

Las posibilidades y peligros del pensamiento basado en imágenes en la resolución de problemas matemáticos*

Norma C. Presmeg

COMO PARTE de un movimiento mundial de mejora de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en los Estados Unidos y en otros países se ha animado a los profesores a usar actividades de resolución de problemas para enseñar matemáticas. A menudo, tales actividades se organizan de forma que los alumnos trabajan en pequeños grupos de dos a cuatro alumnos en los que se comunican sus estrategias y soluciones. Los cuatro temas comunes que aparecen en los «estándares» nacionales en USA (NCTM, 1989 y 1991) son la resolución de problemas, el razonamiento, la comunicación y las conexiones. En esta sesión también comenzaremos con una actividad de resolución de problemas en la que os animaré a trabajar conjuntamente y a comunicaros vuestras estrategias y soluciones. Después de hacer una puesta en común de todo el grupo y reflexionar sobre la actividad consideraremos juntos algunas definiciones de imaginiería¹, visualización y los constructos relacionados. Esto nos conducirá al núcleo de mi presentación que trata de la efectividad del uso de imaginiería en la resolución de problemas matemáticos y también algunas de las dificultades potenciales asociadas a este tipo de cognición. Finalmente, consideraremos algunas formas de actuar con las que los profesores pueden animar a los alumnos a usar, en la resolución de problemas matemáticos, su potencial y evitar los peligros.

Una actividad

Coger un trozo de papel y doblarlo verticalmente por la mitad. A continuación, plegar el vértice superior derecho (al que se llamará C) hasta la posición C' que está en la línea del pliegue, como se muestra en la figura 1. Si ahora se dobla el papel a lo largo de BC', parece que se obtiene un triángulo equilátero. ¿Es eso cierto?

El planteamiento de dos problemas permite iniciar la reflexión sobre algunas de las posibilidades y peligros del pensamiento basado en imágenes en matemáticas.

Se introducen las definiciones de imaginiería, de pensamiento basado en imágenes y visualización, y se presentan, a través de ejemplos, diferentes tipos de imaginiería visual. Se analiza la efectividad del pensamiento basado en imágenes en la resolución de problemas, justificando que la visualización no siempre es efectiva, sino que la utilización de imágenes visuales puede generar también dificultades. Se proponen estrategias de aula para fomentar y hacer más efectivo el pensamiento basado en imágenes en los alumnos.

* Conferencia leída en Tarragona el 29 de enero de 1998 con motivo del proyecto TIEM98 patrocinado por el Centre de Recerca Matemàtica del Institut d'Estudis Catalans.

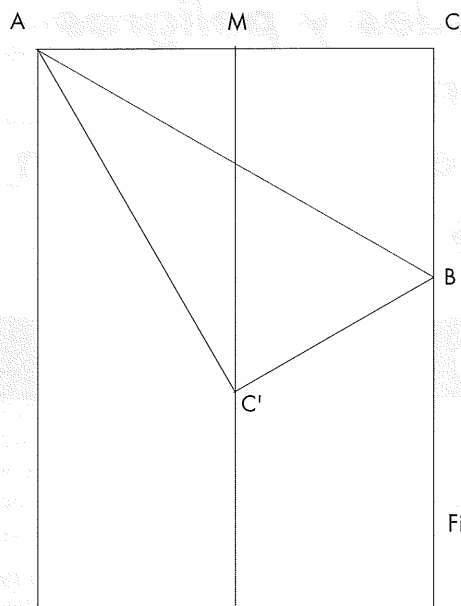


Figura 1

Emplear unos minutos reflexionando sobre la situación y comentándola hasta estar lo suficientemente seguros, de una forma o de otra, como para convencer a cualquiera de que es un triángulo equilátero o de lo contrario. ¿Puede probarse vuestra conclusión? ¿La demostración es lo que os ha convencido de ello? ¿La demostración, es formal o informal?

Estas consideraciones ilustran algunas de las posibilidades y peligros del uso del pensamiento basado en imágenes en matemáticas, pero antes de fijarnos en las definiciones y entrar con mayor profundidad en estas cuestiones vamos a extender esta actividad. Se puede dibujar un círculo, con bastante precisión, usando el dedo índice verticalmente para marcar el centro y un rotulador para dibujar la circunferencia y *girar el papel* mientras la mano está quieta. Se recorta el círculo y se busca y marca el centro plegándolo dos veces. Al plegar tres veces la circunferencia sobre su centro se obtiene un triángulo equilátero (podemos estar seguros de ello por la simetría rotacional de la figura). Por último, se pliega este triángulo equilátero en cuatro pequeños triángulos con lo que se forma un tetraedro.

La siguiente cuestión es: si extendemos las cuatro caras del tetraedro de forma que tengamos cuatro planos que se cortan entre sí, ¿en cuántas regiones dividen el espacio? En primer lugar se intentará imaginar la situación, luego, se trabajará con un modelo o de cualquier otra forma que permita llegar a una respuesta en cada grupo. Cuando la tengáis, emplearemos algo de tiempo comparando soluciones y métodos.

A partir de estas actividades y de otras, está claro no sólo que para algunas personas el pensamiento basado en imágenes es más fácil que para otras, sino también que algunos *prefieren* esa forma de pensar cuando resuelven pro-

*...está claro
no sólo que para
algunas personas
el pensamiento
basado
en imágenes
es más fácil
que para otras,
sino también que
algunos prefieren
esa forma
de pensar
cuando resuelven
problemas...*

blemas: en efecto, hay visualizadores para los que el uso de imaginiería visual es esencial en su tarea. He desarrollado un instrumento para medir «las preferencias para la visualización» que se ha usado hasta ahora en tres países. Lejos de demostrar que los alumnos rechazan el uso de métodos visuales en la resolución de problemas matemáticos, como sostenían Eisemberg y Dreyfus (1991), la gráfica siguiente, figura 2, muestra que, aunque hay diferencias entre los alumnos de los tres países, siempre hay visualizadores que prefieren el uso de imágenes visuales o diagramas en casi todos los problemas (este punto se discute con mayor profundidad en Presmeg y Bergsten, 1995 y Presmeg, 1997). Si es cierto que algunos alumnos *necesitan* trabajar visualmente, entonces está claro que este conocimiento es importante para el profesor. A través de los tiempos, los buenos profesores han adoptado su pedagogía a las necesidades de los alumnos como lo confirmó mi tesis doctoral (Presmeg, 1985) en la que algunos profesores que usaban pocos métodos de visualización cuando resolvían problemas, sin embargo empleaban pedagogía visual con sus alumnos.

Pero, ¿qué significan términos como pensamiento basado en imágenes, visualización, visualizadores? Vamos a considerar algunas definiciones.

Definiciones de imaginiería y constructos relacionados

El *pensamiento basado en imágenes* es un término deliberadamente amplio que incluye el uso de imágenes mentales no sólo de varias modalidades como visuales, auditivas, táctiles y cinestéticas sino también de varios tipos dentro de cada modalidad. Las imágenes visuales parecen ser las que con más frecuencia se usan en la resolución de problemas matemáticos. En mi investigación, consideré las *imágenes visuales* como constructos mentales que describen información visual o espacial (Presmeg, 1987 y 1997). Aunque la imaginiería puede estar implícita en el uso de diagramas, en

1 N. del T. En castellano la palabra «imaginiería», traducción literal de la inglesa *imagery*, tiene una acepción distinta al término utilizado en el texto. Aquí usamos el término imaginiería para designar «al conjunto de imágenes mentales, no sólo de varias modalidades como visuales, auditivas táctiles y cinestéticas, sino también de varios tipos dentro de cada modalidad».

DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS DE LAS PUNTUACIONES DE VISUALIZACIÓN MATEMÁTICAS

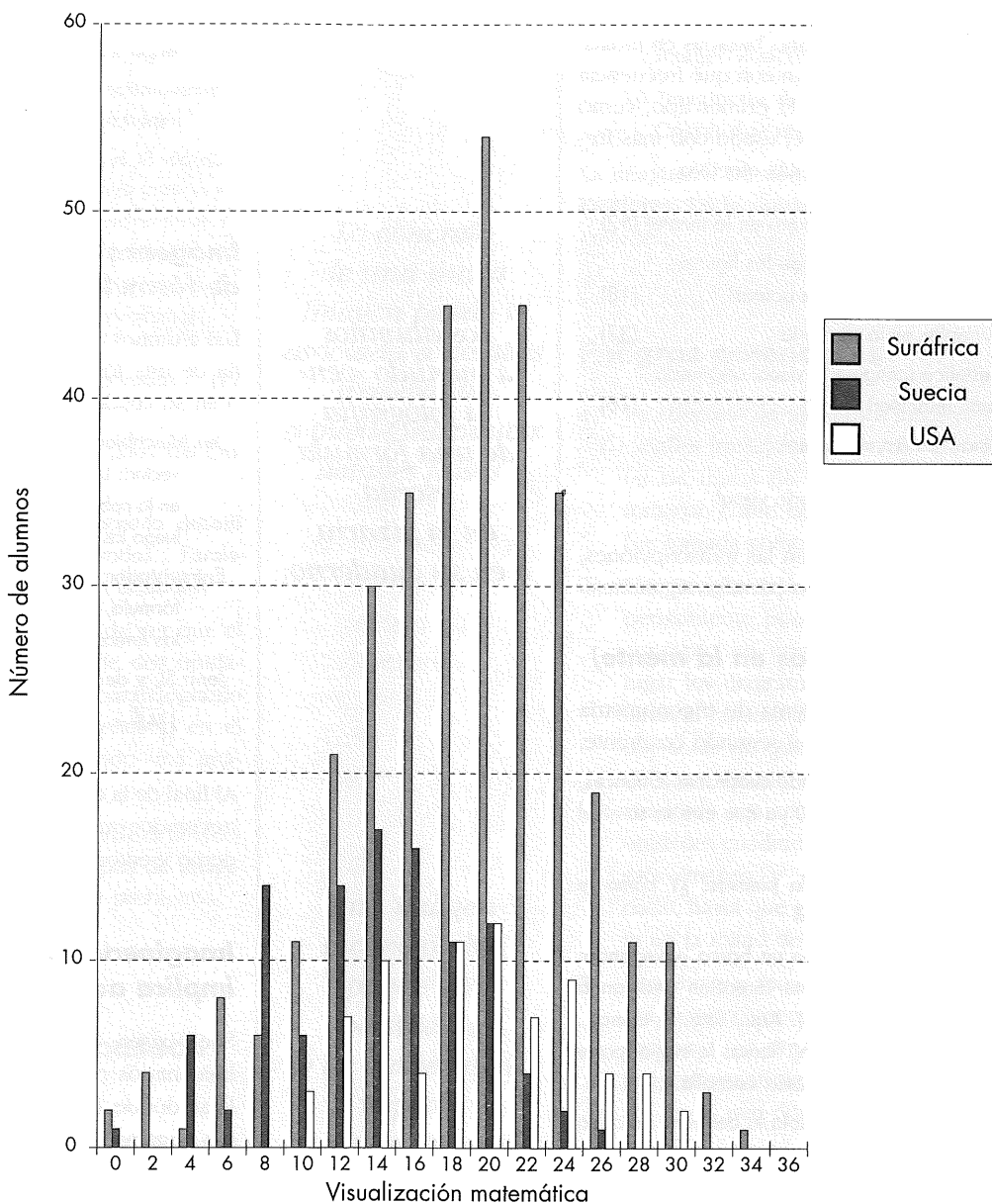


Figura 2. Preferencias de los alumnos por los métodos visuales en tres países

papel o pantallas de ordenador, usaré aquí el término de imaginiería en el sentido de constructos *mentales*.

La *visualización* la usaré para incluir el uso de diagramas de diversos tipos (incluyendo gráficos de ordenador) e imaginación visual. *Visualizadores* son las personas que cuando tienen que escoger prefieren el uso de métodos visuales.

Uso de imaginiería como una forma de resolver problemas

En el curso de la investigación de mi tesis doctoral, a lo largo de un periodo de ocho meses, entrevisté a 54 visualizadores en su último año de escolarización, dentro de un sistema de doce cursos. El análisis de las transcripciones de las 188 entrevistas grabadas indicó que usaron muchas clases diferentes de imaginiería cuando resolvían proble-

mas matemáticos. Algunos tipos fueron más efectivos que otros. Clasifiqué los tipos como se ve en la tabla 1: el número que va entre paréntesis indica cuántos de los 54 alumnos usó cada tipo de imaginiería en la resolución de problemas propuestos en las entrevistas basadas en tareas. Sin embargo, esos números no indican con qué frecuencia se usó cada tipo por cada alumno. El primer tipo, como un dibujo en la mente, era de lejos el usado con más frecuencia, aunque no siempre fue el más efectivo.

- concreta, imaginiería pictórica (dibujos en la mente) (52)
- imaginiería de pautas (descripción de las figuras de manera inconcreta en forma de pautas) (18)
- imágenes de fórmulas en la memoria (32)
- imaginiería cinestética (imaginiería visual originada en el movimiento muscular) (16)
- imaginación dinámica (en movimiento) (2)

Tabla 1. Tipos de imaginiería visual

Hay ejemplos de todos estos tipos en las transcripciones, algunos de los cuales aparece en los párrafos siguientes.

Imaginiería concreta (dibujos en la mente)

Alison estaba resolviendo un problema de trigonometría en el que se necesitaba trabajar en el segundo cuadrante.

Alison: Entonces sería el seno... segundo cuadrante. Entonces, 180, entonces lo tomo desde 180 ya que éste es su nivel de agua.

Entrevistador: ¡Oh, es así como tu lo piensas! ¿Y cómo te ayuda el nivel de agua a saberlo?

Alison: ¡Oh!, ¡hum!, tienes... Es como un barco navegando: realmente puede navegar en esta dirección (indicando arriba y abajo, es decir, el eje Y). Aquí, éste, es como... puede. Lo obtienes a partir de ahí. Tomas la mayor parte de... porque esto es tu 360. También está allá.

Entrevistador: ¿Se te ha ocurrido a ti sola lo del nivel de agua a alguien te lo ha sugerido?

Alison: No, se me acaba de ocurrir.

Imaginiería de pautas (relaciones puras representadas en un esquema espacio-visual)

Seguro de sí mismo y con comodidad, Crispin usó con frecuencia una imaginación de pautas, por ejemplo, al buscar las componentes x e y de un vector.

Crispin: El segmento es cuatro; cuatro veces coseno de 120. Tienes los cuatro cuadrantes luego el coseno es, estará en el segundo cuadrante luego es negativo. Es mejor que te muestre como lo veo. Seno, coseno, tangente: el seno es $+ + - -$, el coseno es $+ - - +$, la tangente es $+ - + -$.

Los alumnos a menudo «ven» la fotografía de una fórmula escrita en la pizarra o en su cuaderno.

Entrevistador: Entonces, ¿tu no necesitas un dibujo de los cuadrantes, sólo necesitas esta pauta?

Crispin: De nuevo es otra pauta. De hecho tengo unas cuantas.

Entrevistador (resumiendo más tarde): Lo importante era la pauta.

Crispin: Sí, la regularidad, es lo que te ayuda.

Imágenes memorísticas de fórmulas

Los alumnos a menudo «ven» la fotografía de una fórmula escrita en la pizarra o en su cuaderno.

Jeni (describiendo la fórmula del módulo de un vector): Lo sé, es como si tuviera su foto en la cabeza. Tenemos, como el vector y luego las dos líneas del valor absoluto.

Entrevistador: ¡Oh, ya veo!, es la foto de la fórmula, ¿no es así? ¿Ves el vector con las líneas del valor absoluto?

Jeni: Sí, y después la raíz cuadrada.

$$\left(\overline{AB} \right) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

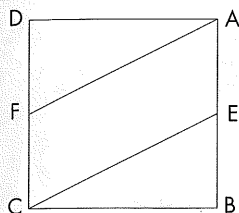
Al final de la entrevista, Jeni le dijo al entrevistador que había visualizado su cuaderno y entonces había visto la fórmula.

Imaginiería cinestética (que implica actividad muscular)

Sue «pasea» alrededor de cuadrantes imaginarios con sus dedos para identificar dónde la tangente de un ángulo era negativa. Alison «recorrió» cuatro o cinco vectores de un extremo al otro para ilustrar su concepto de desplazamiento. Muchos alumnos trazan con sus dedos la imagen de una parábola o de una hipérbola, sobre todo cuando no pueden recordar sus nombres.

Imaginiería dinámica (movimiento)

Paul estaba intentando resolver el siguiente problema. El diagrama estaba originalmente inclinado pero Paul lo redibujó y lo alineó con su página.



Dado el cuadrado ABCD, cuya área es 4 unidades cuadradas y los puntos medios de los lados AB y DC, E y F, encontrar el área de AECF (como paso previo habrá que probar que es un paralelogramo)

Paul: Cuatro unidades cuadradas... (12 segundos)

Entrevistador: Piensa en la mitad del cuadrado.

Paul: La mitad de mi cuadrado deberá tener 2 unidades cuadradas... Paralelogramo... ¡Tendrá dos unidades!

Paul explicó que después de ver que el rectángulo de arriba era de dos unidades cuadradas «deslizó» el paralelogramo entre las paralelas hasta ponerlo en el lugar del rectángulo, usando una imagen en movimiento.

En la siguiente sección se analiza la efectividad de los diferentes tipos de imaginación en la resolución de problemas.

Las posibilidades del pensamiento basado en imágenes

- Las imágenes intensas de cualquier tipo, tienen ventajas mnemotécnicas (varios alumnos se sirvieron de forma efectiva de imágenes intensas de triángulos especiales con ángulos de 45° y de 60°).
- Las imágenes concretas son efectivas en alternancia con modos no visuales tales como el análisis lógico o uso fácil no visual de fórmulas (muchos alumnos demostraron esta eficacia).
- La imaginación dinámica es potencialmente efectiva (la imagen dinámica de Paul ilustra este aspecto).

Lo concreto de una única imagen puede ir asociada a detalles irrelevantes o puede introducir detalles falsos.

Una imagen incontrolable puede ser persistente y de esa manera impedir la apertura de caminos más provechosos

- La imaginación que está al servicio de una función abstracta es potencialmente efectiva:
 - a) Haciendo concreto el referente (el nivel de agua de Alison es un ejemplo del uso metafórico de una imagen concreta con una finalidad práctica).
 - b) Imaginería de pautas (la imaginería de pautas de Crispin fue efectiva en varias ocasiones).

La imaginería no siempre fue una ayuda para estos visualizadores. En la siguiente sección se ilustran algunas dificultades.

Peligros potenciales

1. Lo concreto de una única imagen puede ir asociada a detalles irrelevantes o puede introducir detalles falsos (si las líneas de un diagrama parecían paralelas las tomaron como tales; una línea que parecía tangente fue tomada como si lo fuese de hecho).
2. Una imagen estándar de una figura puede inducir un pensamiento poco flexible que impida reconocer un concepto en un diagrama no estándar. (En primer lugar los diagramas estándar de los teoremas dificultaron el razonamiento de muchos alumnos. En segundo, antes de que Paul pudiera resolver el problema del área descrito más arriba, tenía una imagen de un cuadrado con una pequeña cruz en el interior: «cuatro unidades cuadradas». Tuvo dificultad para romper con esta imagen y reconciliarla con el paralelogramo dado, hasta que el entrevistador le sugirió que pensara en la mitad del cuadrado original).
3. Una imagen incontrolable puede ser persistente y de esa manera impedir la apertura de caminos más provechosos (en otro problema diferente, Paul tenía una imagen prototípica de una parábola simétrica respecto del eje Y , que dificultó la resolución).
4. Especialmente si es vaga, la imaginería que no está asociada a un proceso de pensamiento analítico riguroso puede ser de poca ayuda (esta dificultad surge repetidamente).

Todos estos peligros están relacionados de una u otra forma con la dificultad de generalizar una imagen que es, por su naturaleza, un caso concreto. Por tanto, podría decirse que los peligros son problemas de generalización. Las formas en las que estos problemas pueden aparecer quedan ilustrados en el uso metafórico del nivel de agua en el caso de Alison y en la imaginación de patrones de Crispin. Además de presentar los diagramas en orientaciones variadas, ¿qué podemos hacer los profesores para ayudar a los alumnos a hacer más efectivo el uso de su imaginería?

¿De qué forma pueden los profesores ayudar a los alumnos a usar las potencialidades y evitar los peligros?

A continuación se dan algunos aspectos que pueden facilitar el pensamiento visual (Presmeg, 1985).

- Un ambiente de clase controlado, pero que es relajado y sin apresuramientos.
- El uso de dibujos por el profesor: aparecen diagramas que no son indispensables.
- Uso de la imaginería del profesor: el profesor muestra mediante gestos o de otra forma que está usando una imagen.
- Uso de la imaginería de los alumnos: el profesor les pide a los alumnos que se hagan una imagen o que piensen en figuras en movimiento.
- Uso de un componente móvil: se usa el brazo, dedo o el cuerpo en movimiento de los alumnos; el uso de modelos manipulativos y concretos.
- Uso del color: por el profesor y por los alumnos.
- Enseñanza sin barreras metodológicas: el profesor
 - apela a la intuición de los alumnos;
 - usa métodos de búsqueda de patrones;
 - retrasa el uso del simbolismo;
 - usa deliberadamente conflictos cognitivos;
 - muestra y acepta métodos alternativos.

Uno de los resultados más sorprendentes e inesperados de este proyecto de investigación (descrito con más detalle en Presmeg, 1997) fue que para estos visualizadores la enseñanza de un grupo de profesores «visual» que aplicó estos consejos en sus clases no fue tan efectiva como la del grupo «medio» que empleó alguno de los consejos, pero que enfatizaba la generalización y la abstracción en su metodología. Los visualizadores normalmente tenían dificultad en las clases de los profesores «no visuales» incluso cuando estos profesores eran efectivos con otros alumnos. Por tanto, parece ser importante que los profesores animen al uso de métodos visuales, por ejemplo, por los medios descritos más arriba, pero teniendo cuidado de los peligros relacionados con

Los visualizadores normalmente tenían dificultad en las clases «no visuales» incluso cuando estos profesores eran efectivos con otros alumnos.

Norma C. Presmeg
The Florida State University

el uso de la imaginería en movimiento, diagramas en orientaciones y la imaginería de patrones que representan relaciones puras espacio-visuales.

Reconocimientos

Quiero agradecer el apoyo del CRM durante la preparación de esta presentación.

Referencias

- EINSENBERG, T. y T. DREYFUS (1991): «On the reluctance to visualize in mathematics», en W. ZIMMERMANN y S. CUNNINGHAM (eds.): *Visualization in teaching and learning mathematics*, 25-37. Mathematical Association of America. Washington, D.C.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1989): *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, NCTM, Reston, Virginia.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1991): *Professional standards for teaching mathematics*, NCTM, Reston, Virginia.
- PRESMEG, N. C. (1985): *The role of visually mediated processes in high school mathematics: A classroom investigation*, Tesis doctoral no publicada. University of Cambridge.
- PRESMEG, N. C. y C. BERGSTEN (1995): «Preference for visual methods: An international study», en L. MEIRA y D. CRRATHER (Eds.): *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Recife, Brasil, 22 a 27 de julio, Vol. 3, 58-65.
- PRESMEG, N. C. (1997): «Generalization using imagery in mathematics», en L. D. ENGLISH (Ed.): *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey, 299-312.

ENVÍO DE COLABORACIONES

Revista SUMA

ICE Universidad de Zaragoza

Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA