SUMA 32
noviembre 1999, pp. 47-52

En el entorno de π a través de la sección áurea

José María Bosch Puchades

ARTÍCULOS

Mencionadas unas relaciones fortuitas o accidentales entre π y la sección áurea en textos de autores como Ghyka y Gieidon, se supone de gran interés una nueva conexión entre ambas constantes que permitirá una aproximación a π con un desfase de cienmilésimas, en una primera relación, y una segunda aproximación con un desfase de milmillonésimas.

EL NÚMERO π (3,14159265...) es, a finales del siglo XX, una constante matemática que ya ha desvelado sus misterios. Por fin, después de mantener en vilo el ingenio de los pensadores a lo largo de la Historia, las ciencias actuales han sido capaces de hacerlo encajar dentro de los esquemas matemáticos rigurosos. Ahora disponemos de los datos que podamos requerir sobre esta constante pero, obviamente, no siempre fue así.

Aún después de que Lindemann demostrara en 1882 que π era un número trascendente quedaba el reto de aproximarse, lo más posible, a su valor numérico. Los avances en el análisis matemático y en las series infinitas cercaron definitivamente al transgresor. Ya sólo faltaba dictar sentencia; pero de este trámite se ha encargado, sobradamente, la informática que, radicalmente, le ha dado nombre y apellidos con mil millones de dígitos.

Esto es así de rotundo pero no, por ello, quedan agotadas toda una serie de indagaciones que, en torno a esta constante, se pueden plantear y estudiar. Uno de estos recorridos de investigación es el de las aproximaciones a π desde expresiones finitas.

En la historia de las matemáticas se han escrito muchas páginas donde la razón de la circunferencia al diámetro era una sencilla fracción; bien, porque no se conocía dicha razón con más exactitud o, bien, por principios prácticos de aplicación. Así, por ejemplo, los pueblos de la civilización babilónica consideraban el diámetro como un tercio de la circunferencia y calculaban el área del círculo triplicando el cuadrado del radio. Arquímedes utilizó y legó la expresión 22/7 (= 3,1428...), pero demostró que π se encuentra en el intervalo [3,1408..., 3,1428...].

Las sucesivas generaciones satisfacían sus necesidades de cálculo en base a la aplicación de su fórmula particular; a veces con estimación del coeficiente de error, según su capacidad de precisión, y otras con menosprecio, o total indiferencia, del mismo.

El proceso de acercamiento al valor numérico de π constituyó una larga andadura. Probablemente, nuestros antepasados, a lo largo de muchos siglos, no necesitaron un conocimiento preciso de la relación entre el diámetro y la circunferencia y, tal vez, muchos pueblos, ni siquiera se lo plantearon.

Antecedentes: la fracción 355/113

El primer gran estratega que la Historia localiza es Arquímedes (287-212 a. C.). Barajó un error de diezmilésimas y empleó la fracción práctica que se menciona más arriba (22/7).

Una expresión admirable, y de gran precisión, es la que estableció el astrónomo chino Tsu Ch'ung-Chih (430-501). Sus cálculos le permitieron acotar la longitud de la circunferencia entre los valores 3,1415926 y 3,1415927.

En la obra *Experiencia matemática* (1982) de Davis y Hersh se incluye en el Apéndice A una *Breve cronología de la matemática china*. En dicha síntesis, que se extiende desde el año 300 a. C. hasta el siglo XVII, se recogen una docena de hitos históricos de aquella disciplina. Uno de éstos hace referencia a Tsu Ch'ung-chih (430-501), y a su obra, *Chiu-Shu* (*Arte de enmendar*), y a continuación, simplemente, anota una expresión que transcribimos:

$$\pi = \pm 355/113$$

En otros textos hemos averiguado más datos de este científico, pero ahora nos interesa el valor numérico de su fracción:

$$355/113 = 3{,}1415929203\ldots$$

Realmente el resultado es sorprendente al compararlo con π (= 3,1415926535...). Coinciden los 6 primeros decimales y el error unitario, por exceso, es de 8,49... cienmillonésimas.

Ciertamente Tsu Ch'ung-Chih marcó un hito en la matemática china. Pero también lo hizo en la cultura universal puesto que antes que él nadie se aproximó tanto a π y, posteriormente, tuvieron que pasar muchos siglos para llegar a resultados más precisos.

> Ninguna fracción cuyo numerador y denominador sean ambos números enteros puede ser exactamente igual a π, pero existen muchas fracciones sencillas que se aproximan sorprendentemente a él. La más importante fue descubierta por Tsu Ch'ung-Chih, famoso astrónomo chino, en el siglo V de nuestra era, adelantándose de ese modo más de mil años a los matemáticos del hemisferio occidental.

Este texto, del norteamericano Martin Gardner, pertenece a un artículo aparecido en *Scientific American* aproximadamente en 1960 y está incluido en una edición de 1972 de dicho autor.

Tsu Ch'ung-Chih marcó un hito en la matemática china. Pero también lo hizo en la cultura universal puesto que antes que él nadie se aproximó tanto a π y, posteriormente, tuvieron que pasar muchos siglos para llegar a resultados más precisos.

Hace unos seis años que descubrí, en el libro de Davis y Hersh, la fracción 355/113. Sobre ella he encontrado referencias como las que transcribo más arriba y otras que envuelven a dicha razón de un cierto halo místico: se configura con las parejas 11, 33 y 55, los primeros impares, etc.

Realmente, hace muy poco que he sido consciente de un significativo detalle: en un círculo de área equivalente a la unidad de superficie, las longitudes de la circunferencia y del diámetro son respectivamente 3,544907... y 1,128379... (unidades de longitud).

Si dichas cantidades las redondeamos, por arriba, a 3,55 y a 1,13, obtenemos los términos de la fracción de Tsu Ch'ung-chih automáticamente. Lo tremendamente casual es la semejanza de los errores relativos entre los valores redondeados y los reales: 0,00143651... para la circunferencia y 0,00143642... para el diámetro.

Por lo tanto, los términos de aquella fracción son la circunferencia y el diámetro aumentados, prácticamente, en la misma proporción, con lo que el resultado es, necesariamente, π con un desfase del mismo orden que el existente entre los errores relativos mencionados más arriba.

La sección áurea

Lo que han tenido siempre en común los matemáticos y los valores de aproximación a π que nos han legado es que nunca se ha hecho intervenir en los mismos a otra constante matemática conocida en ese momento histórico.

La novedad que justifica el presente trabajo es, precisamente, la incorporación de una constante mítica, tan especial como π, en las expresiones de aproximación y el grado de precisión de dicho acercamiento a su entorno.

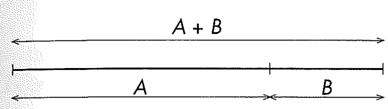
Se trata del número áureo (Φ):

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398\ldots$$

Es una expresión matemática que igual deja ver su sello en el hermetismo de las pirámides que aflora desde las regiones de la biología o la botánica.

El análisis de diversas proporciones del campo geométrico de las pirámides no deja lugar a dudas sobre la aplicación consciente de la sección áurea, por parte de los constructores egipcios, hace 4.500 años.

Dados dos segmentos desiguales, A y B, siendo el primero de ellos de mayor longitud, están en proporción áurea cuando la razón de A respecto de B es la misma que la de la suma de ambos segmentos, $A + B$, respecto al mayor, A (figura 1).



$$\frac{A+B}{A} = \frac{A}{B}$$

Figura 1. Segmentos en proporción aurea

Vamos a verlo en forma algebraica:

$$A/B = (A + B)/A$$

Si dividimos por B, el numerador y el denominador del segundo miembro, tendremos:

$$A/B = ((A/B) + (B/B)/(A/B)$$

Y puesto que A/B es la incógnita que queremos despejar, sustituiremos este término por x.

Así pues la ecuación quedará del siguiente modo:

$$x = (x + 1)/x$$

$$x^2 = x + 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

La solución positiva para esta ecuación de segundo grado es la siguiente:

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Respecto a dicho valor vamos a ver lo que dice Ghyka (1927):

Por su propia naturaleza, la sección áurea presenta automáticamente una continuidad de proporciones y una serie infinita de reflejos armónicos.

...tomamos como valor de la razón buscada

$$\frac{A}{B} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398875\ldots$$

que es un número algebraico inconmensurable, trivial a primera vista; pero que como vamos a ver en seguida, posee características casi únicas entre todos los números de esta clase.

Para manejarlo con más comodidad, lo designaré por la letra griega Φ, siguiendo el ejemplo de Mark Barr y Schooling, quienes (en los anexos matemáticos de *The Curves of Life* (Las Curvas de la Vida) de Sir Theodore Cook) fueron los primeros que lo afectaron de un signo propio.

Se tiene:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033\ldots$$

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0{,}618033\ldots$$

$$\Phi^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 2{,}618033..$$

Esta notable identidad de las cifras decimales de la fracciones indefinidas $1/\Phi$, Φ, Φ^2, resulta de la ecuación inicial

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

y de su variante (obtenida al dividir todos los términos por Φ):

$$\Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}$$

La sección áurea y π: afinidades

Vamos a exponer, en este apartado, una proximidad entre ambas constantes que mencionan en sus obras Ghyka y Giedion.

El primero de ellos dice:

Por lo que respecta al otro número, π, no hay entre él y Φ conexión íntima real (...) sino una afinidad que se podría llamar «accidental», que procede del hecho de ser

$4/\pi = 1{,}273\ldots$ $\qquad \sqrt{\Phi} = 1{,}272\ldots$

$(\pi/4)^2 = 0{,}617\ldots$ $\qquad 1 - \Phi = 0{,}618\ldots$

Esta coincidencia, puramente fortuita, hará que las construcciones arquitectónicas basadas en la sección áurea, puedan —en algunas de sus proporciones— evocar la razón de la circunferencia al diámetro (el número π) de un modo tan claro que inspire la tentación de interpretar en su trazado como un sutil ensayo de cuadratura del círculo.

Se refiere Ghyka a las «construcciones arquitectónicas» más características del antiguo Egipto, las pirámides, como veremos ahora.

Siegfried Giedion (1963) escribe:

Por su propia naturaleza, la sección áurea presenta automáticamente una continuidad de proporciones y una serie infinita de reflejos armónicos. M. Ghyka (1927) *ha estudiado las propiedades de la sección áurea más escrupulosamente que ningún otro* *investigador de hoy.* Esa continuidad infinita de proporciones relacionadas puede ser la razón por la cual las líneas y planos de la gran pirámide no dejan de revelar nuevos aspectos de la sección áurea.

(...)

Aquí sólo podemos aludir someramente a las relaciones de π con la sección áurea. Se ha discutido mucho acerca de hasta qué punto conocían los egipcios el valor de π, la relación entre la circunferencia y el diámetro de un círculo. Es evidente que, con su método de pensamiento, los egipcios lo expresarían solamente con una proporción, en forma de fracción. Puede afirmarse que «la relación del perímetro de la base de la gran pirámide con el doble de la altura es igual a π», y también que «la relación del área de la base con el área de la sección mediana es igual a π» (J. P. Lauer, 1948, Le *problème des pyramides d'Egypte*, París). *Al confirmar esto, Lauer añade la observación de un matemático, Paul Montel, quien dirigió su atención hacia una relación poco notada entre π y Φ:*

$$0{,}618 = 1/\Phi = (\pi/4)^2 = (3{,}1416/4) = 0{,}617$$

cerrando así, puede decirse, la cadena de relaciones.

Se ha discutido mucho acerca de hasta qué punto conocían los egipcios el valor de π, la relación entre la circunferencia y el diámetro de un círculo.

Aproximaciones a π/Φ^2

No conocemos ninguna publicación que haga referencia a una fracción, o relación, del tipo

$$\pi/\Phi^2$$

Lo más parecido a esta propuesta figura en las citas reseñadas más arriba y, realmente, distan mucho de esta opción.

Veamos su valor numérico:

$$\pi/\Phi^2 = 1{,}1999816148\ldots$$

La proximidad de esta razón al valor 6/5 (= 1,2) nos permite hacer otro planteamiento:

$$\pi/\Phi^2 = \pm\ 1{,}2$$

Nada nos impide que despejemos π en forma aproximada:

$$\pi = \pm\ 1{,}2\ \Phi^2$$

Y resulta:

$$\pm\ \pi = 3.141640786\ldots$$

que constituye nuestra primera aproximación a π y que llamaremos «$\pi[1]$».

$$\pi[1] = 1{,}2\ \Phi^2$$

$$\pi[1] = 3{,}141640786\ldots$$

Al error unitario entre π y $\pi[1]$ lo llamaremos E[1]:

$$E[1] = 0{,}00001532\ldots$$

En función del valor aproximado de π que acabamos de definir, $\pi[1]$, es obvio que, partiendo de un *círculo de área unidad*, podremos determinar un cuadrado de área próxima a la unidad de superficie y un segmento cuya longitud se aproximará, también, a su unidad.

Veamos la construcción geométrica de la figura 2.

Hacemos corresponder el *área unidad* con la superficie del círculo.

La superficie del cuadrado circunscrito, *Scc*, por definición, es la siguiente :

$$Scc = 4/\pi \text{ (unidades de superficie)}$$

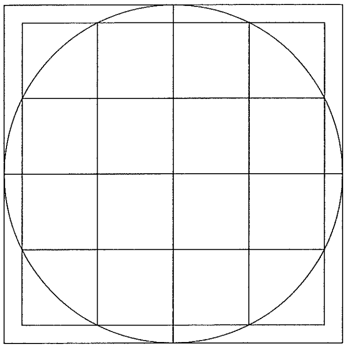


Figura 2

Si sustituimos π por su valor aproximado $\pi[1]$

$$\pi[1] = 1{,}2\Phi^2$$

tendremos :

$$Scc = \pm 4/1{,}2\Phi^2 \text{ (unidades de superficie)}$$

Conclusión: si multiplicamos el cuadrado circunscrito al círculo de área unidad por el valor $1{,}2\Phi^2$ obtendremos un cuadrado cuya superficie se aproximará a cuatro veces la unidad de superficie. El error relativo, por exceso, será E[1] = 0,00001532...

Vamos a construir de una forma más simple dicho cuadrado de área próxima a la unidad.

Volvemos a la figura 2 para analizar el entramado o cuadrícula de 16 pequeños cuadrados insertados en el círculo.

La superficie de uno de estos cuadrados es $0{,}2/\pi$.

La circunferencia coincide en 8 puntos con 8 vértices de dichos cuadrados. La construcción es inequívoca y la razón del lado del cuadrado circunscrito a la suma de cuatro lados de estos cuadrados es la siguiente :

$$Razón = \Phi - 0{,}5$$

$$Razón = 1{,}118033988\ldots$$

En la figura 3 se ha remarcado un cuadrado en el que se establece que su área es 0,6666768… (unidades de superficie). Es decir, 2/3 de la unidad aproximadamente.

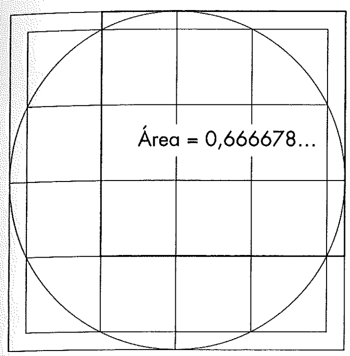


Figura 3

La razón de este cuadrado de área 0,6666768… (unidades de superficie) y el cuadrado circunscrito al círculo de área unidad es $\Phi^2/5$ (= 0,523606797…).

No se incluye la demostración de este hecho puesto que es una simple comprobación geométrica.

La construcción del cuadrado de área próxima a la unidad es inmediata y la vemos en la figura 4.

El cuadrado *CDEF* tiene un área próxima a la unidad de superficie, con un error relativo E[1] = 0,00001532…

A esta superficie (del cuadrado) la denominaremos A[1] y su valor es:

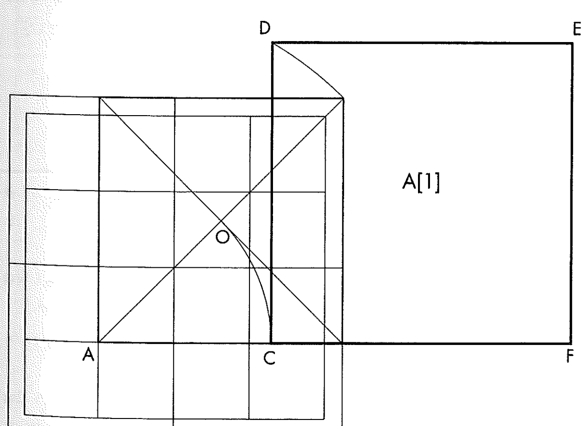


Figura 4

Es lógico que este entramado no dejara de darnos sorpresas en cuanto a la configuración de segmentos interesantes.

$$A[1] = 1{,}2\Phi^2/\pi$$

$$A[1] = 1{,}00001532\ldots \text{(unidades de superficie)}$$

Es lógico que este entramado no dejara de darnos sorpresas en cuanto a la configuración de segmentos interesantes.

En la figura 5 la razón de la recta *OF* respecto a la unidad de longitud, se aproxima a la inversa de la sección áurea.

$$OF = 0{,}618038723\ldots \text{ (unidades de longitud)}$$

$$1/\Phi = 0{,}618033989\ldots$$

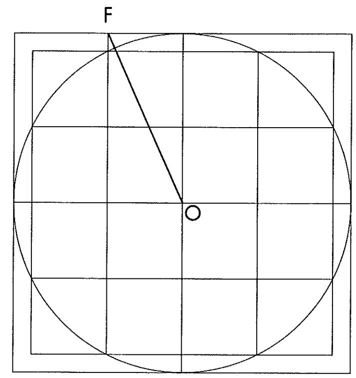


Figura 5

Vemos que este segmento es la hipotenusa del triángulo formado por el radio del círculo unidad y el lado del cuadrado de área «0,2π».

El desfase, por exceso, de esta longitud respecto a la inversa de la sección áurea, presenta un error relativo equivalente a la raíz cuadrada de E[1]; obviamente hemos pasado de magnitudes de dos dimensiones (áreas) a una magnitud de una dimensión (longitud):

$$\sqrt{E[1]} = 0{,}00000766\ldots$$

La determinaci n de la longitud pr xima a la unidad es una construcci n geom trica simple a la que llamaremos L[1]. Basta con multiplicar el segmento *OF* por la sección áurea.

$$L[1] = 1{,}00000766\ldots \text{ (unidades de longitud)}$$

Segunda aproximación a π

Hay una segunda aproximación a π, que llamaremos $\pi[2]$, de mucha más precisión, y que resulta de matizar aquella primera expresión.

$$\pi[2] = \left(\frac{1{,}2\Phi^2\sqrt{4{,}5}}{3{,}76}\right)^2$$

$$\pi[2] = 3{,}141592684\ldots$$

La razón entre este valor y π es:

$$\pi[2]/\pi = 1{,}00000000995\ldots$$

Se trata de un desfase del orden de las milmillonésimas o de, prácticamente, una cienmillonésima.

Esta circunstancia se deriva de una curiosa propiedad. La *diagonal* del cuadrado circunscrito al círculo de área unidad, cuando es afectada por determinados factores, que sean función del cuadrado de la sección áurea, Φ^2, presenta unos valores con varias cifras periódicas.

En la figura 6 el segmento *B'F* tiene el valor

$$B'F = 0{,}8355555597\ldots \text{ (unidades de longitud)}$$

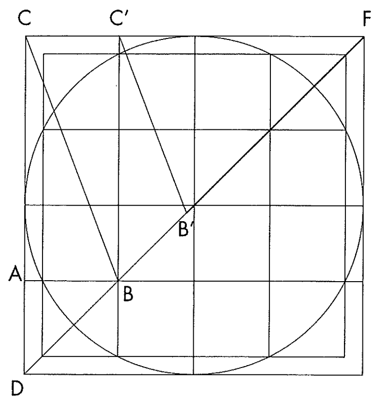


Figura 6

B'F es el resultado de multiplicar la diagonal DF por el factor $\Phi^2/5$.

$$B'F = DF \cdot \Phi^2/5$$

$$DF = \sqrt{\frac{2 \cdot 4}{\pi}} = 1{,}595769121\ldots \text{ (unidades de longitud)}$$

$$B'F = \frac{1{,}595769121\ldots\Phi^2}{5} = 0{,}8355555597\ldots \text{ (unidades de longitud)}$$

La determinación de *B'F* es muy sencilla sobre la construcción geométrica que venimos utilizando. En la figura 6 vemos que el segmento *C'B'* es paralelo al *CB*.

Si asimilamos el segmento *B'F* a la fracción

$$3{,}76/4{,}5 = 0{,}835555555555\ldots$$

podremos calcular gráficamente la longitud próxima a la unidad de longitud a la que llamaremos L[2]:

$$L[2] = B'F \cdot 4{,}5/3{,}76$$

$$L[2] = 1{,}00000000497\ldots \text{ (unidades de longitud)}$$

Los valores 4,5 y 3,76 vemos que ya aparecían en la expresión de $\pi[2]$.

También hay que hacer notar que

$$\left(\frac{3{,}76}{\sqrt{4{,}5}}\right)^2 = 3{,}1416888888\ldots$$

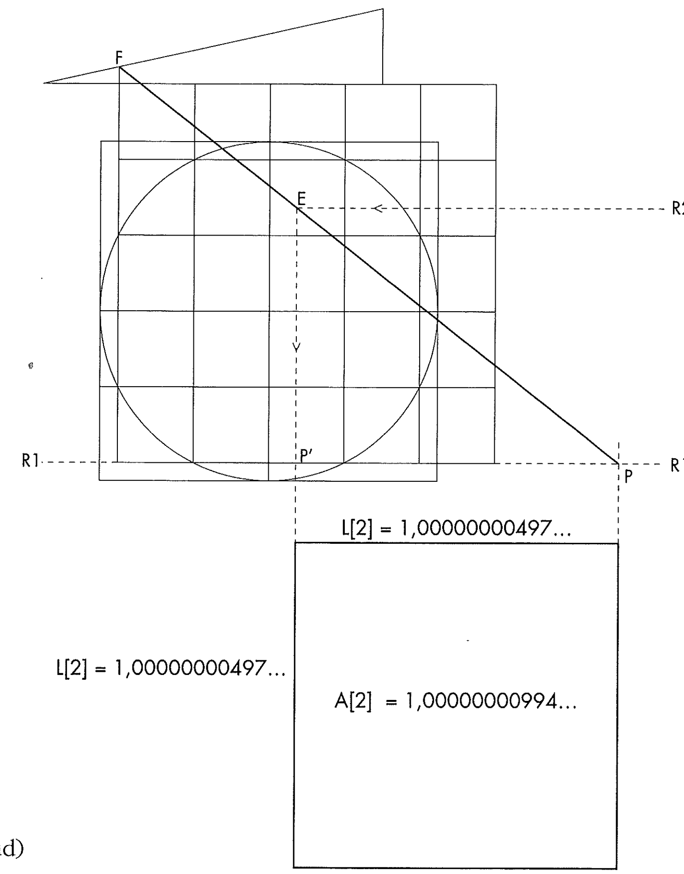
y además

$$0{,}8355555555\ldots \cdot 3{,}76 = 3{,}1416888888\ldots$$

José María Bosch
Arquitecto Técnico
Ayuntamiento de Moncada
Valencia

En la figura 7 podemos ver el resultado final, a falta de algunos pasos intermedios debido a la brevedad de este escrito, de la construcción de L[2] y de su cuadrado A[2].

$$A[2] = 1{,}00000000995\ldots \text{ (unidades de superficie)}$$



A[2] = Unidad de superfice aproximada

Figura 7

En la figura anterior la separación entre las horizontales R1 y R2 es la distancia 0,8355555597 (unidades de longitud).

Bibliografía

DAVIS, P. J. y R. HERSH (1988): *Experiencia matemática*, Labor y Ministerio de Educación y Ciencia, Barcelona.

GARDNER, M. (1972): *Nuevos pasatiempos matemáticos*, Alianza Editorial, Madrid.

GHYKA, M. G. (1.983): *Estética de las proporciones*, Poseidón, Barcelona.

GIEDION, S. (1981): *El presente eterno: los comienzos de la arquitectura*, Alianza Editorial, Madrid.