SUMA 32
noviembre 1999, pp. 69-78

La transparencia de los hechos didácticos en la enseñanza de las matemáticas

Luisa Ruiz Higueras
José Luis Rodríguez Fernández

ARTÍCULOS

No hay verdades primeras. Sólo hay errores primeros... Una verdad sobre fondo de error. Esa es la forma del pensamiento científico.

GASTON BACHELARD

La construcción de la Didáctica de las Matemáticas como área de conocimiento científico trata de romper con la ilusión de transparencia que emerge del dominio de realidad configurado por los hechos didácticos. En este trabajo analizaremos la transparencia de los hechos didácticos a partir de diferentes investigaciones llevadas a cabo en esta área de conocimiento. En ellas se muestra cómo el análisis epistemológico de los objetos matemáticos de enseñanza es una condición necesaria para poder interpretar racionalmente los hechos y fenómenos didácticos.

TODAS LAS CIENCIAS del hombre, tales como la Sociología, la Economía, o la Didáctica de las Matemáticas sufren un efecto que el sociólogo Bourdieu (1973) denominó «ilusión de transparencia». Consiste en la creencia, en la mayoría de los casos ilusoria (de ahí su nombre), de que la génesis de los hechos y fenómenos, cuyo estudio tienen a su cargo, podría ser explicada mediante la «simple consideración personal» del investigador, apoyada en su intuición y en las experiencias perceptivas del propio entorno.

> La representación ilusoria de la génesis de los hechos sociales según la cual el científico podría comprender y explicar estos hechos «mediante el solo esfuerzo de su reflexión personal» descansa, en última estancia, sobre el presupuesto de la ciencia infusa que, arraigado en el sentimiento de familiaridad, funda también la filosofía espontánea del conocimiento del mundo social... (Bourdieu, 1973: 30)

Para Bourdieu (1973) el complejo entramado de la vida social debe explicarse, no por la concepción superficial que tienen los que en ella participan, sino por las causas profundas que escapan a la conciencia espontánea, sólo así, afirma, «se habrá roto con la ilusión de transparencia» (Bourdieu, 1973: 30).

Para acercarnos mejor a esta primera *ilusión de transparencia* que todos, en mayor o menor grado, hemos padecido, y no estamos libres de seguir padeciendo, nada mejor que observar uno de los ejemplos que propone el epistemólogo Bachelard (1983: 284-285):

> Desplazar un objeto situado sobre una mesa 20 cm es tarea simple, desplazarlo 1 cm, aún sigue siéndolo, desplazarlo 1 mm exige una intervención mucho más compleja y precisa una fatiga mayor... Mas este desplazamiento de 1 mm del objeto sobre la mesa no es todavía una operación científica. La operación científica comienza en el decimal siguiente. Para desplazar un objeto una décima de mm, hace falta un aparato y por añadidura un conjunto de oficios. Si finalmente se accede a las décimas siguientes, una centésima de mm, no sólo hace falta un aparato y una serie de oficios, sino además una teoría y, en consecuen-

cia, toda una Academia de Ciencias. El instrumento de medida siempre termina por proceder de una teoría, y ha de comprenderse que el microscopio es una prolongación del espíritu más que del ojo. De esta manera la precisión discursiva y social hace estallar las insuficiencias intuitivas y personales.

De este modo tan sencillo Bachelard nos hace reflexionar sobre la complejidad de los hechos que en apariencia podemos considerar como triviales.

Veamos otro ejemplo. A todos nos es conocida la ruptura científica que supuso en su tiempo la «revolución copernicana[1]», ya que desplazó la concepción geocéntrica del universo hacia la heliocéntrica. Representó la evolución de la ciencia; desde entonces, ya estaría marcada por la acción reflexionada y racional. Fue necesario que la rotación de la Tierra se convirtiera en un *hecho racional* para que fueran destruidas todas las pruebas de su inmovilidad suministradas por la experiencia común. El girar de la Tierra, en la concepción científica, fue antes una idea que un hecho.

El poeta Luc Decaunes lo ha sabido captar con la audacia de sus imágenes:

Sólo cuando Cristobal Colón descubrió América,
la Tierra convencida de que era redonda,
se puso por fin a dar vueltas. (Decaunes, 1958: 246)

Así pues, podemos considerar que una experiencia científica es una experiencia que contradice, en principio, la experiencia común.

En estos dos ejemplos se ha manifestado lo que Bachelard (1938) denomina el obstáculo epistemológico de la «experiencia básica». La realidad se manifiesta concreta, natural, fácil. No hay más que describirla. Se cree entonces que se la conoce. En todas las ciencias ha supuesto una gran dificultad abandonar la observación básica, explicar los fenómenos y despojar a la experiencia de sus caracteres «parásitos» y aspectos no significativos. En definitiva, borrar la ilusión de transparencia.

La ilusión de transparencia en los hechos didácticos

Todos conocemos la gran familiaridad que la sociedad, en general, tiene con los hechos didácticos: todo el mundo ha enseñado a alguien y, a su vez, ha aprendido de alguien. Se enseña a caminar, a subir las escaleras, a cocinar, a patinar, a cortar el césped, a montar en bicicleta, etc. Esta relación cultural con la enseñanza es eminentemente práctica: se basa en la receta, el truco, la astucia, la habilidad,... Supongamos que tuviésemos que arreglar una máquina averiada y llamásemos a un técnico. Si le pedimos que nos muestre aquello que ha debido reparar esperamos que nos ofrezca una breve información acompañada de unas indicaciones escuetas y precisas, nunca un largo y profundo discurso sobre la avería. Podemos, así, afirmar que, socialmente, existe una primera transparencia epistemológica sobre lo que podríamos llamar la enseñanza de los «saberes de lo cotidiano» que nos lleva a considerarla como un conjunto de episodios didácticos breves y desnudados de todo espesor significativo.

Esta transparencia, procedente de nuestro entorno socio-cultural se manifiesta cuando, con suma facilidad, damos una interpretación ingenua de todo el complejo entramado de los hechos didácticos, sobre todo cuando estos hechos se circunscriben a una institución de enseñanza, tan cercana a la sociedad, como es la escuela...

Esta transparencia, procedente de nuestro entorno socio-cultural, se manifiesta cuando, con suma facilidad, damos una interpretación ingenua de todo el complejo entramado de los hechos didácticos, sobre todo cuando estos hechos se circunscriben a una institución de enseñanza, tan cercana a la sociedad, como es la escuela y esto nos conduce, en numerosas ocasiones, a emitir juicios que corren el peligro de considerar diferente lo idéntico y de identificar lo diferente, de comparar lo incomparable y de omitir comparar lo comparable.

En este sentido Chevallard destaca, como una de las exigencias de todo trabajo científico, la ruptura de la *ilusión de transparencia:*

Para establecer y construir la ciencia en un dominio de realidad (en una realidad dada), es necesario romper con la *ilusión de transparencia* que nos hace ver la realidad como algo que es así, sin más ni más, como si aquello que tenemos ante nosotros se cayese por su propio peso. Es necesario, todo lo contrario, observarla como extraña. Conviene hacerla siempre problemática, verla siempre como un verdadero problema (o más bien como una matriz de problemas). Es necesario problematizarla. (Chevallard, 1991: 34)

Cabe señalar también que estamos bastante influenciados por la concepción tradicional positivista[2] de la ciencia que considera los hechos como datos y se limita a reinterpretaciones, a veces, inconsecuentes de la realidad. Esta concepción no asigna a la teoría otra función que la de representar la realidad, tan completa, sencilla y exactamente como sea posible, a través de un conjunto de leyes experimentales y, por tanto, despoja a la teoría de su función primordial, que es la de asegurar una ruptura epistemológica entre los hechos reales y la construcción puramente racional: anticipar resultados o bien concluir principios que expliquen las

1 Copérnico: físico-astrónomo polaco (1473-1543).

2 Sistema filosófico que admite únicamente el método experimental y rechaza toda noción *a priori* y todo concepto universal y absoluto.

contradicciones, incoherencias o lagunas que emergen de la realidad.

Así pues, debemos considerar que «todo proyecto de ciencia es una tentativa continuada de problematizar lo real; de hacerlo aparecer como problemático, es decir, causando problema. Toda ciencia, por ello, contradice la ilusión de transparencia que impregna nuestra relación cultural con el mundo» (Chevallard, 1994: 137).

Ilusión de transparencia y Didáctica de las Matemáticas

La Didáctica de las Matemáticas, según Bousseau (1986), debe huir de las tentaciones del empirismo. No puede ser una suma de pequeñas constataciones o de relaciones demostradas de modo esporádico, debe ser considerada como una ciencia que estudia la comunicación de los *saberes matemáticos* y cuyo fin es teorizar los objetos con los que trabaja. Para llevar a cabo esta tarea, considerada por Brousseau como un verdadero desafío, es necesario:

La Didáctica de las Matemáticas, según Bousseau (1986), debe huir de las tentaciones del empirismo. No puede ser una suma de pequeñas constataciones o de relaciones demostradas de modo esporádico, debe ser considerada como una ciencia que estudia la comunicación de los saberes matemáticos y cuyo fin es teorizar los objetos con los que trabaja.

- Dotarla de unos conceptos teóricos originales, propios de la Didáctica de las Matemáticas, que permitan poner en evidencia y explicar los fenómenos específicos que aparecen en la comunicación de los saberes matemáticos.
- Precisar los métodos de prueba específicos que utiliza para ello.

> Estas dos condiciones son indispensables para que la Didáctica de las Matemáticas pueda conocer de manera científica su objeto de estudio y pueda llevar a cabo acciones controladas sobre la enseñanza. (Brousseau, 1986: 6)

La construcción de la Didáctica de la Matemática como dominio científico trata, pues, de romper con la ilusión de transparencia del dominio de realidad configurado por los hechos didácticos. En esta construcción científica existen diferentes paradigmas, distintos modos de situarse ante esta ciencia. Los autores de este trabajo se encuentran más próximos a la denominada Didáctica Fundamental de la Matemática, tal como se entiende en la llamada «Escuela Francesa». Bajo este paradigma se está abordando una problemática global muy extensa desde el punto de vista racional y científico, cuyo objetivo es el estudio de las condiciones de producción y transmisión de los conocimientos matemáticos. Para ello se ha construido y se continua elaborando un corpus teórico riguroso y pertinente para estudiar los problemas didácticos.

Presentaremos una breve reseña de recientes trabajos de investigación en Didáctica de las Matemáticas que muestran, en diferentes niveles escolares, cómo se presentan situaciones que evidencian el fenómeno de *ilusión de transparencia* de los hechos didácticos.

¿Una noción que no necesita enseñanza? La enumeración de colecciones en la escuela infantil

Si bien las Matemáticas de la Educación Infantil y Primaria son matemáticas que se suelen calificar como «elementales», quisiéramos enfatizar que son ciertamente elementales, pero no en el sentido de *obvias y evidentes* sino en el de *primordiales y fundacionales*, ya que constituyen los fundamentos de lo que se ha de construir después. No es nada trivial, en efecto, el intentar definir el número natural, y mucho menos la actividad de contar o de medir, así como las relaciones entre ellas, por no decir las condiciones necesarias en las que se puedan realizar dichas actividades. Los fundamentos de las Matemáticas son altamente complejos, dejando de parecer triviales a partir del momento en que uno se para a analizarlos, a problematizarlos y reconstruirlos –condición necesaria para enseñarlos–. Sirva de apoyo el siguiente pasaje de Russell (1919):

> Lo mas fácil y claro de la Matemática no es aquello que aparece lógicamente en sus comienzos; es más bien lo que, desde el punto de vista de la deducción lógica, se presenta poco más o menos hacia la mitad. Así como los cuerpos que se ven con más facilidad no son los que están ni muy lejos ni muy cerca, ni los muy grandes ni los muy pequeños, así también los conceptos más fáciles de captar no son ni los demasiado complejos ni los excesivamente simples.

Una de las grandes preocupaciones de los didactas de la matemática, durante los últimos tiempos, ha sido el estudio de los conocimientos que los niños han de poner en funcionamiento en las actividades de construcción del número y de las operaciones aritméticas elementales. Se ha puesto de manifiesto en distintas investigaciones que, en determinadas ocasiones, el alumno, para llevar a cabo ciertas prácticas (sociales o culturales) tiene necesidad de movilizar conocimientos que no pueden ser objeto de enseñanza porque no se presentan bajo una forma cultural conocida. Muchas de las dificultades que aparecen en la construcción de los conocimientos numéricos son debidas a que se solicitan conocimientos al alumno que no están normalmente determinados, ni explicitados en los programas, ni designados por los profesores, tal es el caso de los conocimientos necesarios para llevar a cabo *la enumeración*[3] de colecciones.

Si nos detenemos en el algoritmo de contar, cuya enseñanza y aprendizaje se desarrolla en la educación infantil, sabemos que cualquier alumno para proceder al conteo de los elementos de una colección debe necesariamente:

1. Ser capaz de distinguir dos elementos diferentes en dicha colección, ya sea por un carácter distintivo o por su posición.
2. Elegir un primer elemento de la colección. Aplicarle una función de reconocimiento (identificación, denominación, comparación, confrontación,...).
3. Enunciar la primera palabra de la secuencia numérica («uno»).
4. Determinar el sucesor en el conjunto de elementos no elegidos anteriormente, controlando que es diferente del o de los precedentes.
5. Atribuir una palabra-número (sucesora de la precedente en la secuencia numérica).
6. Conservar la memoria de las elecciones precedentes.
7. Recomenzar los pasos 3 y 4 sincronizándolos.
8. Saber que hemos elegido el último elemento.
9. Enunciar la última palabra-número.

De entre los nueve puntos anteriores extraemos los siguientes:

1. Ser capaz de distinguir dos elementos diferentes de un conjunto dado.
2. Elegir un primer elemento de la colección.
4. Determinar el sucesor en el conjunto de elementos no elegidos anteriormente.
6. Conservar la memoria de las elecciones precedentes.
7. Recomenzar el paso 4.
8. Saber que hemos elegido el último elemento.

La actividad ejecutada por la puesta en práctica de estos seis puntos de modo sucesivo se denomina «enumeración», está definida perfectamente, podemos afirmar que no depende del número y, sin embargo, es necesaria para el procedimiento de contar los elementos de una colección.

Veamos los tres significados del término «enumeración» que distingue Brïand (1993: 37).

Supongamos el conjunto $E = \{a, c, d, e, f, g\}$ y una enumeración $E1 = \{d, g, a, c, e, f\}$ de dicho conjunto (figura 1).

- Desde el punto de vista matemático podemos distinguir:

  El resultado: Todo orden total sobre un conjunto finito determina una permutación.

En el medio escolar la actividad de enumeración está enteramente bajo la responsabilidad del alumno. La enumeración no está incluida en los contenidos de los programas escolares ni es señalada como necesaria por los profesores, de tal manera que podemos afirmar que constituye un «punto ciego» en el panorama escolar, ya que no existe como objeto de enseñanza.

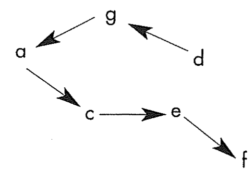

Figura 1

El algoritmo: Decimos que una enumeración de un conjunto finito es un algoritmo productor de una permutación en este conjunto.

- Desde el punto de vista didáctico podemos señalar:

  La actividad: La enumeración es la descripción de una actividad del alumno (lo que hace cuando enumera).

- Desde el punto de vista de los conocimientos puestos en juego:

  El conocimiento: La enumeración es un conocimiento productor de enumeraciones efectivas. Es un modelo implícito de acción, un conjunto de procedimientos locales puestos en juego por el alumno para realizar concretamente una enumeración.

En el curso de la escolaridad obligatoria, los alumnos deben pasar brutalmente de un control perceptivo de la enumeración de pequeñas colecciones de objetos mostrados, a un control mental y verbal de conjuntos cualesquiera.

En el medio escolar la actividad de enumeración está enteramente bajo la responsabilidad del alumno. La enumeración no está incluida en los contenidos de los programas escolares ni es señalada como necesaria por los profesores, de tal manera que podemos afirmar que constituye un «punto ciego» en el panorama escolar, ya que no existe como objeto de enseñanza. Sin embargo la actividad de enumerar aparece en muchas prácticas sociales y en diversas actividades matemáticas:

- en la construcción de los primeros números;
- en la construcción de las operaciones aritméticas;
- en la cardinación de conjuntos;

3 Enumeración: Expresión sucesiva de las partes de que consta un todo.

Enumerar una colección finita consiste en pasar revista a todos los objetos de esta colección una y sólo una vez. (*Diccionario de la Real Academia Española*)

- en todo el desarrollo de la combinatoria y la probabilidad.

Pero en todas ellas el objeto matemático que se pretende enseñar es otro bien distinto al de la enumeración. La comunidad matemática la ha hecho aparecer como una noción que no necesita enseñanza. Esto muestra una transparencia epistemológica.

Como han puesto de manifiesto investigadores en Didáctica de las Matemáticas, tales como, Berthelot (1993), Briand (1993), Salin (1993), las actividades de enumeración deben ser objeto de enseñanza en los primeros niveles de la escolaridad, antecediendo a las actividades de tipo numérico.

Actualmente estamos desarrollando, en el seno de varios grupos de trabajo de profesoras y profesores de educación infantil (CEP de Jaén, Linares y Úbeda), toda una ingeniería didáctica para abordar el aprendizaje de los conocimientos ligados a la enumeración de colecciones en la escuela infantil.

Semioticidad e instrumentalidad de las prácticas matemáticas escritas

En el desarrollo de las prácticas matemáticas escritas empleamos un sistema de grafías instrumentales que nos permiten operar –*aspecto instrumental*– y, al mismo tiempo, estos instrumentos, nos muestran las operaciones efectuadas y los efectos de estas operaciones –*aspecto semiótico*.

En un trabajo llevado a cabo por Mercier (1995) en el que se estudia la semioticidad y la instrumentalidad de las prácticas matemáticas escritas, este investigador analiza un debate entre dos profesores de educación primaria ante un hecho didáctico cotidiano: una tarea de simplificación de fracciones propuesta a los alumnos.

Simplificar la siguiente fracción

$$\frac{65}{91}$$

...las actividades de enumeración deben ser objeto de enseñanza en los primeros niveles de la escolaridad, antecediendo a las actividades de tipo numérico.

La tarea, según manifestaban los profesores, se podía abordar de dos modos distintos:

- descomponiendo los números que figuran en el numerador y en el denominador en producto de factores primos;
- encontrando un número a tal que satisfaga

$$\frac{65}{91}=\frac{65/a}{91/a}$$

La segunda modalidad la pueden ir acometiendo los alumnos usando la calculadora, por ensayo y error y, a los ojos de los profesores, este trabajo parece didácticamente mucho más provechoso, toda vez que «matemáticamente era igual una cosa que otra». Vemos en esta afirmación la existencia de una fuerte transparencia epistemológica por parte de los profesores, ya que la búsqueda de la visibilidad y eficacia de los gestos matemáticos de los alumnos les lleva a ocultar la verdadera estructura matemática de la tarea de simplificación de fracciones. Analicemos los dos casos:

El maestro que propone encontrar un número a, tal que satisfaga

$$\frac{65/a}{91/a}$$

manifiesta un gran interés en asegurar la *visibilidad de la acción del alumno*. Y, recíprocamente, el alumno que emplea la división por a, está *indicando la acción que ha llevado a cabo.*

La *visibilidad de la acción* ejecutada, junto con la *eficacidad didáctica* asignada por los profesores a este método hace que se utilice en clase, no para que los alumnos aprendan algo conceptualmente nuevo –la noción de fracciones equivalentes– sino para que, un conocimiento ya aprendido, la división, sea ahora técnicamente pertinente para el tratamiento de un problema nuevo: la simplificación de fracciones.

En el caso de la tarea llevada a cabo por medio de la descomposición en factores:

$$\frac{65}{91}=\frac{5\cdot 13}{7\cdot 13}=\frac{5}{7}$$

la visibilidad de la estructura matemática es superior, ya que en ella se muestra:

- La descomposición de un número en factores primos.
- Una técnica para simplificar una fracción: dividiendo sus dos términos por cualquier factor común.
- La equivalencia de fracciones: toda fracción es igual a todas las del mismo signo que tienen sus términos equimúltiplos[4] de los suyos; aunque no queda patente la descripción de la acción que ha de llevar a cabo el alumno para simplificar, como ocurría en el primer caso.

4 Si una fracción tiene sus términos primos entre sí, cualquier fracción igual a ella tiene sus términos equimúltiplos de los de ésta. (Rey Pastor, 1966: 174-175)

Vemos en este ejemplo cómo puede existir una transparencia epistemológica en los profesores, ya que el objetivo matemático no está sólo en producir alumnos que sean capaces de simplificar, sino en mostrar a los alumnos cómo la propiedad aritmética «anciana y sabia» de la descomposición de un número en sus factores primos (Grecia, s. v a. C) tiene una función mucho más noble (de rango superior dentro del trabajo matemático): la simplificación de fracciones. Por el contrario, si el acento se pone en la «eficacidad» didáctica: buscar la acción que produce una técnica eficaz, nos encontraremos sólo con una técnica de cálculo. Estas prácticas se pagan con una pérdida de la «matematicidad» de los gestos matemáticos. Se produce una auténtica «desmatematización» de las prácticas.

> Los «saber-hacer» enseñados a los alumnos se constituyen en emblemas de la socialización matemática del alumno, pero no serán para él saberes matemáticos de pleno ejercicio. Sólo se pueden considerar como objetos utilitarios. (Mercier, 1995: 150)

Esto nos muestra que existe en los profesores un proceso de transparencia que oculta la dialéctica que hay entre la *semioticidad* y la *instrumentalidad* de las prácticas matemáticas escritas. La escuela, normalmente, prima la instrumentalidad y trivializa la semioticidad.

...muestra que existe en los profesores un proceso de transparencia que oculta la dialéctica que hay entre la semioticidad y la instrumentalidad de las prácticas matemáticas escritas. La escuela, normalmente, prima la instrumentalidad y trivializa la semioticidad.

Los aprendizajes invisibles: Conservación de la información ostensiva

En el trabajo de Pascal (1980), y en el más reciente de Mercier (1992), se pone de manifiesto cómo los alumnos realizan «aprendizajes invisibles» en relación a la conservación de la información ostensiva de las escrituras matemáticas.

La institución escolar, ante las tareas de resolución de ecuaciones, presenta una serie de ecuaciones «normalizadas» y va indicando técnicas de resolución para cada una de ellas. Normalmente se presentan los casos siguientes:

$$ax + b = c,$$

$$ax - b = c,$$

$$ax = b$$

Existe un número muy elevado de alumnos que ante la tarea de resolución de la ecuación $8x(3x + 4) = 0$, proceden adecuadamente igualando a cero los dos factores $8x = 0$, $3x + 4 = 0$, pero mientras que la ecuación $3x + 4 = 0$ la suelen resolver correctamente:

$$3x = -4,\ x = -4/3$$

para la segunda ecuación ($8x = 0$) dan como resultado $x = -1/8$, o bien $x = -8$.

En la realización de tareas algebraicas la expresión $8x = 0$, no es más que un caso particular de la expresión $8x = a$. En ambas, el número 8 es un elemento ostensivo, es decir, un elemento que muestra al alumno una información precisa. Sin embargo la solución $x = 0$, que aparece para el caso en el que $a = 0$, niega toda información que procede del 8, puesto que $x = 0$ podría ser también solución de cualquier ecuación, tal como $5x = 0$, o bien

$$\sqrt{7}x = 0;$$

la solución correcta pierde toda la información ostensiva procedente de la ecuación inicial, entonces el alumno tiende a rechazarla en beneficio de una de las soluciones falsas $x = -8$ o bien $x = -1/8$ que conservan la información que proviene del 8.

Este ejemplo nos muestra cómo los alumnos realizan aprendizajes que son invisibles a la institución escolar y que escapan a la comunicación didáctica del profesor.

Este ejemplo también pone de manifiesto que las prácticas matemáticas escritas suponen la manipulación constante de «ostensivos».

> El trabajo matemático es un trabajo con ostensivos, son instrumentos de pensamiento: no hay pensamiento sin manipulación de ostensivos. (Bosch, 1994: 466)

Sin embargo, desde las instituciones escolares se tienden a primar los elementos no-ostensivos de la matemática (los conceptos) en detrimento de los ostensivos (gestos, grafismos, escrituras,...).

En este sentido Artigue (1989: 14) afirma que «el análisis didáctico debe ayudar al didacta a luchar contra la ilusión de transparencia de la comunicación didáctica inducida por la epistemología escolar y los conocimientos efectivamente construidos por el alumno».

Ilusión de continuum entre el conocimiento cotidiano y el conocimiento científico: la presentación ostensiva de los objetos matemáticos

Uno de los medios posibles que un profesor tiene para introducir un objeto matemático nuevo en el «universo del alumno» es la definición. Haciendo una simplificación epistemológica podemos decir que, en la práctica, estas definiciones se dan por «comprensión»[5] o por «extensión»[6]. No obstante, diferentes investigaciones en Didáctica de las Mate-

5 Comprensión: Conjunto de caracteres que son propios de un concepto.

6 Extensión: Conjunto de objetos concretos o abstractos a los que se aplica un concepto.

máticas han mostrado que existe una práctica de enseñanza muy extendida entre los profesores para introducir objetos matemáticos denominada «presentación ostensiva». No se trata de un dispositivo para la introducción teórica, sino de una serie de «prácticas didácticas».

Ratsimba-Rajohn (1977) fue el primero en identificar bajo el nombre de «introducción ostensiva» todo un conjunto de procedimientos didácticos que no pueden reducirse ni considerarse como una introducción por medio de definiciones.

En la escolaridad elemental, las figuras geométricas, tales como el triángulo, el cuadrado, el círculo, el rectángulo, etc. se suelen presentar a los alumnos de forma ostensiva. El profesor presenta su imagen, sin más. Suministra con sólo «un golpe de imagen» todos los elementos y las relaciones constitutivas de estos objetos geométricos. Estas figuras forman parte de la cultura cotidiana de los niños y rápidamente las reconocen y designan por su nombre. Ahora bien, cuando sea necesario utilizar triángulos o rectángulos cualesquiera, la ostensión fracasará, tan sólo se habrá alcanzado un éxito ilusorio, ya que este modo de presentación impide la generalización y abstracción. El alumno sólo podrá reconocer modelos muy particulares, estrechamente ligados a las figuras que le mostraron «por ostensión».

> La presentación por ostensión consiste en la utilización, en una situación de enseñanza, de la capacidad supuesta del alumno para percibir ciertos objetos y de la ilusión (que tiene el profesor) de que el hecho de que los haya percibido es portador de un conocimiento intelectual eventualmente general y preciso. (Bautier, 1988: 220)

Véase el ejemplo de la figura 2, extraído de un manual escolar.

Según muestran Berthelot y Salin (1992: 79) la geometría es el dominio de las matemáticas en el que más abundan las presentaciones ostensivas:

> El profesor presenta los conocimientos apoyándose sobre la observación dirigida de una realidad sensible o de una de sus representaciones y supone a los alumnos capaces de extender su empleo a otras situaciones.

Fíjate

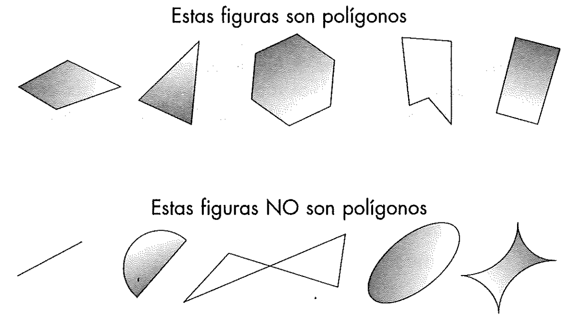

Figura 2. Tomada de Rico y otros (1990: 118)

De esta forma, la figura material se constituye en el mejor mensaje que se podría dar para presentar un objeto de enseñanza. Esta figura tiene el *status* de una aserción, reemplaza los enunciados, define los objetos matemáticos sin ambigüedad, porque se «supone» que todo el mundo los «verá» de la misma manera.

Fregona (1995) indica que la práctica didáctica de la ostensión tiene su causa en la ideología que se va configurando en los profesores a partir de una epistemología empirista, y constituye una respuesta adaptativa a las restricciones de la relación didáctica. Existe una «ilusión de evidencia», puesta de relieve por los profesores y por los autores de los manuales: se «muestra» y se espera que el alumno «vea». Ahora bien, «esto manifiesta una ilusión de *continuum* entre el conocimiento cotidiano y el saber científico» (Fregona, 1995: 101).

Suele ser una práctica económica y eficaz en la gestión de la enseñanza. Su bajo coste es lo que podría justificar el hecho de que su empleo sea tan reiterado en la enseñanza. Ahora bien, aunque la ostensión es uno de los útiles familiares, fáciles y persistentes de introducción de una nueva noción, se constituye en obstáculo didáctico para una fase de generalización.

...aunque la ostensión es uno de los útiles familiares, fáciles y persistentes de introducción de una nueva noción, se constituye en obstáculo didáctico para una fase de generalización.

La reducción progresiva de la densidad y la condensación de las formas del saber: economía del sistema didáctico

Cuando se procede a la organización de los objetos del saber matemático para introducirlos en el sistema de enseñanza, la tendencia que generalmente se sigue es la de minimizar el conjunto de objetos del saber presentes en la vecindad de un determinado objeto de enseñanza. Es el principio de economía de la estructuración didáctica. Existe una transparencia en la consideración de las condiciones y las perturbaciones que engendra todo saber en el ecosistema en el que se desea introducir. La materia enseñada en numerosas ocasiones es naturalizada[7], se llegan a

7 Naturalizar: Hacer que una especie animal o vegetal adquiera las condiciones necesarias para vivir y perpetuarse en un país distinto de aquél donde procede. (Diccionario María Moliner)

crear lenguajes matemáticos nuevos, creaciones léxicas endógenas al sistema didáctico.

> El trabajo transpositivo toma así, casi siempre, la forma consciente, deliberada, de una operación de «elementarización». Ahora bien, hablar de elementarización, considerando ésta como una operación esencialmente anodina es negar los fenómenos de la transposición didáctica y los cambios radicales que se realizan desde el punto de vista de la ecología del saber. (Chevallard, 1994: 160).

Para mostrar un caso de «elementarización» de un objeto matemático, en el que existe una reducción progresiva de la *densidad y la condensación de las formas didácticas del saber*[8], analicemos la denominada «resolución gráfica de ecuaciones».

Es cierto, como afirma Spivak (1978: 69), que si a un matemático se le mencionan los números reales es probable que, sin él quererlo, se forme en su mente la imagen de una recta. La «intuición geométrica» le permitirá interpretar proposiciones acerca de los números en términos de esta imagen y posiblemente incluso le sugerirá métodos para demostrarlas. Debido a esta imagen geométrica, al hablar de los números reales utilizamos frecuentemente la terminología geométrica: al referirnos a un número le damos el nombre de punto, al conjunto R lo denominamos recta real, etc. Sin embargo, este método de «dibujar» números es únicamente un método de representar ciertas ideas abstractas; las demostraciones del análisis matemático no se construirán sobre estas imágenes. La Matemática necesitó siglos para desprenderse del pesado lastre de la intuición geométrica y poder, así, construir lo que Weierstrass denominó la aritmetización del análisis.

> La edad del rigor había llegado ya, sustituyendo los viejos recursos heurísticos y las ideas intuitivas por una perfecta precisión lógica. En 1872 Weierstrass y Heine habían conseguido aritmetizar el análisis. (Boyer, 1986: 697)

Tanto los profesores como los manuales escolares, ante la tarea de resolución de ecuaciones, tratan de darle una mayor significación mediante la representación gráfica. Se trata de un recurso ostensivo que pretende mostrar de forma inmediata la significación del trabajo algebraico. En los libros de texto este trabajo recibe el nombre de *resolución gráfica de ecuaciones*.

Una vez presentado en los manuales el método de resolución algebraico que es complejo y abstracto, se presenta un nuevo método de resolución –el gráfico– que, por el contrario, es sumamente evidente, intuitivo, elemental. Podemos observar cualquier manual escolar para detectar estas características. En los ejemplos que proponen, normalmente, la función cuadrática presenta como puntos de corte con la recta real aquellos que tienen como abscisas exclusivamente números enteros. Se proponen al alumno como los únicos casos posibles, como si todas las ecuaciones se pudiesen resolver de ese modo. La materia enseñada se *naturaliza*. El trabajo transpositivo toma una forma consciente y deliberada de elementarización[9].

La «resolución gráfica de ecuaciones» permite a los profesores poner en práctica un contrato didáctico ostensivo en cuanto a la representación gráfica de funciones: [...] Esta utilización transparente y naturalizada del gráfico de funciones se constituye en un obstáculo didáctico.

8 Los objetos matemáticos viven en el sistema didáctico en una continua y constante interrelación de unos con otros formando conjuntos estructurados que pueden ser más o menos amplios. A estos conjuntos Aussude (1994: 140) los denomina «formas didácticas».

9 Transformar en obvio, evidente.

Esta presentación intenta reducir al mínimo la «densidad y la condensación de las formas didácticas del saber» (Aussude, 1994: 140). Esto implica una ilusión de transparencia en cuanto a la consideración del saber puesto en juego.

La pretendida «resolución gráfica de ecuaciones» surge así en el sistema didáctico como producto de una necesidad didáctica para dar significación a las prácticas algebraicas, pero se conduce a través de un proceso de economía didáctica que se refleja a través de una gran reducción de la densidad de los objetos del saber presentes:

- Los números racionales, irracionales, reales, no aparecen, su lugar es *económicamente ocupado* por los naturales.
- La representación de funciones se lleva a cabo a través de una muy particular tabla de valores formada solo por números enteros.
- Los puntos de corte de la parábola (o la recta) con el eje de abscisas nos ofrecen la solución de modo *inmediato y maravilloso.*

La elementarización y naturalización de un saber científico, como es en este caso el Teorema de Bolzano

> Si f(x) es continua en el intervalo cerrado a, b, y en los extremos toma valores f(a) y f(b) de signos opuestos, se anula por lo menos en un punto interior. (Rey Pastor, 1969: 396)

conduce a una presentación escolar ingenua y transparente.

La «resolución gráfica de ecuaciones» permite a los profesores poner en práctica un contrato didáctico ostensivo en cuanto a la representación gráfica de funciones:

> El lugar atribuido por el profesor al gráfico cartesiano está basado en una «falsa transparencia» de la representación gráfica, pero a su vez el gráfico sirve justamente para llevar a cabo la transposición didáctica de la noción de función. (Lacasta, 1995: 271)

Esta utilización transparente y naturalizada del gráfico de funciones se constituye en un obstáculo didáctico. Así se muestra en un trabajo de investigación llevado a cabo por Ruiz Higueras (1994,

1998) en el que más del 70% de los alumnos de bachillerato y COU a los que se propuso la siguiente tarea:

> Si tuvieses que explicar a un alumno de 1.° de BUP lo que es una función matemática, ¿qué le dirías?
>
> ¿Le indicarías algunos ejemplos?, ¿cuáles?
>
> ¿Le propondrías algún ejercicio, o algún problema, para que él lo resolviese? Indica alguno.

Propusieron como ejercicios la representación gráfica de funciones tales como

$$y = x^5 - 2x\sqrt{x-2}$$

cuya representación gráfica encierra una gran complejidad.

> Esto es debido a la transparencia epistemológica con que le son presentadas las representaciones gráficas de funciones, tanto por los manuales como por los profesores en el aula. Se reduce a una algoritmización: damos valores (naturales o enteros) a la variable independiente, obtenemos pares, los situamos en los ejes cartesianos e inmediatamente los unimos, obteniendo la gráfica de la función. Esto conduce a los alumnos a construir conocimientos excesivamente locales, que pueden ser correctos en ciertos límites, pero generalmente los alumnos ignoran la existencia de dichos límites. (Ruiz-Higueras y Rodríguez, 1996: 247)

Fuera de dichos límites, la naturalización de la representación de gráficos conducirá a los alumnos a cometer errores. Se constituirá en un obstáculo didáctico fruto de la reducción de la *densidad* y la *condensación* de las formas didácticas del saber. Esto hará que los alumnos, cuando estudien matemáticas superiores, corran el peligro de considerar las demostraciones matemáticas formales como inútiles, como algo gratuitamente añadido, ya que todo «se ve» y «se muestra» perfectamente en el gráfico.

Desde la institución escolar se vive la ficción de considerar los objetos de enseñanza como copias, si bien simplificadas pero *fieles*, de los objetos de la ciencia; ilusión de transparencia que ignora y que impide tomar consciencia de la distancia que separa la economía de los dos sistemas: el sistema científico-matemático y el sistema de enseñanza de las matemáticas.

...es preciso que estas investigaciones se realicen con una vigilancia epistemológica que ponga al descubierto los fenómenos de transparencia y, de esa manera, desechar los proyectos irreflexivos sobre la enseñanza que se inspiran en la creencia de que es posible cambiar a voluntad, cualquier relación didáctica...

Para ser conscientes de esta distancia, Artigue (1989) propone llevar a cabo un serio análisis epistemológico de los objetos matemáticos de enseñanza:

> El análisis epistemológico debe ayudar al didacta a desprenderse de la *ilusión de transparencia* de los objetos del saber que manipula y debe asimismo, ayudarle a liberarse de las representaciones epistemológicas erróneas que tiende a introducir en su práctica de enseñanza. (Artigue, 1989: 2)

Reflexión final

Dada la limitación de este trabajo, creemos que los casos que hemos presentado nos han permitido llevar a cabo una reflexión, desde la Didáctica fundamental de las Matemáticas, sobre la presencia del fenómeno de transparencia en diferentes hechos didácticos. Este tipo de análisis está muy distante de todo psicologismo y constituye un núcleo muy significativo en el ámbito de las investigaciones llevadas a cabo en nuestra área de conocimiento.

Quisiéramos, para terminar, recordar lo que Durkhein (1858-1917) consideraba a propósito de los hechos sociales y que bien puede iluminar nuestro camino en el análisis didáctico del saber matemático. Según Durkhein, la Sociología no pudo surgir hasta que no se aceptó que las sociedades están sometidas a leyes que se derivan necesariamente de su naturaleza y que, además, la expresan. Durante siglos los hombres han creído que en la sociedad todo podía ser arbitrario, contingente; que los legisladores o los reyes podían, como los antiguos alquimistas, cambiar el aspecto de las sociedades, hacerlas pasar de un modelo a otro; ilusión del tecnócrata que cree que puede cambiar las instituciones por decreto. En realidad, estos supuestos milagros eran ilusorios, y esta ilusión dio lugar a graves equívocos.

Han existido muchas resistencias para admitir que existen leyes y principios que analizan, estudian y modelizan el funcionamiento de la sociedad[10], pero lo mismo ocurrió con la economía e incluso con campos como la biología o la medicina donde su cumplimiento nos parece hoy incuestionable.

Podemos estar seguros que en nuestra ciencia –la Didáctica de las Matemáticas– van a existir los mismos prejuicios para su aplicación. Vamos a sostener durante bastante tiempo resistencias que sólo la investigación sobre los hechos didácticos podrá vencer.

Pero es preciso que estas investigaciones se realicen con una vigilancia epistemológica que ponga al descubierto los fenómenos de transparencia y, de esa manera, desechar los proyectos irreflexivos sobre la enseñanza que se inspiran en la creencia de que es posible cambiar, a voluntad, cualquier relación didáctica, sin tener en cuenta el conjunto de condiciones y restricciones que pesan sobre el sistema didáctico y, principalmente, aquellas que están íntimamente relacionadas con el saber puesto en juego: *con la matemática.*

10 A finales del siglo XVIII se comenzó a vislumbrar la idea de que el reino social tiene sus propias leyes, como los demás reinos de la naturaleza. Fue a comienzos del siglo XIX cuando Auguste Comte (1798-1857) en su *Cours de Philosophie positive* inició el estudio científico de la sociología. Fue el creador del positivismo y tuvo el mérito de ser el padre de la sociologia o «física social».

De este fenómeno de transparencia participan frecuentemente las instituciones periféricas del sistema de enseñanza (la «noosfera»[11]). Estas instituciones tienen normalmente un apetito insaciable de innovación con el que quieren cambiar la obsolescencia de viejas fórmulas que no tuvieron el éxito pretendido en la enseñanza. Dan normas generales que borran la especificidad de los saberes puestos en juego. Evidencian una ilusión de transparencia que contradice el espíritu científico.

El pensamiento racional científico, según Bachelard, sólo podrá avanzar con criterios que permitan rectificar y mejorar el pasado:

> El racionalismo es conciencia de una ciencia rectificada. (Bachelard, 1978: 117)

Ese es el objeto de nuestra ciencia y en ese camino estamos, desde diferentes paradigmas, desde diferentes escuelas de pensamiento, con diferentes metodologías, tratando de buscar la verdad, tratando de borrar la ilusión primera de transparencia que ofrecen los hechos didácticos.

El pensamiento racional científico, según Bachelard, sólo podrá avanzar con criterios que permitan rectificar y mejorar el pasado...

Referencias bibliográficas

ARTIGUE, M. (1989): «Epistemologie et didactique», *Cahier de DIDIREM*, 3, IREM, Université de Paris VII.

AUSSUDE, T. (1994): *Densité et condensation de les formes didactiques du savoir*, Centre National de Recherche Educative, Université de Paris VII.

BACHELLARD, G. (1978): *El racionalismo aplicado*, Paidós, Buenos Aires.

BACHELARD, G. (1983): *La formación del espíritu científico*, Siglo XXI, Buenos Aires (Edición original, 1948).

BAUTIER, T. (1988): *Recherches sur la perspective*, D.E.A., Bordeaux.

BERTHELOT, R. y M. H. SALIN (1993): *L'Enseignement de l'espace et de la geometrie dans l'escolarité obligatoire*, Thése, Bordeaux.

BORDIEU, P. (1973): *El oficio de sociólogo. Presupuestos epistemológicos*, Siglo XXI, México.

BOSCH, M. (1994): *La dimensión ostensiva de la actividad matemática*, Tesis doctoral, Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Barcelona.

BOYER, (1986): *Historia de las Matemáticas*, Alianza Universidad, Madrid (Edición original, 1968).

BRIAND, N. (1993): *L'Énumeration dans le mesurage des collections. Un dysfonctionnement de la transposition didactique*, Thèse de doctorat, Université de Bordeaux.

BROUSSEAU, G. (1986): *Théorisation des phénomenes d'enseignement des Mathématiques*, These de Doctorat d'Etat, Université de Bordeaux.

CHEVALLARD, Y. (1991*a*): *Aspects d'un travail de theorisation de la Didactique des Mathematiques. Etude du cas de l'algebre élémentaire*, Departament de Mathématiques, Université d'Aix Marseille.

CHEVALLARD, Y. (1991*b*): *La transposition didactique: Du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD, Y. (1994): «Les processus de transposition didactique et leur theorisation», en G. ARSAC, Y. CHEVALLARD, J. L. MARTINAND y A. TIBERGHIEN (eds.): *La transposition didactique à l'épreuve*, La Pensée Sauvage, Grenoble:

DECAUNES, L. (1958): *Les idées noires*, Seuil, París.

FREGONA, D. (1995): *Les figures plenes comme «mileu» dans l'enseignement de la geometrie: interactions, contrats et transpositions didactiques*, Thése de Doctorat, Université de Bordeaux

LACASTA, E. (1995): *Los gráficos cartesianos en la enseñanza secundaria: ilusiones y controles*, Tesis doctoral, Université de Bordeaux.

MERCIER, A. (1992): *L'éleve et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique*, Thése de doctorat, Université de Bordeaux.

MERCIER, A. (1995): «Le traitement public d'éléments privés du rapport des èléves aux objets de savoir mathématiques», en G. ARSAC, D. GRENIER y A. TIBERGHIEN (eds): *Les différents types de savoir et leus articulation*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

PASCAL, D. (1980): *Le probleme du zero, l'economie de l'echec dans la classe et la production de l'erreur*, DEA, Université de Bordeaux et d'Aix Marseille II.

RATSIMBA-RAJOHM, H. (1977): *Etude didactique de l'introduction ostensive des objets mathématiques*, Memoire de D.E.A., IREM de Bordeaux.

REY PASTOR, (1969): *Análisis matemático, vol. 1,* Kapelusz, Buenos Aires.

REY PASTOR, J. (1966): *Elementos de Análisis Algebraico,* Biblioteca Matemática, Madrid:

RICO, L. y otros (1990): *Matemáticas, 5.° de EGB*, Algaida, Sevilla.

RUIZ HIGUERAS, L. (1994): *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: Análisis epistemológico y didáctico,* Tesis doctoral, Universidad de Granada.

RUIZ HIGUERAS, L. y J. L. RODRÍGUEZ FERNÁNDEZ (1996): «The transformation of mathematical objets in the didactic system: The case of the notion of function», en L. PUIG y A. GUTIÉRREZ (eds.): *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, n.° 4, 243-251.

RUIZ HIGUERAS, L. (1998): *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico,* Servicio de Publicaciones e Intercambio Científico, Universidad de Jaén.

RUSSEL, B. (1919): *Introduction of mathematic philosophy*, George Allen & Unwin, Londres.

SPIVAK (1978): *Calculus*. Reverté, Barcelona.

11 En el sistema de enseñanza influye, lo que Chevallard (1991) denomina «noosfera» que comprende a personas tales como profesores, representantes de las asociaciones de padres, investigadores, autores de textos y materiales curriculares, políticos, administradores, etc.

Luisa Ruiz
Área de Didáctica
de las Matemáticas
Universidad de Jaén
José Luis Rodríguez
Instituto de Bachillerato
a Distancia
Jaén