SUMA 32
noviembre 1999, pp. 79-89

Algunas ideas para la resolución de ecuaciones

Javier Peralta

IDEAS Y RECURSOS

A pesar de la importancia que tienen las ecuaciones en el currículo de la Enseñanza Secundaria, por diversas razones –acaso la principal sea el efecto nocivo de rigidez mental ocasionado por el excesivo automatismo en la utilización de reglas–, el alumno no suele contar con muchos recursos para resolverlas. En este artículo se analizan las distintas causas, y se presentan otros procedimientos algebraicos y geométricos tomados de la historia de la matemática, junto a ciertas ideas que los complementan o generalizan.

EL PRESENTE TRABAJO, pensado en los últimos cursos de la Educación Secundaria, se ocupa de la resolución de ecuaciones. Por ello debemos de comenzar preguntándonos: ¿qué ecuaciones sabe resolver el alumno de este nivel educativo?

Evidentemente conoce, en primer lugar, los métodos de resolución de las ecuaciones de grados uno y dos (y de las reducibles a estas últimas, como las bicuadradas y ciertas irracionales). Seguramente haya oído hablar también del enunciado del teorema fundamental del álgebra, y acaso sepa, asimismo, que las posibles raíces enteras de una ecuación algebraica deben de ser divisores de su término independiente. Con la excepción hecha de las bicuadradas, sus recursos para resolver ecuaciones de grado superior a dos se reducen, pues, a la aplicación del último aserto para el cálculo de las raíces enteras y, a lo sumo, a la utilización del teorema de Bolzano para la aproximación de las restantes raíces reales.

La situación más frustrante sucede seguramente con las ecuaciones de tercer grado. Es probable que el alumno sepa que el número de raíces imaginarias –si existen– de una ecuación polinómica con coeficientes reales debe de ser un número par, de lo que se deduce que todo polinomio de grado impar con coeficientes reales tiene al menos una raíz real. Sin embargo, para hallar una raíz real de ecuaciones tan sencillas como la $x^3 + x + 1 = 0$, sólo dispone de las herramientas ya mencionadas: probar con 1 y –1 (que no son raíces) o tratar de obtener aproximaciones suyas «a ciegas», mediante la aplicación del teorema de Bolzano.

Estos son los motivos que nos han llevado a escribir este artículo, que empieza mostrando la fórmula de Cardano para resolver ecuaciones de tercer grado. Dicha fórmula, como es sabido, resulta poco operativa en el llamado *caso* *irreducible*, por lo que exponemos un procedimiento complementario, basado en la obra de Bombelli.

Tras hacer unas reflexiones didácticas sobre la resolución de ecuaciones y de apuntar algunas ideas en relación con ello, se indican algunos métodos gráficos para resolverlas. El más importante, sin duda, es el debido a Descartes, que reduce el cálculo de las soluciones de una ecuación de tercer o cuarto grado a hallar la intersección de una circunferencia con la parábola $y = x^2$; los restantes procedimientos que se presentan están inspirados en el mismo.

La ecuación de grado tres

Como ya se ha dicho, el alumno tiene muy pocos recursos para la resolución de las ecuaciones algebraicas, a pesar de haber sido de algún modo estudiadas, en muchos casos, a lo largo de cinco cursos en el plan nuevo (de 2.° de ESO a 2.° de Bachillerato) o en seis en el plan antiguo (de 7.° de EGB a COU). No sería sin embargo muy costoso informarle, en primer lugar, de los resultados existentes sobre las posibilidades de resolución y, en segundo, suministrarle la fórmula para la obtención de las raíces de la ecuación de grado tres. La demostración de esta última no es difícil, y puede recomendarse, por ejemplo (Dunham, 1992) a los alumnos interesados en conocerla.

Respecto a la primera de las cuestiones planteadas, convendría decir que existen procedimientos para resolver las ecuaciones de grados tres y cuatro por radicales, debidos principalmente a los algebristas del siglo XVI (Luca Pacioli, Tartaglia, Cardano, Bombelli, Vieta,...); y que no hay sin embargo ninguna expresión radical de los coeficientes de una ecuación de grado mayor que cuatro que proporcione las raíces de la misma (resultado obtenido por el noruego Abel en 1824). Esto es, que a pesar de haber fórmulas para la resolución de las ecuaciones de grados 1, 2, 3 y 4, no existen para las de grado mayor o igual que 5.

En cuanto a la resolución de las ecuaciones de grado tres, seguramente procede comenzar diciendo que su interés puede surgir de manera natural en el alumno con ciertas inquietudes matemáticas o, en todo caso, cabe ser fomentado fácilmente por el profesor. En efecto, parece obvio señalar que si el objetivo fundamental del álgebra en estos niveles es el estudio de las ecuaciones –especialmente las polinómicas–, y a lo largo de varios cursos únicamente se han conseguido resolver las de grados uno y dos o las reducibles a éstas, es lógico, para completar esta teoría, plantearse la posibilidad de hallar asimismo las soluciones de las ecuaciones de grado tres y, más tarde, las de grado superior.

Pero existen también otras razones de tipo histórico que animan a abordar la ecuación cúbica, alguna de las cuales se mencionan a continuación. En primer lugar hay que considerar que, entre la resolución de las ecuaciones de primer y segundo grado por Al-Khuwarizmi (siglo IX) y las de tercero por los algebristas del cinquecento, hubo de transcurrir un largo período de tiempo, debido a las dificultades –Luca Pacioli, por ejemplo, afirma que «es tan imposible su resolución en el estado actual de las cosas como la cuadratura del círculo»– y a los numerosos avatares que acompañaron su descubrimiento, lo que atestigua la trascendencia del hallazgo. En segundo, que fue precisamente del intento de hallar las soluciones de las ecuaciones de grado tres de donde surgieron los números complejos, como se verá más adelante. En tercero, la importancia histórica que ha significado la resolución de determinadas ecuaciones cúbicas, como la ecuación de Leonardo de Pisa (1225): $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ (Scheid, 1986), o, aún más, aquellas a las que quedaron reducidas algunos problemas clásicos de la geometría griega, como la trisección del ángulo ($4x^3 - 3x - \cos\alpha = 0$, siendo α en ángulo en cuestión) o la construcción del heptágono regular (Courant y Robbins, 1970), etc.

...fue precisamente del intento de hallar las solucione de las ecuaciones de grado tres de donde surgieron los números complejos

A la vista de tales argumentos parece que podría ser interesante, si hubiera tiempo para ello, tratar de ampliar de algún modo los conocimientos sobre este tema con la resolución de la ecuación de grado tres.

Sea:

$$X^3 + AX^2 + BX + C = 0 \quad (1)$$

(siempre podemos suponer que el coeficiente de X^3 es la unidad).

Evidentemente puede escribirse de la forma:

$$x^3 + ax + b = 0 \quad (2)$$

sin más que hacer $X = x - A/3$, por lo que es suficiente saber resolver esta última. Y la expresión que proporciona las raíces de (2) es la conocida *fórmula de Cardano*:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} \quad (3)$$

Ejemplo 1. Resolver la ecuación:

$$x^3 + x + 1 = 0$$

Resulta:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{27}}} = -0,68\ldots$$

Puede probarse que las otras dos raíces son imaginarias.

El «caso irreducible»

Queda sin embargo una laguna en la resolución de la ecuación cúbica: el llamado *caso irreducible*, que tiene lugar cuando aparecen radicandos negativos en las raíces cuadradas de la fórmula de Cardano; esto es, si:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 < 0$$

o lo que es lo mismo, si

$$4a^3 + 27b^2 < 0.$$

Ejemplo 2. La ecuación

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

tiene tres raíces reales:

$$4, \quad -2+\sqrt{3}, \quad -2-\sqrt{3}$$

sin embargo, al aplicar la fórmula de Cardano se obtiene:

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

expresión en la que quedan ocultas las tres raíces anteriores.

A partir de situaciones como la creada en este ejemplo, Bombelli inicia el cálculo con raíces cuadradas de números negativos, de manera muy similar a como se opera actualmente con números complejos, por lo que puede considerarse el precursor de los mismos. Como se señala en Etayo (1986), es curioso que su introducción surja al resolver ecuaciones de tercer grado, y no de segundo, que es la manera habitual de presentarlos. La causa estriba en que el caso irreducible de estas últimas es el correspondiente a la existencia de dos raíces no reales, que es interpretado entonces como que la ecuación no tiene soluciones; en la ecuación cúbica, sin embargo, el caso irreducible podría corresponder a tres raíces reales, aunque para su determinación mediante la fórmula de Cardano fuera necesario utilizar como intermediarios a los números complejos.

Bombelli inicia el cálculo con raíces cuadradas de números negativos, de manera muy similar a como se opera actualmente con números complejos, por lo que puede considerarse el precursor de los mismos.

Aunque el problema quedó definitivamente resuelto con el desarrollo de los números complejos y la posibilidad de manejarlos indistintamente en forma binómica o en forma polar, es indiscutible que para hallar las soluciones de la ecuación se precisan calcular raíces cúbicas de números complejos, lo que conlleva alguna dificultad; motivo que resta utilidad a la fórmula de Cardano.

No obstante, incluso el caso irreducible puede resolverse fácilmente en muchas ocasiones, como vamos a ver a continuación. Nos apoyaremos en buena parte en las mismas ideas que aparecen en el primero de los cinco libros de los que consta el *Algebra* de Bombelli.

Hagamos en primer lugar una observación. Es sencillo probar que:

$$\text{si } \sqrt[3]{m+ni} = p+qi \text{ entonces } \sqrt[3]{m-ni} = p-qi$$

(basta para ello con elevar al cubo), por lo que para hallar x en la fórmula de Cardano:

$$x = \sqrt[3]{m+ni} + \sqrt[3]{m-ni}$$

sólo se precisa calcular la primera raíz cúbica.

Si $\sqrt[3]{m+ni} = p+qi$, entonces $m + ni = (p + qi)^3$, e identificando el cuadrado de sus módulos: $m^2 + n^2 = (p^2 + q^2)^3$, por lo que $\sqrt[3]{m^2+n^2} = p^2$. De ello se deduce, evidentemente, que:

$$p^2 < \sqrt[3]{m^2+n^2} \qquad (4)$$

Por otro lado, si $m + ni$ tiene por módulo r y por argumento α, el módulo de sus tres raíces cúbicas es $\sqrt[3]{r}$ y el argumento, $(\alpha + 360°k)/3$, $0 \leq k \leq 2$. Si suponemos que $n > 0$, entonces $0 \leq \alpha \leq 180°$, por lo que el argumento de la raíz cúbica correspondiente a $k = 0$ cumplirá: $0 \leq a/3 \leq 60°$, y por lo tanto al menos una de sus raíces cúbicas se encuentra en el primer cuadrante.

Ahora bien, como:

$$m + ni = (p + qi)^3 = (p^3 - 3pq^2) + (3p^2q - q^3)i,$$

será

$$m = p^3 - 3pq^2 \qquad (5)$$

y según lo anterior: p > 0, por lo que:

$$p^3 > m \qquad (6)$$

Las relaciones (4), (5) y (6) permiten en muchas ocasiones hallar una de las raíces cúbicas de un número complejo: (4) y (6) para la determinación de p y, posteriormente, (5) para obtener q. Veámoslo en el caso que nos ocupa:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

correspondiente al Ejemplo 2.

Se debe cumplir que:

$$p^2 < \sqrt[3]{2^2+11^2} = 5, \text{ y que } p^3 > 2$$

Si hallamos las soluciones en las que p es un número natural distinto de cero, de la primera desigualdad se deduce que $p = 1$ o $p = 2$, y de la segunda, que $p = 2$. Como además $m = p^3 - 3pq^2$, será: $2 = 8 - 6q^2$, luego $q = 1$ (como $2 + 11i$ está en el primer cuadrante, una raíz cúbica suya también lo estará).

Una solución de la ecuación $x^3 - 15x - 4 = 0$, es por tanto:

$$x = \sqrt[3]{2+11i}+\sqrt[3]{2-11i} = (2+i)+(2-i) = 4$$

Dividiendo el polinomio por $x - 4$ se llega a una ecuación de segundo grado cuyas raíces son $-2 \pm \sqrt{3}$

El procedimiento descrito para el cálculo de la raíz cúbica de un número complejo puede incluso simplificarse si dicha raíz cúbica procede de la resolución de una ecuación de tercer grado mediante la fórmula de Cardano, como es el caso que nos ocupa.

En efecto, sea la ecuación (2), cuyas soluciones vienen dadas por (3), y se trata de hallar:

$$\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{m+ni} = p+qi$$

siendo:

$$m = -b/2 \quad y \quad ni = \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}$$

esto es:

$$n^2 = -\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3$$

La desigualdad (4) se convierte entonces en:

$$p^2 < \sqrt{m^2+n^2} = \sqrt[3]{-\left(\frac{a}{3}\right)^3} = -\frac{a}{3} \text{ y la (6) en } p^3 > -b/2$$

Se concluye por tanto que en el caso de resolución de la ecuación (2), la determinación de p puede hacerse a partir de las desigualdades: $p^2 < -a/3$ (4'), $p^3 > b/2$ (6'). El cálculo de q, una vez hallado p, se obtiene, como antes, de (5).

El procedimiento descrito para el cálculo de la raíz cúbica de un número complejo puede incluso simplificarse si dicha raíz cúbica procede de la resolución de una ecuación de tercer grado mediante la fórmula de Cardano

Ejemplo 3. Resolver la ecuación:

$$x^3 - 87x - 130 = 0.$$

Para resolver esta ecuación los alumnos deberían probar antes con los divisores del término independiente: ±1, ±2, ±5, ±10, ±13, ±26, ±65, ±130, para tratar de hallar las raíces enteras. Sin embargo, si se conoce la fórmula de Cardano, se tiene:

$$x = \sqrt[3]{65+\sqrt{-20164}}+\sqrt[3]{65-\sqrt{-20164}} = \sqrt[3]{65+142i}+\sqrt[3]{65-142i}$$

Para el cálculo de $\sqrt[3]{65+142i} = p+qi$ se busca en primer lugar un número natural p que verifique: $p^2 < 29$, $p^3 > 65$. De la primera desigualdad se obtiene que: $p = 1, 2, 3, 4, 5$, cuyos cubos son: 1, 8, 27, 64, 125; de la segunda se llega a que $p = 5$. Como $65 = p^3 - 3pq^2$, se tiene: $q = 2$.

En consecuencia:

$$x = (5 + 2i) + (5 - 2i) = 10.$$

Dividiendo $x^3 - 87x - 130$ por $x - 10$ se llega a una ecuación de segundo grado, cuyas raíces son $5 \pm 2\sqrt{3}$ Las raíces de la ecuación propuesta son, por lo tanto, 10, $5+2\sqrt{3}$, $5-2\sqrt{3}$.

Unas reflexiones didácticas

En ocasiones, el estudio de un determinado tema aparece disgregado en distintos lugares en los que se abordan diferentes aspectos del mismo; por ello es conveniente realizar una síntesis posterior para adquirir una visión más completa del problema y de sus resultados. Se trata, pues, de un mismo capítulo de la matemática pero que, por diversas razones, se aborda de manera fraccionada y que requiere por tanto volver a contemplar conjuntamente.

Un ejemplo de lo anterior sucede con las ecuaciones: aparece por un lado la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado; por otro, la factorización de polinomios; y en un lugar distinto los números complejos, que suelen introducirse con la resolución de ciertas ecuaciones, y donde frecuentemente se menciona el enunciado del teorema fundamental del álgebra y algunas propiedades en relación con las raíces imaginarias.

Otras veces se presenta, sin embargo, una situación en cierto modo inversa de la anterior, que tiene lugar cuando unidades temáticas independientes, pertenecientes incluso a distintas ramas de la matemática, se utilizan para intentar resolver un mismo problema desde diferentes ópticas y con técnicas diversas. Y esto ocurre, de nuevo, con la resolución de ecuaciones.

Por su propia naturaleza es lógico que las ecuaciones se aborden con procedimientos algebraicos, como así sucede, aunque también es normal que se usen otros medios, como por ejemplo, el teorema de Bolzano –perteneciente al análisis matemático– para la aproximación de raíces. Y este hecho no es excepcional, pues también la geometría, y de nuevo el análisis, son útiles para ello.

Como es sabido, efectivamente la geometría ha estado presente en la resolución de ecuaciones frecuentemente. Baste con citar al matemático árabe Al-Khuwarizmi, quien resuelve geométricamente ecuaciones de segundo grado, como aparece en su obra *Sobre el cálculo mediante la reducción y la restauración* (Boyer, 1986); o tener en cuenta que las identidades algebraicas que utiliza Cardano para la resolución de la ecuación cúbica (Dunham, 1992) están basadas en razonamientos geométricos, como así mismo ha sucedido durante muchos siglos con otras identidades.

En la línea de lo anterior hay que destacar también la importante contribución de Descartes, quien en su *Geometría* –último apéndice de su *Discurso del Método*– se ocupa de «cómo el cálculo de la aritmética se relaciona con las operaciones de la geometría»; es decir, se unifica el álgebra con la geometría, dando lugar al nacimiento de la geometría analítica. De esta manera, y mediante el empleo de coordenadas, se pueden trasladar determinados problemas geométricos al terreno algebraico, y recíprocamente, identificándose así curvas con ecuaciones.

no nos oponemos a que se traten de sistematizar ese tipo de problemas, pero sí a que se haga de forma inflexible, sin sugerir una reflexión previa anterior al inicio del camino

De esa identificación y de la evolución de las ideas del análisis matemático surge la teoría de funciones, que con la ayuda del cálculo diferencial completa el estudio de gráficas –que anteriormente se realizaba con el único soporte de la geometría analítica–, lo que permite investigar sus propiedades locales con el auxilio de los métodos infinitesimales. En las páginas siguientes, precisamente, abordaremos nuestro problema –la resolución de ecuaciones– ayudándonos de la geometría analítica y, en menor medida, del cálculo diferencial.

En otro orden de ideas, no podemos pasar por alto un hecho importante desde el punto de vista didáctico y que guarda cierta relación con el asunto que nos ocupa. Nos referimos a los trastornos que ocasiona en los alumnos el automatismo en la resolución de problemas; en nuestro caso, en lo que afecta al dibujo de gráficas de funciones, que será tratado a continuación.

No es infrecuente que los profesores, en el transcurso de la Educación Secundaria y con anterioridad al estudio de las aplicaciones del cálculo diferencial al dibujo de curvas, se limiten a representar solamente gráficas de rectas y parábolas -posiblemente debido al eterno problema de escasez de tiempo-, y excepcionalmente alguna otra cónica, cuando en realidad podrían haberse dibujado muchas otras. Tampoco es inusual, ni mucho menos, el que se aconseje seguir de forma automática una serie de pasos (hallar el dominio de existencia, los puntos de corte con los ejes, las asíntotas, los extremos locales, etc.) para el dibujo de la curva correspondiente, sin plantearse tan siquiera si en ciertas ocasiones no podría simplificarse este proceso.

Parece obvio señalar que no nos oponemos a que se traten de sistematizar ese tipo de problemas, pero sí a que se haga de forma inflexible, sin sugerir una reflexión previa anterior al inicio del camino. Es más, si tal reflexión se hiciera con carácter general, y no sólo en relación con cada problema concreto, se llegaría a la conclusión de que es posible dibujar –prácticamente sin tener que acudir al cálculo diferencial–, bastantes más funciones que las anteriormente citadas (Peralta, 1995).

Esta consideración debería de estar presente a lo largo de toda la enseñanza secundaria, para que el alumno, guiado por el profesor, fuera construyendo un catálogo de funciones de uso habitual en matemáticas y en otras ciencias. Nos referimos, además de las funciones elementales, como algunas polinómicas y de proporcionalidad inversa –a las cónicas en general–, a las funciones exponencial, logarítmica y circulares, junto a otras cuyas gráficas pueden ser deducidas fácilmente por procedimientos sencillos. Por ejemplo:

$$y = x^3,\ y = x^4, \text{ o más generalmente } y = ax^n + b$$

$$y = \frac{a}{x^n} + b, \quad y = \sqrt{x}, \text{ o mejor } y = \sqrt[n]{x} + K, \ldots$$

que pueden dibujarse con razonamientos muy simples, y que no creemos necesario reproducir.

Con la ayuda del dibujo de las gráficas de las funciones que hemos mencionado, de la geometría analítica y, en ocasiones, del cálculo diferencial, volvemos a dedicarnos al problema que nos ocupa: la resolución de ecuaciones, que trataremos de abordar con métodos gráficos.

Procedimiento gráfico para la resolución de ecuaciones de segundo grado

Aunque las ecuaciones de segundo grado son muy sencillas de resolver algebraicamente, también es fácil hacerlo por el método que se indica a continuación, y que servirá de pauta para su extensión a otras de grado superior en la sección siguiente.

Es evidente que para determinar las raíces de la ecuación de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (7),$$

se puede proceder hallando la intersección de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ con el eje X. Sin embargo, como para dibujar la parábola es necesario calcular los puntos de corte con los ejes, habría que haber resuelto previamente para ello la ecuación anterior.

Puede idearse no obstante un procedimiento muy sencillo para la resolución gráfica: si escribimos la ecuación de la forma $x^2 + px + q = 0$, con $p = b/a$, $q = c/a$, el problema queda reducido a dibujar la parábola $y = x^2$ y la recta $y = -px - q$, y hallar sus intersecciones.

Ejemplo 4. Resolver la ecuación:

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Se dibujan las funciones $y = x^2$, $y = x + 2$ (figura 1), y de su intersección resulta que las raíces son $x = -1$, $x = 2$.

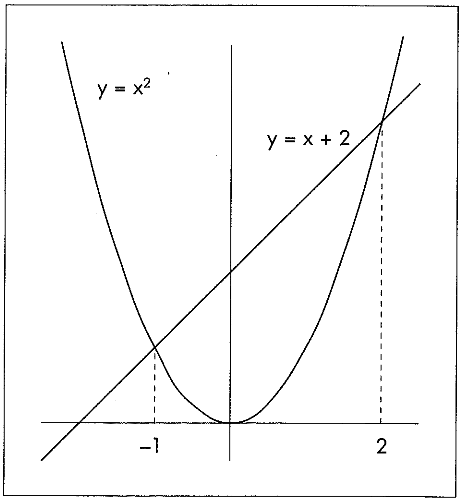

Figura 1

Ejemplo 5. Resolver la ecuación:

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Las gráficas de las funciones $y = x^2$ e $y = -x - 1$ no se cortan (figura 2), lo que significa que la ecuación propuesta no tiene raíces reales.

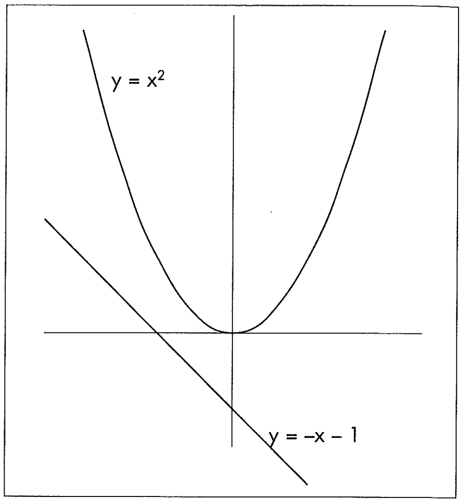

Figura 2

Evidentemente hay otras posibilidades de resolución gráfica de la ecuación (7). Por ejemplo, considerando que sus raíces son los puntos de intersección de la hipérbola $y = -c/x$ con la recta $y = ax + b$.

Ejemplo 6. Resolver la ecuación:

$$x^2 - x - 6 = 0.$$

Se consideran la hipérbola $y = 6/x$ y la recta $y = x - 1$ (figura 3), y se comprueba que se cortan en los puntos de abscisa -2 y 3, que serán las raíces de la ecuación propuesta.

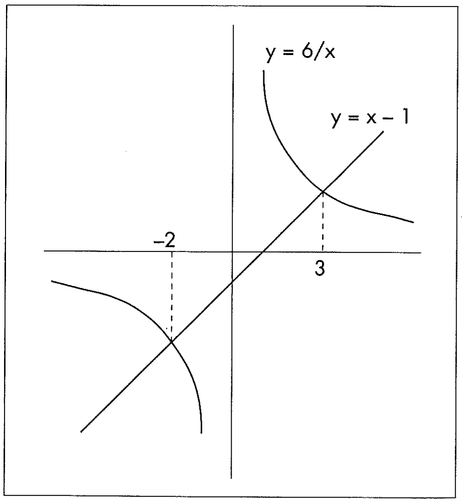

Figura 3

Extensión a otras ecuaciones de grado superior

Toda ecuación de tercer grado,

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (8)$$

puede escribirse de la forma

$$ax^2 + bx + c = -d/x,$$

lo que sugiere encontrar sus soluciones como intersección de las gráficas de las funciones: $y = ax^2 + bx + c$, e $y = -d/x$ (figura 4), perfectamente asequibles a alumnos de estos niveles.

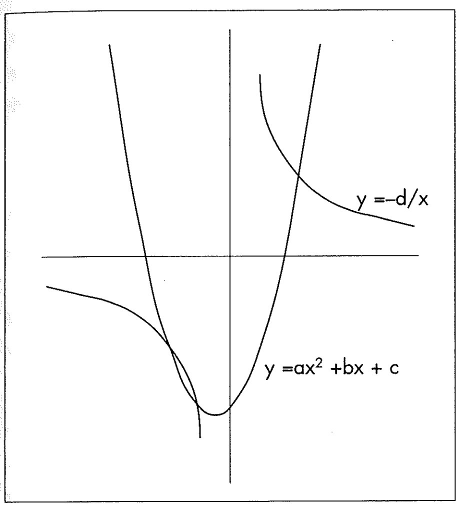

Figura 4

Esta idea es asimismo generalizable a ecuaciones del tipo

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + d = 0$$

cuyas raíces pueden hallarse como intersección de las gráficas de las funciones: $y = ax^2 + bx + c$, e $y = -d/x^{n-2}$.

Ejemplo 7. Resolver la ecuación:

$$x^6 + 2x^5 - 3x^4 + 3 = 0$$

Una vez comprobado que los divisores del término independiente no son raíces, se trata de utilizar el procedimiento anterior. Para ello se consideran la parábola $y = x^2 + 2x - 3$ y la curva de ecuación $y = -3/x^4$ (figura 5).

Como se cortan en los puntos de abscisas $x_1 \in (-3, -2)$, $x_2 \in (-1, 0)$, ésas son sus únicas raíces. Una vez que se ha detectado dónde se encuentran las raíces y que no son enteras, habrá que utilizar algún procedimiento de aproximación para hallar el número de cifras decimales deseables; por ejemplo, el teorema de Bolzano, el método de Newton, el de la *regula falsi* o el de iteración. Pensando en los alumnos a los que va dirigido este trabajo, emplearemos el primero de ellos.

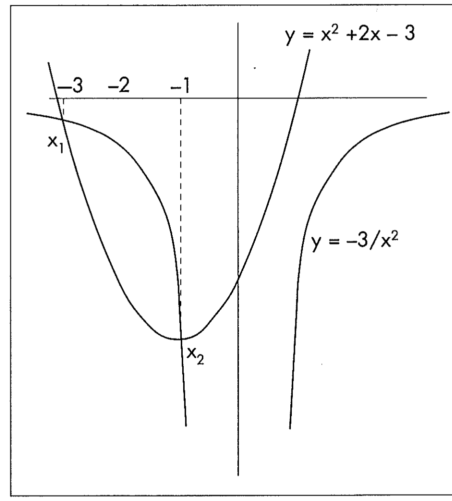

Figura 5

Como la función $f(x) = x^6 + 2x^5 - 3x^4 + 3$ es continua en cualquier intervalo cerrado, y $f(-3) > 0$ y $f(-2{,}9) < 0$, mientras que $f(-1) < 0$ y $f(-0{,}9) > 0$, las raíces son: $x_1 = -2{,}9\ldots$, $x_2 = -0{,}9\ldots$

También podemos escribir la ecuación de tercer grado (8) como:

$$x^3 = -\frac{1}{a}(bx^2 + cx + d)$$

lo que induce a considerar sus raíces como los puntos de intersección de las funciones:

$$y = x^3 \quad \text{e} \quad y = -\frac{1}{a}(bx^2 + cx + d)$$

cuyas gráficas deben de ser conocidas por los alumnos (figura 6):

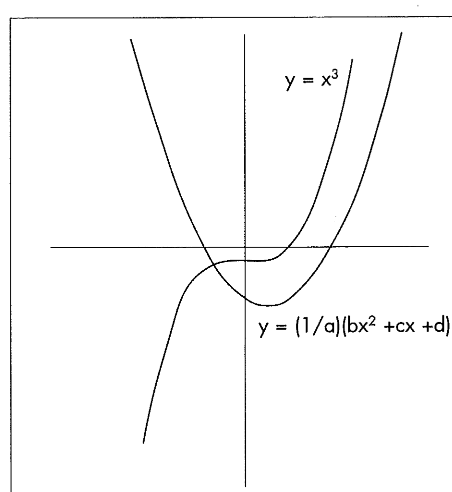

Figura 6

Asimismo este método puede generalizarse a las ecuaciones del tipo:

$$ax^n + bx^2 + cx + d = 0$$

cuyas raíces pueden encontrarse como los puntos de intersección de las gráficas de las funciones :

$$y = x^n \quad \text{e} \quad y = -\frac{1}{a}(bx^2 + cx + d)$$

Ejemplo 8. Resolver la ecuación:

$$4x^5 + x^2 + 4 = 0$$

Sus raíces son los puntos de intersección de las curvas cuyas ecuaciones son (figura 7):

$$y = x^5 \quad \text{e} \quad y = -\frac{1}{4}(x^2 + 4) = -\frac{x^2}{4} - 1$$

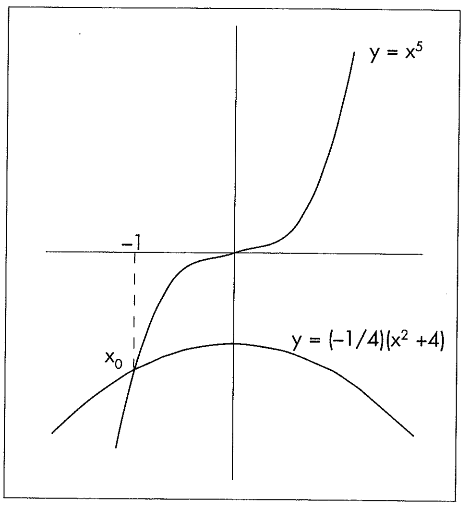

Figura 7

Se observa que únicamente tiene una raíz real x_0, y que $-2 < x_0 < -1$. Como $f(-1) > 0$ y $f(-1{,}1) < 0$, se deduce que $x_0 = -1{,}0\ldots$

Si quisiéramos otra cifra decimal, seguiríamos el mismo procedimiento: como $f(-1{,}04) > 0$, $f(-1{,}05) < 0$, entonces $x_0 = -1{,}04\ldots$; etc.

Método de Descartes para la resolución aproximada de ecuaciones de tercer y cuarto grado

Vamos a exponer a continuación el procedimiento utilizado por Descartes en su *Geometría* para calcular gráficamente las raíces reales de las ecuaciones de tercer y cuarto grado, y que consiste en hallar la intersección de la parábola $y = x^2$ con una circunferencia. Comenzaremos haciendo unas consideraciones sencillas relativas a las ecuaciones de grado n.

...el procedimiento utilizado por Descartes en su Geometría *para calcular gráficamente las raíces reales de las ecuaciones de tercer y cuarto grado, [...] consiste en hallar la intersección de la parábola $y = x^2$ con una circunferencia.*

Evidentemente siempre podemos suponer que el coeficiente de la máxima potencia de x es la unidad. Sea entonces la ecuación:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0 \quad (9)$$

Mediante el cambio de variable $x = y + k$, se tiene otra de la forma:

$$y^n + b_{n-1}y^{n-1} + \ldots + b_1y + b_0 = 0 \quad (10)$$

con $b_{n-1} = nk + a_{n-1}$, por lo que si elegimos $k = -a_{n-1}/n$ en el cambio indicado, se llega a una ecuación del tipo:

$$y^n + b_{n-2}y^{n-2} + \ldots + b_1y + b_0 = 0 \quad (11)$$

sin término en y^{n-1}.

Así pues, para tratar todas las ecuaciones de tercer y cuarto grado, es suficiente con estudiar las del tipo:

$$x^3 + ax + b = 0 \ (2)$$

y

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0 \ (12)$$

(a la primera parte de este resultado ya se había llegado en el apartado dedicado a la ecuación de grado tres).

Además, si multiplicamos los dos miembros de la ecuación (2) por x, se tiene una ecuación del tipo (12) con $c = 0$, y cuyas raíces, exceptuando a $x = 0$, son las de (12). Por tanto, para estudiar conjuntamente las ecuaciones de tercer y cuarto grado, es suficiente con considerar solamente las del tipo (12).

Sea ahora la circunferencia de centro el punto de coordenadas (p, q) y radio r:

$$(x - q)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

o bien desarrollando:

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 - r^2 = 0 \ (13)$$

Para hallar los puntos de intersección de dicha circunferencia con la parábola $y = x^2$, habrá que resolver el sistema formado por esta ecuación y la (13), que conduce a:

$$x^4 + (1-2q)x^2 - 2px + p^2 + q^2 - r^2 = 0$$

que es del tipo (12) con

$$a = 1 - 2q,$$
$$b = -2p$$
$$c = p^2 + q^2 - r^2$$

En consecuencia, para resolver la ecuación (12), dibujaremos la parábola $y = x^2$ y la circunferencia cuyo centro tiene por coordenadas p = –b/2, y q = (1–a)/2 y radio $r = \sqrt{p^2 + q^2 - c}$. Las abscisas de los puntos de intersección de ambas serán las soluciones de la ecuación propuesta.

Si $r^2 = p^2 + q^2 - c < 0$, significa que la ecuación no tiene raíces reales, lo que asimismo sucede si, una vez dibujadas la circunferencia y la parábola, no existen puntos de intersección.

En Peralta (1988) pueden verse algunos ejemplos de aplicación de este método, así como de los correspondientes al apartado siguiente.

Generalización del método de Descartes

Es evidente que las raíces reales de (2) pueden asimismo obtenerse como intersección de la recta $y + ax + b = 0$ y de la cúbica $y = x^3$, lo que nos sugiere utilizar ahora esta última curva en vez de la parábola $y = x^2$.

Asimismo, si en la ecuación de cuarto grado (12) hacemos $y = x^3$, queda:

$$ax^2 + xy + bx + c = 0$$

por lo que las raíces reales de (12) pueden hallarse gráficamente mediante la intersección de las dos curvas anteriores. La segunda de ellas, $y = -(ax^2 + bx + c)/x$ es una hipérbola, cuyo dibujo es asequible a los alumnos de los últimos cursos de Educación Secundaria (basta para ello con poco más que dibujar sus asíntotas: $x = 0$, $y = -ax - b$).

Este mismo procedimiento puede utilizarse para la resolución de ecuaciones de grados 5 y 6.

Sea la ecuación:

$$x^6 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \quad (14)$$

y hagamos $y = x^3$ en la misma. Se deduce que sus raíces pueden determinarse gráficamente como intersección de $y = x^3$ y de la cónica:

$$cx^2 + y^2 + axy + dx + by + e = 0 \quad (15)$$

Para la aplicación de este método, y teniendo en cuenta el nivel de los alumnos a los que podría dirigirse este trabajo, habrá que elegir cuidadosamente la ecuación para que la cónica resultante sea sencilla.

Si se tratara de una ecuación de quinto grado:

$$x^5 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (16)$$

multiplicaríamos por x, con lo que se convertiría en una del tipo (14) con $e = 0$. Una vez resuelta ésta tendríamos que excluir la raíz $x = 0$.

Para la aplicación de este método, y teniendo en cuenta el nivel de los alumnos a los que podría dirigirse este trabajo, habrá que elegir cuidadosamente la ecuación para que la cónica resultante sea sencilla. A diferencia de lo que sucedía con las ecuaciones de grado tres (que la curva en cuestión era una recta) y de grado cuatro (que era una hipérbola), ahora se desconoce qué cónica resultará, por lo que creemos que debe de limitarse a alguno de los siguientes tipos:

(i) elipse o circunferencia: $\dfrac{(x-p)^2}{m^2} + \dfrac{(y-q)^2}{n^2} = 1$

(ii) hipérbola: $\dfrac{(x-p)^2}{m^2} - \dfrac{(y-q)^2}{n^2} = \pm 1$

(iii) parábola: $(y-q)^2 = m(x-p)$ (El caso $(x-p)^2 = m(y-q)$ procede de la resolución de la ecuación de tercer grado $(x-p)^2 = m(x^3 - q)$, que ya ha sido estudiado).

(iv) Cónicas que una vez despejada la y den lugar a una curva sencilla que se pueda dibujar hallando sus elementos más significativos: máximos, mínimos, asíntotas, etc.

(v) Par de rectas reales, que pueden obtenerse identificando coeficientes.

El método empleado para la resolución gráfica de ecuaciones de grados 5 y 6 puede asimismo ser generalizado a otras de grado superior.

Si la ecuación es de grado par, el procedimiento es válido para ecuaciones del tipo:

$$x^{2n} + ax^{n+1} + bx^n + cx^2 + dx + e = 0 \quad (17)$$

ya que haciendo $y = x^n$ se obtiene la cónica:

$$y^2 + axy + by + cx^2 + dx + e = 0$$

Por tanto, bastará con dibujar ambas curvas y las abscisas de sus puntos de intersección serán las soluciones de (17).

Si la ecuación es de grado impar, el método se puede aplicar para resolver ecuaciones de la forma:

$$x^{2n-1} + ax^n + bx^{n-1} + cx + d = 0 \quad (18)$$

ya que multiplicando por x, resulta otra del tipo (17) con $e = 0$, de cuyas raíces habrá que excluir la $x = 0$.

Como ya se ha indicado, en Peralta (1988) pueden verse numerosos ejemplos correspondientes a este apartado y al anterior.

Resolución de otras ecuaciones no algebraicas

Las mismas ideas en las que descansa la resolución gráfica de ecuaciones polinómicas pueden ser utilizadas para intentar resolver otras ecuaciones trascendentes.

Si la ecuación $f(x) = 0$ puede ser expresada en la forma $g(x) - h(x) = 0$, su resolución se reduce a hallar los puntos de intersección de las gráficas de las funciones $y = g(x)$, $y = h(x)$. Ello es lo que trataremos de hacer en los siguientes ejemplos, en los que dichas funciones son fácilmente representables.

Ejemplo 8. Resolver la ecuación:

$$x - \cos x = 0.$$

Dibujamos las funciones $y = \cos x$, $y = x$ (figura 8), cuya intersección es el punto de abscisa x_0, que cumple que $0 < x_0 < p/2 < 1{,}57$.

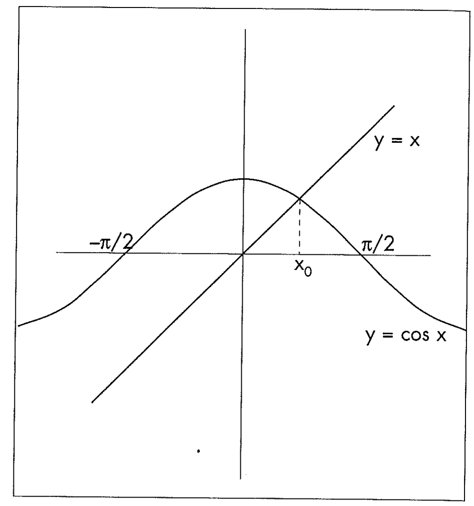

Figura 8

Para hallar alguna cifra decimal de la raíz, aplicamos el teorema de Bolzano a la función $f(x) = x - \cos x$, que es continua en todo R , y en particular en cualquier intervalo cerrado contenido en $[0, p/2]$. Con la ayuda de la calculadora se obtiene: $f(0{,}7) < 0$ y $f(0{,}8) > 0$, luego $x_0 = 0{,}7\ldots$; $f(0{,}73) < 0$ y $f(0{,}74) > 0$, luego $x_0 = 0{,}73\ldots$; etc.

Ejemplo 9. Resolver la ecuación:

$$xe^x - 2 = 0$$

La ecuación puede escribirse de la forma $e^x - 2/x = 0$, lo que induce a considerar las funciones: $y = e^x$, $y = 2/x$, y hallar sus puntos de intersección (figura 9).

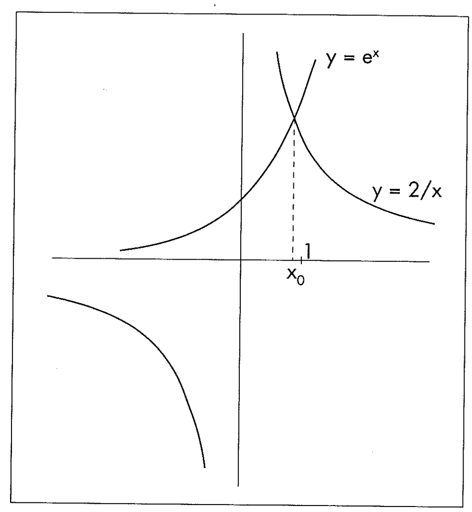

Figura 9

Se observa que existe una sola raíz x_0 en el intervalo $(0, 1)$. Al considerar la función $f(x) = xe^x - 2$ y aplicar el teorema de Bolzano, se deduce que $x_0 = 0{,}85\ldots$

Pueden existir otras formas de resolución gráfica, en el caso de haber distintas opciones en la elección de las funciones. Por ejemplo, si la ecuación se escribe $x - 2\cdot e^{-x} = 0$, la raíz viene dada por la intersección de las curvas $y = x$ e $y = 2\cdot e^{-x}$ (figura 10).

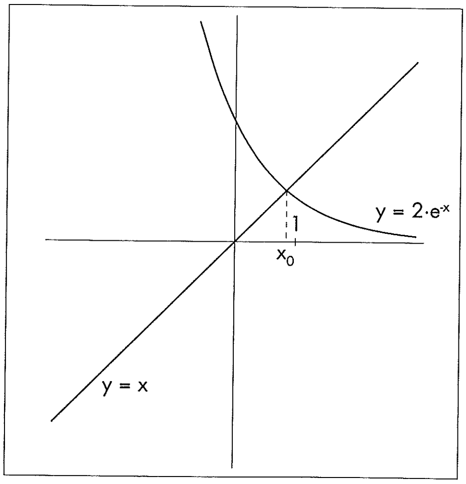

Figura 10

Ejemplo 10. Resolver la ecuación:

$$x + \frac{\log_{1/2} x}{x} = 0$$

Escrita así: $x^2 + \log_{1/2}x = 0$, el problema se reduce a hallar la intersección de las gráficas $y = -x^2$ e $y = \log_{1/2}x$.

En la figura 11 se observa que dichas gráficas no se cortan, por lo que la ecuación no tiene soluciones.

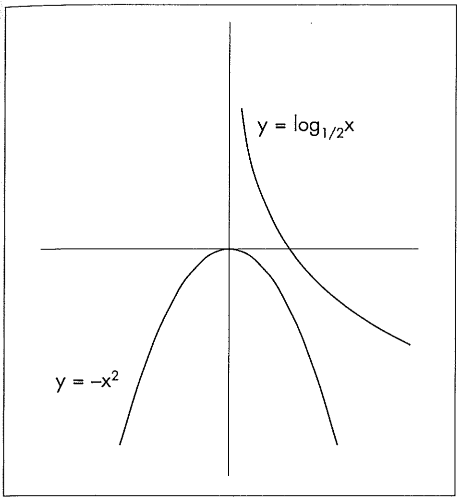

Figura 11

Observación final

Los métodos gráficos descritos a partir de la sección 5 de este trabajo no pueden ser considerados, desde luego, como la panacea universal para la resolución de ecuaciones. En efecto, es evidente que pueden presentar algunas dificultades en su ejecución, debido a los errores que acaso se produzcan en la representación de las curvas correspondientes y a los valores inexactos que pudieran aparecer en la determinación de algunos elementos de las mismas (por ejemplo, en el cálculo del centro o del radio de la circunferencia auxiliar que se menciona en la sección 7).

Dichos inconvenientes han sido, sin embargo, obviados en los ejemplos expuestos en el artículo, en los que se han elegido ecuaciones que no plantearan ese tipo de problemas. No obstante, el procedimiento es razonablemente preciso para determinar el número de raíces reales de la ecuación y separar las mismas con un aceptable grado de aproximación en aquellos ejercicios en los que sólo se necesiten utilizar gráficas de rectas, de circunferencias (cuyo radio y cuyas coordenadas del centro tengan valores sencillos), de las funciones $y = x^2$ o $y = x^3$, o de algunas otras que asimismo puedan dibujarse con bastante exactitud.

Además de resaltar la importancia histórica del método de Descartes (en el que de alguna forma se inspiran los restantes), nuestra intención –ya mencionada en cierto modo anteriormente– al presentar estos procedimientos de resolución gráfica ha sido la de tratar de animar al lector a buscar nuevos caminos para la resolución de ecuaciones; lo que por otro lado ha permitido también relacionar distintas ramas de la matemática. Hemos procurado en esta última parte del trabajo presentar, por tanto, un modelo más bien teórico –aunque de indudable utilidad en algunos casos– nacido de las ideas de Descartes, pero cuya fragilidad frente a los recursos que para ello ofrecen las calculadoras y los ordenadores es evidente.

Con todo, nos ha parecido saludable olvidar por un momento la existencia de los medios técnicos actuales para intentar, explorando viejos pasajes de la matemática, encontrar otras vías de solución.

Javier Peralta
E.U. de Formación
del Profesorado
Universidad Autónoma
de Madrid.
Sociedad «Puig Adam»
de Profesores de Matemáticas

Bibliografía

BOYER, C. B. (1986): *Historia de la Matemática*, Alianza, Madrid.

COURANT, R. y H. ROBBINS (1970): *¿Qué es la Matemática?*, Aguilar, Madrid.

DUNHAM, W. (1992): *Viaje a través de los genios*, Pirámide, Madrid.

ETAYO, J. J. (1986): «El álgebra del cinquecento», en *Historia de la Matemática hasta el siglo XVII*, Real Academia de Ciencias, Madrid.

PERALTA, J. (1988): «Resolución gráfica de ecuaciones algebraicas», *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, n.° 18, 31-48.

PERALTA, J. (1995): *Principios didácticos e históricos para la enseñanza de la Matemática*, Huerga y Fierro, Madrid.

SCHEID, F. (1986): *Análisis numérico*, McGraw-Hill, México.

Rectificación
Los autores del artículo «Aprovechamiento diáctico de la actividad "Fotografía y Matemáticas"», publicada en el n.° 31 de SUMA (pp. 97-104) han solicitado la inclusión en la Bibliografía de la referencia siguiente:
ALSINA, C., C. BURGUÉS, J.M. FORTUNY, J. GIMÉNEZ y M. TORRA (1996): *Enseñar matemáticas*, Graó, Barcelona.