SUMA 32
noviembre 1999, pp. 109-112

Travesía del Gangah

Miquel Albertí Palmer

Después de relatar la experiencia vivida al cruzar el Ganges en un bote me planteo: ¿Qué curva describe una barca al cruzar un río? En principio tiene la intención de ser una línea recta, pero la fuerza de la corriente lo impide por débil que sea. La búsqueda de una función cuya gráfica coincida con esa trayectoria constituye un excelente ejemplo de modelización matemática simple y de aplicación de conceptos fundamentales del cálculo diferencial.

MISCELÁNEA

ERA la tercera vez que íbamos. Pero no volvíamos a los ghats, ahora nos disponíamos a atravesar el río para visitar el fuerte de Ram Nagar, en la orilla sur.

El pequeño muelle de donde zarpaban los botes era un arenal a las afueras de Varanasi. De hecho, no había muelle. Uno intuía que de allí partían las embarcaciones por el barullo de gente y de mercancías que se daban cita en aquel lugar. Habíamos llegado en un rickshaw, después de zigzaguear como una centella entre el caótico tráfico de la ciudad. Enseguida que el precio del viaje fue acordado nos hicieron subir a bordo. Y allí permanecimos sentados espera que te espera. No partimos, no. Claro, nosotros dos éramos los únicos pasajeros y sin duda cabía alguno más. Tal vez alguno para un occidental, pero sin duda muchos para un indio; no nos apartamos de la orilla hasta que fuimos ocho: nosotros, dos remeros y cuatro pasajeros nuevos, uno de ellos insólitamente encorbatado en un traje impecable.

El Gangah crece mucho cuando el monzón alcanza el norte del subcontinente. Las aguas suben varios metros inundando cultivos, caminos y las chozas que se han construido a su vera. A efectos de la crecida los márgenes se alejan y la distancia que separa Ram Nagar de la orilla norte (unos trescientos metros durante la estación seca) se triplica. La fuerza de la corriente también aumenta y hacen falta dos hombres para gobernar el bote y conducirlo a su destino.

Bajo un sol de mil demonios la fachada firme e imponente del fuerte se agitaba líquida sobre el agua. El sudor nublaba nuestras miradas y más que de una visión real se trataba de un espejismo.

Los remos de bambú fueron utilizados como perchas para zarpar del embarcadero, pero no nos dirigimos hacia el otro lado del río, sino río arriba rozando la orilla. Poco después la barca nos subía contracorriente impulsada por los remos. Éstos habían sido alojados cuidadosamente en el fondo cóncavo del bote y eran ahora las manos de los jóvenes las que nos propulsaban asiendo los travesaños de madera que se sucedían por encima de nuestras cabezas: sombra, sol, sombra, sol,... De su paseo por aquella escalera horizontal conseguíamos el impulso para deslizarnos sobre el agua. Avanzábamos lentamente encajonados entre unos cilindros negros gigantescos que sostenían las vigas. Éstas nos hacían ahora de techo pero se convertían en el suelo del puente cuando, una vez acabadas las lluvias, todo el ingenio se extendía de lado a lado del río.

Eso lo supimos más tarde. En aquellos momentos la situación parecía algo delicada: pasar entre las sombras de aquellos objetos extraños, en un lugar ignoto, sin saber bien adónde nos conducirían, compartir el viaje con seis desconocidos, seis hombres (ella los contó varias veces) que no decían ni se decían ni pío (¿era que en su silencio se decía todo?, ¿quizás ya habían acordado antes de embarcar cuándo nos asaltarían?), no era cosa de broma. ¿Qué podía hacer yo contra ellos seis? Ella debió pensar en esto cuando la vi mirar el agua con temor: no le daba ningún asco la suciedad que flotaba en ella, sino el hecho de tener que zambullirse para escapar del ataque. Es Leo y ya se sabe que a los felinos no les hace ni pizca de gracia mojarse.

De pronto, el viento cambió. O me lo pareció porque de una sacudida los dos jóvenes sacaron el bote de debajo del puente móvil y retomaron los remos. El Sol volvía a lucir quemándonos la piel. La proa apuntó por fin hacia la orilla sur, perpendicularmente al río. Y entonces, empujados por la fuerza de los remeros y de la corriente, trazamos una diagonal sobre el agua que ni dejó rastro alguno ni fue rectilínea, a pesar de su intención.

...debido a que la corriente es tan fuerte hace falta llevar la embarcación hasta un punto de la orilla río arriba y desde allí trazar la perpendicular para aproximarse al puerto contrario. Las matemáticas y la física harán el resto.

En un principio me sorprendió el itinerario seguido, pero después caí en la cuenta: debido a que la corriente es tan fuerte hace falta llevar la embarcación hasta un punto de la orilla río arriba y desde allí trazar la perpendicular para aproximarse al puerto contrario. Las matemáticas y la física harán el resto. Ahora bien, si era así, ¿por qué no habíamos embarcado desde el comienzo en ese lugar?

Al regresar las maniobras fueron parecidas. Desde Ram Nagar salimos bordeando la orilla, contracorriente, hasta que encaramos el otro margen con otra diagonal que cruzó la anterior enmedio de la corriente. Completamos así un 8, si lo miramos desde una orilla, o un ∞ si lo miramos desde la corriente. Tal vez este último símbolo resulte más adecuado dada la cantidad de viajes que día tras día se hacen –y deben haberse realizado durante siglos–, para atravesar el río sagrado (figura 1).

Las diagonales anteriores no fueron rectas, como ya se ha dicho. Eso tiene que ver con la fuerza de la corriente, que no es la misma en medio del río que cerca de sus orillas. De entrada, podemos suponer que hay tres tipos básicos de flujo. Probablemente éste depende del ancho del río: cuanto más estrecho, más parecido al tipo A; cuanto más amplio más parecido al tipo C (cuadrático).

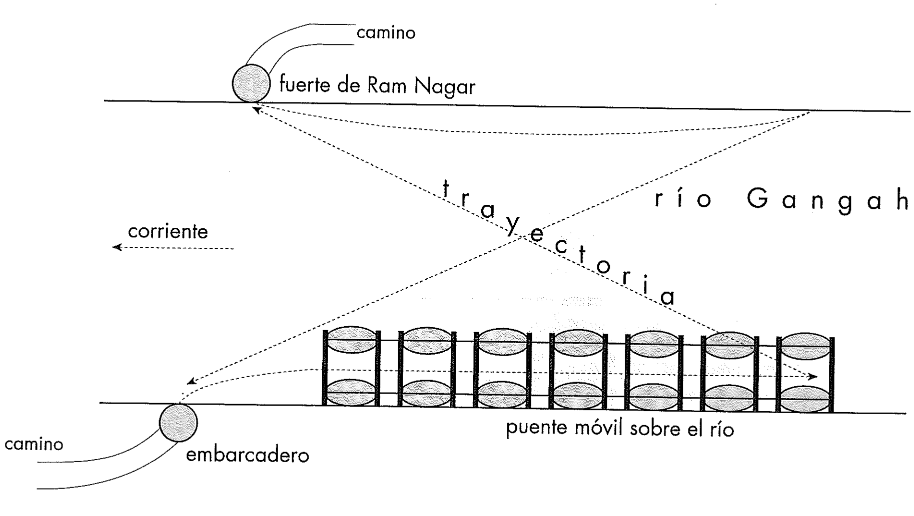


Figura 1

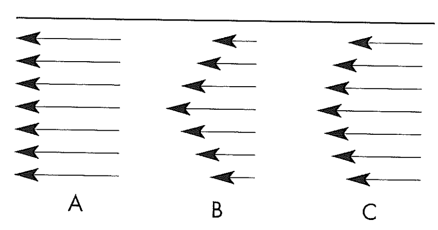


Figura 2

Ahora planteemos el problema con más precisión y menos ambigüedad. Es decir, huimos de la situación real para ir al laboratorio donde se hacen las suposiciones ideales que permiten encarar la cuestión con más facilidad. Comenzaremos por el caso hipotético más sencillo:

Supongamos que queremos cruzar un río de orillas paralelas cuya corriente fluye a velocidad constante v en todos sus puntos: el caso A, el más simple. La barca de que disponemos para efectuar la travesía puede desplazarse a una velocidad w, también constante. Queremos ir desde un punto P de una orilla hasta un punto Q de la otra. Q está situado de tal manera que el segmento PQ es perpendicular al río y por tanto a su corriente. Veámoslo:

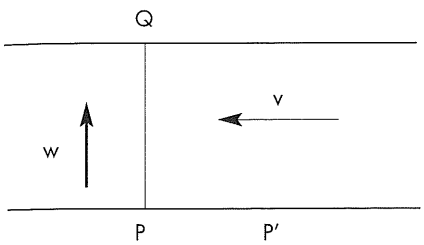


Figura 3

Cuestión: *¿Cuál será el mejor punto P', situado en el margen de salida, desde donde apuntar la proa perpendicularmente a la corriente y, con el efecto de ésta, llegar hasta Q?*

En un punto cualquiera del río la velocidad resultante con la que se desplazará la embarcación será:

$$w = \sqrt{v^2 + w^2}$$

y la dirección que seguirá:

$$\text{tg } a = \frac{w}{v}$$

Ahora bien, como ya se ha mencionado la corriente es constante e igual en todos los puntos. Luego tg a también se podrá obtener a partir de los catetos del triángulo rectángulo, es decir que podemos escribir:

$$\text{tg } a = \frac{w}{v} = \frac{PQ}{PP'}$$

y ya sabemos cómo hallar P':

$$PP' = \frac{PQ \cdot v}{w} = \frac{v}{w} \cdot PQ$$

w deberá ser mayor que v para que los remeros puedan vencer la corriente. Escribiendo $w = k{\cdot}v$, con $k > 1$, tendremos:

$$PP' = \frac{PQ}{k}$$

Supongamos que queremos cruzar un río de orillas paralelas cuya corriente fluye a velocidad constante v en todos sus puntos... La barca de que disponemos para efectuar la travesía puede desplazarse a una velocidad w, también constante.

Como era de esperar la ubicación de P' depende de la fuerza de los remeros. Cuanto mayor es k, menos habrá que alejarse de P. En el caso en que $k = 1$ ($v = w$), el ángulo a será de 45° y $PP' = PQ$.

Situémonos ahora en un ámbito más cercano a la realidad: aquel en el cual el flujo obedece al modelo C. La velocidad con la que se mueve un punto sobre el agua depende de la distancia que le separa de las orillas: cuando está en medio vale v, pero se anula cuando se halla junto a las orillas. Para facilitar el trabajo supongamos que $PQ = 1$ y tomemos un sistema de coordenadas con origen en Q:

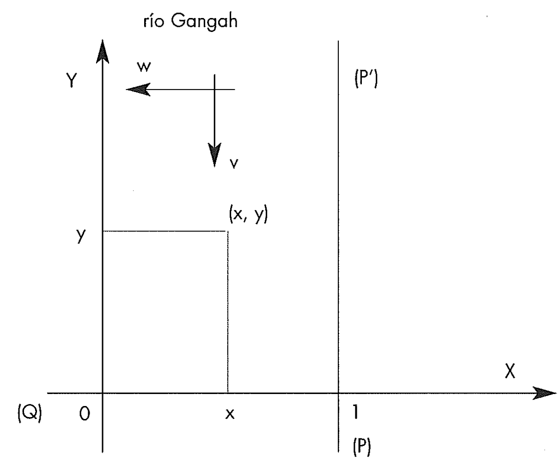


Figura 4

La velocidad que actua sobre el punto (x, y) depende de x, con $0 \leq x \leq 1$. Será pues del tipo:

$$V(x) = k{\cdot}x{\cdot}(x-1) \qquad k = \text{cte.}$$

porque se ha de anular en las orillas para $x = 0$ y para $x = 1$. Aparece entonces una función de segundo grado. ¿Cuánto vale k? Para hallarla pensemos que para $x = 1/2$, en medio de la corriente, la velocidad ha de ser $-v$. Es negativa porque la corriente va hacia abajo. Luego:

$$-v = V\left(\frac{1}{2}\right) = k \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{k}{4} \quad \Rightarrow \quad k = -4v$$

Y así ya tenemos la función cuadrática que nos proporciona la velocidad en cada punto del canal:

$$V(x) = -4v(x - x^2) = 4v(x^2 - x)$$

La dirección instantanea que tomará el punto se puede obtener de los vectores velocidad que actuan sobre él. El vector velocidad resultante, $W(x, y)$, tendrá pendiente:

$$\text{tg } a = \frac{|V(x)|}{|-w|} \; \frac{4v\left(x - x^2\right)}{w}$$

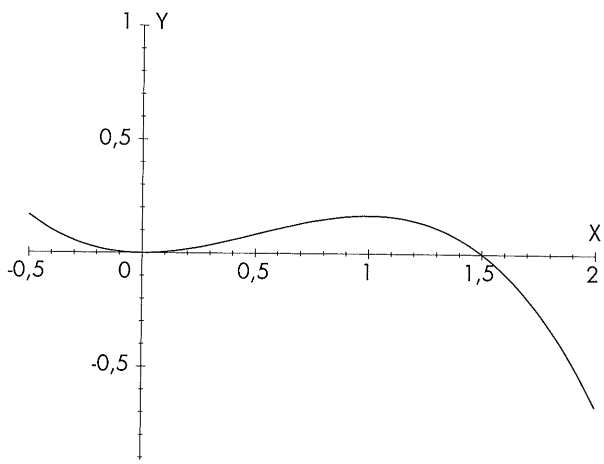
Pero tg a es también la pendiente de la recta tangente a la trayectoria que sigue el bote, es su velocidad instantánea resultante y $W(x, y)$ su vector director. Así que la curva que trazará la embarcación al cruzar el río será aquella que tiene coma derivada precisamente a la función

$$y = \frac{4v}{w} \cdot \left(x^2 - x\right)$$

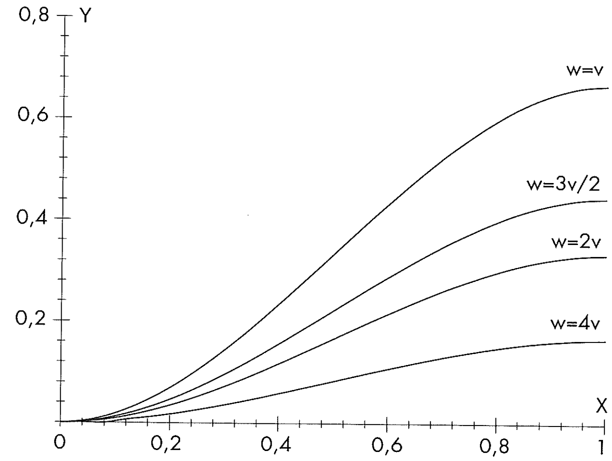
es decir, una primitiva suya. Como por ejemplo:

$$y = \frac{2v}{3w} \cdot \left(3x^2 - 2x^3\right)$$

Puesto que ha de ser $y(0) = 0$, la constante de integración es nula. He aquí su gráfico para $w = 4v$:



y ahora el mismo en el intervalo [0,1] (donde tienen lugar los acontecimientos) para diferentes proporciones entre w y v:



Alcanza el máximo en el punto $x = 1$ y el mínimo en $x = 0$. En el caso $w = 4$v el valor que toma el máximo es 1/6. El mínimo siempre toma el valor 0. Para $x = 1/2$ la pendiente de la recta tangente es $y'(1/2) = 1$. Por tanto, en el caso $w = 4v$, el punto P' se halla a una distancia igual a $PQ/6$.

Medir las velocidaes v y w no es difícil, pero cómo dependen éstas del nivel de las aguas, del ancho del canal y de su profundidad es otra historia.

Miquel Albertí
IES Pau Vila
Sabadell (Barcelona)