuando se halla junto a las orillas. Para facilitar el trabajo supongamos que $PQ = 1$ y tomemos un sistema de coordenadas con origen en Q:

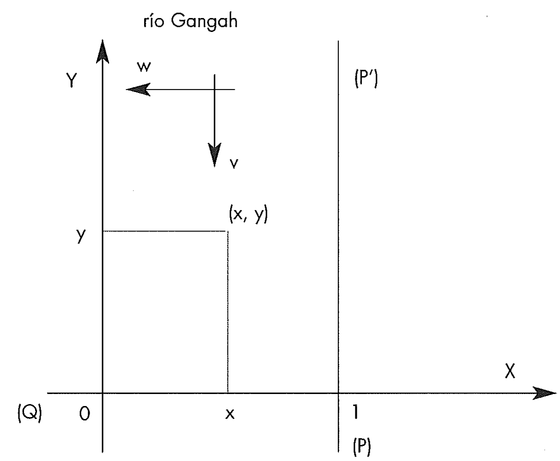


Figura 4

La velocidad que actua sobre el punto (x, y) depende de x, con $0 \leq x \leq 1$. Será pues del tipo:

$$V(x) = k{\cdot}x{\cdot}(x-1) \qquad k = \text{cte.}$$

porque se ha de anular en las orillas para $x = 0$ y para $x = 1$. Aparece entonces una función de segundo grado. ¿Cuánto vale k? Para hallarla pensemos que para $x = 1/2$, en medio de la corriente, la velocidad ha de ser $-v$. Es negativa porque la corriente va hacia abajo. Luego:

$$-v = V\left(\frac{1}{2}\right) = k \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{k}{4} \quad \Rightarrow \quad k = -4v$$

Y así ya tenemos la función cuadrática que nos proporciona la velocidad en cada punto del canal:

$$V(x) = -4v(x - x^2) = 4v(x^2 - x)$$

La dirección instantanea que tomará el punto se puede obtener de los vectores velocidad que actuan sobre él. El vector velocidad resultante, $W(x, y)$, tendrá pendiente:

$$\text{tg } a = \frac{|V(x)|}{|-w|} \; \frac{4v\left(x - x^2\right)}{w}$$

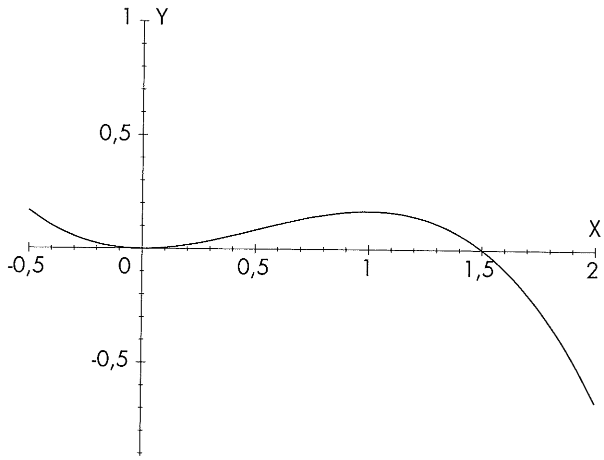
Pero tg a es también la pendiente de la recta tangente a la trayectoria que sigue el bote, es su velocidad instantánea resultante y $W(x, y)$ su vector director. Así que la curva que trazará la embarcación al cruzar el río será aquella que tiene coma derivada precisamente a la función

$$y = \frac{4v}{w}\cdot\left(x^2 - x\right)$$

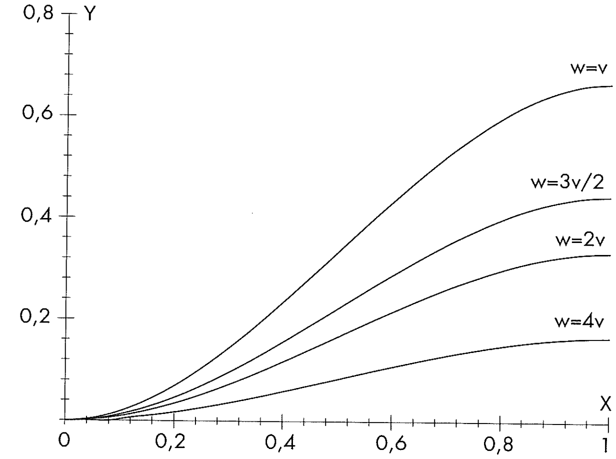
es decir, una primitiva suya. Como por ejemplo:

$$y = \frac{2v}{3w}\cdot\left(3x^2 - 2x^3\right)$$

Puesto que ha de ser $y(0) = 0$, la constante de integración es nula. He aquí su gráfico para $w = 4v$:



y ahora el mismo en el intervalo [0,1] (donde tienen lugar los acontecimientos) para diferentes proporciones entre w y v:



Alcanza el máximo en el punto $x = 1$ y el mínimo en $x = 0$. En el caso $w = 4$v el valor que toma el máximo es 1/6. El mínimo siempre toma el valor 0. Para $x = 1/2$ la pendiente de la recta tangente es $y'(1/2) = 1$. Por tanto, en el caso $w = 4v$, el punto P' se halla a una distancia igual a $PQ/6$.

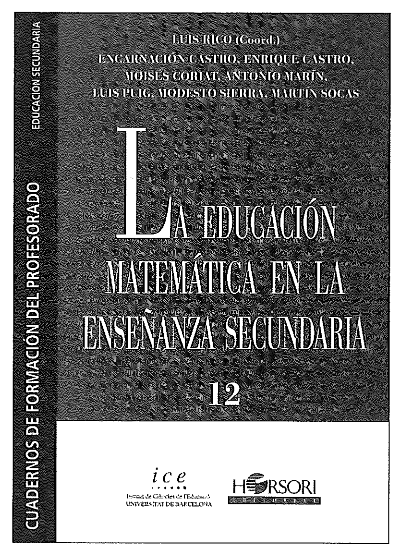
Medir las velocidaes v y w no es difícil, pero cómo dependen éstas del nivel de las aguas, del ancho del canal y de su profundidad es otra historia.

Miquel Albertí
IES Pau Vila
Sabadell (Barcelona)

SUMA 32
noviembre 1999

Un tema pendiente: la formación de profesores de matemáticas de secundaria

LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA
Luis Rico (coordinador)
Encarnación Castro, Enrique Castro, Moisés Coriat, Antonio Marín, Luis Puig, Modesto Sierra, Martín Socas
ICE de la UB y HORSORI, Cuadernos de Formación del Profesorado
Barcelona, 1997
ISBN: 84-85840-65-8
254 páginas



Cuando los responsables de política educativa de nuestro país, tanto los estatales como los autonómicos, todavía no se han decidido a legislar, orientar u organizar seriamente la formación inicial de los profesores de educación secundaria, este libro, publicado por el ICE de la Universidad de Barcelona en colaboración con la editorial HORSORI y coordinado por Luis Rico, catedrático de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, resulta una aportación atractiva además de imprescindible.

En las primeras páginas del libro se afirma que «la necesidad de contar con profesionales cualificados, que desarrollen una educación de calidad basada en el dominio de los campos dis-

RECENSIONES

ciplinares y de las competencias didácticas sobre dichos campos, carece de una reflexión extensa, profunda y elaborada entre los profesionales de Ciencias de la Educación en España». La constatación de este vacío es, sin duda, lo que ha animado al coordinador y los autores del libro que vamos a reseñar, todos ellos profesores del área de Didáctica de las Matemáticas, a contribuir en este intento de presentar a los profesores de matemáticas de secundaria y a sus actuales formadores unas reflexiones que sirvan de fundamento para una adecuada capacitación profesional del educador matemático.

El libro está básicamente estructurado en tres partes, donde los diferentes capítulos se deben a distintos autores. La primera parte trata de cuestiones curriculares: en el capítulo I se presenta un marco curricular general del área de matemáticas en secundaria y en el capítulo II se argumenta acerca de las ventajas de contar con herramientas propias que permitan organizar adecuadamente el currículo de matemáticas de secundaria. La segunda parte consiste en una serie de capítulos (del III al VII) que tratan de cinco herramientas básicas para el diseño, organización y gestión de unidades didácticas en el área de matemáticas: análisis fenomenológico, representaciones y modelos, errores y dificultades, materiales y recursos y desarrollo histórico. En la tercera y última parte del libro (capítulo VIII) se ofrece un ejemplo de uso conjunto de los organizadores del currículo presentados en los capítulos anteriores aplicados a la elaboración de una unidad didáctica.

Esta recensión seguirá sistemáticamente la estructura del libro, dando una explicación sucinta con algún comentario del contenido de cada capítulo.

Capítulo I: Consideraciones sobre el currículo de Matemáticas para Educación Secundaria, por Luis Rico

Luis Rico, autor de este primer capítulo, inicia sus reflexiones acerca del conocimiento profesional en educación matemática, con estas palabras: «La idea de que para trabajar en la enseñanza de las matemáticas son necesarios conocimientos y destrezas específicos, que sean complementos del saber convencional del profesor de matemáticas sobre estructuras formales y algoritmos, se ha desarrollado con fuerza en fechas recientes» (p. 15). En efecto, salimos de una época en que la opinión generalizada acerca de la formación de los profesores de secundaria consistía en considerar suficiente que fueran unos buenos conocedores de la materia, objeto de su enseñanza; en particular, en las Facultades de Matemáticas la creencia común ha sido (y creo que lo sigue siendo, en gran medida) que para ser un buen profesor de matemáticas lo único importante es tener una buena formación matemática.

...este intento de presentar a los profesores de matemáticas de secundaria y a sus actuales formadores unas reflexiones que sirvan de fundamento para una adecuada capacitación profesional del educador matemático.

Este libro es una contribución que sirve para rebatir el adjetivo único y demostrar que, en palabras de Rico, «el desempeño de los profesionales de la enseñanza de las matemáticas necesita una organización conceptual que integre y coordine el dominio sobre esta disciplina con el conocimiento sobre desarrollo de capacidades cognitivas de los estudiantes y con el campo de fenómenos y problemas a cuya interpretación y solución se orientan las matemáticas escolares; una teorización de estas características también ha de considerar los medios y recursos para el aprendizaje de las matemáticas junto con las necesidades propias del sistema educativo» (p. 15).

A lo largo de los distintos apartados de este capítulo asistimos a un desarrollo cuidado y riguroso donde, partiendo de la descripción de la situación actual de la formación y de las necesidades formativas del profesorado de matemáticas, se establece el marco que permite profundizar en el conocimiento profesional en Educación Matemática y se indica la dirección que han de tomar las estrategias que ayuden a abordar y resolver este problema.

En su concepción acerca de las matemáticas escolares, me parece interesante la reflexión del autor en torno a la cuestión de que la enseñanza de las matemáticas está implicada en el sistema de valores, con sus fundamentos éticos y su práctica social. Otras ideas interesantes se encuentran en la visión de las matemáticas escolares basada en: la aceptación del conocimiento matemático como resultado de una evolución histórica; la consideración pragmática e instrumental del conocimiento matemático; el reconocimiento de que una parte importante de los conceptos y procedimientos de las matemáticas forman parte del bagaje cultural de los conocimientos básicos del ciudadano; la consideración de los procesos constructivos y de interacción social en el aprendizaje de los conocimientos matemáticos; la necesidad de incorporar nuevas tecnologías; la conveniencia de una visión activa de la enseñanza de las matemáticas.

En cuanto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, destacan las consideraciones producto de la interconexión entre las teorías del aprendizaje basadas en la psicología cognitiva y los conocimientos pedagógicos sobre la enseñanza; asimismo encontramos un apartado dedicado a la dimensión cultural de las matemáticas dentro del sistema escolar. Entre las consideraciones en torno a los fines y metas de la educación matemática, destacamos tres argumentos propuestos por el profesor Rico: el alto valor formativo de las matemáticas que facilitan el desarrollo de las capacidades de razonamiento lógico, simbolización, abstracción, rigor y precisión que caracterizan el pensamiento formal; la utilidad práctica de las matemáticas que permiten codificar información y obtener representaciones del medio social y natural; las matemáticas proporcionan, junto con el lenguaje, uno de los hilos conductores de la formación intelectual de los alumnos.

El interés principal del apartado dedicado a la noción de currículo proviene de la larga lista de preguntas que se plantean y que dan idea del reto que supone enfrentarse al problema de la formación matemática en la Educación Secundaria Obligatoria. Las preguntas básicas no son obvias: ¿qué es, en qué consiste el conocimiento?, ¿qué es el aprendizaje?, ¿qué es la enseñanza?, ¿qué es, en qué consiste el conocimiento útil? Estas cuatro cuestiones permiten establecer cuatro dimensiones en torno a las que organizar los niveles de reflexión curricular: dimensión cultural/conceptual; dimensión cognitiva; dimensión ética; dimensión social.

Finalmente, el último apartado está dedicado a la cuestión clave de la evaluación, donde se discute este término desplazando la idea tradicional de control hacia la noción más constructiva de diagnóstico y remedio. Las cuestiones que se plantean aquí son : ¿por qué hay que valorar el trabajo de los alumnos? ¿qué valorar? ¿cómo evaluar? ¿qué decisiones deben afectar a la evaluación? para acabar estableciendo una lista de criterios para seleccionar tareas de evaluación: relevancia práctica, coherencia o fragmentación de la tarea, rango de respuestas posibles, extensión y valor de la tarea y, finalmente, modo de tratar las tareas.

Las preguntas básicas no son obvias: ¿qué es, en qué consiste el conocimiento?, ¿qué es el aprendizaje?, ¿qué es la enseñanza?, ¿qué es, en qué consiste el conocimiento útil?

Capítulo II: Los organizadores del currículo de matemáticas, por Luis Rico

El segundo capítulo de este libro dedicado a la formación de los profesores de matemáticas de secundaria está orientado hacia el análisis del problema de la planificación y la organización de las unidades didácticas, con propuestas nuevas e interesantes que pueden ser de gran utilidad tanto para los profesores, en ejercicio o en formación, como para sus formadores.

En palabras del autor, Luis Rico, preocupado por la situación actual y las orientaciones de los documentos oficiales: «nuestra crítica está dirigida hacia la deficiente preparación didáctica que recibe el profesor en formación, que sólo le capacita para discutir sobre los contenidos» (p. 42) y algo más abajo: «nuestra tesis es que el profesor de matemáticas de secundaria de hoy no dispone de herramientas conceptuales adecuadas y suficientemente desarrolladas a partir de las cuales realizar una buena planificación» (p. 42).

Al referirse a las decisiones que se toman cuando se realiza la planificación del currículo con un grupo de alumnos concreto, el autor nos recuerda que los criterios, tanto para la selección, secuenciación y organización de los contenidos como para la organización, desarrollo y trabajo de aula, se ajustan a las cuatro componentes generales del currículo: contenidos, metodología, objetivos y evaluación. Otra cuestión que se constata es que los bloques de contenidos y las unidades didácticas se distinguen unos de otros únicamente por los contenidos específicos, con lo cual se produce un desajuste: los enunciados sobre objetivos, metodología y evaluación tienen un carácter general y los que tratan de contenidos específicos son distintos además de precisos y detallados.

Precisamente la aportación más interesante de Rico radica en su propuesta de reflexión curricular y su insistencia en la necesidad de pensar nuevas herramientas que permitan abordar las tareas de diseño, desarrollo y evaluación de las unidades didácticas en el área de matemáticas. Las preguntas que se plantea y que le llevarán a una propuesta innovadora se concretan de la manera siguiente: «¿es posible encontrar otros elementos, distintos de los contenidos que expresen un conocimiento objetivo y útil para la elaboración de unidades didácticas?» (p. 45). Ésta y otras consideraciones abocan en la búsqueda de unos llamados organizadores que constituyen las componentes fundamentales que permiten establecer el diseño, desarrollo y evaluación de las unidades didácticas en el área de matemáticas.

Para que un conocimiento se acepte como organizador curricular deberá cumplir una serie de condiciones: su carácter objetivo y la diversidad de opciones que puede generar; que ofrezca un marco conceptual para la enseñanza de las matemáticas; que muestre su potencialidad para establecer distintos marcos de estructuración de las unidades didácticas; también es importante que favorezcan distintas opciones de los profesores para la planificación y la gestión.

Si bien es cierto que las diferentes disciplinas matemáticas, como son el Álgebra, el Análisis, la Geometría..., satisfacen las condiciones de organizadores curriculares, hay que observar que no agotan las necesidades organizativas del currículo de matemáticas lo cual implica la necesidad de buscar nuevos organizadores. Mencionaremos los organizadores que sugiere Luis Rico en su propuesta y que constituyen la base de los cinco capítulos siguientes de este libro:

- La fenomenología de los conocimientos implicados y las aplicaciones prácticas de cada bloque de contenidos.
- La diversidad de representaciones utilizadas en cada sistema conceptual y las modelizaciones de los conceptos correspondientes.
- Los errores y dificultades detectados en la enseñanza de las matemáticas que se presentan en cada tema y los problemas y obstáculos de aprendizaje detectados para cada concepto.
- La diversidad de los materiales manipulativos y de los recursos que pueden utilizarse en la enseñanza de cada tema.
- La evolución histórica de cada concepto.

Capítulo III: Análisis fenomenológico, por Luis Puig

En este capítulo, su autor, Luis Puig, se propone exponer los rasgos característicos de lo que él entiende por análisis fenomenológico de las matemáticas, como un componente de su análisis didáctico cuyo nombre está tomado de la obra ya clásica de Freudenthal (*Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*). Esta presentación del análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática se inicia con una breve y clara introducción a las ideas de Freudenthal acerca de lo que él mismo denominó fenomenología didáctica, para acabar presentando los diferentes tipos de fenomenología (fenomenología, fenomenología didáctica, fenomenología genética y fenomenología histórica).

Esta presentación del análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática se inicia con una breve y clara introducción a las ideas de Freudenthal acerca de lo que él mismo denominó fenomenología didáctica, para acabar presentando los diferentes tipos de fenomenología...

Sin pretender mostrar un análisis fenomenológico demasiado complejo de los contenidos matemáticos de la educación secundaria, el autor expone unas consideraciones generales alrededor de dos ideas básicas que constituyen el tema de los dos apartados siguientes.

El segundo apartado se desarrolla en torno a una reflexión que se refiere a «la naturaleza de los objetos matemáticos y de la práctica matemática y, en consecuencia, a la naturaleza de la actividad que hay que dar la oportunidad a los alumnos que realicen para que puedan tener acceso a genuina experiencia matemática» (p. 62). Se nos habla aquí de «los conceptos matemáticos, de su creación en una relación fenómenos-medios de organización y de su compleja entrada en una relación fenómenos-medios de organización de nivel superior, así como de las transformaciones de los conceptos como consecuencia de las actividades matemáticas como son probar teoremas, resolver problemas, organizar un sistema deductivo y del proceso de definir. Todo ello acompañado de la afirmación de que los conceptos matemáticos no tienen una existencia independiente de la actividad matemática que los crea» (p. 75).

En el tercer apartado, el autor se pronuncia en torno a «los objetivos que hay que perseguir en la enseñanza de las matemáticas para capas amplias de la población, con respecto a la naturaleza de los conocimientos matemáticos que se propone que adquieran» (p. 75). Aparece aquí otra idea debida a Freudenthal: la de objeto mental contrapuesta a concepto, según la cual el objetivo de la educación matemática en el sistema escolar es la construcción de objetos mentales, quedando en segundo lugar la adquisición de conceptos. Esta toma de partido que defiende el profesor Puig, siguiendo a Freudenthal, es particularmente importante en la etapa de la escolaridad obligatoria donde se ofrecen unas matemáticas para el conjunto de la población; además es fundamental para el análisis fenomenológico de los conceptos matemáticos, previo a la organización de la enseñanza.

Finalmente, en el apartado «notas para una fenomenología de los conceptos matemáticos de la educación secundaria», se hace un recorrido por los bloques de contenido del currículo de matemáticas de secundaria, dando algunas ideas del sentido en que se ha hecho o se debería hacer, según los casos, su análisis fenomenológico. De esta manera se desarrollan algunas ideas en torno a los conceptos de: número; operaciones aritméticas; razón y proporción; álgebra; objetos geométricos, figuras y dibujos; movimientos y transformaciones geométricas; estadística; probabilidad; variable, dependencia, función; límite, continuidad, infinito.

Capítulo IV: Representaciones y modelización, por Encarnación Castro y Enrique Castro

En su introducción a este capítulo, donde establecen las bases que permiten hablar de la relación entre conocimiento matemático y visualización, los autores, Encarnación Castro y Enrique Castro, nos dicen que van a dirigir «nuestra atención hacia la función que desempeñan los datos e informaciones visuales en el aprendizaje de las matemáticas como generadores de imágenes y objetos mentales» y destacan «su aportación en relación a la formación de conceptos y el desarrollo de procedimientos matemáticos por parte del sujeto que aprende, subrayando de este modo la necesidad de considerar el pensamiento visual en las situaciones de enseñanza» (p. 96).

Un aspecto sugerente de la explicación de estos autores consiste en su afirmación de que tanto la transmisión y la recepción del conocimiento matemático como los medios usados para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se realiza mediante los canales de información auditivo y visual. El capítulo se centra en las representaciones y los modelos, por considerar los autores que son los que proporcionan mejor información para la elaboración de imágenes mentales que intervienen en la formación del conocimiento matemático.

En cuanto a las representaciones, los autores las definen como notaciones simbólicas o gráficas, específicas en cada caso con las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como sus características y propiedades. Los modelos son esquemas o materiales estructurados, relacionados, mediante leyes o reglas, que proporcionan una imagen isomorfa de un determinado concepto respecto a determinadas relaciones o propiedades; hay que advertir de que la noción de modelo admite la consideración de tipos muy distintos y de diferentes clasificaciones. Tanto las representaciones como los modelos así definidos son externos en tanto que tienen una traza o un soporte físico tangible; por otro lado, cuando pensamos en objetos matemáticos como son los conceptos y operaciones, formamos representaciones mentales que se denominan representaciones internas.

Existe una estrecha relación entre las representaciones externas e internas y se puede considerar que las representaciones externas (enunciados, fórmulas, gráficas, figuras,...) son el medio que utilizan las personas para exteriorizar sus imágenes y representaciones mentales, haciéndolas accesibles a los demás. Las representaciones externas tienen, por tanto, una doble función: actuar como estímulo para los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales; y permitir la expresión de conceptos e ideas de las personas.

...tanto la transmisión y la recepción del conocimiento matemático como los medios usados para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se realiza mediante los canales de información auditivo y visual.

La noción de pensamiento visual o visualización está relacionada con la capacidad para la formación de imágenes mentales caracterizadas por hacer posible la evocación de un objeto sin que esté materialmente presente y es un aspecto importante del pensamiento matemático.

A lo largo de este capítulo se desarrollan estas ideas de representaciones y modelos. En el caso de las representaciones se hace un análisis conceptual seguido de una explicación acerca de la relación entre representación y construcción de conceptos, de las situaciones de pluralidad de sistemas de representación para un mismo concepto y del manejo de diferentes sistemas de representación. Para los modelos se hace también un análisis conceptual y a continuación se presentan diferentes clases de modelos y se establecen las relaciones entre representaciones y modelos dando algunos ejemplos como son los números figurados, la representación de razones trigonométricas, los modelos tridimensionales, el área del rectángulo como modelo y, finalmente, modelos para nociones de probabilidad.

Capítulo V: Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria, por Martín Socas

Este capítulo es seguramente uno de los más atractivos del libro que estamos comentando: trata de las dificultades, los errores y los obstáculos que se encuentran los alumnos durante su proceso de aprendizaje. Como dice su autor, Martín Socas, «el propósito de este capítulo es hacer una reflexión general sobre este tema central en el aprendizaje de las matemáticas y poner en contacto al lector con los aspectos más relevantes en torno a las dificultades, obstáculos y errores que presentan los alumnos en la construcción del conocimiento matemático. Para ello analizaremos el origen de estas dificultades, la noción de obstáculo y los diferentes errores que cometen los alumnos al trabajar con las matemáticas; también comentaremos las razones por las que se originan» (p. 126). El contenido matemático que se ha tomado para los ejemplos que ilustran las cuestiones planteadas es el del lenguaje algebraico.

En una recensión de estas características será imposible dar cuenta de la variedad y la riqueza de las ideas que se presentan en este capítulo. Pero sí mencionaremos los rasgos principales de las tres nociones que aparecen aquí.

En cuanto a la naturaleza de las dificultades que aparecen en el aprendizaje de las matemáticas, se pueden clasificar en cinco categorías:

- Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos.
- Dificultades asociadas a los procesos del pensamiento matemático.
- Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas.
- Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos.
- Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

Como se ve, las dos primeras categorías están relacionadas con la propia disciplina (objetos matemáticos y procesos del pensamiento matemático), la tercera está ligada a los procesos de enseñanza de las matemáticas, la cuarta está conectada con los procesos cognitivos de los alumnos y la quinta enlaza con la carencia de una actitud racional hacia las matemáticas.

La segunda noción, objeto de análisis, es la de obstáculo que fue introducido por Bachelard en el campo de la filosofía de la ciencia, y posteriormente retomado por Brousseau en el marco de la didáctica de las matemáticas. Brousseau clasifica los obstáculos según su origen: ontogénico o psicogénico, según las características del desarrollo del alumno; didáctico, según el proyecto educativo y las elecciones didácticas que se han hecho para establecer la situación de enseñanza; y epistemológico, intrínsecamente relacionado con el propio concepto y que se encuentra en la historia y evolución del mismo.

Tanto Bachelard como Brousseau caracterizan un obstáculo como «aquel conocimiento que ha sido en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas, y que por esta razón se fija en la mente de los estudiantes, pero que posteriormente este conocimiento resulta inadecuado y difícil de adaptarse cuando el alumno se enfrenta con nuevos problemas».

En su referencia a los errores en matemáticas, el profesor Socas considera el papel de los errores en el desarrollo del conocimiento matemático y nos muestra algunos procedimientos erróneos y pseudodemostraciones, aprovechables didácticamente, en el campo del lenguaje algebraico. A continuación encontramos unas reflexiones interesantes en torno a la importancia del diagnóstico y tratamiento de los errores así como algunas ideas acerca de estrategias de prevención y remedios.

Capítulo VI: Materiales, recursos y actividades: un panorama, por Moisés Coriat

En este capítulo se aborda el tema de los materiales, recursos y actividades de aula desde una perspectiva de equilibrio entre la práctica educativa y la reflexión teórica basada en la investigación. El autor de este capítulo, Moisés Coriat, dice: «Me atrevo a afirmar que cualquier tema de ESO o Bachillerato (con no más de dos excepciones...) es posible encontrar o idear un material didáctico o recurso *ad hoc*. ¿Es posible o deseable desarrollar todos los temas de una programación usando materiales didácticos o recursos?...» (p. 166).

De entrada se estudian una serie de cuestiones que van desde la caracterización de materiales y recursos, las cuestiones de tipo metodológico que el uso de unos y otros plantean en el aula o las dificultades curriculares que los materiales didácticos y los recursos significan tanto en el nivel de diseño curricular e infraestructura, como en el nivel del currículo planificado, como en el nivel del currículo implementado.

El segundo apartado de este capítulo, titulado «acercamiento pragmático», constituye una fuente de información básica, donde encontramos una caracterización rigurosa de lo que el autor entiende por materiales didácticos, un compendio de información acerca de materiales didácticos y recursos (tanto información escrita como direcciones de Internet), un resumen de buenas razones para usar materiales didácticos y recursos, con dos ejemplos contundentes que ilustran cómo mejorar la atención a la diversidad y cómo incidir sobre las actitudes de los alumnos hacia las matemáticas. Quizá una de las aportaciones más interesantes de este apartado consiste en la lista de preguntas abiertas y autocríticas que quedan planteadas al final.

El tercer apartado de este capítulo está dedicado a la pregunta ¿cómo evaluar el uso de materiales didácticos y recursos? a partir de una experiencia personal de 6 cursos, con el relato autobiográfico de la utilización de un recurso, la fotografía, donde aparecen comentarios de autoevaluación de la actividad. La profundidad y sinceridad de las reflexiones y observaciones que aparecen en este relato constituyen un testimonio de gran valor como ejemplo de ejercicio metacognitivo de un profesor en sus actividades de aula. Un anexo al final del capítulo ofrece el trabajo de un grupo durante un curso, con su descripción y los comentarios del profesor y de los alumnos.

El apartado siguiente, dedicado a consideraciones curriculares, es el más denso y teórico ya que persigue un doble objetivo: poner

La segunda noción, objeto de análisis, es la de obstáculo que fue introducido por Bachelard en el campo de la filosofía de la ciencia, y posteriormente retomado por Brousseau en el marco de la didáctica de las matemáticas.

de manifiesto que el uso de materiales didácticos o recursos constituye un desafío para la educación matemática y dar indicaciones «en cascada» acerca de las principales decisiones que llevan a resolver el problema didáctico que representa el uso de materiales y recursos, los cuales pueden constituir un buen organizador curricular. Para empezar se exponen dos niveles de ajuste no siempre coherentes que permiten considerar las creencias de los profesores sobre las matemáticas y que están directamente relacionadas con las decisiones acerca del uso de recursos y materiales: el ajuste con la cultura escolar del centro y las creencias de otros colegas del departamento de matemáticas y el ajuste con la realidad educativa en la que el profesor ejerce su docencia.

En un análisis exhaustivo y riguroso del problema didáctico que constituye el uso de materiales y recursos, el autor describe las características de los materiales manipulativos y los recursos simbólicos, aportando numerosos ejemplos concretos que ayudan a comprender los criterios de selección de las actividades.

Para concluir, nos dice el profesor Coriat: «Los materiales didácticos y recursos aportan a la enseñanza y el aprendizaje una variedad de ayuda potencial a los profesores y alumnos durante la interacción educativa. La variedad es evidente. En cambio la ayuda es solo potencial ...» (p. 174).

Capítulo VII: Notas de Historia de las Matemáticas para el currículo de Secundaria, por Modesto Sierra

En palabras de su autor, Modesto Sierra, «este capítulo trata acerca del uso de la historia de las matemáticas en su enseñanza seguido de unas breves notas históricas que pueden ayudar a los profesores en formación a capturar una nueva perspectiva de las matemáticas y a utilizarla en el aula» (p. 179). En efecto, en este capítulo encontramos unas reflexiones muy interesantes acerca de la estrecha relación que existe entre la educación matemática y la historia de las matemáticas, así como un relato de la evolución del uso de la historia en la enseñanza de las matemáticas.

...encontramos unas reflexiones muy interesantes acerca de la estrecha relación que existe entre la educación matemática y la historia de las matemáticas, así como un relato de la evolución del uso de la historia en la enseñanza de las matemáticas.

La primera parte de este capítulo se dedica a analizar el uso de la historia de las matemáticas en su enseñanza. Aquí se exponen algunos motivos que explican el renacimiento del interés por la historia de las matemáticas, se muestran algunos ejemplos de este renacimiento y se aducen razones en favor del uso de la historia de las matemáticas en su enseñanza.

Un aspecto especialmente interesante y poco conocido es la influencia del punto de vista genético, protagonizado inicialmente a principios de siglo por las ideas de Branford, en la Institución Libre de Enseñanza y, posteriormente, en el plan de estudios, llamado profesional, de formación de maestros de la República; estas mismas ideas aparecen en los libros de texto de Rey Pastor y de Puig Adam que incluyen una serie de notas de historia de las matemáticas adaptadas a los alumnos. El autor explica muy claramente cómo después del período nefasto de reforma de la enseñanza de las matemáticas con las mal llamadas matemáticas modernas, se ha renovado el interés por los aspectos históricos de la evolución de las matemáticas, y desde los poderes públicos se ha propiciado su utilización en la enseñanza, mediante los documentos que establecen los programas de matemáticas.

En la segunda parte del capítulo, el autor ha elegido cinco temas, uno por cada bloque de contenidos establecidos en el diseño curricular base del MEC para la enseñanza secundaria obligatoria, de los que se presenta un breve desarrollo histórico que pretende abrir nuevos horizontes a los profesores de enseñanza secundaria, mostrando cómo la componente histórica puede constituir uno de los organizadores del currículo.

Los cinco temas que se abordan en este capítulo, todos ellos atractivos además de clave en cada bloque de contenidos, son los siguientes:

- Números y operaciones: números perfectos; números de Mersenne.
- Medida: de las constantes naturales al sistema métrico decimal.
- El teorema de Pitágoras.
- Interpretación, representación y tratamiento de la información: la introducción de coordenadas.
- Tratamiento del azar: de los juegos de azar a la ley de los grandes números.

Capítulo VIII: Programación de unidades didácticas, por Antonio Marín

Como dice Antonio Marín, autor de este capítulo, «la unidad didáctica es la línea de choque de la planificación educativa con la práctica docente» (p. 195). No cabe duda de que la planificación educativa del proceso de enseñanza-aprendizaje se caracteriza por la toma de decisiones que debería materializarse en el diseño de una unidad didáctica, es decir en un documento donde se concretaran los objetivos, contenidos, tareas, recursos, materiales, instrumentos de evaluación y orientaciones metodológicas, objeto del trabajo en clase en torno a un tema, durante un breve período de tiempo (3-4 semanas).

En este capítulo dedicado a la programación de unidades didácticas, el autor se refiere al proceso de elaboración de una unidad como un proceso de aproximaciones sucesivas, donde el equipo de profesores que prepara la unidad deberá buscar el justo equilibrio entre el Proyecto de Centro que marca las prioridades en los objetivos, criterios de evaluación y normas de funcionamiento y organización y el Proyecto Curricular del Área que marcará y justificará la intención de los objetivos que se quieren priorizar. El autor ejemplifica casi todo su análisis con el caso de la proporcionalidad en 3.° de ESO.

En el segundo apartado de este capítulo se estudian los criterios y decisiones que orientan la selección concreta de objetivos, contenidos, actividades y formas de evaluación. En lo que se refiere a las decisiones sobre la selección de objetivos generales y específicos de una unidad, el autor destaca diferentes enfoques posibles como pueden ser el de la organización matemática de los contenidos o el de las metas de educación matemática para esta etapa de la enseñanza obligatoria. En cuanto a las decisiones sobre selección y organización de contenidos, se señalan los siguientes criterios: representatividad respecto a la lógica de la disciplina, relevancia social y cultural, significatividad psicológica, funcionalidad didáctica y potencialidad vertebradora.

Respecto a la secuenciación de contenidos matemáticos, el autor presenta el ejemplo del concepto de fracción como representación de la parte de un todo, para ilustrar el caso de una organización no fundamentada exclusivamente en la lógica interna de la materia, donde se pueden manejar varios aspectos conceptuales y procedimentales, unos considerados como contenidos centrales y otros como secundarios. Se completa esta explicación acerca de las decisiones sobre secuenciación con unos ejemplos de la selección de los contenidos actitudinales y unas observaciones sobre la organización en unidades didácticas, todos ellos referidos a la proporcionalidad en 3.° de ESO.

En el apartado que se ocupa de las decisiones sobre los criterios de evaluación de la unidad didáctica, el autor se pronuncia por una visión de la evaluación como «una relación de tareas y decisiones que conducen a valorar el proceso de enseñanza y aprendizaje, globalmente, observando múltiples factores del mismo y detectando posibles causas de algunos comportamientos o problemas» (p. 207). De acuerdo con su idea de la evaluación procesual y formativa, el autor desarrolla una serie de criterios que intentan contestar a las clásicas preguntas ¿qué evaluar?, ¿cómo evaluar?, ¿cuándo evaluar?

El capítulo VIII acaba con un apartado dedicado a la construcción y gestión de una unidad didáctica donde se concretan las

En este capítulo dedicado a la programación de unidades didácticas, el autor se refiere al proceso de elaboración de una unidad como un proceso de aproximaciones sucesivas...

tareas de acuerdo con un análisis más detallado. El autor propone una serie de objetivos, contenidos y tareas para dos unidades didácticas, la proporcionalidad con magnitudes geométricas y la proporcionalidad con magnitudes aritméticas discretas.

Resultan particularmente interesantes los ejemplos de selección de actividades de aula, siguiendo unas pautas comentadas que contemplan el tipo de actividad (situación inicial, exploración inicial, conocimientos previos,...), un texto para el alumno (que suele tener el formato del enunciado de un problema), intenciones (donde se explicitan los objetivos de la actividad), comentarios (donde se señalan desde posibles ampliaciones del problema, hasta posibles dificultades y sugerencias para la clase) y fuente (donde aparece la procedencia bibliográfica de la actividad).

Finalmente, el libro acaba con dos apartados muy cortos. El primero lleva por título «supuestos prácticos y actividades complementarias» y consiste en ocho párrafos donde se recogen algunas de las ideas aparecidas en los capítulos anteriores y se sugieren, de una forma muy general y demasiado superficial, posibles actividades concretas como pueden ser el análisis comparativo de los decretos que regulan el currículo de la ESO o del Bachillerato, el análisis crítico de los libros de texto, el análisis fenomenológico de algún tema del currículo, el estudio de los modelos tratando ciertos temas... La idea de introducir este apartado me parecía excelente, pero el resultado es muy pobre, teniendo en cuenta su potencial utilidad, en particular en cursos de formación de profesores de matemáticas.

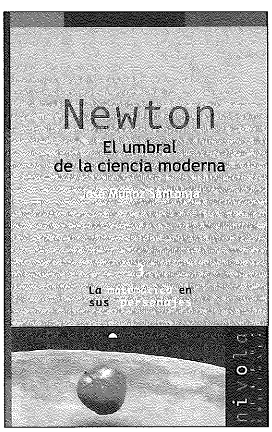
El siguiente apartado, «lecturas recomendadas» consiste en un breve resumen crítico de once libros. No existe ninguna explicación acerca de los criterios de selección de dichos libros, lo cual resulta cuando menos sorprendente, tanto por algunas de las inclusiones como por el gran número de exclusiones. En cualquier caso, la iniciativa es buena y nos queda la tarea de completarla. Es justo reconocer que esta sección de la revista SUMA constituye una valiosa aportación en dicha dirección.

Por contraste con lo dicho en el párrafo anterior, queremos consignar que las referencias bibliográficas constituyen una excelente bibliografía básica para quienes nos dedicamos a la formación de profesores de matemáticas de la educación secundaria, donde los aspectos teóricos y prácticos quedan bien equilibrados y donde se combinan adecuadamente las principales referencias en lengua castellana con las de lengua inglesa y francesa.

El libro se cierra con un índice temático, un apartado útil y necesario a la hora de revisar los textos y buscar informaciones concretas. Todos sabemos lo fácil que resulta actualmente, con los medios informáticos, construir un índice de estas características. Sin embargo, todavía es poco frecuente que aparezcan estos índices en los libros actuales, por lo que agradecemos la iniciativa y la acogemos como una aportación y un ejemplo recomendables.

Carmen Azcárate

NEWTON. EL UMBRAL DE LA CIENCIA MODERNA
José Muñoz Santonja
Col. La matemática en sus personajes, n.º 3
Nivola libros y ediciones
Madrid, 1999
ISBN: 84-930719-3-5
184 páginas



En las JAEM de Lugo, recientemente celebradas, al visitar las exposiciones comerciales me sorprendió la de una editorial desconocida para mí que presentaba únicamente tres títulos, de una misma colección, con cubiertas muy atrayentes. Todo era nuevo, recién salido del horno, la editorial, la colección y los libros.

La editorial se llama Nivola. Cada día se entiende menos cómo pueden sobrevivir las editoriales pequeñas o muy pequeñas, no institucionales, en ese mercado tan difícil como es el del libro, dominado por las grandes editoriales nacionales y multinacionales. Más extraño resulta cuando además se dedican a editar libros de matemáticas que no sean manuales de texto. Alguna vez, la Federación debería hacer un pequeño homenaje de agradecimiento a esas pequeñas editoriales comerciales que publican este tipo de libros, como Proyecto Sur, Síntesis, Rubes… y ahora Nivola.

La colección tiene por nombre «La matemática en sus personajes» y como objetivo, según reza en la solapa de la cubierta, presentar, de una forma clara y al alcance de todos, cómo ha evolucionado la matemática hasta nuestros días. Se trata, por tanto, de una colección divulgativa de historia de la matemática presentada por medio de biografías de matemáticos relevantes de todas las épocas. Los tres primeros números aparecidos están dedicados a *Arquímedes. Alrededor del círculo, Fermat. El mago de los números* y *Newton. El umbral de la ciencia moderna.* Están anunciados nuevos títulos sobre Gauss, Descartes, Sophie Germain, Galois, Euclides, Euler y Kronecker. El director de la colección es Antonio Pérez Sanz, vocal de prensa de nuestra federación y habitual colaborador de SUMA; su nombre es ya una garantía para asegurar que va a ser una colección más que digna.

Newton. El umbral de la ciencia moderna, como se ha dicho, es el tercero de la serie; en sus aspectos formales es sumamente atractivo, con una maquetación y diseño modernos, intercalando grabados y reproducciones facsímiles, así como cuadros independientes del texto principal que permiten una doble lectura.

José Muñoz, su autor, hace algo muy difícil, como es presentar de forma sencilla, muy amena, e incluso a veces divertida, la compleja vida de Newton, con sus miedos, sus fobias, sus excentricidades, sus agrias polémicas con otros científicos –y no sólo con Leibniz–, enmarcada en la época que le tocó vivir.

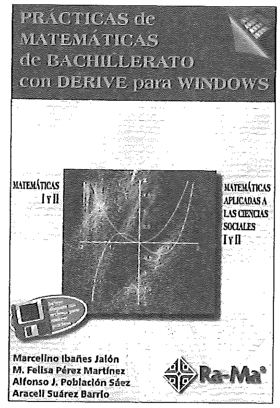
En una segunda parte del libro se ataca la obra del genio. Asimov, en sus *Cien preguntas básicas sobre la ciencia*, a la hora de responder a la de ¿quién fue el científico más grande que jamás vivió? no duda en responder que Newton; como indica el subtítulo de la obra que comentamos se le considera el fundador de la ciencia moderna. El cálculo infinitesimal, la descomposición de la luz blanca en los colores del espectro, las leyes del movimiento y sus consecuencias y la ley de la gravitación universal son sus cuatro grandes hazañas. Todas ellas son contadas de forma asequible, no exhaustivamente pero sí con bastante rigor. Por supuesto, el autor tampoco olvida el lado oscuro de Newton –aunque hay que situarse en la época–, su dedicación a la alquimia tratando de buscar la «piedra filosofal».

Por poner alguna pega al libro, personalmente, me hubiera gustado, ya que se trata de una colección de matemáticos, que se hubiera tratado con una mayor extensión el lado más matemático de Newton: el descubrimiento del cálculo.

En definitiva, estamos ante una obra de buena divulgación de historia de la ciencia, que puede ser aprovechada por los profesores en sus aulas y que, además, puede ser leída sin dificultad –de lo cual no abundan muchos ejemplos– por alumnos de bachillerato interesados en la matemática y en su historia.

Emilio Palacián

PRÁCTICAS DE MATEMÁTICAS DE BACHILLERATO CON DERIVE PARA WINDOWS
Marcelino Ibañes Jalón
M. Felisa Pérez Martínez
Alfonso J. Población Sáez
Araceli Suárez Barrio
Ra-Ma, Madrid,1999
ISBN: 84-7897-367-2
288 páginas + 1 disquete.



El objetivo de este libro es ayudar a los alumnos de Bachillerato a aprender Matemáticas con la asistencia del programa informático DERIVE (bajo Windows). Para ello se ha pensado en la realización de unas prácticas cuya misión es complementar las clases tradicionales de Matemáticas.

Los autores, del departamento de Matemáticas de la Escuela Politécnica de la Universidad de Valladolid, comienzan el libro con esta declaración, con la que explican los dos aspectos entre los que se mueven los planteamientos del libro. Por una parte se trata de incorporar el uso del ordenador al aula de Matemáticas para integrarlo en el proceso de enseñanza, y por otra de hacerlo manteniendo los contenidos, sin variar sustancialmente los objetivos finales de las clases. Los problemas propuestos son similares a los que aparecen en cualquier texto de Matemáticas del mismo nivel.

No cabe duda de que la utilización del ordenador (o las calculadoras gráficas que implementan programas de cálculo formal) por los alumnos facilita el estudio de las Matemáticas, puesto que elimina los cálculos repetitivos, y deja más tiempo para dedicarlo a la comprensión, reflexión o análisis de los problemas y, en su caso, a la generalización de las soluciones.

El uso de Derive para Windows, un programa de manejo muy sencillo, facilita de forma realista, que los estudiantes puedan resolver un mayor número de problemas, permite buscar relaciones entre los enunciados de los problemas y sacar conclusiones de los resultados. La representación gráfica, que incorpora Derive, es una herramienta interactiva, muy potente y versátil, que permite la «visualización» de las situaciones planteadas, y ayuda a encontrar el planteamiento más adecuado y a obtener las mejores vías de solución.

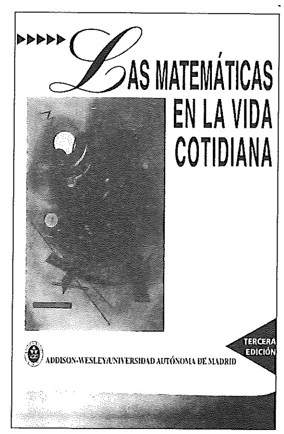
El libro se dirige a los alumnos de Bachillerato, y abarca los temas correspondientes a las cuatro asignaturas: Matemáticas I y II de las tres modalidades. Está organizado en forma de prácticas, con guión y hoja de respuestas, con la idea de que los alumnos trabajen en ellas durante una hora. Consta de 35 prácticas adaptadas a los programas y de otras 4 de ampliación.

Se completa con una práctica 0 de iniciación al programa Derive para Windows. Se trata de que los alumnos lo utilicen con comodidad, sin necesidad de tener un conocimiento completo del programa. A lo largo de las primeras hojas se completan las indicaciones necesarias para su uso en cada situación de trabajo.

Las siguientes prácticas recorren los temas de los bachilleratos: Álgebra, Análisis, Geometría, Trigonometría, Estadística, etc. Siguen el orden habitual de los libros de texto y se pueden, fácilmente, ampliar o modificar según los criterios del profesor que las dirija. Los mismos autores piden la colaboración de los lectores para aportar ideas y sugerencias.

En las cuatro prácticas de ampliación –Visualización en Geometría Analítica, Introducción a los conjuntos fractales, La cuadratura del circulo y El Tangram con Derive–, es donde se empieza a percibir la potencialidad de los nuevos instrumentos para el estudio de las Matemáticas y por donde sería bueno que se desarrollen las investigaciones en didáctica para abrir nuevos campos, y modos, del aprendizaje matemático.

Félix Matute



LAS MATEMÁTICAS EN LA VIDA COTIDIANA
Tercera Edición
Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid
Madrid, 1999
ISBN: 84-7829-020-6
776 Páginas

Otra vez estamos de enhorabuena al encontrarnos con un libro de divulgación matemática que se puede leer por todos, y que además en su prólogo dirigido al alumno, en general al lector (no al alumno de la asignatura de matemáticas, o de tal carrera que necesita matemáticas), incita a éste a divertirse y disfrutar leyendo este libro.

Esta obra es una traducción al español de la tercera edición americana, siendo la primera edición del año 1994. Los traductores son Jody L. Doran y Eugenio Hernández de la Universidad Autónoma de Madrid. Ambos han realizado una buena labor de traducción en un perfecto español, aunque en el capítulo cuatro, resalta el uso de la región viable, cuando en casi todos los textos en español, se utiliza la región factible. No entiendo personalmente por qué usar viable cuando todos manejamos factible, y tanto para los especialistas en matemáticas como para los neófitos, el vocablo factible es perfectamente inteligible. Hay que agradecerles la bibliografía final añadida a esta edición en castellano, y recopilada por los traductores, aunque no está actualizada.

El libro va dirigido a toda clase de lectores, sin pretender que ninguno de ellos se dedique a las matemáticas, pero, eso sí, dejando caer la esperanza de que el lector en un futuro no deje de resolver algún que otro problema matemático y, sobre todo, que mejore el aprecio que sienta hacia las matemáticas, y hacia los que hacen matemáticas.

Se ha realizado dentro del proyecto «Consortium for Mathematics and Its Aplications» y lo ha dirigido Solomon Garfunkel, con la ayuda del Coordinador editor, para la primera edición de Lynn A. Steen, de St. Olaf College. Es una magna obra que esta dividida en cinco partes con autores diferentes en cada una de ellas, sin menoscabo de que todas las partes y todos los capítulos siguen una tónica general, Primeros Planos, Ejemplos, Vocabulario, Lecturas Sugeridas, Ejercicios y Proyectos.

Los llamados primeros planos son recuadros que aparecen enmarcando un texto, casi siempre con alguna fotografía. Un primer plano plantea un problema real concreto, de actualidad o tan importante que sigue siendo actual, y menciona a los matemáticos, economistas, ingenieros o especialistas en general que están trabajando con el citado problema anterior, y describe alguno de los resultados o métodos utilizados para intentar su resolución. Algunos primeros planos tienen un carácter de tipo histórico, pero con el mismo planteamiento anterior, es decir describen un problema real y su tratamiento por parte de algún reconocido matemático o especialista.

Las lecturas sugeridas creo que están muy bien seleccionadas, aunque siempre en lengua inglesa, y con referencia siempre al capítulo que acaba de finalizar.

Se ha realizado dentro del proyecto «Consortium for Mathematics and Its Aplications» y lo ha dirigido Solomon Garfunkel...

Llama la atención la cantidad de problemas propuestos al final de cada capítulo, siempre entre cuarenta y cincuenta, la mayoría de ellos con planteamientos reales, es decir, no simples ejercicios de matemáticas puras, sino que son problemas reales con un enunciado que se puede plantear en la vida real. La verdad es que se pueden ir haciendo ordenadamente, nada más que habiendo leído atentamente el capítulo, y muchos de ellos resultan realmente curiosos. Además al final de cada capítulo se enuncian de dos a cuatro Proyectos. Estos proyectos son verdaderos trabajos de investigación propuestos y se sugiere por donde empezar la misma, recurriendo a algún artículo o libro del que se da la referencia.

La obra contiene muchas ilustraciones, con gráficos, mapas, fotografías, cuadros, tablas, esquemas,... siempre en blanco y negro, con excepción de las ocho páginas a todo color que contienen fotografías con formas fractales, y de otras ocho páginas que contienen fotografías de recubrimientos de Penrose y Escher.

El libro se divide en cinco partes, cada una de las cuales consta de diversos capítulos:

I. Las ciencias de la Administración
   1. Redes Viarias.
   2. De Visita por los Vértices.
   3. La Planificación y la Programación de Horarios.
   4. La programación lineal.

II. La Estadística: la Ciencia de los Datos
   5. La Producción de los Datos.
   6. La Descripción de los Datos.
   7. La Probabilidad: Las Matemáticas del Azar.
   8. La Inferencia Estadística.

III. La Codificación de la Información
   9. Los números de Identificación y los Códigos de Barras.
   10. La Transmisión de la Información.

IV. La Elección Social y la Toma de Decisiones
   11. La Elección Social: el Sueño Imposible.
   12. Sistemas de votación ponderados.
   13. El reparto equitativo.
   14. El reparto.
   15. La Teoría de Juegos: Las Matemáticas de la Competición.

V. Acerca de la Forma y del Tamaño
   16. Crecimiento y Forma
   17. El Crecimiento Geométrico.
   18. Las Distancias Inaccesibles.
   19. El Reflejo del Universo.
   20. Nuevas Geometrías.
   21. La Simetría y los Diseños.
   22. Los recubrimientos.

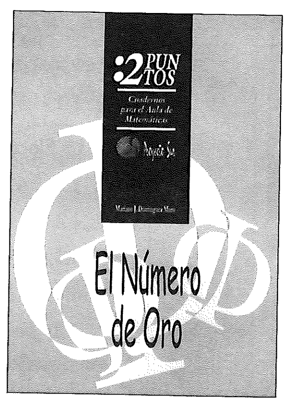
Todos estos títulos son muy sugerentes y casi nada matemáticos, su simple lectura nos pone de manifiesto la actualidad y utilidad de lo que van a tratar. Todos los capítulos tienen una fácil lectura y no necesitan conocimientos previos de matemáticas del lector, lo que implica que su tratamiento no es riguroso desde el punto de vista matemático pero, sin embargo, pueden llegar a entretener al curioso lector ávido de ciencia, ya que los problemas y ejemplos en la mayoría de los casos son reales, y todo lo que se dice en el libro conlleva detrás una amplia teoría matemática a la que apenas se hace referencia.

Tan sólo un defecto desde mi punto de vista: es un libro muy grande, excesivamente grande, son un total de 722 páginas de lectura no trivial, más 36 páginas con las soluciones a los ejercicios impares de todos los capítulos, más 15 páginas de índices, más 2 páginas de bibliografía en castellano recopilada por los traductores. Esta excesiva extensión puede asustar a los lectores no muy acostumbrados a leer matemáticas.

En conclusión, creo que debemos felicitarnos por la aparición de obras de este tipo que intentan mejorar la deteriorada imagen social de las matemáticas, intentando que el lector se divierta y disfrute, como dice nuestro compañero Claudi Alsina en su libro *Contar bien para vivir mejor*, «Las matemáticas fueron creadas y siguen vivas para que personas como usted gocen de sus resultados,....». Espero, sinceramente, que los lectores (aquellos que se decidan a leerlo) disfruten de la lectura de esta magna obra, y, posteriormente, sigan pensando y disfrutando con las matemáticas, a la hora de resolver o, simplemente, intentar resolver algún problema real con tratamiento matemático.

María Carmen Escribano

EL NÚMERO DE ORO
Mariano J. Domínguez Muro
Col. 2 puntos.
Cuadernos para el Aula de Matemáticas
Proyecto Sur de Ediciones
Granada, 1999
ISBN: 84-8254-936-7
72 páginas



Proyecto Sur nos obsequia con una nueva serie de su colección «2 puntos. Cuadernos para el aula de Matemáticas». A los títulos ya conocidos sobre calculadoras, mosaicos, matemáticas para el consumo... vienen a sumarse cuatro nuevos: *Matemáticas con Cabri II*, de José A. Mora; *Geometría dinámica con papel*, de M.ª Jesús Casado, *Las Matemáticas del Cuerpo Humano*, de Luis Cachafeiro; y el que vamos a comentar brevemente, *El Número de Oro*, de Mariano Domínguez.

Constituye una magnífica unidad didáctica pensada para un Taller de Matemáticas en 4.° de secundaria obligatoria. El autor, según señala en la presentación, la ha experimentado desde el curso 1993-94 con alumnos de 2.° de BUP en una EATP y la ha ido puliendo a lo largo de los años. Es algo que salta a la vista a través de su lectura, es un material hecho en y desde el aula. Las actividades propuestas son plenamente aplicables en las edades para las que se ha proyectado.

La primera parte es lo que podríamos llamar el cuaderno del alumno. A través de indicaciones precisas se van planteando actividades muy variadas que permiten adquirir una gama muy amplia de conceptos matemáticos. La enunciación del índice es sumamente ilustrativa a este respecto:

- El número de oro.
- De las sucesiones de Fibonacci al número de oro.
- El rectángulo áureo.
- El número áureo en el mundo griego (extrema y media razón).
- Espirales relacionadas con el rectángulo áureo.
- El pentágono regular y la proporción áurea.
- Las proporciones de oro en el arte.
- Del rectángulo áureo al icosaedro.

En la segunda parte, dirigida a los profesores, se dan unas breves indicaciones metodológicas, así como una guía de utilización del material. En muchos trabajos de este tipo se abusa en grado sumo de la terminología «reformista» (valga la expresión) y se nos cuenta una y otra vez la «teoría» del DCB. Es de agradecer que, en este caso, el autor no haya cometido estos desmanes y se haya limitado a enunciar las intenciones que tienen las actividades propuestas a los alumnos, así como algunas claves que hagan más eficaz su utilización.

Es preciso señalar los buenos dibujos y excelentes reproducciones de obras tanto de pintura como arquitectónicas que hacen que la obra tenga una presentación clara y muy sugestiva para los alumnos.

Emilio Palacián

SUMA 32
noviembre 1999

X Olimpiada Matemática Nacional, IX JAEM...

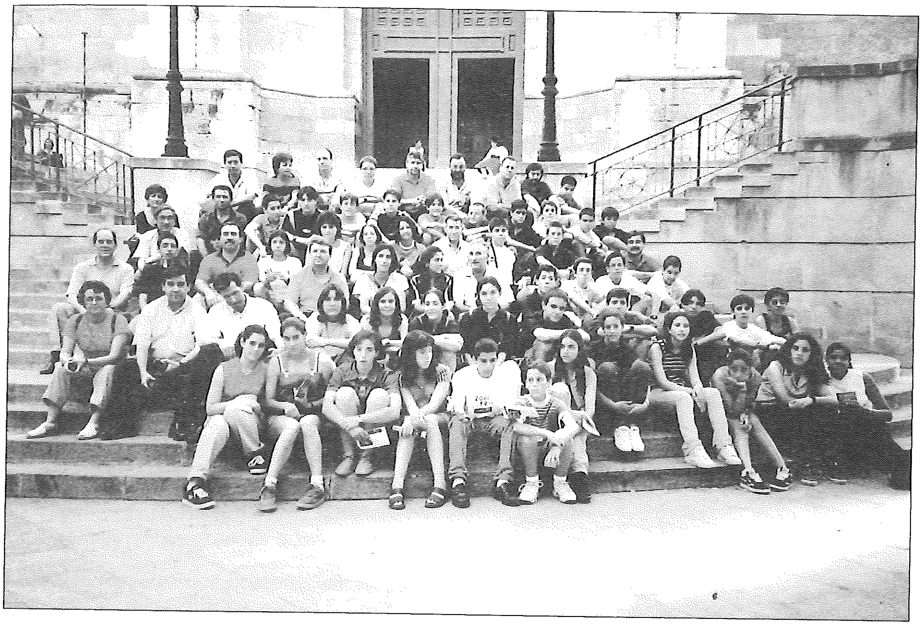
CRÓNICAS

X.ª OLIMPIADA Matemática Nacional

La recientemente constituida Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas recibió, al comienzo del curso 1998-99, por parte de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, el encargo, la responsabilidad y el honor de organizar la X edición de la Olimpiada Matemática dirigida a chicos y chicas de 13-14 años (2.° de ESO).

La Olimpiada Matemática de Albacete, también ha cumplido en este año de 1999 sus diez años. Comenzamos sin saberlo el mismo año en que la Federación convocó en Pamplona la 1.ª Olimpiada Matemática Nacional a la que fuimos invitados. Desde entonces hemos participado con entusiasmo en todas las ediciones, de modo que nos vimos de algún modo obligados moralmente a dar por esta vez el paso de organizar la fase nacional en Albacete. La buena experiencia que habíamos acumulado nos hizo pensar que podíamos optar con cierta solvencia a la organización de la Olimpiada Nacional.

La Comisión Organizadora comenzó sus tareas de planificación en septiembre de 1998, dirigiendo sus primeros pasos hacia la Diputación Provincial de Albacete, (habitual patrocinador de nuestra Olimpiada provincial) para saber si podíamos contar con su apoyo económico. Tras los trámites normales de paso del proyecto por Comisión y Pleno, se nos contestó afirmativamente, lo que permitió a la Comisión dedicar sus esfuerzos a los aspectos técnicos y organizativos. Desde aquí, expresamos nuestra más sincera y profunda muestra de gratitud y reconocimiento a la mencionada institución, sin cuyo apoyo difícilmente hubiéramos podido conseguir los fondos precisos y el necesario apoyo institucional para organizar dignamente la Olimpiada.



Participantes en la X Olimpiada

Participantes

En representación de las comunidades autónomas que celebran Olimpiadas matemáticas asistieron a esta X edición 45 participantes (27 chicos y 18 chicas). Su comportamiento fue excelente en todo momento como sin duda esperábamos de las capacidades de estos matemáticos.

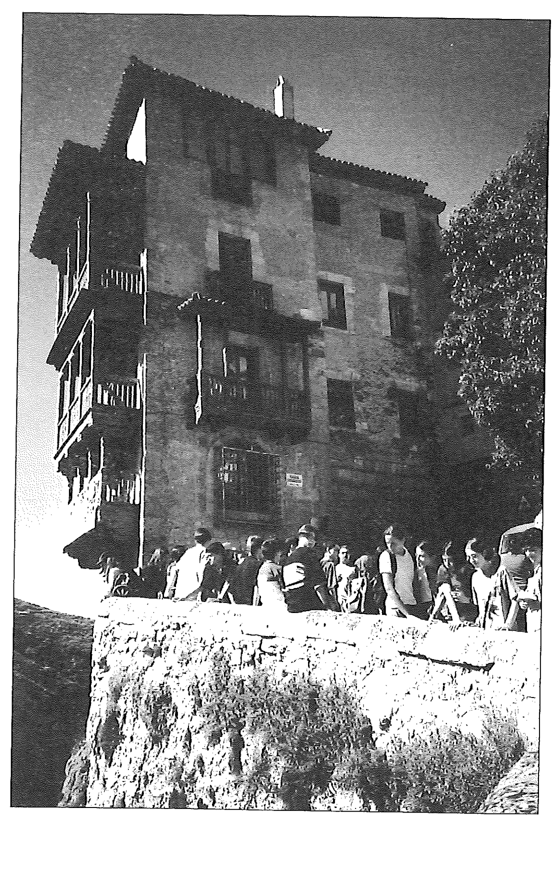
Programa

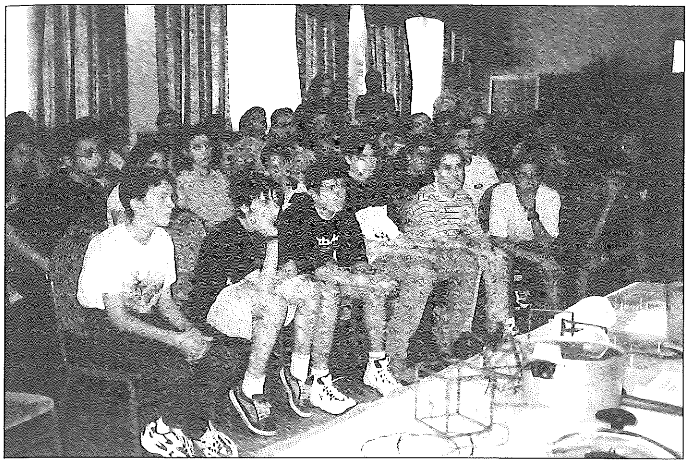
Los participantes y coordinadores autonómicos fueron llegando al hotel situado en el campus de la Universidad de Castilla-La Mancha durante la mañana y primeras horas de la tarde del día 25 de junio. El alojamiento de los chicos y chicas en habitaciones dobles (para facilitar la convivencia y conocimiento de diferentes ideosincrasias se fueron mezclando para que en cada habitación hubiera chicos de dos comunidades autónomas) y de los profesores en habitaciones individuales nos pareció desde el principio una idea irrenunciable para dar un paso hacia unas condiciones mínimamente dignas de la Olimpiada.

Para elaborar el programa de la Olimpiada tuvimos en cuenta al menos los siguientes criterios:

- Reducir la duración de la Olimpiada que en ediciones anteriores nos parecía excesiva. Quedó fijada en cinco días contando el de llegada y despedida.
- Evitar multitud de recepciones oficiales y horas de autobús. En este sentido sólo nos visitó en el hotel el Director Provincial, el primer día y en el último día tuvimos el Acto de Clausura y Entrega de Premios en la Diputación.
- Situar en la primera tarde, apenas a las dos horas de la llegada, una actividad de matemática lúdica y recreativa con el doble propósito de que conozcan la existencia de estas matemáticas y de que sirva como factor de dinámica del grupo para ir rompiendo el hielo y que se vayan conociendo.
- Cuidar las condiciones de lugar y tiempo en que se habrían de desarrollar las pruebas. Elegimos para la prueba individual un aula del campus de la Universidad en Albacete y para la prueba por equipos algunas salas del prestigioso Museo Arqueológico. El museo está ubicado en un céntrico y amplio parque de la ciudad en donde se encuentran dos templetes que fueron tomados para dos de las pruebas; la tercera se propuso sobre un mosaico romano que se halla en el interior del propio museo. En cuanto al tiempo y porque creemos que este no debe ser un factor discriminatorio a la hora de manifestar las capacidades

Excursión a Cuenca





Expectación
en la sesión de
matemática recreativa

matemáticas, tuvimos buen cuidado de que fuera más que suficiente en los dos casos.

- Mostrar sin cansar, algunas de las riquezas culturales y de las bellezas de nuestra tierra. Para ello elegimos la excursión a Cuenca, declarada recientemente patrimonio de la humanidad y la excursión deportiva y de aire libre a un lugar especialmente dotado en bellezas naturales como es Alcalá del Júcar.
- Por último, conseguir lugares de ocio para los chicos y chicas, cerca del hotel. En este sentido pudimos utilizar las piscinas municipales al mediodía y las instalaciones que ha habilitado el Ayuntamiento para las noches con todo tipo de actividades: deportes, juegos de mesa, observación astronómica, ...

Pruebas

Como Sociedad organizadora de la X Olimpiada y suponemos que al igual que otros han hecho antes, quisimos dejar claro en la propia selección de las pruebas cuales eran nuestros conceptos, principios y, si se quiere, filosofía de los problemas matemáticos y de la matemática en general. Entendemos por problema matemático a toda situación que implica un objetivo o propósito que hay que conseguir, que hay obstáculos para alcanzar ese propósito y requiere deliberación, ya que quien lo afronta no cono-

RESULTADOS
X OLIMPIADA MATEMÁTICA NACIONAL

INDIVIDUAL

- Joaquín Derrac Rus (Andalucía).
- Vicente Tomás Giner González (C. Valenciana).
- M.ª Ángeles Núñez Sarrión (Castilla-La Mancha).

1.ª PRUEBA POR EQUIPOS

Primer puesto

Equipo n.º 2

- Lydia Flores Martos (Andalucía).
- Ismael Laguía Moreno (Castilla-La Mancha).
- Escolástica Gallardo Díaz (Extremadura).
- Miguel A. Llorente Carmona (Murcia).
- Víctor González Alonso (Castilla-León)

Segundo puesto

Equipo n.º 5

- Serafín Ruiz Cabello (Andalucía).
- Daniel Iglesias Sánchez (Asturias).
- Celia Arconada López (Cantabria).
- Bernat Pelach Saget (Cataluña).
- Amaia Millor Muruzábal (Navarra).

CONCURSO FOTOGRAFÍA MATEMÁTICA

Primer puesto

Equipo n.º 7

- M.ª Ángeles Núñez Sarrión (Castilla-La Mancha).
- Diego Merino Ojeda (Aragón).
- Andrea Quintanilla Cavia (Cantabria).
- Daniel Rodrigo López (Cataluña).
- Vicente Tomás Giner González (C. Valenciana).

Segundo puesto

Equipo n.º 5

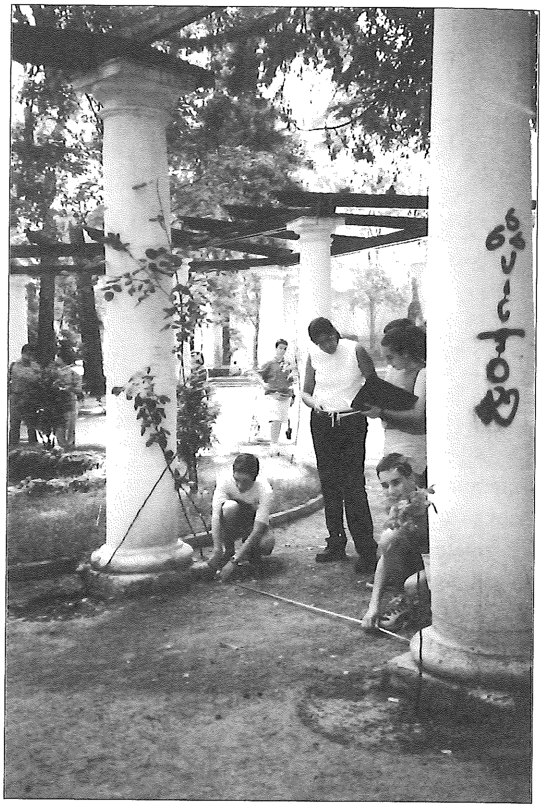
- Serafín Ruiz Cabello (Andalucía).
- Daniel Iglesias Sánchez (Asturias).
- Celia Arconada López (Cantabria).
- Bernat Pelach Saget (Cataluña).
- Amaia Millor Muruzábal (Navarra).

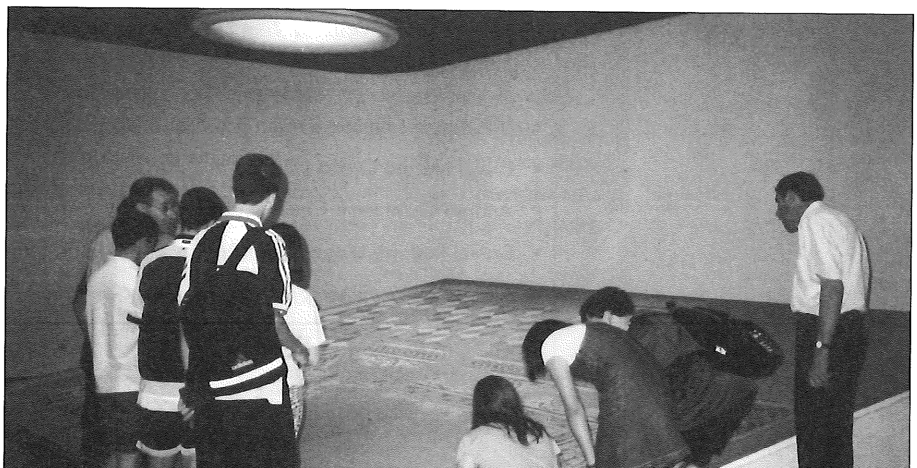
ce ninguna regla para resolverlo. La situación requiere técnicas matemáticas para su resolución y debe ser aceptado como problema por alguien antes de ser llamado problema. Como decía una de las chicas en la final de una de nuestras Olimpiadas: «Me gustan estos problemas, porque al principio parece que no vas a poder resolverlo, que no tienes nada para empezar, pero luego vas encontrando ideas y acabas por hallar soluciones». Justamente esto fue muy bien expresado por el famoso pedagogo Jhon Dewey:

> Los límites de toda unidad de pensamiento son: al comienzo una situación de perplejidad, malestar o confusión y al final, una situación clarificada, unificada, resuelta.

Prueba Individual formada por 3 problemas (nos parece que en unas tres horas no se pueden hacer más genuinos y auténticos problemas matemáticos). Se trata de problemas de carácter «abierto» que pueden tener más de una solución, que permiten extensiones y generalización y que favorecen el uso de estrategias diversas de resolución Problemas asequibles a todos en un principio pero que permiten desafíos para los más dotados. Problemas en los que se pueda particularizar, escribir variantes y se trate de generalizar.

Prueba por Equipos y sobre la realidad. Trató de la aplicación de las Matemáticas a la realidad (templetes del parque y mosaico romano del Museo). Los equipos estuvieron formados por cinco participantes cada uno, con el criterio de que en un mismo equipo no hubiera dos chicos o chicas de la misma Comunidad. Se trataba de propiciar la necesidad de la cooperación para buscar soluciones a problemas que pueden plantearse en la vida real.





Fotografía matemática. El objetivo es «identificar» las Matemáticas que se hallan presentes en la realidad tanto en edificios como en la propia naturaleza. Para llevarla a cabo se formaron los mismos equipos de la prueba anterior y se les entregó una cámara de las de tipo desechable para que realizaran fotografías a las que posteriormente pondrían un título matemático. Los equipos premiados fueron aquellos que presentaron títulos matemáticos de mejor calidad en función de las fotografias que seleccionadas. Los propios participantes se convirtieron en jurado, votando por cualquiera de los equipos excepto por el suyo. Las fotografías colocadas en paneles fueron presentadas en una exposición de modo que el público pueda apreciar la presencia abundante de las matemáticas en la realidad que nos circunda.

Exposiciones

Como complemento de la Olimpiada, la Comisión organizadora concibió la idea de ofrecer a todos los participantes y al público en general, la posibilidad de contemplar algunas exposiciones de carácter matemático. A tal efecto, y en la Sala de Exposiciones del antiguo Ayuntamiento de Albacete, se pudieron contemplar entre los días 18 a 30 de junio las siguientes exposiciones:

- Medidas tradicionales de la Sociedad «Ventura Reyes Prosper» de Extremadura.
- Filatelia Matemática y Fotografía Matemática de la Sociedad «Enma Castelnouvo» de Madrid.
- Mosaicos. Facilitada por Rafael Pérez Gómez de Granada.
- Geometría mudéjar en Aragón que nos fue enviada por Florencio Villarroya de la Sociedad Aragonesa «Pedro S. Ciruelo».

Los participantes efectuaron una visita a las exposiciones durante la tarde del día 26, mostrándose sorprendidos en muchas ocasiones ante esas expresiones de las Matemáticas que ignoraban.

Más información de las pruebas y de todos los aspectos de la Olimpiada se pueden encontrar en la página Web de la Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas que es la siguiente:

www.info-AB.uclm.es/~mates

Premios

Consideramos que esta X edición de la Olimpiada matemática ha sido bien generosa en premios. Todos los participantes tuvieron un diploma de participación, un polo, una bolsa de viaje y una mochila escolar. Los primeros clasificados en las pruebas individuales, por equipos y de fotografía matemática fueron obsequiados además con lotes de libros, calculadoras gráficas y científicas.

La valoración de las diferentes pruebas fue realizada por equipos de dos o tres profesores para cada una de ellas. Queremos y debemos resaltar aquí la aportación de los coordinadores autonómicos que en todo momento estuvieron a la disposición de la Comisión Organizadora para colaborar en la evaluación de las diferentes pruebas.

La entrega de premios tuvo lugar en el Salón de Actos de la Diputación Provincial de Albacete. Intervinieron por parte de la Comisión Organizadora Serapio y Juan Emilio, dos de los participantes, Emilio Palacián en nombre de la Federación y Manuela Parra (Diputada de Cultura) en nombre de la Diputación que clausuró el Acto.

X OLIMPIADA

Comisión Organizadora

Juan Carlos Cortés

Ramón Cuenca Cuenca

Bernardino del Campo

Serapio García Cuesta

Juan Emilio García Jiménez

Jesús García Segovia

Santiago Turégano Moratalla

Prensa

Dado que uno de los principales objetivos de estas Olimpiadas es el de popularizar las Matemáticas, se ha tenido especial cuidado en convocar a los diferentes medios de comunicación a los diferentes actos de esta X Olimpiada. El diario *La Tribuna* que difunde desde hace años las olimpiadas matemáticas de Albacete, ha recogido a diario más de una página de información. Además han contribuido a la difusión los siguientes medios: Televisión española en su programa regional, TV de Albacete, Canal 6, cadena SER y otras radios locales.

Epílogo

Como ya señalábamos en el tríptico que convocaba a todos a participar en esta X Olimpiada Matemática de la FESPM, para nosotros con ser importantes las Matemáticas, lo son más los chicos y chicas con los que convivimos en nuestras clases y en nuestra apasionante labor de impulsar la resolución de problemas matemáticos por la vía de las olimpiadas. Creemos que esta verdadera razón de ser de nuestra acción, ha quedado bien expresada en los cinco intensos días de junio que hemos vivido.

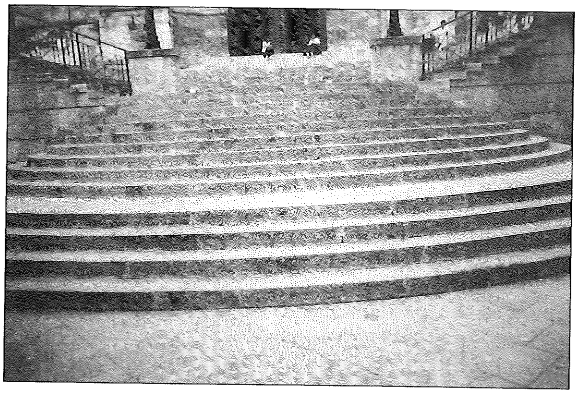
Estas Olimpiadas tratan de popularizar las matemáticas y de impulsar su estudio entre nuestros adolescentes. D. Pedro Puig Adam, expresaba en 1957 algo que salvando las distancias, ahora queremos hacer nuestro: «Pensemos que de nuestra tarea puede resultar la felicidad de miles de niños para quienes el estudio matemático puede ser un suplicio. Bien merece nuestro esfuerzo la esperanza de su liberación». Para los participantes en la X Olimpiada, el estudio de las matemáticas es un gozo intelectual. Nosotros simplemente esperamos que su participación en la Olimpiada haya aumentado el interés por su estudio, la convivencia entre iguales y que una parte de la sociedad comprenda el placer que se deriva de dedicar parte del tiempo a las Matemáticas.

Para los miembros de la Comisión Organizadora, la experiencia ha sido intensa y apasionante. Esperamos haber merecido la confianza que la FESPM nos otorgó.

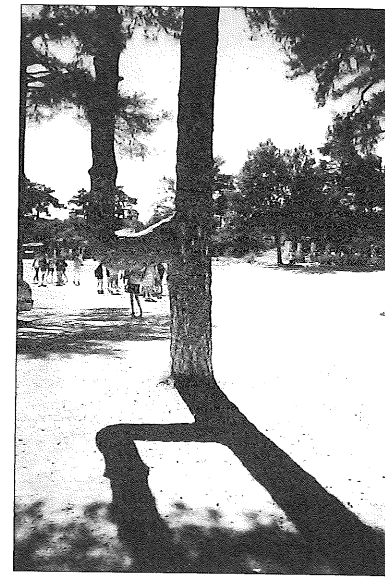
Juan Emilio García Jiménez

Vicepresidente de la S.C.M.P.M.

CONCURSO FOTOGRÁFICO X OLIMPIADA



Paralelas en tres dimensiones



Los números no fueron inventados por el hombre

180° de sabor

La máquina de hacer ángulos

Raíz cuadrada

IX Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (IX JAEM)

Se celebraron en Lugo los días 9, 10 y 11 de septiembre de 1999, organizadas por la sección de Matemáticas de ENCIGA.

Matemáticas, emoción y calor. Aunque suene raro, si hubiese que elegir tres palabras para resumir estas Jornadas yo me quedaría con estas.

Matemáticas

Durante tres días más de 850 profesores y profesoras de Matemáticas de todos los puntos de España y de Europa y América convirtieron a la pequeña ciudad de Lugo en la capital europea de las Matemáticas.

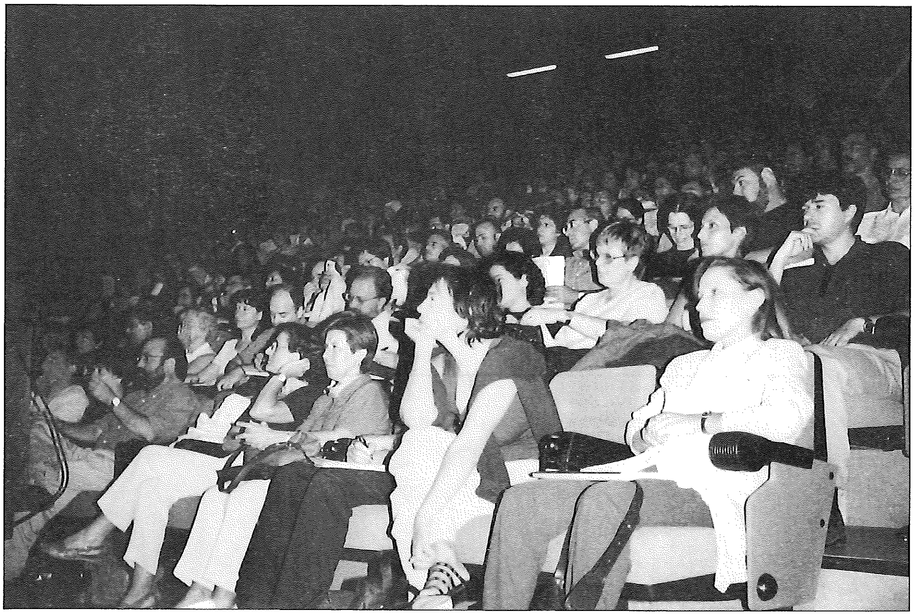
Y no sólo lo notaron los hoteles y los restaurantes. Los habitantes de la ciudad tuvieron la ocasión de acercarse a las Matemáticas mediante las exposiciones montadas en el Museo Provincial sobre «Matemáticos Gallegos», «Midiendo y calculando en la Historia» y «Escher y figuras imposibles», pero sobre todo como muy bien reflejaba el diario *El Progreso* en su edición del día 10 de septiembre, «un montón de críos lucenses y también bastantes adultos dejaron ayer en ridículo la idea de que las matemáticas son odiosas». Porque las actividades matemáticas no se quedaron encerradas en las funcionales aulas de la facultad de Veterinaria, sino que también salieron a la calle de la mano de Manuel Pazos (Coque), José Muñoz, José Antonio Hans y muchos otros. Muchos jóvenes y no tan jóvenes pudieron disfrutar en la Plaza Maior de algunos de los aspectos más atractivos y lúdicos de las Matemáticas.

Mientras tanto, en un más que apretado programa que iba de 9 de la mañana a 9 de la noche, dentro de la facultad, sin tregua para los asistentes que apenas tenían tiempo para saludar a amigos y conocidos, se sucedían conferencias, ponencias, comunicaciones, exposiciones, talleres, paneles... de las diez mesas temáticas en las que se estructuraron las Jornadas. Más de 150 actividades en total. Las JAEM de Lugo continuaban con su vocación de batir récords.

El primer reto matemático para cualquier asistente era diseñar un buen mapa topológico, espacio-temporal, para no perderse ninguna actividad que le interesase. Pronto uno descubría que ese era un problema sin solución. Había hasta siete actividades simultáneas. Y al estrés de tener que ir corriendo de un sitio a otro se sumaba la angustia de perderse una ponencia o una comunicación que prometía ser interesante.

Hubo de todo, como en botica, y prácticamente ningún campo relacionado con la enseñanza de las Matemáticas se quedó fuera de alguna de las 10 mesas temáticas:

1. Tecnologías en la enseñanza de la Matemática. Calculadoras gráficas y ordenadores.
2. La enseñanza de la Estadística. Un reto pendiente.
3. Talleres y optativas de Matemáticas.
4. Matemáticas en la vida real y en relación con otras materias escolares.
5. Del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico.
6. Bases del aprendizaje de las Matemáticas en la educación infantil y primaria.
7. Enseñanza de las Matemáticas en la Universidad.
8. Formación del profesorado de Matemáticas.
9. Las Matemáticas en la ESO y en el Bachillerato.
10. Matemática recreativa.



Los asistentes en la inauguración de las JAEM

La mesa 1, por lo amplio de la temática se dividió en dos; una sobre Calculadoras y Ordenadores y otra sobre Internet y Multimedia. Fue sin duda una mesa activa ya que se presentaron en ella 7 ponencias y 37 comunicaciones. Decididamente, la utilización de nuevos recursos tecnológicos en la enseñanza de las Matemáticas sigue siendo un potente foco de inquietud y actividad para muchos profesores.

La mesa 2, centrada en la enseñanza de la Estadística presentó 3 ponencias y 5 comunicaciones.

La mesa 3, sobre el tema de los talleres y las optativas de matemáticas contó con 3 ponencias y 6 comunicaciones.

La cuatro, Matemáticas en la vida real y en relación con otras materias escolares, nos deleitó con dos excelentes ponencias y 9 interesantes comunicaciones sobre la presencia de las Matemáticas en al vida real.

La mesa 5, Del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico, presentó dos ponencias y 5 comunicaciones.

La sexta, estaba centrada en uno de los niveles Infantil y Primaria, cuya presencia en otras JAEM había estado por debajo de lo esperado, a pesar de su importancia en la educación matemática. En esta ocasión la cantidad y calidad de los trabajos presentados han supuesto una convincente invitación a los profesores y profesoras de estos niveles a incorporarse en futuras ediciones. Dos ponencias y 17 comunicaciones y talleres suministraron a los asistentes un buen número de ideas y actividades para llevar al aula.

La enseñanza de las Matemáticas en la Universidad ocupó también un lugar de privilegio en estas JAEM y centró las intervenciones de la mesa 7, con dos ponencias de dos universidades ubicadas en los extremos del mapa del Estado, Santiago y La Laguna, y hasta 15 comunicaciones.

La formación del profesorado era un tema latente en todas las Jornadas pero tuvo un tratamiento específico en la mesa 8, con dos ponencias y cinco comunicaciones, una de ellas de reflexión sobre el papel de las Sociedades en este campo.

Si las reflexiones teóricas sobre la enseñanza de las Matemáticas atraen a muchos profesores, otros muchos buscaron en estas Jornadas ejemplificaciones y materiales nuevos para llevar al aula en la ESO y el Bachillerato. Buena prueba de ello es la importante participación del profesorado en la mesa 9, en la que además de las dos ponencias se presentaron hasta 30 comunicaciones y talleres sobre los temas más diversos.

Enseñar deleitando, aprender disfrutando y divirtiéndose. No podía faltar una mesa sobre Matemáticas Recreativas y la importancia del aspecto lúdico de la actividad matemática en la escuela. Su presencia quedó plasmada en tres ponencias y siete comunicaciones y talleres que hicieron las delicias de los que pudieron asistir a ellos.

IX JAEM
Comité Organizador

Manuel Díaz Regueiro
(Coordinación)
M.ª Jesús Navarro Otero
(Secretaría)
Manuel Alonso Mougán
Inés Ben González
Luis Cachafeiro Chamosa
Antonio Castro Castro
Xosé Fraga Vila
Luis García Fernández
Ángeles García Losada
Luciano González Fernández
Antonio Labraña Barrero
Ricardo Lamela Castro
Manuel Lamelo Iglesias
Xosé Méndez Seijas
Manuel Pazos Crespo
José Manuel Pichel Cosme
Miguel Rodríguez González
Marcelino Sampayo Ruiz
Andrés Vázquez García
M.ª Teresa Yáñez Pérez

IX JAEM
Comité de Programas

Carmen Azcárate Giménez
Luis Balbuena Castellano
Luis Cachafeiro Chamosa
Manuel Díaz Regueiro
M.ª Dolores Eraso Erro
Carmen da Veiga Fernández

Además de las mesas temáticas hubo, por supuesto conferencias, que en esta edición gravitaron sobre el uso de las calculadoras y la importancia de la visualización en las Matemáticas, a cargo de Antonio Quesada, J.R. Vizmanos y Bert Waits.

Las exposiciones, además de las del Museo Provincial, bien merecieron perderse alguna comunicación o alguna conferencia. Una excelente exposición de fotografía matemática nos revelaba un hecho incuestionable, de una forma, nunca mejor dicho, «evidente»: que matemáticas y belleza pueden y deben ir de la mano.

Estaba acompañada de otra que llamaba poderosamente la atención tanto por el contenido como por los autores: una exposición de figuras imposibles realizadas por alumnos de un colegio de primaria. Impactante y entrañable.

Hubo también una exposición-concurso de software matemático, que por las imposiciones de las tecnologías pasó un poco desapercibida para muchos asistentes.

Y no me he olvidado de los actos centrales, los actos de apertura y clausura con asistencia del Alcalde de Lugo y representaciones de la Consellería de Educación de la Xunta y de la Diputación Provincial.

Y de las conferencias plenarias, a cargo de Rafael Pérez, Emma Castelnuovo, André Antibi y Claudi Alsina; pero, aunque por supuesto trataron de Matemáticas, entran en el capítulo de la tercera palabra resumen del principio: Emoción.

Emoción

Los cerca de mil profesores de Matemáticas que se dieron cita en Lugo adelantaron unos días su principio del curso. Muchos salieron de la ciudad amurallada con el tiempo justo para incorporarse a sus clases el lunes siguiente.

Fueron allí a hacer acopio de ideas y materiales para mejorar su práctica docente, pero se encontraron con mucho

Inauguración de las exposiciones en el Museo de Lugo

más. Para todos los asistentes las IX JAEM significaron una inyección de emotividad, de entusiasmo y de optimismo vital en la dura tarea de enfrentarse al reto de enseñar mejor las Matemáticas.

Las JAEM iban a depararnos muchas sorpresas en este sentido. La primera, y ¡de qué manera!, fue la conferencia inaugural de Rafael Pérez, «Matemáticas y tercera cultura». El profesor de la Universidad de Granada nos brindó, en formato telediario, un fantástico mosaico visual (que esta vez no era nazarí) sobre la presencia de las Matemáticas en los ámbitos más insospechados de la cultura tecnológica en la que estamos inmersos. Un telediario imaginario y real al mismo tiempo, un noticiario complejo, con noticias del mundo de la cultura, del consumo, del deporte, del arte y hasta de la política, vistas desde el prisma de las matemáticas. Con gran despliegue de medios tecnológicos no le faltaron ni siquiera las conexiones en directo con el Senado y el Congreso.

«La fantasía sirve para las Matemáticas y para la vida». Este era el titular de primera página del *Progreso* de Lugo del día 11 de septiembre, recogiendo una frase de la cautivadora conferencia de Emma Castelnuovo. La legendaria profesora italiana, octogenaria pero con una vitalidad que impresionó a todos los asistentes, ofreció en su conferencia una panorámica de los cambios que la enseñanza de las Matemáticas ha sufrido a lo largo de la historia, destacando cómo en casi todas las épocas se había utilizado esta materia como elemento clasista y de formación de elites.

Con el entusiasmo que la caracteriza, no se limitó a hablar del pasado sino que emplazó a todos los asistentes a un compromiso de futuro: hacer de las matemáticas un instrumento democratizador para afirmar la igualdad de las personas en un mundo sin fronteras.

La carga emotiva del Auditorio de la Facultad de Veterinaria alcanzó unos niveles pocas veces vistos en un congreso de Matemáticas, los asistentes puestos en pie prorrumpieron en un interminable aplauso y en muchos ojos asomaba alguna lágrima de emoción. Las baterías del entusiasmo, imprescindibles para enfrentarse a un nuevo curso, de todos los asistentes se habían recargado casi al completo.

Lo poco que faltaba para la recarga total nos lo proporcionó Claudi Alsina en la conferencia de clausura, «Entre la realidad y la utopía... nosotros los de Mates».

El profesor Alsina, nos emplazó a formular y a reivindicar como docentes y como matemáticos doce utopías, tres ante la sociedad, tres ante el profesorado, tres ante los estudiantes y tres ante nosotros mismos. Lo que en un principio parecía un sueño, una utopía, un programa máximo inalcanzable, se convirtió, guiados por la elocuente puesta en escena de Claudi, en un programa mínimo, de consecución inmediata por el que todos los asistentes estarían dispuestos a luchar desde la semana siguiente. Su mensaje final caló muy hondo en el espíritu

Emma Castelnuovo tan brillante como siempre de todos los supervivientes a tres días tan intensos: el futuro de la enseñanza de las Matemáticas no está en las manos de ningún ministerio ni de ninguna administración. Ese futuro está en nuestras manos. La utopía se nos apareció a todos como una realidad a la vuelta de la esquina.

Calor

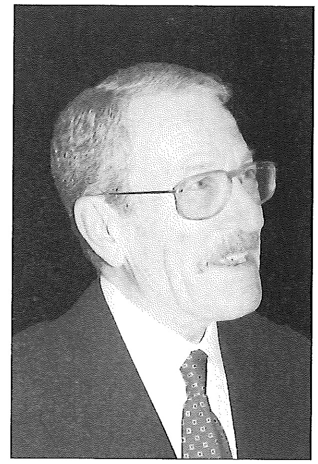
El calor persigue a las JAEM. Si en las anteriores celebradas en el 97 en Salamanca sufrimos unas temperaturas asfixiantes, en esta edición en Lugo hemos batido otro récord; los días de más calor de todo el verano fueron el 9 y el 10 de septiembre.

Aunque yo quería referirme a otro tipo de calor: el calor humano que impregnó todas las JAEM.

El calor del reencuentro con viejos amigos a los que hacía tanto tiempo que no veíamos. El calor de las nuevas amistades generadas en estos tres días de intensa convivencia. El calor de las citas para más tarde, de los intercambios de direcciones y teléfonos, de las promesas de intercambio de materiales...

El calor, y este sí que alcanzó temperaturas extremas, puesto por las personas de la organización desde el coordinador general hasta las eficaces y entusiastas estudiantes de relaciones públicas, que nos brindaron una acogida y una estancia inolvidables.

El calor de una macro-cena con más de 600 matemáticos charlando de matemáticas, de lo divino y de lo humano y disfrutando de la excelente cocina gallega y de una inolvidable visita a Santiago.



Antonio Miguel Esteban

Antonio Miguel Esteban recibiendo el I Premio Gonzalo Sánchez Vázquez. ¡Felicidades!

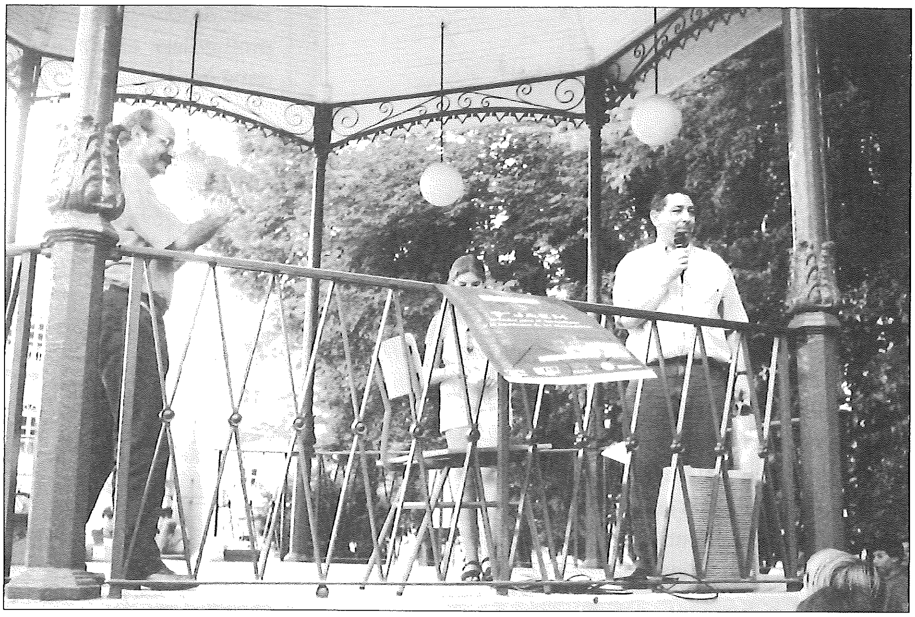
El calor del reconocimiento público de nuestra profesión personificado en el profesor extremeño Antonio Miguel Esteban, primer Premio a los Valores Humanos «Gonzalo Sánchez Vázquez» recientemente instaurado por la FESPM.

Después de tres días tan intensos, desde todos los puntos de vista, casi exhaustos pero con una brillo especial en los ojos mezcla de pena por que las JAEM ya han terminado, de entusiasmo, de optimismo y confianza en el futuro de la educación matemática, cuando llegamos a nuestros puntos de origen descubrimos en nuestros aumentados equipajes un fabuloso libro de Actas acompañado de un CD-ROM, que no sólo contienen todas las intervenciones de estas JAEM sino de las dos últimas de Madrid y Salamanca, más las fotos del concurso de fotografía, los programas del concurso de software...

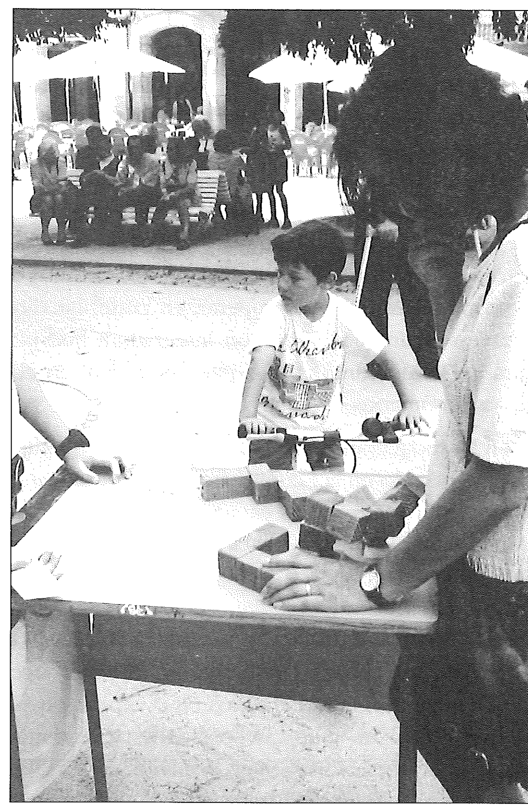
En fin, algo que va a mantener en nuestra mente estas JAEM vivas durante mucho tiempo. Ahora, con este material en nuestras manos y el tiempo suficiente para mirarlo detenidamente caemos en la cuenta de la cantidad de esfuerzos, desvelos, horas de su tiempo libre, horas de no estar con la familia... que han invertido todas y cada una de las personas que han hecho posible la realización de estas JAEM.

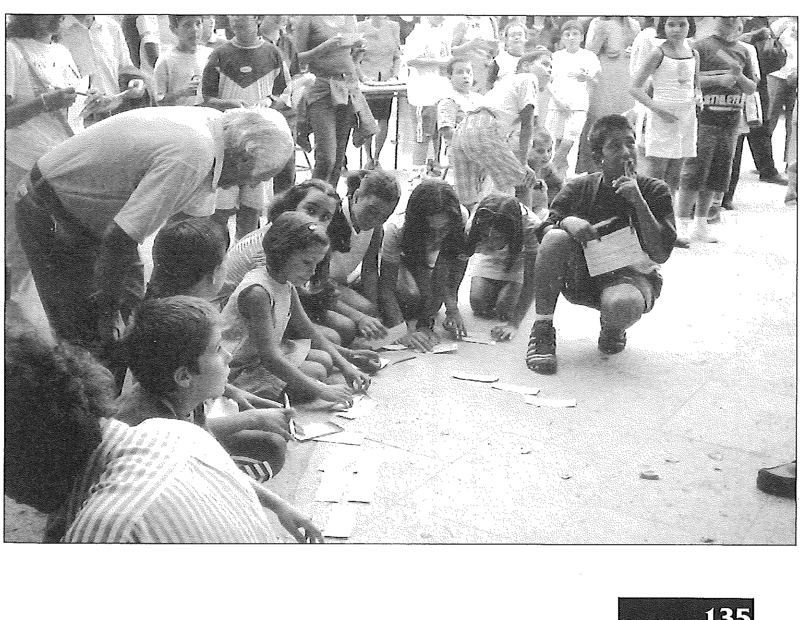
A todas ellas muchas, muchas gracias. Y ¡hasta las próximas en Zaragoza!

Antonio Pérez Sanz



Las matemáticas estuvieron
en las calles de Lugo
durante las JAEM





Diversidad Cultural en Educación Matemática

Un año más la International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Education (CIEAEM) ha celebrado un encuentro para intercambiar diversas experiencias e investigaciones en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.

El University College of Chichester (Inglaterra) ha sido el magnífico anfitrión de este evento del 21 al 26 de julio de 1999.

En esta ocasión, los grupos de trabajo, los talleres, las ponencias, comunicaciones y experiencias han girado en torno a la Diversidad Cultural en la Educación Matemática. Los 28 países representados y las más de 28 lenguas habladas dan una idea de la propia diversidad cultural entre los asistentes al congreso y la gran variedad de líneas de investigación explicitadas.

La primera de las 4 plenarias fue brillantemente conducida por el profesor Kenneth Ruthven de la Universidad de Cambridge bajo el título de «Knots, Ties and Double-binds: Untagling the Cultures of Mathematics». Partiendo del fenómeno creciente de globalización de la Educación Matemática, Ruthven apuntó algunos peligros de las creencias bajo las cuales la Educación Matemática es un mero dominio técnico de aprendizaje. Ante esta perspectiva, y atendiendo a sus palabras, no queda lugar para la complejidad del contexto cultural y las situaciones de enseñanza-aprendizaje se ven reducidas a diferentes tipos de dicotomías. Es necesario superar, en parte, las dicotomías a través de una aproximación integradora que incluya lo intra-individual junto con lo inter-individual en el estudio de los fenómenos de aula.

Ante la reducción de la dimensión socio-cultural a un mero obstáculo en la adquisición de las ideas matemáticas, cabe preguntarse por las características que requerirá una «contra-cultura» que consiga superar la presunta dicotomía entre el enfoque tecnológico y el enfoque socio-cultural. En esta línea, Marilyn Frankenstein (EEUU), Gelsa Knijnik (Brasil) y Christine Keitel (Alemania) iniciaron los días siguientes sus respectivas plenarias. La introducción del elemento político y los criterios de competición económica que reinan en nuestras sociedades, preocupadas por asegurar la correlación entre la inversión en instrucción escolar y un determinado crecimiento económico, fue un invariante en las tres conferencias. Desde sus distintos estudios, las tres profesoras pusieron el énfasis en la fuerte influencia que decisiones basadas en argumentos políticos y en las relaciones de poder actuales tienen para la Educación Matemática.

Tras las sugerentes plenarias, el día continuaba con trabajo en grupos. La distribución se hizo a través de 5 subtemas vertebradores con la intención de profundizar en diferentes aspectos del tema general:

...la International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Education (CIEAEM) ha celebrado un encuentro para intercambiar diversas experiencias e investigaciones en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.

- *Looking back, moving forward.* (Mirar hacia atrás para ir hacia delante, en relación con el papel de las nuevas tecnologías).
- *Effective co-operation between mathematicians, mathematics educators and users of mathematics.* (Cooperación efectiva entre matemáticos, educadores matemáticos y usuarios de las matemáticas, en relación con la creación de una cultura que incluya a todos ellos).
- *Coping with diversity of student/pupil interests, abilities, aptitudes and background.* (Tratar con la diversidad de intereses, habilidades, aptitudes y bagajes de los alumnos, en relación con la realidad del aula y su complejidad).
- *Mathematics cultures across different sectors of education.* (Las culturas matemáticas a través de los diferentes sectores de la educación, en relación con la administración, la institución educativa, universitaria o no, el aula, y la empresa, entre otros).
- *Beliefs and practices in mathematics and mathematics education.* (Creencias y prácticas en matemáticas y en educación matemática, en relación con la naturaleza diferente de estas dos áreas de conocimiento).

No podemos dejar de comentar, aunque muy brevemente, la sesión especial «Transitions Between Different Contexts of Mathematical Practice» conducida por Guida de Abreu (Inglaterra), Alan J.Bishop (Australia) y Norma Presmeg (EEUU). Tuvimos la oportunidad de asistir a la exposición de diversos proyectos con la aportación de interesantes datos empíricos capaces de ilustrar algunos procesos de transición. Los coordinadores enmarcaron esta sesión especial en un proyecto global mucho más amplio con el objetivo de indagar la gran variedad de procesos dinámicos y paralelos de transición vividos por el alumno. En general, podemos hablar del paso de una cultura a otra cultura significativamente diferente para el alumno como de un proceso continuado de adquisición de nuevas normas. En este proceso, el conflicto cultural se manifiesta de múltiples formas y el alumno no siempre consigue los recursos para «transitar» con éxito.

Hubo otras sesiones especiales y otras comunicaciones que despertaron interés, pero no debemos extendernos excesivamente. Con lo expuesto hasta ahora podemos asumir la calidad de las participaciones. Sin duda, es de agradecer que se estén llevando a cabo estudios de gran seriedad respecto a las influencias socio-culturales sobre el aprendizaje de las matemáticas. La atención a la diversidad en el aula de matemáticas parece estar de moda, del mismo modo que lo están la multiculturalidad y los currículos «respetuosos». Las modas son, en principio, buenas aliadas porque enfocan el interés, pero en una segunda fase pueden servir para trivializar asuntos importantes o, contrariamente, para impulsar su estudio. Parece que la comunidad de educadores matemáticos ha optado por esto último.

En definitiva, el CIEAEM 51 ha resultado una cita satisfactoria, como era de esperar. El tema de esta convocatoria propone, con acierto, una Educación Matemática de una gran complejidad por sus implicaciones sociales. Ante los índices de fracaso escolar en un determinado sector de nuestras sociedades, urge analizar en profundidad los motivos que provocan una mayor concentración de este fracaso en los grupos culturales no dominantes. La expansión escolar, la escuela de masas, o su aproximación en la mayor parte de países del mundo, se vende como un símbolo de sociedades más igualitarias. En particular, las «Matemáticas para Todos» de nuestros currículos se exponen como un éxito de las demandas para una sociedad abierta con igualdad de oportunidades educativas para todas sus capas sociales. No obstante, nuestra aulas cada vez más multiculturales y multiétnicas, ponen en evidencia la democratización de la Educación Matemáticas para todos y todas.

...las «Matemáticas para Todos» de nuestros currículos se exponen como un éxito de las demandas para una sociedad abierta con igualdad de oportunidades educativas para todas sus capas sociales.

Núria Planas i Raig

FEEMCAT. Barcelona

XXXV Olimpíada Matemática Española

Problemas propuestos en la Fase Nacional celebrada en Granada los días 12 y 13 de mayo de 1999.

Primera Sesión

Problema 1

Las rectas t y t', tangentes a la parábola de ecuación $y = x^2$ en los puntos A y B, se cortan en el punto C.

La mediana del triángulo ABC correspondiente al vértice C tiene longitud m. Determinar el área del triángulo ABC en función de m.

Problema 2

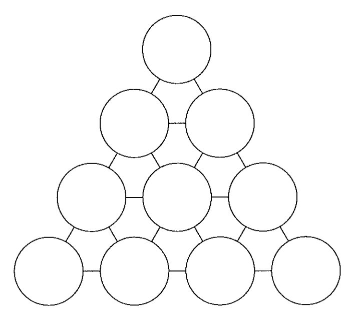
Probar que existe una sucesión de enteros positivos a_1, a_2,..., a_n,... tal que

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$$

es un cuadrado perfecto para todo entero positivo n.

Problema 3

En un tablero en forma de triángulo equilátero con un número par de filas n, como se indica en la figura, se juega un solitario.



Sobre cada casilla se coloca una ficha. Cada ficha es blanca por un lado y negra por el otro. Inicialmente, sólo una ficha, que está situada en un vértice, tiene la cara negra hacia arriba; el resto de las fichas tiene la cara blanca hacia arriba. En cada movimiento se retira sólo una ficha del tablero y se da la vuelta a cada una de las fichas que ocupan una casilla vecina. *Casillas vecinas* son las que están unidas por un segmento.

Después de varios movimientos ¿será posible quitar todas las fichas del tablero?

Segunda sesión

Problema 4

Una caja contiene 900 tarjetas numeradas del 100 al 999. Se sacan al azar (sin reposición) tarjetas de la caja y se anota la suma de los dígitos de cada tarjeta extraída. ¿Cuál es la menor cantidad de tarjetas que se deban sacar, para garantizar que al menos tres de estas sumas sean iguales?

Problema 5

El baricentro de un triángulo ABC es G. Denotamos por g_a, g_b, g_c las distancias desde G a los lados a, b y c respectivamente.

Sea r el radio de la circunferencia inscrita. Probar que:

i) $$g_a \geq \frac{2r}{3}, \quad g_b \geq \frac{2r}{3}, \quad g_c \geq \frac{2r}{3}$$

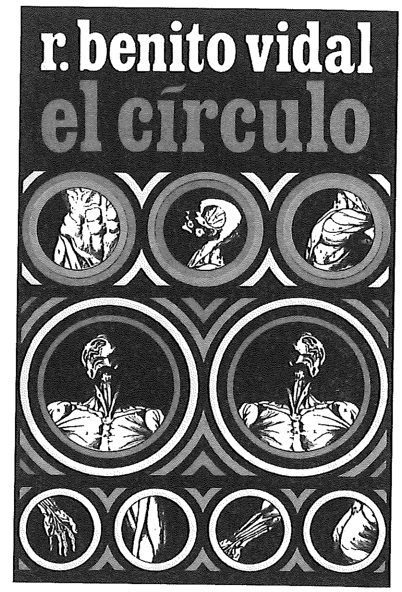
ii) $$\frac{g_a + g_b + g_c}{r} \geq 3$$

Problema 6

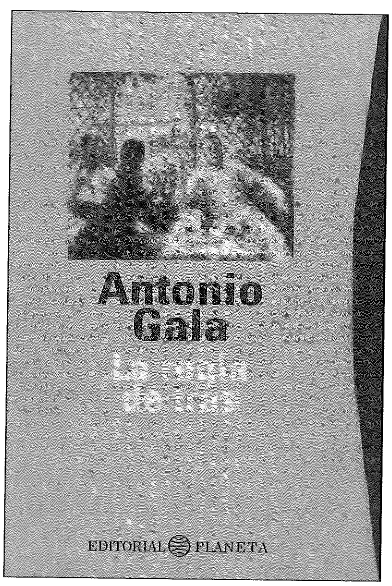
Se divide el plano en un número finito de regiones N mediante tres familias de rectas paralelas. No hay tres rectas que pasen por un mismo punto.

¿Cuál es el mínimo número de rectas necesarias para que $N > 1999$?

- No está permitido el uso de calculadoras.
- Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
- El tiempo para cada sesión es de 4 horas.



El círculo
R. Benito Vidal



La regla de tres
Antonio Gala

Función de uno, equis, ene
Gabriel Celaya

SUMA 32
noviembre 1999

Premios Thales-San Fernando. Congrés d'educació matemàtica (cem2000)

PREMIOS Internacionales de Investigación y de Renovación Pedagógica en Educación Matemática Thales-San Fernando

La Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía, el Ayuntamiento de San Fernando y la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES, tras la celebración de los Primeros Premios «Thales-San Fernando» deciden convocarlos sucesivamente con carácter bienal.

Por ello, dichas entidades convocan la segunda edición de los premios internacionales de investigación y de renovación pedagógica en educación matemática THALES-SAN FERNANDO, en lengua española o portuguesa de acuerdo con las siguientes:

Bases

1. Podrán presentarse trabajos en dos modalidades: a) Investigación en Educación Matemática y b) Renovación en Educación Matemática. La temática será libre.
2. Los trabajos deberán ser originales y no podrán haber sido, ni total ni parcialmente, publicados, ni sometidos a la consideración para su publicación en alguna revista, editorial, servicio de publicación, base de datos, grupos en Internet, o análogos.
3. Los trabajos han de estar escritos en lengua española o en lengua portuguesa, pero su procedencia podrá ser de cualquier país del mundo.
4. Los trabajos presentados podrán estar firmados por uno o más autores, que sólo podrán presentar un único trabajo.
5. Los trabajos han de presentarse en forma de Artículo, según las especificaciones indicadas en la base n.º 7.

CONVOCATORIAS

Dicho artículo podrá acompañarse de cuantos anexos se considere conveniente para su valoración.

6. Desde el momento de la remisión del trabajo y mientras no se conozca el fallo del jurado, el autor o autores renuncian expresamente a publicar (*cualquiera que sea el medio y tipo de soporte utilizado*) o someter a la consideración para su publicación, total o parcialmente, el trabajo remitido a este premio. Cualquier actuación en contra conllevará la inmediata eliminación del trabajo en el concurso.

7. Los Artículos deberán presentarse mecanografiados a doble espacio con letra de 12 puntos, en formato DIN A4 y con una extensión máxima de 20 páginas (*gráficos, dibujos, notas, fotografías y bibliografía incluidos*) y de acuerdo con las siguientes normas:

7.1. Los trabajos presentados deberán ser tratados con cualquier procesador de textos. Se recomienda preferiblemente Word, Worperfect y Latex. Deberán enviarse cinco ejemplares en papel, con suficiente calidad de impresión, así como en soporte magnético en disco de tres pulgadas y media. En los trabajos no podrán figurar los nombres, ni dirección ni ningún otro tipo de identificación de los autores. Los autores deberán escribir su nombre, dirección y datos profesionales en papel aparte que deberá ser remitido dentro de un sobre cerrado en el que sólo figure el nombre del artículo. La versión magnética y la del papel deberán coincidir exactamente, cualquier alteración entre ambas significará, en su caso, la anulación del premio. Los autores remitirán los cinco ejemplares del trabajo en papel, el sobre cerrado con sus datos y el disquete (*con envoltura antimagnética*) dentro de un sobre a la siguiente dirección:

Sociedad THALES
Premio Thales-San Fernando a la [modalidad]
Apdo. 494
11100-San Fernando (Cádiz)
España

7.2. Los gráficos, dibujos, fotos, etc. deberán figurar en el texto y deberán además adjuntarse independientemente, numerados con claras etiquetas que remitan a otras del texto y que indiquen el lugar donde deberán ubicarse, caso de su publicación. Deberá constar también con claridad la leyenda o pie que deben llevar.

7.3. La bibliografía se relacionará al final del trabajo, por orden alfabético de apellidos, con las siguientes especificaciones:

- Para libros:

– Apellidos e iniciales del nombre del autor en mayúsculas, en el caso de tratarse de un editor deberá añadirse (ed.).
– Año de publicación, entre paréntesis.
– Título completo en cursiva.
– Número de edición, lugar y editorial.
– Datos adicionales si los hubiera.

- Para artículos:

– Apellidos e iniciales del nombre del autor en mayúsculas, en el caso de tratarse de un editor deberá añadirse (ed.).
– Año de publicación, entre paréntesis.
– Título completo entre comillas.
– Nombre completo o abreviatura internacional de la revista en cursiva.
– Número del volumen en negrita, seguido del número o mes del fascículo entre paréntesis, páginas inicial y final unidas por guión.

7.4. No se podrá referenciar en la bibliografía ningún trabajo que no sea invocado en el texto. Para efectuar una cita bibliográfica se dará entre paréntesis el autor o autores y el año, o bien se citará el autor y trabajo y entre paréntesis figurará el año.

7.5. Es preceptivo que la estructura del trabajo contemple al menos los siguientes puntos:

– Resumen de unas doce líneas como máximo.

– Antecedentes, de forma escueta.

– Desarrollo del trabajo.

– Conclusiones.

– Citas bibliográficas.

7.6. Las notas a pie de página deberán ir numeradas correlativamente e indicadas con superíndices.

8. La fecha de presentación de trabajos finalizará el 30 de abril del 2000.

9. El Jurado estará compuesto por cinco miembros, todos ellos profesores de reconocido prestigio, que serán designados por la SAEM Thales. Los componentes del Jurado establecerán el meca-

Podrán presentarse trabajos en dos modalidades: a) Investigación en Educación Matemática y b) Renovación Matemática.
[...]
Los trabajos deberán ser originales
[...]
La fecha de presentación de trabajos finalizará el 30 de abril del 2000.
[...]
La cuantía de los premios será de 500.000 ptas para cada modalidad.
[...]
Los premios serán entregados en un Acto Académico que tendrá lugar en la ciudad de San Fernando.

nismo de deliberaciones que en cualquier caso, serán secretas. Los integrantes del jurado se darán a conocer en el acto de la entrega de los premios.

10. El Jurado seleccionará un máximo de cinco trabajos de cada una de las modalidades del Premio. Estos trabajos serán considerados Finalistas de los Premios Thales-San Fernando.
11. Se premiarán dos trabajos, uno por cada modalidad, seleccionados por el Jurado entre los finalistas, pudiendo quedar desierto uno o ambos premios si el Jurado considerase que los trabajos correspondientes presentados no tienen la calidad necesaria. En caso de quedar sólo uno de los dos premios desiertos, el Jurado podrá aunar el importe de los dos premios en el que se conceda, si la calidad del trabajo premiado lo mereciese.
12. La cuantía de los premios será de 500.000 ptas por cada modalidad. Tanto a los autores de los trabajos premiados como a los finalistas se les acreditará con un Diploma expedido conjuntamente por la SAEM Thales y el Ayuntamiento de San Fernando.
13. El fallo del Jurado tendrá lugar antes del 30 de septiembre del 2000, comunicándose el resultado a los participantes.
14. Los trabajos Finalistas podrán ser publicados en derecho exclusivo por la SAEM Thales, bien como trabajo ordinario de la Revista Épsilon o en una edición especial. A estos efectos, la SAEM Thales comunicará a los autores dicha intención antes de un mes después de la entrega de los premios. De no producirse esta comunicación en el plazo indicado, los autores podrán disponer libremente de sus trabajos para su publicación.
15. Los premios serán entregados en un Acto Académico que tendrá lugar en la ciudad de San Fernando. Dicho acto consistirá en una conferencia pronunciada por un prestigioso profesor y en las intervenciones de los finalistas explicando sucintamente el trabajo presentado. Finalmente, el Jurado dará a conocer los autores de los trabajos premiados y se hará entrega oficial de los diplomas acreditativos y de los premios.
16. El fallo del Jurado será inapelable.
17. La mera participación obliga a la plena aceptación de estas bases.

Los Primeros Premios Thales-San Fernando recayeron en Ricardo Cantoral y Rosa Farfán (Investigación) y Antón Labraña (Renovación)

Congrés d'educació matemàtica (cem2000)

El cem2000, actividad satélite del tercer Congrés Europeu de Matemàtiques, constituyen las Primeres Jornades d'Educació Matemàtica de Catalunya, dentro del marco del Año Mundial de las Matemáticas.

Se realizará en la ciudad de Mataró (Barcelona) la primera semana de julio del año 2000 y está organizado por la Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT) que forma parte de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

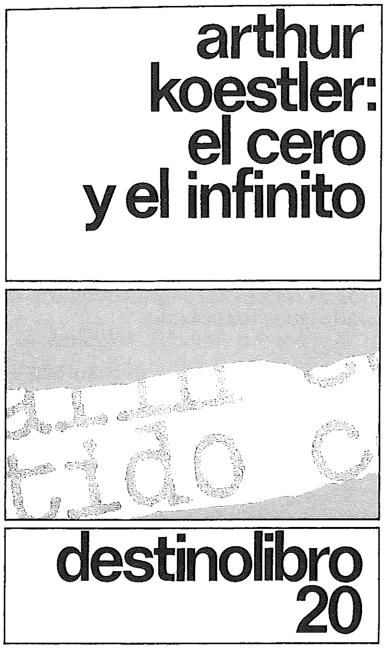
En el cem2000 habrá:

- debates;
- conferencias
- comunicaciones
- talleres;
- pósters;
- intercambios de experiencias y
- exposiciones.

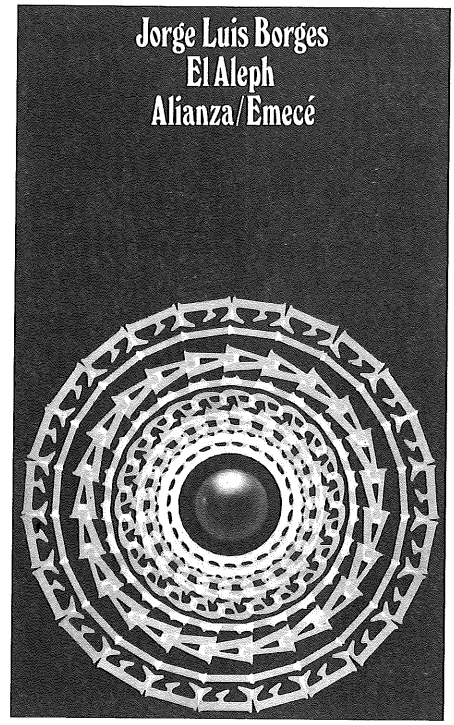
Comité Asesor: Ken Clements, Alan J. Bishop, Paolo Boero, Paulo Abrantes, Teresina Nunes, Guida d'Abreu, Claudi Alsina, Josep M. Fortuny, Maria A. Canals, Luis Rico, Luis Balbuena, Vicente Rivière y Núria Gorogorió.

Comité Organizador: Llüisa Girondo, Claudi Aguadé, Silvia Margelí, Cecília Martínez, Mariona Fradera, Jaume Serra, Marta Berini, Albert Violant y Xavier Vilella.

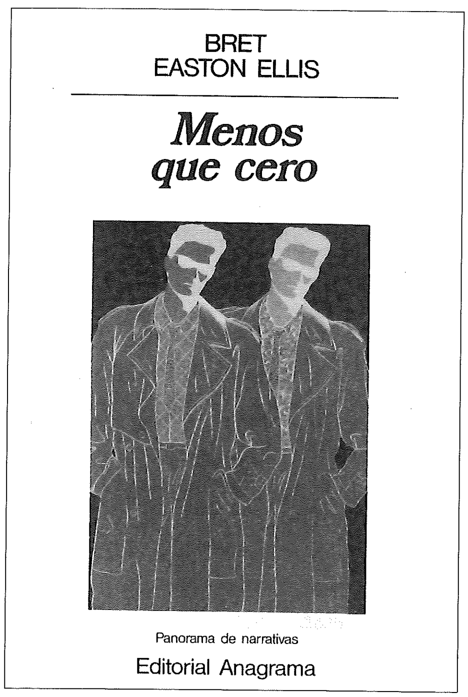
Comité de Programas: Llüisa Girondo, Claudi Aguadé, Antón Aubanell, Marta Berini, Albert Violant, Ignasi del Blanco, Carles Lledó, Núria Gorgorió, Roser Codina, Elvira Figueras, Ángel Alsina y Xavier Vilella.



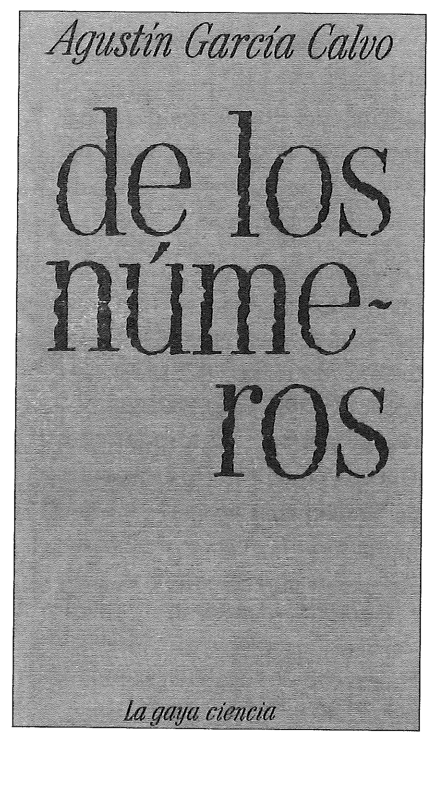
El cero y el infinito
Arthur Koestler



El Aleph
Jorge Luis Borges



Menos que cero
Bret Easton Ellis



De los números
Agustín García Calvo

NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, ICE de Universidad de Zaragoza, C./ Pedro Cerbuna 12, 50009 Zaragoza), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.
2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos en ningún caso serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.
3. Los gráficos, diagramas y figuras se enviarán en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. Así mismo, podrán incluirse fotografías. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.
4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de entre cinco y diez líneas, que no necesariamente tiene que coincidir con la Introducción al artículo. Debe ir escrito en hoja aparte. En ese mismo folio aparecerán los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede).
5. Si se usa procesador de texto, agradeceremos que además se envíe un disquette con el archivo de texto que contenga el artículo, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quiera incluir. La etiqueta del disquette debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda MS-Word (hasta versión 5.0) en Macintosh, o WordPerfect (hasta versión 5.1) en PC. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF.
6. En cualquier caso, tanto un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.
7. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.
8. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo.
9. La bibliografía se dispondrá al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:

   TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma,* n.° 20, 91-98.

   En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas,* Labor, Barcelona.

   En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2,* ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.
10. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ...supone un gran avance (Hernández, 1992).

    Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ...según Rico (1993).
11. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como —en caso afirmativo– la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

SUMA

BOLETÍN DE SUSCRIPCIÓN

Tarifa

	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	3.500 pts.	1.700 pts.
Centros	5.000 pts.	1.700 pts.
Europa	$40 USA	$14 USA
América y resto del mundo	$50 USA	$17 USA

Fotocopiar y enviar a: Revista SUMA. ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Deseo suscribirme a la revista SUMA:
Nombre y apellidos:. . . . .
Dirección:. . . . . Tno.: . . . .
Población: . . . . CP:. . . . .
Provincia/país . . . . CIF/NIF: . . . .

Importe

☐ Suscripción a partir del n.° ______ (3 números)

☐ N.os sueltos: ______________________________

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto).

☐ Transferencia bancaria (Ibercaja: 2085-0168-50-03-000415-98).

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista Suma.

Firma y fecha:

☐ Giro postal dirigido a Revista Suma.

Nombre y apellidos: . . . .
Código Cuenta Cliente
Entidad |_|_|_|_| Oficina |_|_|_|_| DC |_|_| Cuenta |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|
Banco/Caja . . . .
Agencia n.°:. . . . . Dirección: . . . .
Población: . . . . Provincia: . . . .

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que periódicamente les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (Fecha y firma):

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

FESPM