SUMA 32
noviembre 1999, pp. 91-97

Algunos contenidos matemáticos con Logo

Guido Angelo Ramellini

IDEAS Y RECURSOS

El artículo presenta un modo de desarrollar con alumnos de 1.° o 2.° de ESO contenidos aritméticos (Máximo Común Divisor y Mínimo Común Múltiplo) y geométricos (Teorema de Pitágoras) a través del ordenador y del lenguaje LOGO.
Además de querer reforzar y profundizar el aprendizaje de los contenidos matemáticos, así como los de informática, nos importa subrayar cómo estos trabajos evidencian las diferencias que existen en la forma de trabajar del ordenador y la del ser humano. Esto comporta la necesidad de modificar el propio modo de pensar cuando queremos que la maquina ejecute nuestras órdenes.
De hecho, nos parece que un importante, sino el principal, aspecto formativo que puede desarrollar el trabajo con ordenador en esta etapa escolar es el tener que buscar estrategias y contenidos alternativos.

POR QUÉ Logo

Cuando en el año 1994 el Liceo Italiano de Madrid adoptó unos programas experimentales para profundizar la enseñanza de las matemáticas y de la física, introdujo también unas horas de laboratorio de informática donde, de acuerdo con el Plan Nacional (italiano), se trabajaba mayoritariamente en Pascal.

Evidentemente, la mayor parte de los alumnos era analfabeta en las tareas de programación.

El mismo año, las direcciones de las Escuelas Italianas de Madrid habían decidido poner en marcha un laboratorio de informática abierto a los alumnos del último bienio de primaria (de 9 a 11 años) y a los de todos los niveles de secundaria. Entre los profesores de la escuela obligatoria (todavía hasta los 14 años), faltando un Plan Nacional de Informática específico, se discutió sobre qué hacer en las horas de laboratorio, o sea, si enseñar a los chicos a ser usuarios del ordenador, trabajando con el material ya elaborado, o si enseñarles también a construir sus propios programas, y, en este caso, ¿en qué lenguaje?

Optamos por el Logo por diferentes razones:

- es un lenguaje menos artificial que el BASIC;
- crece con las habilidades del alumno;
- se adapta bien a la última etapa de la escuela primaria;
- nos parecía, y la práctica nos ha confirmado, que este lenguaje se adaptaba bien a trabajar contenidos geométricos de forma constructiva, como hacemos en clase siguiendo el método de Emma Castelnuovo;
- pudimos encontrar materiales e ideas, desde el clásico *Mindstorms* de Papert, una verdadera biblia

para todo «Logoista», hasta los más recientes trabajos del Forum de Logo en Internet. Siempre en Internet encontramos el *Turtle's Discovery* Book de J. Muller[1], que hemos traducido al italiano y que estamos utilizando como libro de texto para los trabajos en MSW Logo.

Los chicos que empezaron en primaria a trabajar con Logo no han ingresado todavía en el Liceo, así que es difícil comprobar si este trabajo ha servido de preparación previa al Pascal.

Lo que hemos podido comprobar es que, prácticamente, todos los alumnos han aprendido a construir procedimientos simples y algunos incluso más complicados, que implican un uso bastante complejo de las conexiones lógicas.

El laboratorio de informática ha sido utilizado por profesores de las diferentes asignaturas para desarrollar actividades con relación a los diversos programas didácticos.

El trabajo que vamos a presentar está desarrollado con relación a los contenidos del programa de matemáticas, durante dos meses, una hora a la semana, con un grupo de veintitrés alumnos de segundo de ESO que habían trabajado con Logo durante dos años.

En este artículo presentaremos dos ejemplos (el teorema de Pitágoras y máximo común divisor y mínimo común múltiplo) que nos parecen significativos de cómo usar el ordenador para tratar contenidos geométricos o aritméticos.

La actividad informática ha sido constantemente comparada con otro tipo de actividad de laboratorio matemático desarrollada con los alumnos en los años de ESO, o sea la que propone Emma Castelnuovo en toda su obra y, concretamente, en sus libros de texto que son utilizados en nuestra escuela.[2]

Objetivos

Además de querer reforzar y profundizar en el aprendizaje de los contenidos matemáticos, así como en los de informática, que resultarán evidentes en la explicación de la experiencia, nos importa subrayar cómo estos trabajos evidencian las diferencias que existen en la forma de trabajar del ordenador y la del ser humano. Esto comporta tener que modificar el propio modo de pensar cuando queremos que la maquina ejecute nuestras órdenes.

De hecho, nos parece que un importante, sino el principal, aspecto formativo que puede desarrollar el trabajo con ordenador en esta etapa escolar es el tener que buscar estrategias y contenidos alternativos.

...importa subrayar cómo estos trabajos evidencian las diferencias que existen en la forma de trabajar del ordenador y la del ser humano. Ésto comporta tener que modificar el propio modo de pensar cuando queremos que la maquina ejecute nuestras órdenes.

1 MULLER J. *Turtle's Discovery Book*, 76703.3005@compuserve.com

2 CASTELNUOVO E. (1989), *Numeri e Figure*, La Nuova Italia, 1.ª Edizone. CASTELNUOVO E. (1989), *Figure e Lettere*, La Nuova Italia, 1.ª Edizone.

Cómo comprobar la aplicación del Teorema de Pitágoras con MSWLogo

Prerrequisitos

Conocimiento de algunos contenidos del programa de geometría: clasificación de triángulos, teorema de Pitágoras, ángulos internos y externos, etc.

En el libro de Emma Castelnuovo ya mencionado, se proponen dos actividades con relación a los triángulos:

i) *Construir triángulos a partir de los lados*, sea dibujándolos con regla y compás, sea construyéndolos con tiras de cartón (figura 1).

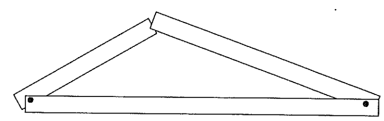

Figura 1

Se evidenciarán así dos importantes propiedades:

a) que para poder construir un triángulo de lados a, b y c, en que: $a > b > c$, se necesita que: $a < b + c$;

b) que, cumplida la condición a), existirá uno y sólo un triángulo con las medidas dadas, o sea que el triángulo es una figura indeformable: no se pueden cambiar los ángulos sin cambiar también los lados.

El modelo físico permite además que los alumnos manipulen la figura, apoyándola sobre diversos lados, trazando las alturas relativas, medianas, etc.

ii) *Construir triángulos isósceles de igual base.* A partir de una determinada base a, podemos aumentar los lados b y c para obtener triángulos obtusángulos, después rectángulos y finalmente acutángulos. (Será interesante hacer que los alumnos vean que existen infinitos triángulos obtusángulos y acutángulos, pero sólo un triángulo rectángulo isósceles de base *a*.) (Figura 2)

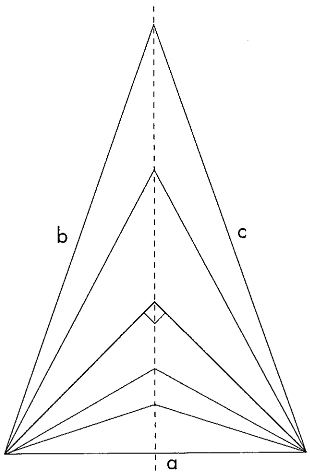

Figura 2

Si medimos *b* y *c*, podremos intentar comprobar el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Evidentemente, la fórmula resultará exacta sólo si se aplica al triángulo rectángulo, mientras que para los obtusángulos veremos que:

$$a^2 > b^2 + c^2$$

y que para los acutángulos:

$$a^2 < b^2 + c^2$$

Conocimiento de algunos elementos de geometría en el plano cartesiano

- Coordenadas de puntos.
- Medida de un segmento a partir de las coordenadas de sus extremos.

Actividad con el ordenador

El objetivo de la actividad con el ordenador será el intentar hacer las mismas cosas utilizando Logo.

Intentaremos construir un procedimiento en el que, introducidas las medidas de los lados, diga si existe un triángulo con esos lados, que lo dibuje y que lo clasifique.

Intentaremos construir un procedimiento en el que, introducidas las medidas de los lados, diga si existe un triángulo con esos lados, que lo dibuje y que lo clasifique.

Existencia del triángulo

Es la operación más fácil, y sólo es preciso introducir antes la medida de la hipotenusa y después las de los catetos. Veamos el código en Logo:

```
TO PITAGORAS :A :B :C
IF :A<:B+:C [PRINT [ESTE TRIANGULO ES IMPOSIBLE] STOP]
IF :A=:B+:C [PRINT [ESTE TRIANGULO ES IMPOSIBLE] STOP]
END
```

Dibujo del triángulo

Aquí empiezan los problemas. Para dibujar el triángulo sobre el papel, o sea sobre algo que se parece al plano euclídeo, utilizamos el compás. Desde los extremos de la base *a*, con radio *b* y luego *c*, se trazan dos arcos que determinan el tercer vértice del triángulo (figura3).

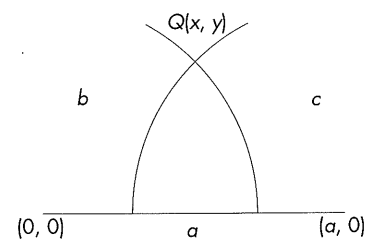

Figura 3

¿Cómo se pueden traducir estas instrucciones para el ordenador? Es fácil hacer que la tortuga de Logo vaya a los extremos de la base y que trace los dos arcos de radios *b* y *c* que se cortarán en el tercer vértice, pero ¿cómo hacer para que la tortuga reconozca este punto? Veamos, pues, cómo hacerlo:

```
TO CIRCULO :XC :RADIO
LOCAL "AMT
MAKE "AMT :RADIO*3.14159/180
PU SETX :XC
SETX XCOR-:RADIO SETH 0 PD
REPEAT 181 [FD :AMT RT 1]
PU SETX :XC PD
END
```

```
TO CONSTR :A :B :C
    CS HOME RT 90 FD :A
MAKE "XC 0 MAKE "RADIO :B
    CIRCULO :XC :RADIO
MAKE "XC :A MAKE "RADIO :C
    CIRCULO :XC :RADIO
    HT
    END
```

En nuestro trabajo sobre el papel, una vez encontrado el tercer vértice, podíamos trazar los lados del triángulo sin más. Pero, para que el ordenador cumpla la misma operación necesita saber dónde cae el punto.

En la figura ya hemos introducido el elemento que nos puede ayudar a definir la posición de todos los puntos del plano, o sea, las coordenadas.

De este modo, haciendo coincidir un extremo de la base con el origen de los ejes (0, 0), las coordenadas del otro extremo serán (*a*, 0).

Más difícil será que los alumnos puedan encontrar las coordenadas del tercer vértice, sin poseer unos cuantos elementos de álgebra y geometría analítica: ecuaciones de segundo grado, sistemas, ecuaciones de la circunferencia, etc., que nos permitirían trabajar de la siguiente manera. Partimos de la fórmula general:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

con x_0 e y_0 coordenadas del centro, y r radio de la circunferencia, tendríamos:

$$(x_Q - 0)^2 + (y_Q - 0)^2 = b^2$$

$$(x_Q - a)^2 + (y_Q - 0)^2 = c^2$$

de donde se obtiene:

$$x_Q^2 + y_Q^2 = b^2$$

$$x_Q^2 - 2ax + a^2 + y_Q^2 = c^2$$

Si de la segunda ecuación restamos la primer, nos queda:

$$-2ax_Q + a^2 = c^2 - b^2$$

con: $x_Q = (a^2 + b^2 - c^2) / 2a$.

Es evidente que muy pocos alumnos de 13-14 años comprenden este desarrollo matemático, así que no nos quedaría más opción que sugerirles qué fórmula tienen que utilizar en el procedimiento, sin explicarles cómo se obtiene algebricamente.

```
TO TRI³
MAKE "X (:A*:A+:B*:B-:C*:C)/(2*:A)
MAKE "Y SQRT (:B*:B-:X*:X)
SETXY :X :Y HOME
PRINT :X PRINT :Y
END
```

Si queremos que los alumnos entiendan todo el desarrollo del procedimiento, podemos intentar encontrar un modo más fácil para solucionar el problema.

Imaginemos que hacemos rodar el triángulo y lo colocamos con el lado menor como base, haciendo que un extremo coincida con el origen de los ejes (figura 4). Su otro extremo, P, tendría como coordenadas (b, 0). Si el triángulo es rectángulo, ¿cómo será el lado c respecto a la

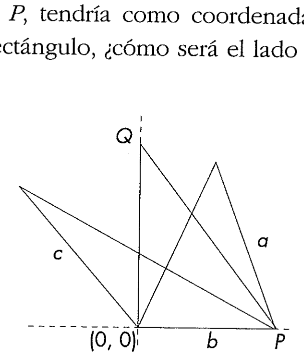

Figura 4

Más difícil será que los alumnos puedan encontrar las coordenadas del tercer vértice, sin poseer unos cuantos elementos de álgebra y geometría analítica...

3 El procedimiento TRI se debe colocar en el procedimiento COSTRI antes de END.

base b? O sea, ¿donde estará situado el tercer vértice, Q? ¿Qué pasará en el caso de que el triángulo sea acutángulo? ¿Y obtusángulo?

Será fácil descubrir que si el triángulo es rectángulo, el punto Q pertenece al eje OY, y por tanto su abscisa será: $x_Q = 0$.

Sin embargo, si el triángulo fuera acutángulo, el tercer vértice pertenecería al primer cuadrante, con $x_Q > 0$; y si por el contrario fuera obtusángulo, resultaría $x_Q < 0$.

Todavía queda el problema de encontrar el valor de x_Q.

Aplicando las fórmulas para determinar la longitud de los segmentos en el plano cartesiano, obtendremos:

$$c^2 = x_Q^2 + y_Q^2$$

$$a^2 = (x_Q - b)^2 + y_Q^2$$

de donde se obtiene:

$$c^2 - a^2 = x_Q^2 - 2x_Q b + b^2 + y_Q^2 - x_Q^2 - y_Q^2$$

o sea:

$$c^2 - a^2 = -2x_Q b + b^2$$

y por lo tanto:

$$x_Q = (b^2 + c^2 - a^2) / 2b$$

Nos parece interesante detenernos a reflexionar sobre algunas cuestiones que aparecen en el trabajo hecho:

i) Es evidente que la fórmula que al final hemos utilizado para encontrar x_Q es la misma en los dos casos, pero resulta muy diferente la manera de llegar a esta fórmula y los requisitos lógicos y matemáticos necesarios.

ii) El valor de y_Q no sirve para clasificar el triángulo, que sólo depende de si x_Q es mayor, igual o menor de 0. Calcularemos y_Q sólo para que el ordenador pueda dibujar el triángulo.

iii) Por lo dicho con relación al Teorema de Pitágoras, si el triángulo es rectángulo, entonces:

$$b^2 + c^2 - a^2 = 0$$

y, por consiguiente $x_Q = 0$.

Si el triángulo es acutángulo, entonces:

$$b^2 + c^2 - a^2 > 0$$

y, por consiguiente $x_Q > 0$.

Si el triángulo es obtusángulo, entonces:

$$b^2 + c^2 - a^2 < 0$$

y, por consiguiente $x_Q < 0$,

que es exactamente lo que teníamos que demostrar.

Traducir estas consideraciones en Logo no es difícil, y sólo se necesita algún cuidado en escoger los valores de *a*, *b* y *c* para que la figura resulte visible en la pantalla. Dado que los «pasos de la tortuga» son muy pequeños y la pantalla ocupa un espacio finito, para que el triángulo se pueda ver bien necesitamos que las medidas de los lados estén entre 50 y 300 pasos de tortuga.

En todo caso, presentamos aquí dos procedimientos: uno, más simple, requiere que el usuario utilice para las variables valores comprendidos entre dichos límites. El otro, un poco más complejo, transforma en escala las medidas introducidas y así funciona siempre.

```
TO TRI :A :B :C                                          para dibujar un triángulo de lados a, b y c
IF :A=:C+:B [PRINT [TRIANGULO IMPOSIBLE] STOP]           a tiene que ser < b + c, sino el triángulo
IF :A>:C+:B [PRINT [TRIANGULO IMPOSIBLE] STOP]           no existe
MAKE "X (:B*:B+:C*:C–:A*:A)/(2*:B)                       xQ = (b2 + c2 – a2) / 2b
MAKE "Y SQRT (:C*:C-:X*:X)                               yQ = c2 – xQ2
if :X=0 [PRINT [EL TRIANGULO ES RECTANGULO]]
IF :X<0 [PRINT [EL TRIANGULO ES OBTUSANGULO]]
IF :X>0 [PRINT [EL TRIANGULO ES ACUTANGULO]]
PU SETXY -100 0 PD RT 90 REPEAT 50 [FD 10 PU FD 10 PD]   instrucciones para dibujar el eje de las abscisas
PU HOME PD REPEAT 25 [FD 10 PU FD 10 PD]                 instrucciones para dibujar la rama positiva del
HOME PD                                                  eje de las ordenadas
SETXY :X :Y                                              traza el lado c
SETXY :B 0                                               traza el lado a
HOME HT                                                  traza la base y esconde la tortuga
END
```

```
TO TRI :A :B :C
IF :A=:B+:C [PRINT [TRIANGULO IMPOSIBLE] STOP]
IF :A>:B+:C [PRINT [TRIANGULO IMPOSIBLE] STOP]
MAKE "X (:B*:B+:C*:C-:A*:A)/(2*:B)
MAKE "Y SQRT (:C*:C-:X*:X)
IF :X=0 [PRINT [EL TRIANGULO ES RECTANGULO]]
IF :X<0 [PRINT [EL TRIANGULO ES OBTUSANGULO]]
if :x>0 [print [EL TRIANGULO ES RECTANGULO]]
MAKE "INCR INT (10000/:B)                    se calcula un valor para incrementar la medida de los lados
MAKE "INCR :INCR/100                         hasta que ronde los 100
PU SETXY -100 0 PD RT 90
REPEAT 50 [FD 10 PU FD 10 PD]
PU HOME PD REPEAT 25 [FD 10 PU FD 10 PD]
PU SETXY -100 -20 LABEL [ESCALA 1:]          debajo del triángulo se escribe la escala usada para dibujar la figura
SETXY -30 -20 LABEL :INCR HOME PD
MAKE "GRAN :X*:INCR MAKE «GRAY :Y*:INCR      grax y gray son los valores de xQ e yQ que se utilizan en el dibujo
SETXY :GRAX :GRAY
SETXY :B*:INCR 0   SETXY 0 0 HT
```

Cómo calcular el Máximo Común Divisor y el Mínimo Común Múltiplo

Prerrequisitos

Empezamos recordando los conceptos de Máximo Común Divisor (MCD) y Mínimo Común Múltiplo (MCM) entre dos números (por ejemplo: $A = 90$ y $B = 84$), ilustrándolos con un diagrama de Venn (figura 5)

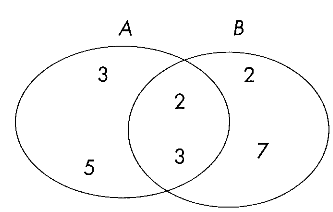

Figura 5

Aún sin haber hecho un trabajo particularmente minucioso sobre la teoría de los conjuntos, todos los alumnos podían entender que el MCD entre *A* y *B* era representado por la intersección de los conjuntos:

$$\text{MCD } (A, B) = A \cap B$$

Hemos recordado también cómo se hacía para encontrar el MCD y el MCM entre dos números y los conocimientos que se necesitan:

i) descomposición de los números en factores primos;

ii) criterios de divisibilidad;

iii) reglas del MCD (factores comunes con exponente mínimo) y del MCM (factores comunes y no comunes con exponente máximo).

Actividad con el ordenador

Nos preguntamos: ¿cómo se hace para que el ordenador aprenda estas cosas?

Algunas parecen fáciles, como los criterios de divisibilidad por 2 o por 5; otras pesadas, como poner en memoria los números primos hasta el 1000 (¿bastarán?); pero hay también cosas más complejas, como los criterios de divisibilidad por 3 o por 11.

Como muchas otras veces, nos encontramos con que los métodos que nos parecen fáciles resultan complejos para el ordenador, que, por el contrario, se encuentra a gusto con forma de operar que a nosotros nos parecen difíciles o largas y pesadas.

En nuestro ejemplo tenemos buena prueba de esto utilizando, para calcular el MCD, el método de las divisiones sucesivas.

Así que:

$$90 : 84 = 1, \text{ con resto } 6$$

Si el resto no es igual a 0, se continúa:

$$84 : 6 = 14 \text{ con resto } 0.$$

Esta vez el resto es igual a 0, y entonces el último divisor (o sea, 6) es el MCD entre 90 y 84.

Naturalmente los alumnos no habían visto nunca el algoritmo de Euclides, aunque algún texto lo explica, y se quedaron sorprendidos, como delante de algo mágico.

Comprobamos su utilidad en casos diversos, con $B \supseteq A$ o con $A \cap B = 1$, y después de haber explicado un poco de teoría.

No parece difícil construir un procedimiento para que el ordenador trabaje con este sistema, sólo necesitamos una instrucción para que se preste atención, no al cociente, sino al resto de la división.

Esto también les parece bastante raro a los chicos, a pesar de haber hablado de modularidad en diferentes ocasiones.

En todo caso, el hecho de que el ordenador tuviera una primitiva (REMAINDER) para esta operación, nos tranquilizó. Además, las instrucciones eran fáciles:

TO MCD :A :B	Para encontrar el MCD entre A y B
MAKE "R REMAINDER :A :B	se llama R el resto de A/B
IF R=0 [PRINT [MCD =] PRINT :B STOP]	si $R = 0$, imprime MCD = B y termina
MAKE "A :B MAKE «B :R	si $R > 0$, B se convierte en A y R en B
MCD :A :B	se repite hasta encontrar $R = 0$.
END	

El procedimiento es totalmente diferente al que utilizamos normalmente con papel y lápiz y evidencia los caracteres típicos del trabajar con ordenadores...

El procedimiento es totalmente diferente al que utilizamos normalmente con papel y lápiz y evidencia los caracteres típicos del trabajar con ordenadores:

a) la mecanicidad del método que hace desaparecer muchos conceptos como el de números primos, divisores, descomposición, factorización, etc.;

b) la recursividad que permite intentar y cambiar todas las veces que sean necesarias hasta que se compruebe la condición pactada;

c) la capacidad de autocorregirse: no importa si introducimos antes el número más pequeño. Por ejemplo:

   por $A = 84$ y $B = 90$, A / B = 0 con resto 84; entonces $A = 90$, $B = 84$ y todo empieza otra vez, pero correctamente.

Todavía tenemos que encontrar el MCM.

Esta vez a los chicos no le pareció tan fácil leer la solución en el diagrama de Venn (figura 6), aun después de haber calculado por el sistema tradicional el MCM = 1260.

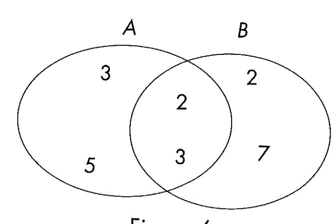

Figura 6

Intentamos entonces probar con otros números, más pequeños y con diferente relación entre ellos.

Números primos entre sí

Por ejemplo, si consideramos 12 y 25 (figura 7) el MCD es 1 y el MCM es

$$A \times B = 12 \times 25 = 300.$$

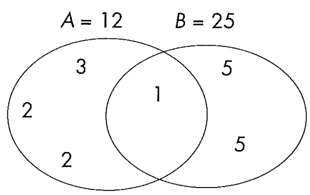

Figura 7

A *es submúltiplo de* B

En este caso, es claro que el MCD es A y el MCM es B. Por ejemplo, podemos tomar $A = 12$ y $B = 24$ (figura 8).

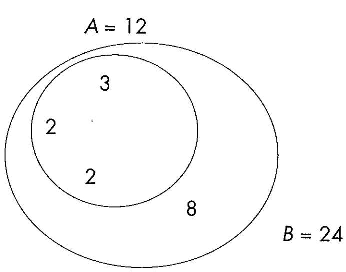

Figura 8

Hemos considerado dos casos extremos puesto que en el primero, el Máximo Común Divisor es el más pequeño posible y el Mínimo Común Múltiplo el máximo, mientras que en el segundo ocurre exactamente lo contrario, es decir, el MCD es el más grande y el MCM el mínimo.

A pesar de estos casos extremos, los alumnos tardaron bastante tiempo en encontrar una solución que relacionara ambos conceptos, y así poder aprovechar lo realizado para el MCD en el cálculo del MCM. Necesitaron de trasparencias de colores y muchos otros ejemplos, hasta que una chica tuvo la intuición correcta:

$$\text{MCM} = A \times B \,/\, \text{MCD}.$$

Traducirla en Logo fue entonces de lo más fácil, y pudimos además aprovecharnos de la que, probablemete, sea la característica más interesante de Logo: la modularidad, la cual nos permite utilizar varios procedimientos pequeños para construir un super-procedimiento. Así, pudimos escribir los dos siguientes conjuntos de instrucciones:

```
TO MCD :A :B
MAKE "R REMAINDER :A :B
IF R=0 [MAKE "MCD :B PRINT [MCD =] PRINT :B STOP]
MAKE "A :B MAKE «B :R     MCD :A :B
END

TO MCM :A :B
MCD :A :B
MAKE "MCM :A* :B/MCD
PRINT :MCM
END
```

Conclusiones

El trabajo presentado parece satisfacer los objetivos que nos habíamos fijado:

i) permite la profundización de los contenidos matemáticos;

ii) mantiene una metodología constructiva, no sólo para los contenidos geométricos, sino también cuando pasamos al álgebra o trabajamos con el ordenador;

iii) profundiza el aprendizaje del lenguaje informático y de unas habilidades lógicas;

iv) evidencia las diferentes formas en que trabaja la mente cuando debe comunicar con humanos y cuando debe dibujar procedimientos para el ordenador.

Es difícil comprobar la eficacia formativa de este tipo de actividad, puesto que una verificación directa, a través de un test que se limitara a comprobar habilidades aplicativas o imitativas, nos parece limitada y poco interesante.

En qué medida ha sido eficaz un trabajo de este tipo, si es que lo ha sido, se podrá saber sólo cuando esos alumnos, en los próximos años, intenten resolver una situación problemática en este modo.

Es difícil comprobar la eficacia formativa de este tipo de actividad, puesto que una verificación directa, a través de un test que se limitara a comprobar habilidades aplicativas o imitativas, nos parece limitada y poco interesante.

Guido Angelo Ramellini
Scuola Media Statale Italiana de Madrid
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»